The Annals of Mathematical Statistics
1969, Vol. 40, No. 1, 284–289

VARIATION QUADRATIQUE DES MARTINGALES CONTINUES À DROITE[1]

PAR CATHERINE DOLÉANS

University of Illinois

Millar a montré dans [4] le résultat suivant: si (X_s) est une martingale continue, les sommes $\sum_{i=0}^{m-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ convergent en probabilité lorsque la subdivision $S = (t_0, \cdots, t_m)$ de $[0, t]$ devient arbitrairement fine; de plus, si pour un certain p réel, $1 < p < \infty$, les variables aléatoires X_s sont toutes L^p intégrables, la convergence a lieu dans $L^{p/2}$.

Nous généralisons ce résultat au cas des martingales continues à droite: ce résultat a été déjà obtenu par Meyer dans [3] pour $p = 2$ et pour une martingale quasi continue à gauche.

La terminologie sera celle de [2]. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé complet, $(\mathfrak{F}_s)_{s\varepsilon\mathbf{R}_+}$ est une famille de sous-tribus de $\mathfrak{F}$, croissante, continue à droite, et on suppose comme toujours que $\mathfrak{F}_0$ contient les ensembles négligeables de $\mathfrak{F}$. Dans toute la suite t désignera un nombre réel positif et $S = (t_0, \cdots, t_m)$ désignera une subdivision de l'intervalle $[0, t]$. On dira que les subdivisions $S_k = (t_0^k, \cdots, t_{m_k}^k)$ de $[0, t]$ deviennent arbitrairement fines si $\sup_{0 \leqq i < m_k} |t_{i+1}^k - t_i^k|$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

Nous généralisons tout d'abord le Théorème 2, page 92 de [3] au cas d'une martingale continue à droite:

THÉORÈME 1. *Soit $(X_s)_{s\varepsilon\mathbf{R}_+}$ une martingale continue à droite telle que l'on ait $\mathbf{E}[X_s^2] < +\infty$ pour tout s; les sommes*

$$R_S = \sum_{i=0}^{m-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

convergent dans L^1 lorsque les subdivisions $S = (t_0, \cdots, t_m)$ de $[0, t]$ deviennent arbitrairement fines.

DÉMONSTRATION. (1) On ne considère la martingale (X_s) que sur l'intervalle $[0, t]$, on peut donc appliquer les théorèmes T. 29 et T. 30 du Chapitre VIII de [2].[2] Ce qui donne pour (X_s) la décomposition:

$$X_s = Y_s + Z_s$$

où (Y_s) et (Z_s) sont deux martingales continues à droite vérifiant $\mathbf{E}[Y_t^2] < +\infty$, $\mathbf{E}[Z_t^2] < +\infty$; (Z_s) est une martingale quasi continue à gauche, $Y_0 = 0$ et (Y_s) est orthogonale à toute martingale de carré intégrable quasi continue à gauche.

Il existe de plus, d'après la démonstration de T. 30 Chapitre VIII [2], une

Received 31 May 1968.

[1] Cette recherche a été supportée par la "United States National Science Foundation".

[2] Tel qu'il figure dans [2] T.29 est inexact; voici une des rectifications proposées par Meyer: T.29 est vrai pour les temps d'arrêt prévisibles (c.a.d. limite d'une suite croissante de temps d'arrêt strictement inférieurs), on en déduit T.30 en utilisant le fait que le graphe d'un temps d'arrêt accessible est contenu dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles.

suite de temps d'arrêts accessibles $(T_p)_{p \geqq 1}$ telle que:

$$Y_s = \sum_{p=1}^{n} 1_{\{s \geqq T_p\}} \Delta X_{T_p} + X_s^{\,n}$$

où $(X_s^{\,n})$ est une martingale, et où l'on a

$$\mathbf{E}[(X_t^{\,n})^2] \to_{n\to\infty} 0,$$

$$\mathbf{E}[\sum_{p=1}^{\infty} (\Delta X_{T_p})^2 1_{\{t \geqq T_p\}}] \leqq \mathbf{E}[X_t^2].$$

(2) Nous savons d'après [3], p. 92, Théorème 2, que les sommes $\sum_{i=0}^{m-1} (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2$ ont une limite $[Z, Z]_t$ dans L^1 lorsque les subdivisions $S = (t_0, \cdots, t_m)$ de $[0, t]$ deviennent arbitrairement fines (la démonstration ne repose en effet que sur le fait que les temps de discontinuité de la martingale (Z_s) sont totalement inaccessibles.)

