ÜBER EIN SYSTEM LINEARER PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

I. HORN
in REHBACH.

In den folgenden Blättern wird die Aufgabe in Angriff genommen, die Untersuchungen des Herrn Fuchs über das Verhalten der Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung der singulären Stellen (Crelles Journal, Bd. **66**) auf Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen auszudehnen. Da die Arbeit Riemann's über die durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen (Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften 1857) das Vorbild für die allgemeine Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen abgegeben hat, so liegt die Frage nahe, ob eine Function zweier Veränderlichen x, y durch ihre Unstetigkeiten und ihre Verzweigungsweise in ähnlicher Weise definiert werden kann, wie es Riemann in der angeführten Abhandlung für eine Function einer Veränderlichen gethan hat. Diesen Weg hat Herr Picard (Annales de l'École Normale 1881) eingeschlagen, indem er eine Function z von x und y durch folgende Bedingungen definierte: Die unendlich vieldeutige Function z besitzt drei linear unabhängige Zweige z_0, z_1, z_2, durch welche sich jeder Zweig als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten

$$z = c_0 z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2$$

ausdrücken lässt; sie verhält sich nur an denjenigen Stellen (x, y) singulär, welche einer der Gleichungen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad y = 1, \quad x = \infty, \quad y = \infty, \quad x = y$$

genügen. In der Umgebung der Stellen

$$1)\ x = 0,\quad y = b;\qquad 2)\ x = a,\quad y = 0;$$
$$3)\ x = 1,\quad y = b;\qquad 4)\ x = a,\quad y = 1;$$
$$5)\ x = \infty,\quad y = b;\qquad 6)\ x = a,\quad y = \infty;$$
$$7)\ x = a,\quad y = a,$$

wo a und b beliebige Grössen mit Ausschluss von $0, 1, \infty$ sind, sind je drei linear unabhängige Zweige von folgender Gestalt vorhanden

$$1)\ \zeta_0',\ \zeta_1',\ x^{1+\beta'-\gamma}\zeta_2',$$
$$2)\ {}'\zeta_0,\ {}'\zeta_1,\ y^{1+\beta-\gamma}\,{}'\zeta_2,$$
$$3)\ \zeta_0'',\ \zeta_1'',\ (x-1)^{\gamma-\alpha-\beta}\zeta_2'',$$
$$4)\ {}''\zeta_0,\ {}''\zeta_1,\ (y-1)^{\gamma-\alpha-\beta'}\,{}''\zeta_2,$$
$$5)\ \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\zeta_0''',\ \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}\zeta_1''',\ \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}\zeta_2''',$$
$$6)\ \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}{}'''\zeta_0,\ \left(\frac{1}{y}\right)^{\beta'}{}'''\zeta_1,\ \left(\frac{1}{y}\right)^{\beta'}{}'''\zeta_2,$$
$$7)\ \zeta_0,\ \zeta_1,\ (x-y)^{1-\beta-\beta'}\zeta_2;$$

hierbei sind sämtliche ζ Potenzreihen und zwar bez. der folgenden Variablen

$$1)\ x,\ y-b;\qquad 2)\ x-a,\ y;$$
$$3)\ x-1,\ y-b;\qquad 4)\ x-a,\ y-1;$$
$$5)\ \frac{1}{x},\ y-b;\qquad 6)\ x-a,\ \frac{1}{y},$$
$$7)\ x-a,\ y-b.$$

Herr Picard zeigt, dass die so definierte Function, welche in eine der von Herrn Pochhammer (Crelles Journal, Bd. **71** u. **73**) behandelten hypergeometrischen Functionen übergeht, wenn man eine der beiden Variablen als constant annimmt, das allgemeine Integral eines gewissen Systems linearer partieller Differentialgleichungen bildet. Zu derselben

Function gelangte zuerst Herr APPELL (Comptes Rendus, 1[er] semestre 1880 und Liouvilles Journal 1882) durch Verallgemeinerung der GAUSS'schen hypergeometrischen Reihe; er zeigt, dass die Reihe

$$F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n \qquad {\scriptstyle (m, n = 0 \ldots \infty)}$$

— es ist $(a, m) = a(a+1) \ldots (a+m-1)$; $(a, 0) = 1$ — welche für $|x| < 1$, $|y| < 1$ convergiert, den Differentialgleichungen

$$x(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{\partial z}{\partial x} - \beta y \frac{\partial z}{\partial y} - \alpha\beta z = 0,$$

$$x(1-y)\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + y(1-y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + [\gamma - (\alpha + \beta' + 1)y]\frac{\partial z}{\partial y} - \beta' x \frac{\partial z}{\partial x} - \alpha\beta' z = 0$$

genügt, in welche auch die von Herrn PICARD abgeleiteten Differentialgleichungen übergeführt werden können. Aus diesen beiden Differentialgleichungen wird eine dritte

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \beta' \frac{\partial z}{\partial x} - \beta \frac{\partial z}{\partial y}$$

abgeleitet, mit deren Hilfe man das System so umformt, dass man drei Differentialgleichungen