Nous allons montrer que les sommes $\sum_{i=0}^{m-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ convergent vers $[Z, Z]_t + \sum_{p=1}^{\infty} (\Delta X_{T_p})^2 I_{\{t \geqq T_p\}}$ dans L^1.

Soit ϵ un nombre réel positif et choisissons n tel que

$$\mathbf{E}[(X_t^{\,n})^2] < \epsilon \qquad \text{et}$$

$$\mathbf{E}[\sum_{p>n} |\Delta X_{T_p}|^2 1_{\{t \geqq T_p\}}] < \epsilon.$$

On a si l'on pose $Y_s^{\,n} = \sum_{p=1}^{n} 1_{\{s \geqq T_p\}} \Delta X_{T_p}$:

$$\mathbf{E}[|\sum (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 - [Z, Z]_t - \sum_{p=1}^{\infty} (\Delta X_{T_p})^2 1_{\{t \geqq T_p\}}|] \leqq A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbf{E}[|\sum (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2 - [Z, Z]_t|], \\ A_2 &= \mathbf{E}[|\sum (Y_{t_{i+1}}^n - Y_{t_i}^n)^2 - \sum_{p \leqq n} (\Delta X_{T_p})^2 1_{\{t \geqq T_p\}}|]. \\ A_3 &= \mathbf{E}[\sum (X_{t_{i+1}}^n - X_{t_i}^n)^2], \\ A_4 &= \mathbf{E}[\sum_{p>n} (\Delta X_{T_p})^2 1_{\{t \geqq T_p\}}], \\ A_5 &= 2\mathbf{E}[|\sum (Y_{t_{i+1}}^n - Y_{t_i}^n)(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})|], \\ A_6 &= 2\mathbf{E}[|\sum (X_{t_{i+1}}^n - X_{t_i}^n)(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i} + Y_{t_{i+1}}^n - Y_{t_i}^n)|]. \end{aligned}$$

Du choix de n il résulte que:

$$\begin{aligned} A_3 &= \mathbf{E}[\sum (X_{t_{i+1}}^n)^2 - (X_{t_i}^n)^2] = E[(X_t^{\,n})^2 - (X_0^{\,n})^2] \leqq \epsilon, \\ A_4 &\leqq \epsilon, \\ A_6 &\leqq 2(\mathbf{E}[\sum (X_{t_{i+1}}^n - X_{t_i}^n)^2]\mathbf{E}[\sum (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2 + (Y_{t_{i+1}}^n - Y_{t_i}^n)^2])^{\frac{1}{2}} \\ &\leqq 2\epsilon^{\frac{1}{2}}(\mathbf{E}[Z_t^2 - Z_0^2 + (Y_t^{\,n})^2])^{\frac{1}{2}} \leqq 2\epsilon^{\frac{1}{2}}(\mathbf{E}[Z_t^2 - Z_0^2 + X_t^2])^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(on utilise ici l'orthogonalité des martingales (Z_s) et (Y_s) et l'inégalité $E[\sum_{p=1}^{\infty} (\Delta X_{T_p})^2 1_{\{t \geqq T_p\}}] \leqq E[X_t^2]$.) Maintenant logsque les subdivisions S deviennent arbitrairement fines on a:

Le terme A_1 tend vers zéro d'après [3] p. 92, Théorème 2.

Dans le terme A_2, les sommes $\sum_{i=0}^{m-1} (Y_{t_{i+1}}^n - Y_{t_i}^n)^2$ sont uniformément intégrables quand S varie, voir [3], p. 92, T.2, et tendent simplement vers $\sum_{p \leqq n} (\Delta X_{T_p})^2 1_{\{t \geqq T_p\}}$; donc le terme A_2 tend vers zéro.