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

erhält, deren Coefficienten a, b, c rationale Functionen von x, y von solcher Beschaffenheit sind, dass das System der drei Differentialgleichungen drei linear unabhängige Integrale besitzt. Das Verhalten der Integrale des Differentialgleichungensystems der Reihe $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ ist bekannt, da dasselbe durch jene Function des Herrn PICARD integriert wird, die gerade durch ihr analytisches Verhalten definiert worden war. Will man aber auf dem von Herrn APPELL eingeschlagenen Weg weiter gehn, so hat man das Verhalten der aus der Potenzreihe $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$

entspringenden analytischen Function, die wir eine hypergeometrische Function nennen, aus dem obigen System linearer partieller Differentialgleichungen abzuleiten. Es bietet sich somit die Aufgabe dar, ein System linearer partieller Differentialgleichungen von der Form (A) mit drei linear unabhängigen Integralen in ähnlicher Weise zu integrieren, wie Herr Fuchs die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen behandelt hat. Da das System der Differentialgleichungen der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ einer besonderen Klasse von Differentialgleichungensystemen (A) angehört, nämlich derjenigen Klasse, welche den von Herrn Fuchs in §§ 4—6 seiner Arbeit (Bd. **66**) behandelten gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit lauter regulären Integralen analog ist, so wird im Folgenden auch nur diese Klasse von Systemen (A), die später genauer characterisiert werden wird, eine eingehendere Behandlung finden. Herr Fuchs untersucht in § 3 seiner Abhandlung (Bd. **66**) das Verhalten der Integrale einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung bei einem Umlaufe der unabhängigen Variablen x um einen singulären Punkt; um bei der Integration des Differentialgleichungensystems (A) ähnlich verfahren zu können, dehnen wir im ersten Abschnitt den Begriff des Umlaufs um einen singulären Punkt auf mehrdeutige Functionen zweier Veränderlichen aus. Da unser Differentialgleichungensystem auf ein System totaler linearer Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann — setzt man nämlich

$$z_0 = z, \qquad z_1 = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad z_2 = \frac{\partial z}{\partial y},$$

so geht das System (A) über in

$$\begin{aligned} dz_0 &= z_1 dx + z_2 dy, \\ dz_1 &= (a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2)dx + (b_0 z_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2)dy, \\ dz_2 &= (b_0 z_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2)dx + (c_0 z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2)dy \end{aligned}$$

— so beschäftigen wir uns im zweiten Abschnitt mit den Systemen totaler linearer Differentialgleichungen

$$\text{(B)} \qquad dz_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} z_\beta \, . \, dx + \sum_\beta b_{\alpha\beta} z_\beta \, . \, dy, \qquad {\scriptstyle (\alpha, \beta = 1, \dots, m)}$$

worin $a_{\alpha\beta}$ und $b_{\alpha\beta}$ rationale Functionen von x, y sind, welche die Integrabilitätsbedingungen erfüllen. Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns im dritten Abschnitt zu dem System (A), wobei wir vorzugsweise einen Fall behandeln, in welchem sich sämtliche Integrale regulär verhalten. Als Anwendung geben wir die Integration des Differentialgleichungensystemes der Reihe $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$, wodurch wir auf einem andern Wege zu den anfangs gegebenen Resultaten des Herrn PICARD gelangen. Beiläufig sei erwähnt, dass die *fonctions hyperfuchsiennes* des Herrn PICARD (Acta Math., Bd. **1**, **2**, **5**) zu dem Differentialgleichungensystem (A) in ähnlicher Beziehung stehen, wie die Functionen einer Variablen mit eindeutigen Transformationen in sich zu einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung — ein Umstand, der ebenfalls die Integration des Systems (A) nahe legt. Der vierte Abschnitt endlich enthält einige Andeutungen über die Verallgemeinerung der in den drei ersten Abschnitten gegebenen Entwicklungen.

I.

Die Art der Fortsetzung einer mehrdeutigen Function zweier Veränderlichen $F(x, y)$ von einer Stelle $(x = a, y = b)$ zur Stelle $(x = a', y = b')$ kann durch eine einfach unendliche continuierliche Reihe von Stellen (x, y), welche die Punkte (a, b) und (a', b') verbindet — durch einen die Punkte (a, b) und (a', b') verbindenden Weg — bestimmt werden. Wir untersuchen das Verhalten der mehrdeutigen Function $F(x, y)$ auf solchen geschlossenen Wegen, die in der Umgebung einer singulären Stelle verlaufen. Unsere Function möge sich singulär verhalten an allen Nullstellen der irreductiblen ganzen Function $\phi(x, y)$; das irreductible — und daher monogene — algebraische Gebilde

$$\phi(x, y) = 0$$

werde als singuläres Gebilde oder als singuläre Curve der Function $F(x,y)$ bezeichnet. Wenn nicht sämtliche in der Umgebung der Stellen der singulären Curve verlaufenden geschlossenen Wege jeden Functionswert in sich selbst zurückführen, wird die singuläre Curve eine Verzweigungscurve genannt. Die Functionen, welche uns künftig beschäftigen werden, haben eine endliche Anzahl algebraischer Curven zu Verzweigungscurven.

Wir suchen nun diejenigen in der Umgebung der Stelle $(x=a, y=b)$ der Verzweigungscurve $\psi(x, y) = 0$ verlaufenden geschlossenen Wege, welche jeden Wert der Function $F(x, y)$ in sich selbst überführen. Es sei

$$\psi(x, y) = A(x-a) + B(y-b) + \ldots;$$

A und B sollen nicht beide verschwinden, so dass (a, b) ein einfacher Punkt der Curve $\psi(x, y) = 0$ ist. Durch die Substitution

$$u = \varphi(x, y),$$
$$v = \psi(x, y),$$

wobei $\varphi(x, y)$ eine derartig gewählte Potenzreihe von $x-a, y-b$ ist, dass die Determinante

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

für $x=a, y=b$ nicht verschwindet, wird

$$F(x, y) = G(u, v),$$

wo $G(u, v)$ eine Function ist, welche sich in der Umgebung der Stelle $(u=0, v=0)$ nur an denjenigen Stellen, für welche $v=0$ ist, singulär verhält. Die obigen Substitutionsgleichungen ergeben

$$x-a = f(u, v),$$
$$y-b = g(u, v),$$

wo $f(u, v), g(u, v)$ an der Stelle $(u=0, v=0)$ verschwindende Potenzreihen von u, v sind. Ist (x', y') eine Stelle in hinreichender Nähe von (a, b) und entspricht dem Wertsystem $(x=x', y=y')$ das Wertsystem $(u=u', v=v')$, so lassen sich $x-x', y-y'$ als Potenzreihen von $u-u'$, $v-v'$ darstellen. Da, wenn (x', y') als reguläre Stelle der Function $F(x, y)$ vorausgesetzt wird, jeder Zweig dieser Function in der Umgebung von (x', y') in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, so sind auch sämtliche Zweige der Function $G(u, v)$ in Potenzreihen von $u-u', v-v'$ entwickelbar. Da die Stelle (x', y') nur der Beschränkung unterliegt, dass sie nicht der Gleichung $\phi(x, y) = 0$ genügen darf, so verhält sich $G(u, v)$ regulär an allen einer gewissen Umgebung von $(u = 0, v = 0)$ angehörigen Stellen, für welche nicht $v = 0$ ist. Für Functionen einer einzigen Veränderlichen gilt nun der Satz, dass ein geschlossener Weg, der keine singuläre Stelle umschliesst, jeden Functionswert in sich zurückführt. In ähnlicher Weise beweist man für Functionen mehrerer Variablen den folgenden Satz: Ein geschlossener Weg im Gebiete der beiden Variablen x, y führt jeden Zweig der Function $F(x, y)$ in sich selbst zurück, wenn sich die Function regulär verhält an allen Stellen (x', y') von der Beschaffenheit, dass x' bez. y' von dem von der Variablen x bez. y in ihrer Ebene durchlaufenen Wege umschlossen wird. Da sich nun $G(u, v)$ in der Nähe von $(u = 0, v = 0)$ nur an den Stellen mit verschwindendem v singulär verhält, so erleidet die Function auf allen in einer gewissen Umgebung von $(u = 0, v = 0)$ verlaufenden geschlossenen Wegen von der Beschaffenheit, dass der von v beschriebene Weg den Nullpunkt der v-Ebene nicht einschliesst, keine Änderung. Überträgt man dies auf die Function $F(x, y)$, so erhält man den folgenden Satz:

> »Die mehrdeutige analytische Function $F(x, y)$ besitze die singuläre Curve $\phi(x, y) = 0$, von welcher $(x = a, y = b)$ eine einfache Stelle sei. Setzt man irgend eines der Functionselemente, welche an der in einer gewissen Umgebung von (a, b) liegenden Stelle (ξ, η) vorhanden sind, fort auf einem Wege, der ebenfalls in jener Umgebung verläuft und wieder in (ξ, η) endigt, so erhält man hier wieder das ursprüngliche Functionselement, vorausgesetzt, dass der durchlaufene geschlossene Weg so beschaffen ist, dass der Weg, den infolge dessen die complexe Grösse $\phi(x, y)$ in ihrer Ebene zurücklegt, den Nullpunkt nicht einschliesst»,

oder mit anderen Worten, dass sich das Argument der complexen Grösse nicht ändert — unter dem Argument der complexen Zahl $a = |a| . e^{i\varphi}$ ist die Grösse φ verstanden. Unter Anwendung der Bezeichung:

»Ein geschlossener Weg umwindet die Curve $\phi(x, y) = 0$ λ-fach in positivem Sinne, wenn beim Durchlaufen dieses Weges das Argument der complexen Grösse $\phi(x, y)$ um $\lambda . 2\pi i$ wächst»

nimmt der obige Satz einen ähnlichen Ausdruck an, wie der entsprechende Satz für Functionen einer einzigen Veränderlichen:

»Durch einen in der Umgebung einer einfachen Stelle (a, b) der singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ verlaufenden geschlossenen Weg, der die Curve $\psi(x, y) = 0$ nicht umwindet, wird jedes Element der mehrdeutigen analytischen Function in sich selbst zurückgeführt.»

Zwei in der Umgebung von (a, b) verlaufende, von einer Stelle ausgehende und wieder dahin zurückführende Wege, welche die singuläre Curve $\psi(x, y) = 0$ gleich viel mal umwinden, führen ein Element der mehrdeutigen Function möglicherweise in ein anderes, aber jedenfalls in dasselbe andere Element über; wir nennen zwei solche Wege äquivalent. Ein Weg, welcher die Curve $\psi(x, y) = 0$ in der Nähe der Stelle (a, b) umwindet, lässt sich leicht angeben. Ist

$$\psi(x, y) = A(x - a) + B(y - b) + \ldots$$

und verschwinden A und B nicht gleichzeitig, so setzt man

$$x = a + \alpha t, \qquad y = b + \beta t,$$

wo α, β nicht die Gleichung

$$A\alpha + B\beta = 0$$

befriedigen. Dadurch wird

$$\psi(x, y) = ct + c't^2 + \ldots;$$

diese Potenzreihe besitzt innerhalb einer gewissen Umgebung von $t = 0$ ausser $t = 0$ keine Nullstellen. Vollzieht die Variable t im Innern jener Umgebung irgend einen Umlauf um die Stelle $t = 0$, so umwindet der diesem Wege der Variablen t in Folge der Gleichungen $x = a + \alpha t$, $y = b + \beta t$ entsprechende Weg der Stelle (x, y) die Curve $\psi(x, y) = 0$ und zwar einfach, weil $c = A\alpha + B\beta$ von Null verschieden ist.