Dans le terme A_5, les quantités $\sum_{i=0}^{m-1} (Y^n_{t_{i+1}} - Y^n_{t_i})\ (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})$ sont uniformément intégrables quand S varie; elles sont la somme de n expressions de la forme

$$\Delta X_{T_p}(Z_{t_{i_p+1}} - Z_{t_{i_p}})$$

où $t_{i_p}(\omega)$ est le point de la subdivision S tel que

$$t_{i_p}(\omega) < T_p(\omega) \leqq t_{i_p+1}(\omega).$$

Comme (Z_s) est presque sûrement continue aux temps d'arrêt T_p, cette quantité tend vers zéro presque sûrement et l'on a

$$\mathbf{E}[|\textstyle\sum_{i=0}^{m-1} (Y^n_{t_{i+1}} - Y^n_{t_i})\ (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})|] \to 0.$$

c.q.f.d.

Nous démontrons maintenant le théorème général suivant:

THÉORÈME 2.[3] (1) *Si $(X_s)_{s\in\mathbf{R}_+}$ est une martingale continue à droite, les sommes*

$$R_S = \textstyle\sum_{i=0}^{m-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

convergent en probabilité vers une limite B_t lorsque les subdivisions S de $[0, t]$ deviennent arbitrairement fines.

(2) *S'il existe un nombre réel p, $1 < p < +\infty$, tel que $\mathbf{E}[|X_s|^p] < +\infty$ pour tout s, les sommes R_S convergent dans $L^{p/2}$ vers B_t; et il existe des constantes M_p et N_p ne dépendant que de p telles que*

$$M_p\mathbf{E}[B_t^{\ p/2}] \leqq \mathbf{E}[|X_t|^p] \leqq N_p\mathbf{E}[B_t^{\ p/2}].$$

Nous commençons par étudier dans le lemme suivant le cas des martingales uniformément bornées:

LEMME 1. *Si $(X_s)_{s\in\mathbf{R}_+}$ est une martingale continue à droite, uniformément bornée par une constante c, les sommes*

$$R_S = \textstyle\sum_{i=0}^{m-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

convergent dans tous les espaces L^p $(0 < p < +\infty)$, lorsque les subdivisions S de $[0, t]$ deviennent arbitrairement fines.

DÉMONSTRATION. Soit p un nombre réel, $1 < p < \infty$; il existe d'après le Théorème 9 de [1] une constante M_p telle que

$$M_p\mathbf{E}[(R_S)^{p/2}] \leqq \mathbf{E}[|X_t|^p].$$

Les variables aléatoires positives R_S convergent dans L^1 et donc en probabilité (Théorème 1), et sont bornées dans $L^{p/2}$; par suite elles convergent dans $L^{p'/2}$ pour tout réel p', $0 < p' < p$. c.q.f.d.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. (1) Soit $(X_s)_{s\in\mathbf{R}_+}$ une martingale continue à droite et considérons une suite S_k de subdivisions de $[0, t]$ devenant arbitrairement fines. Il nous faut montrer que les sommes R_{S_k} convergent en probabilité, ou encore que pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbf{P}(|R_{S_k} - R_{S_h}| > \lambda) \to_{k,\, h\to+\infty} 0.$$

[3] Ce passage du cas $p = 2$ au cas général a été aussi démontré indépendamment par Millar.

(Il est ensuite évident que la limite B_t ne dépend pas de la suite S_k choisie.)

Considérons pour tout entier n positif, la martingale uniformément bornée $X_{n,s} = \mathbf{E}[M_{n,t} \mid F_s]$, où

$$M_{n,t} = X_t \text{ si } |X_t| \leqq n$$
$$= 0 \quad \text{ailleurs},$$

(nous rappelons que t est fixé ici) et désignons par R_{n,S_k} les sommes relatives à la martingale $(X_{n,s})$ et à la subdivision S_k. Comme pour tout n, les sommes R_{n,S_k} convergent en probabilité lorsque k tend vers $+\infty$, il nous suffit de montrer que pour tout $\lambda > 0$, la quantité $\mathbf{P}(|R_{n,S_k} - R_{S_k}| > \lambda)$ tend vers zéro uniformément en k lorsque n tend vers l'infini.