Unter (a, b) sei nun ein μ-facher Punkt der Curve $\psi(x, y) = 0$ verstanden, so dass die Entwicklung von $\psi(x, y)$ mit Gliedern μ^{ter} Dimension in $x - a$, $y - b$ beginnt:

$$\psi(x, y) = (x - a, y - b)_\mu + \ldots.$$

Durch die Substitution

$$u = \varphi(x, y),$$
$$v = \psi(x, y)$$

geht $F(x, y)$ in eine Function $G(u, v)$ über, welche ausser der singulären Linie $v = 0$ in der Umgebung der Stelle $(u = 0, v = 0)$ noch andere Singularitäten besitzt, da sich jetzt $x - a, y - b$ nicht mehr als Potenzreihen von u, v darstellen lassen. Die Function $G(u, v)$ ist aber, wenn man von der singulären Linie $v = 0$ absieht, in der Nähe von $(u = 0, v = 0)$ ebenso verzweigt, wie x, y als Functionen von u, v. Ein in der Nähe von $(u = 0, v = 0)$ im Gebiete der Variablen (u, v) beschriebener geschlossener Weg, der x und y zu ihren Anfangswerten zurückführt, führt auch wieder zu dem ursprünglichen Werte der Function $G(u, v)$, falls die Variable v den Nullpunkt ihrer Ebene nicht umwindet.

Der oben ausgesprochene Satz gilt auch für den Fall, dass (a, b) ein mehrfacher Punkt der Curve $\phi(x, y) = 0$ ist.

Setzt man aber

$$x = a + \alpha t, \qquad y = b + \beta t,$$

wobei $(\alpha, \beta)_\mu$ nicht gleich 0 ist, so stellt der Weg, welchen die Stelle (x, y) beschreibt, wenn die Variable t den Punkt $t = 0$ umwindet, nicht wie früher eine einfache, sondern eine μ-fache Umwindung der singulären Curve dar. Dieselben Sätze gelten auch in der Umgebung der Stellen einer unendlich fernen Linie $x = \infty$ oder $y = \infty$, da sich jede solche Stelle in eine im Endlichen gelegene Stelle transformieren lässt.

Unter der Umgebung einer Stelle (a, b) der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ wird im Folgenden der Giltigkeitsbereich des oben abgeleiteten Satzes verstanden. Ist nun (a', b') ein anderer Punkt derselben singulären Curve, welcher in der Umgebung von (a, b) liegt, so ist ein von einer in der Umgebung von (a, b) gelegenen Stelle (ξ, η) ausgehender Weg, der die singuläre Curve umwindet, einem folgendermassen gebildeten Wege äquivalent: man geht von (ξ, η) im Innern der Umgebungen der Stellen (a, b) und (a', b') nach einer in der Umgebung von (a', b') gelegenen Stelle (ξ', η'), vollzieht innerhalb der Umgebung von (a', b') einen Umlauf um die singuläre Curve und kehrt nun von (ξ', η') nach (ξ, η) auf demselben Wege zurück, welcher vorher in umgekehrter Richtung durchlaufen wurde. Denn jeder der beiden Wege ist dem folgenden Wege äquivalent: man geht von (ξ, η) auf dem nach (ξ', η') führenden Wege nur bis zu einer Stelle (ξ^0, η^0), die in der gemeinschaftlichen Umgebung von (a, b) und (a', b') liegt, beschreibt sodann in dieser gemeinschaftlichen Umgebung einen geschlossenen Weg, der die singuläre Curve umwindet, und durchläuft nun den Weg, der vorher von (ξ, η) nach (ξ^0, η^0) geführt hatte, in umgekehrter Richtung.

Ist (a, b) eine Stelle der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$, welche zugleich der singulären Curve $\phi'(x, y) = 0$ angehört, so erkennt man durch Anwendung der Substitution

$$u = \phi(x, y), \qquad v = \phi'(x, y),$$

dass zwei in einer gewissen Umgebung von (a, b) verlaufende geschlossene Wege, welche die singuläre Curve $\phi(x, y) = 0$ gleich oft, die singuläre Curve $\phi'(x, y) = 0$ gar nicht umwinden, einander äquivalent sind. Der vorhin ausgesprochene Satz gilt mithin auch dann noch, wenn von den Stellen (a, b) und (a', b') die eine oder beide ausser $\phi(x, y) = 0$ noch einer anderen singulären Curve angehören, wenn nur die die Curve $\phi(x, y) = 0$ umwindenden Wege nicht zugleich noch eine andere singuläre Curve umwinden.

Da die ganze Function $\phi(x, y)$ als irreductibel vorausgesetzt ist, so ist das algebraische Gebilde $\phi(x, y) = 0$ monogen im Sinne des Herrn Weierstrass; mann kann daher irgend zwei Stellen (a, b) und (a', b') der Curve $\phi(x, y) = 0$ durch eine continuierliche Reihe von Stellen (x, y) dieser Curve verbinden; auf diesem Wege kann man eine endliche Anzahl von Stellen

$$(a, b), (x', y'), \ldots, (x^{(\rho)}, y^{(\rho)}), (a', b')$$

so annehmen, dass immer die folgende in der Umgebung der vorhergehenden liegt — das Wort »Umgebung» in dem oben gefassten Sinne verstanden. Durch Wiederholung der auf S. 121 angestellten Betrachtung (nach dem Vorhergehenden darf der die Stellen (a, b) und (a', b') verbindende, aus Stellen der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ gebildete Weg auch noch andere singuläre Curven durchschneiden) ergiebt sich der folgende Satz:

Ist (a, b) eine beliebige Stelle der *irreductiblen* (monogenen) singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ einer mehrdeutigen analytischen Function von x, y, so kann ein die singuläre Curve $\phi(x, y) = 0$ umwindender Weg, der von einer Stelle (ξ, η) in die Umgebung von (a, b) ausgeht und ganz in dieser Umgebung verläuft, ersetzt werden durch einen anderen Weg, den man auf folgende Weise erhält: wenn (a', b') irgend eine andere Stelle der singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ ist, so geht man — auf einem Wege, der sich aus den letzten Betrachtungen ergiebt — zu irgend einer Stelle (ξ', η') in der Umgebung von (a', b'), beschreibt innerhalb dieser Umgebung einen geschlossenen Weg, der die Curve $\psi(x, y) = 0$ umwindet, und kehrt schliesslich von (ξ', η') nach (ξ, η) zurück, indem man denselben Weg, der vorher von (ξ, η) nach (ξ', η') führte, in entgegengesetzter Richtung durchläuft.