Posons $A_i = X_{t_{i+1}^k} - X_{t_i^k}$, $A_{n,i} = X_{n,t_{i+1}^k} - X_{n,t_i^k}$;

Nous avons:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(|R_{n,S_k} - R_{S_k}| > \lambda) \\
&\quad = \mathbf{P}(|\textstyle\sum (A_i^2 - A_{n,i}^2)| > \lambda) \\
&\quad = \mathbf{P}(|\textstyle\sum (A_i - A_{n,i})^2 + \sum 2A_{n,i}(A_i - A_{n,i})| > \lambda) \\
&\quad \leqq \mathbf{P}(|\textstyle\sum (A_i - A_{n,i})^2| \geqq \lambda/2) + \mathbf{P}(|\sum A_{n,i}(A_i - A_{n,i})| \geqq \lambda/4) \\
&\quad \leqq \mathbf{P}(|\textstyle\sum (A_i - A_{n,i})^2| \geqq \lambda/2) + \mathbf{P}((\sum A_{n,i}^2)^{\frac{1}{2}}(\sum (A_i - A_{n,i})^2)^{\frac{1}{2}} \geqq \lambda/4) \\
&\quad \leqq \mathbf{P}(|\textstyle\sum (A_i - A_{n,i})^2| \geqq \lambda/2) + \mathbf{P}((\sum A_{n,i}^2)^{\frac{1}{2}} \geqq \mu) \\
&\qquad + \mathbf{P}((\textstyle\sum (A_i - A_{n,i})^2)^{\frac{1}{2}} \geqq \lambda/4\mu)
\end{aligned}$$

(μ est un réel positif que l'on déterminera plus tard)

$$\leqq M(\lambda/2)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{E}[|X_t - X_{n,t}|] + M\mu^{-1}\mathbf{E}[|X_t|] + 4M\mu\lambda^{-1}\mathbf{E}[|X_t - X_{n,t}|].$$

(il suffit d'appliquer [1] théorème 8; M est une constante). Cette dernière quantité est indépendante de la subdivision S_k et peut être rendue aussi petite que l'on veut en choisissant d'abord μ, puis n assez grand. c.q.f.d.

(2) Supposons maintenant que la martingale (X_s) satisfait à la condition $\mathbf{E}[|X_s|^p] < +\infty$ pour tout s, et pour un certain réel p, $1 < p < \infty$. Pour montrer que les sommes R_{S_k} convergent dans $L^{p/2}$ lorsque k tend vers l'infini, il nous suffit de montrer que les quantités, $\|R_{n,S_k} - R_{S_k}\|_{p/2}$ tendent vers 0 uniformément en k lorsque n tend vers l'infini:

Pour $p \geqq 2$, on a

$$\begin{aligned}
\|R_{n,S_k} - R_{S_k}\|_{p/2} &= \|\textstyle\sum (A_i^2 - A_{n,i}^2)\|_{p/2} \leqq \|\sum A_i(A_i - A_{n,i})\|_{p/2} \\
&\qquad + \|\textstyle\sum A_{n,i}(A_i - A_{n,i})\|_{p/2} \\
&\leqq \|(\textstyle\sum A_i^2)^{\frac{1}{2}}(\sum (A_i - A_{n,i})^2)^{\frac{1}{2}}\|_{p/2} \\
&\qquad + \|(\textstyle\sum (A_{n,i})^2)^{\frac{1}{2}}(\sum (A_i - A_{n,i})^2)^{\frac{1}{2}}\|_{p/2} \\
&\leqq (\mathbf{E}[(\textstyle\sum A_i^2)^{p/2}]\mathbf{E}[(\sum (A_i - A_{n,i}|^2)^{p/2})^{1/p}
\end{aligned}$$

$$+ (\mathbf{E}[(\sum A_{n,i}^2)^{p/2}]\mathbf{E}[(\sum (A_i - A_{n,i})^2)^{p/2}])^{1/p}$$
$$\leqq 2M_p^{-(2/p)}(\mathbf{E}[|X_t|^p]\mathbf{E}[|X_t - X_{n,t}|^p])^{1/p}$$

(utiliser le Théorème 9 de [1]).