Den Sinn dieses Satzes, der uns später von Wichtigkeit sein wird, kann man kurz so aussprechen:

»Eine mehrdeutige analytische Function zeigt in der Umgebung der verschiedenen Stellen derselben *irreductiblen* singulären Curve das nämliche Verhalten.»

Zu späterer Verwendung ist folgender Ausdruck des Satzes geeignet:

»(a, b) und (a', b') seien irgend zwei Stellen der *irreductiblen* singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ einer mehrdeutigen analytischen Function. In der Nähe der Stelle (a, b) seien unter andern die Functionselemente $z_1, \ldots, z_m$ vorhanden, welche durch einen Umlauf um die singuläre Curve übergehen in

$$\bar{z}_1 = \varphi_1(z_1, \ldots, z_m), \quad \ldots \quad, \quad \bar{z}_m = \varphi_m(z_1, \ldots, z_m).$$

Man kann die m Elemente $z_1, \ldots, z_m$ auf einem solchen Wege nach einer Stelle der Umgebung von (a', b') fortsetzen, dass man dort m Elemente $z'_1, \ldots, z'_m$ erhält, welche durch einen in der Umgebung von (a', b') vollzogenen Umlauf um die singuläre Curve in

$$\bar{z}'_1 = \varphi_1(z'_1, \ldots, z'_m), \quad \ldots \quad, \quad \bar{z}'_m = \varphi_m(z'_1, \ldots, z'_m)$$

übergeführt werden.»

Dass für Functionen von n Veränderlichen ganz analoge Sätze gelten, ist leicht ersichtlich. Es ist für die folgenden Anwendungen nicht erforderlich, auch solche geschlossenen Wege in Betracht zu ziehen, welche nicht in der Umgebung der Stellen einer singulären Curve verlaufen. Um von den gewonnenen Ergebnissen eine einfache Anwendung zu machen, untersuchen wir das Verhalten einer algebraischen Function von x, y in der Umgebung der Stellen einer singulären Curve. Durch die algebraische Gleichung

$$G(x, y, z) = 0$$

wird z als algebraische Function von x, y definiert. Ist

$$G(x, y, z) = g_0(x, y) \cdot z^m + g_1(x, y) \cdot z^{m-1} + \cdots,$$

so wird z an denjenigen Stellen (x, y), welche der Gleichung $g_0(x, y) = 0$ genügen, unendlich. Enthält die ganze Function $g_0(x, y)$ den irreductiblen Factor $\varphi(x, y)$, so ist $\varphi(x, y) = 0$ eine singuläre Curve der algebraischen Function. Jede mehrfache Wurzel der Gleichung

$$G(x, y, z) = 0$$

genügt auch der Gleichung

$$\frac{\partial G(x, y, z)}{\partial z} = 0.$$

Bezeichnet man die Resultante von G und $\frac{\partial G}{\partial z}$ in Bezug auf z mit $R(x, y)$' so entspricht nur denjenigen Stellen (x, y), welche der Gleichung

$$R(x, y) = 0$$

genügen, eine mehrfache Wurzel z der algebraischen Gleichung. Ist $\psi(x, y)$ ein irreductibler Factor der ganzen Function $R(x, y)$, so ist $\psi(x, y) = 0$ eine singuläre Curve und zwar im allgemeinen eine Verzweigungscurve der algebraischen Function. Dass an jeder Stelle (ξ, η), welche keiner singulären Curve $\varphi(x, y) = 0$ und keiner Verzweigungscurve $\psi(x, y) = 0$ angehört, m Elemente der algebraischen Function z vorhanden sind, welche sich in Potenzreihen von $x - \xi, y - \eta$ entwickeln lassen, ist bekannt. Ist $\varphi(x, y) = 0$ eine singuläre Curve, die nicht zugleich Verzweigungscurve ist, und ist $g_0(x, y)$ durch $\varphi(x, y)^\lambda$ teilbar, so ist

$$\zeta = \varphi(x, y)^\lambda z$$

eine algebraische Function, die an einer Stelle (a, b) von $\varphi(x, y) = 0$ nicht mehr unendlich wird, also als Potenzreihe von $x - a, y - b$ darstellbar ist. Mithin gilt für einen Zweig der Function z die Entwicklung

$$z = \frac{\mathfrak{P}(x - a, y - b)}{\varphi(x, y)^\lambda}.$$

Ohne auf diesen Fall näher einzugehen, nehmen wir nun an, es sei $\phi(x, y) = 0$ eine Verzweigungscurve, aber nicht zugleich $\phi(x, y)$ ein Factor von $g_0(x, y)$. Wir setzen voraus, dass für alle Stellen (x, y) von $\phi(x, y) = 0$ die p Gleichungen

$$G(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial G(x, y, z)}{\partial z} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^{p-1} G(x, y, z)}{\partial z^{p-1}} = 0$$

eine gemeinschaftliche Wurzel z besitzen, dass also für jede dieser Stellen p Functionswerte zusammenfallen. Diese Voraussetzung lässt sich genauer folgendermassen ausdrücken:

Wendet man auf

$$G(x, y, z) \quad \text{und} \quad G'(x, y, z) = \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial z},$$

als Functionen von z betrachtet, das Verfahren zur Auffindung des gemeinschaftlichen Teilers an, so erhält man sie dargestellt in der Form

$$G(x, y, z) = g(x, y, z)[z - \mathfrak{g}(x, y)] + \mathfrak{R}(x, y),$$

$$G'(x, y, z) = g'(x, y, z)[z - \mathfrak{g}(x, y)] + \mathfrak{R}(x, y),$$

wo $\mathfrak{R}, \mathfrak{g}, g, g'$ rationale Functionen von x, y, g und g' ganze Functionen von z sind. Der Zähler der rationalen Function $\mathfrak{R}(x, y)$ ist die Resultante $R(x, y)$. Setzt man in den beiden Identitäten

$$z = \mathfrak{g}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\sigma(x, y)}$$

und entfernt die Nenner, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \sigma(x, y)^m G[x, y, \mathfrak{g}(x, y)] &\equiv 0 \\ \sigma(x, y)^{m-1} G[x, y, \mathfrak{g}(x, y)] &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod \phi(x, y).$$

Nach der gemachten Voraussetzung ist, wenn man

$$G^{(\alpha)}(x, y, z) = \frac{\partial^\alpha G(x, y, z)}{\partial z^\alpha}$$

setzt,

$$\sigma(x, y)^{m-\alpha} G^{(\alpha)}[x, y, \mathfrak{g}(x, y)] \equiv 0, \text{ mod } \psi(x, y). \qquad {\scriptstyle(\alpha=0,1,\ldots,p-1)}$$

Genügt die Stelle (x, y) der Gleichung $\psi(x, y) = 0$, so ist diesen p Congruenzen zufolge $z = \mathfrak{g}(x, y)$ eine p-fache Wurzel von $G(x, y, z) = 0$. Es sei nun $x = a, y = b$ eine Stelle von $\psi(x, y) = 0$, die keiner andern singulären oder Verzweigungscurve angehört, und $z = c$ die zugehörige p-fache Wurzel von $G = 0$. Zu einer Stelle (x, y) in der Nähe von (a, b) gehören p Functionswerte $z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$, welche für $x = a, y = b$ in c übergehen. Beschreibt der Punkt (x, y) in der Nähe von (a, b) einen geschlossenen Weg, so nehmen $z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$ wieder ihre ursprünglichen Werte an, falls jener Weg die Curve $\psi(x, y) = 0$ nicht umwindet; andernfalls können sich jene p Werte unter einander vertauschen. Wie im Falle einer einzigen unabhängigen Veränderlichen lassen sich $z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$ in eine Anzahl Gruppen so zerlegen, dass sich die Elemente einer Gruppe bei einem Umlauf um $\psi(x, y) = 0$ cyklisch vertauschen.

Für die μ Elemente einer solchen cyklischen Gruppe lässt sich ein analytischer Ausdruck aufstellen. Jedes dieser μ Elemente bleibt ungeändert bei einer μ-fachen Umwindung von $\psi(x, y) = 0$, d. h. wenn $v = \psi(x, y)^{\frac{1}{\mu}}$ seinen ursprünglichen Wert wieder annimmt. Durch die Substitution

$$u = \varphi(x, y),$$

$$v = \psi(x, y)^{\frac{1}{\mu}},$$

wo $\varphi(x, y) = A'(x - a) + B'(y - b) + \ldots$ ist, geht z in eine Function von u, v über, die sich in der Umgebung der Stelle $(u = 0, v = 0)$ regulär verhält, also in eine Potenzreihe von u, v entwickeln lässt. Führt man wieder x und y ein, so erhält man jene μ Wurzeln dargestellt durch einen Ausdruck von der Gestalt

$$z - c = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \mathfrak{P}_\nu(x - a, y - b) \cdot \psi(x, y)^{\frac{\nu}{\mu}}.$$

In der Umgebung einer jeden andern Stelle der irreductiblen Curve $\phi(x, y) = 0$ ordnen sich die m Werte der algebraischen Function z in ganz derselben Weise in Gruppen an, wie dies aus dem Satze auf S. 123 folgt. Hat man eine Verzweigungscurve $\phi(x, y) = 0$, die zugleich Unendlichkeitscurve ist, so gilt in der Umgebung einer Stelle (a, b) dieser Curve eine Entwicklung von der Form

$$z = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \mathfrak{P}_\nu(x - a, y - b) \,.\, \phi(x, y)^{\frac{\nu}{\mu} - \lambda},$$

wie man durch Verbindung der auf eine Unendlichkeits- und eine Verzweigungscurve bezüglichen Entwicklungen erkennt.

Um zu finden, wie sich die p Werte $z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$ in der Nähe der Verzweigungscurve $\phi(x, y) = 0$ in Gruppen verteilen, setzt man

$$x = a + \alpha t, \qquad y = b + \beta t,$$

wo (a, b) irgend eine einfache Stelle von $\phi(x, y) = 0$ ist und

$$\alpha\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{a,b} + \beta\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{a,b}$$

nicht verschwindet. Dadurch geht die Gleichung

$$G(x, y, z) = 0$$

über in

$$g(t, z) = 0;$$

die p Werte der durch letztere Gleichung definierte Function z von t, welche für $t = 0$ gleich c werden, verteilen sich in der Nähe von $t = 0$ in derselben Weise in Gruppen, wie die Werte der durch erstere Gleichung definierten Function z von x, y in der Umgebung der Stellen der Verzweigungscurve $\phi(x, y) = 0$. Da man für eine algebraische Function einer Variablen die fragliche Gruppenverteilung durch das Puiseux'sche Verfahren ermitteln kann, so kennt man sie auch für die algebraische Function zweier Variablen. In ganz derselben Weise kann man eine algebraische Function von n Veränderlichen behandeln.

Zur weiteren Anwendung der entwickelten Sätze und zugleich zur

Vorbereitung auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen möge noch die Integration eines totalen rationalen Differentials gegeben werden.