Cette dernière quantité est indépendante de k, et tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Pour $1 < p < 2$, il suffit d'utiliser l'inégalité

$$\mathbf{E}[|R_{n,S_k} - R_{S_k}|^{p/2}] \leqq \mathbf{E}[| \sum A_i(A_i - A_{n,i})|^{p/2}] + \mathbf{E}[| \sum A_{n,i}(A_i - A_{n,i})|^{p/2}]$$

pour obtenir un résultat analogue. c.q.f.d

L'inégalité

$$M_p\mathbf{E}[B_t^{p/2}] \leqq \mathbf{E}[|X_t|^p] \leqq N_p\mathbf{E}[B_t^{p/2}]$$

se déduit alors immédiatement de l'inégalité

$$M_p\mathbf{E}[(R_S)^{p/2}] \leqq \mathbf{E}[|X_t|^p] \leqq N_p\mathbf{E}[(R_S)^{p/2}].$$

Nous allons montrer que l'on peut toujours choisir une version du processus stochastique (B_t) qui soit un processus croissant au sens de [3]. (Si l'on sait que les quantités $E[X_s^2]$ sont toutes finies, ce résultat est une conséquence du Théorème 1.).

Théorème 3. *Il existe une version* (C_t) *du processus stochastique* (B_t) *telle que*

(i) $t \longrightarrow C_t(\omega)$ *est une fonction croissante et continue à droite pour tout* ω.

(ii) $C_0 = 0$.

(iii) C_t *est* $\mathfrak{F}_t$*-mesurable.*

(C_t) *est alors un processus croissant au sens de* [3].

Démonstration. (1) Soit s un réel positif et considérons la martingale $Y_u = X_{s+u} - X_s$ relative à la famille de tribus $\mathcal{G}_u = \mathfrak{F}_{u+s}$. Si $s < t$, $B_t - B_s$ est alors la limite en probabilité des sommes $R_S = \sum_{i=0}^{m-1} (X_{a_{i+1}} - X_{a_i})^2$, où les subdivisions $S = (a_0, \cdots, a_n)$ de $[s, t]$ deviennent arbitrairement fines, et le théorème 8 de [1] nous donne

$$\lambda\mathbf{P}(|R_S| > \lambda) \leqq M\mathbf{E}[|X_t - X_s|], \forall\lambda.$$

c'est à dire en passant à la limite

$$\lambda\mathbf{P}(|B_t - B_s| > \lambda) \leqq M\mathbf{E}[|X_t - X_s|], \forall\lambda.$$

Lorsque $t \searrow s$, les variables aléatoires X_t sont uniformément intégrables et tendent presque sûrement vers X_s. On a donc $\mathbf{E}[|X_t - X_s|] \rightarrow_{t\searrow s} 0$, et B_t tend vers B_s en probabilité lorsque t décroit vers s.

(2) Considérons le processus $(B_r)_{r\varepsilon\mathbf{Q}_+}$ defini sur l'ensemble $\mathbf{Q}_+$ des rationnels positifs. Si r_1 et r_2 sont deux rationnels tels que $r_1 < r_2$, on a $B_{r_1} \leqq B_{r_2}$ sauf sur un ensemble de mesure nulle $H_{r_1r_2}$. On peut donc toujours, quitte à poser $B_r = 0$ sur $H = \bigcup_{r_1<r_2, r_1, r_2\varepsilon\mathbf{Q}_+} H_{r_1r_2}$, supposer que pour tout ω, l'application $r \longrightarrow B_r(\omega)$ est croissante sur les rationnels.

Posons maintenant pour tout $s \varepsilon \mathbf{R}_+$, $C_s = \lim_{r\searrow s} B_r$, r rationnel. Le processus

(C_s) vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii). D'autre part pour tout $s \varepsilon \mathbf{R}_+$ B_s est la limite en probabilité des B_r, lorsque r est rationnel et décroît vers s.

Et donc

$$B_s = C_s \quad \text{p.s.}$$

c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Burkholder, D. L. (1966). Martingale transforms, *Ann. Math. Statist.* **37** 1494–1504.

[2] Meyer, P. A. (1966). *Probabilités et Potentiel.* Hermann, Paris.

[3] Meyer, P. A. (1966/67). Intégrales Stochastiques I, *Séminaire de probabilités I.* Université de Strasbourg. (Lecture Notes in Mathematics **39**. Springer-Verlag, Heidelberg 1967).

[4] Millar, P. W. (1967). Martingale integrals. Thesis, Univ. of Illinois.