Es seien

$$f(x, y), g(x, y)$$

rationale Functionen, welche die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

erfüllen; das von einer Stelle (ξ, η) zu einer andern (x, y) auf einem gewissen Wege erstreckte Integral

$$v = \int_{(\xi, \eta)}^{(x, y)} [f(x, y)dx + g(x, y)dy]$$

ist gleich dem Werte, den die durch das Differentialgleichungensystem

$$\frac{\partial v}{\partial x} = f(x, y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = g(x, y)$$

definierte Function v in (x, y) annimmt, wenn man sie, von (ξ, η) mit dem Werte o ausgehend, auf dem Integrationswege nach (x, y) fortsetzt. Enthalten die rationalen Functionen $f(x, y), g(x, y)$ im Nenner die irreductiblen ganzen Functionen

$$\phi_1(x, y), \ldots, \phi_m(x, y),$$

so besitzt die Function v die singulären Curven

$$\phi_1(x, y) = 0, \quad \ldots, \quad \phi_m(x, y) = 0.$$

Die oben bewiesenen Sätze nehmen im vorliegenden Falle folgende Gestalt an: Alle geschlossenen Integrationswege, welche in der Umgebung einer Stelle (a, b) der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ verlaufen und diese Curve gleich oft umwinden, sind äquivalent; insbesondere ist das Integral gleich Null, wenn der Integrationsweg die singuläre Curve nicht umwindet. Ferner sind zwei geschlossene Integrale, deren Integrationswege dieselbe *irreductible* singuläre Curve $\phi(x, y) = 0$ in der Umgebung zweier verschiedenen Stellen (a, b) und (a', b') umwinden, einander gleich.

Es sei

$$f(x, y) = \frac{\mathfrak{f}(x, y)}{\phi_1(x, y)^{\mu_1} \ldots \phi_m(x, y)^{\mu_m}}$$

$$g(x, y) = \frac{\mathfrak{g}(x, y)}{\phi_1(x, y)^{\mu_1} \ldots \phi_m(x, y)^{\mu_m}}.$$

Die Werte, welche unser Integral auf geschlossenen Wegen erhält, die je eine singuläre Curve $\phi_1(x, y) = 0, \ldots, \phi_m(x, y) = 0$ umwinden, mögen mit

$$2\pi i A_1, \ldots, 2\pi i A_m$$

bezeichnet werden; man könnte dieselben Perioden des Integrals nennen. Da die Function

$$A_1 \log \phi_1(x, y) + \ldots + A_m \log \phi_m(x, y)$$

dieselben Perioden besitzt, so ist, wenn man

$$v = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha \log \phi_\alpha(x, y) + H(x, y)$$

setzt, $H(x, y)$ eine eindeutige und zwar eine rationale Function. Zur Berechnung von A_α wählen wir den Integrationsweg, welchen

$$x = a + a't, \qquad y = b + b't$$

beschreiben, wenn t den Nullpunkt umwindet; (a, b) ist eine beliebige einfache Stelle von $\phi_\alpha(x, y) = 0$;

$$a'\left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x}\right)_{a, b} + b'\left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial y}\right)_{a, b}$$

ist ebenso wie

$$\phi_\beta(a, b), \qquad \beta = 1, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, m$$

von Null verschieden. Die angegebene Substitution liefert das Integral

$$\int F_\alpha(t) dt,$$

wo

$$F_\alpha(t) = \frac{a'\mathfrak{f}(a + a't, b + b't) + b'\mathfrak{g}(a + a't, b + b't)}{\prod_{\beta=1}^{m} \phi_\beta(a + a't, b + b't)^{\mu_\beta}}$$

eine rationale Function von t ist, die für $t = 0$ unendlich wird. Die Periode $2\pi i A_\alpha$ ist gleich dem um $t = 0$ herum erstreckten Integral $\int F_\alpha(t)dt$, also

$$A_\alpha = [F_\alpha(t)]_{\frac{1}{t}}.$$

Die rationale Function $H(x, y)$ hat die Form

$$H(x, y) = \frac{G(x, y)}{\phi_1(x, y)^{\mu_1 - 1} \dots \phi_m(x, y)^{\mu_m - 1}};$$

um die ganze Function $G(x, y)$ zu berechnen, setzt man die Ableitungen nach x bez. y der beiden Seiten der Gleichung

$$\int \frac{\mathfrak{f}(x, y)dx + \mathfrak{g}(x, y)dy}{\phi_1(x, y)^{\mu_1} \dots \phi_m(x, y)^{\mu_m}} =$$

$$A_1 \log \phi_1(x, y) + \dots + A_m \log \phi_m(x, y) + \frac{G(x, y)}{\phi_1(x, y)^{\mu_1 - 1} \dots \phi_m(x, y)^{\mu_m - 1}}$$

einander gleich:

$$\phi_1 \dots \phi_m \frac{\partial G}{\partial x} - G \sum_\alpha (\mu_\alpha - 1) \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x} \phi_1 \dots \phi_{\alpha-1} \phi_{\alpha+1} \dots \phi_m$$

$$= \mathfrak{f} - \phi_1^{\mu_1 - 1} \dots \phi_m^{\mu_m - 1} \sum_\alpha A_\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x} \phi_1 \dots \phi_{\alpha-1} \phi_{\alpha+1} \dots \phi_m,$$

$$\phi_1 \dots \phi_m \frac{\partial G}{\partial y} - G \sum_\alpha (\mu_\alpha - 1) \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial y} \phi_1 \dots \phi_{\alpha-1} \phi_{\alpha+1} \dots \phi_m$$

$$= \mathfrak{g} - \phi_1^{\mu_1 - 1} \dots \phi_m^{\mu_m - 1} \sum_\alpha A_\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial y} \phi_1 \dots \phi_{\alpha-1} \phi_{\alpha+1} \dots \phi_m.$$

Es sei

$$G(x, y) = \sum_\lambda G^{(\lambda)}(x, y),$$

wo $G^{(\lambda)}(x, y)$ eine homogene Function λ^{ten} Grades bedeutet, die also der Gleichung

$$x \frac{\partial G^{(\lambda)}}{\partial x} + y \frac{\partial G^{(\lambda)}}{\partial y} = \lambda G^{(\lambda)}$$

genügt. Durch Vergleichung der Glieder λ^{ter} Dimension in den beiden obigen Gleichungen ergeben sich Gleichungen von der Form

$$L^{(0)}\frac{\partial G^{(\lambda+1)}}{\partial x}+L^{(1)}\frac{\partial G^{(\lambda)}}{\partial x}+\ldots+L^{(\lambda)}\frac{\partial G^{(1)}}{\partial x}+M^{(0)}G^{(\lambda)}+\ldots+M^{(\lambda)}G^{(0)}=P^{(\lambda)},$$

$$L^{(0)}\frac{\partial G^{(\lambda+1)}}{\partial y}+L^{(1)}\frac{\partial G^{(\lambda)}}{\partial y}+\ldots+L^{(\lambda)}\frac{\partial G^{(1)}}{\partial y}+N^{(0)}G^{(\lambda)}+\ldots+N^{(\lambda)}G^{(0)}=Q^{(\lambda)},$$

wo L, M, N, P, Q ganze homogene Functionen von x, y sind, deren Grad durch den oberen Index angedeutet wird. Multipliziert man die beiden letzten Gleichungen mit x, bez. y und addiert sie, so ergiebt sich zur Berechnung der homogenen Teile der ganzen Function $G(x, y)$ die Recursionsformel

$$(\lambda+1)L^{(0)}G^{(\lambda+1)}+\{\lambda L^{(1)}+M^{(0)}x+N^{(0)}y\}G^{(\lambda)}+\ldots$$
$$\ldots+\{L^{(\lambda)}+M^{(\lambda-1)}x+N^{(\lambda-1)}y\}G^{(1)}+\{M^{(\lambda)}x+N^{(\lambda)}y\}G^{(0)}=P^{(\lambda)}x+Q^{(\lambda)}y.$$

Wir sind nun auch im Stande, das System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(x, y)\cdot z,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=g(x, y)\cdot z$$

zu integrieren; es ist nämlich

$$z=e^{\int[f(x, y)dx+g(x, y)dy]}=\phi_1(x, y)^{A_1}\ldots\phi_m(x, y)^{A_m}e^{\frac{G(x, y)}{\phi_1(x, y)^{\mu_1-1}\ldots\phi_m(x, y)^{\mu_m-1}}}.$$

II.

Da das System linearer partieller Differentialgleichungen (A), welches uns in der vorliegenden Arbeit beschäftigt, auf ein System totaler linearer Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann, so gehen wir im gegenwärtigen Abschnitt auf die Differentialgleichungensysteme der letzteren Art und zwar zunächst auf diejenigen mit einer einzigen unabhängigen Variablen ein. Durch das System der Differentialgleichungen

$$\text{(C)} \qquad \frac{dz_\alpha}{dt} = \sum_\beta A_{\alpha\beta} z_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

wo unter $A_{\alpha\beta}$ eine Function von t verstanden ist, werden $z_1, \ldots, z_m$ als Functionen von t definiert, über deren Verhalten wir den Arbeiten von Herrn Sauvage (Annales de l'École Normale, 1882, 1886) Folgendes entnehmen.

Ist $t = \tau$ eine beliebige Stelle, in deren Umgebung sich sämtliche Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ regulär verhalten, so wird das System (C) durch ein System von Potenzreihen

$$z_1 = \mathfrak{P}_1(t - \tau), \quad \ldots, \quad z_m = \mathfrak{P}_m(t - \tau)$$

befriedigt, welche für $t = \tau$ die willkürlich vorgeschriebenen Werte

$$z_1 = c_1, \quad \ldots, \quad z_m = c_m$$

annehmen. Eine Lösung $(z_1, \ldots, z_m)$ des Differentialgleichungensystems (C) kann also nur an den singulären Stellen der Functionen $A_{\alpha\beta}$ ein singuläres Verhalten zeigen; man nennt diese Stellen die singulären Punkte des Differentialgleichungensystems. Es lassen sich m Lösungen unseres Systems (C)

$$z_{1\beta}, \ldots, z_{m\beta} \qquad (\beta = 1, \ldots, m)$$

angeben, durch welche jede Lösung $(z_1, \ldots, z_m)$ in der Form

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1 z_{11} + \ldots + C_m z_{1m}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_m &= C_1 z_{m1} + \ldots + C_m z_{mm} \end{aligned}$$

ausgedrückt werden kann. Ein solches System von m Lösungen nennen wir ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungensystems. Durchläuft die unabhängige Variable t einen geschlossenen Weg, so gehen die Elemente $z_{\alpha\beta}$ eines Fundamentalsystems über in Functionen $\bar{z}_{\alpha\beta}$, welche sich in der folgenden Weise durch $z_{\alpha\beta}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{\alpha 1} &= C_{11} z_{\alpha 1} + \ldots + C_{1m} z_{\alpha m}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{z}_{\alpha m} &= C_{m1} z_{\alpha 1} + \ldots + C_{mm} z_{\alpha m}; \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

hierbei sind die C von α unabhängige Constanten, die nur durch den von der Variablen t beschriebenen Weg bedingt sind. Jedem singulären Punkt $t = c$ des Differentialgleichungensystems (C) entspricht ein Fundamentalsystem $z_{\alpha\beta}$, welches bei einem Umlauf um den singulären Punkt ein besonders einfaches Verhalten zeigt. Hat die Determinante

$$| C_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta} | \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

— $\delta_{\alpha\beta} = 1$, wenn $\alpha = \beta$ ist, sonst $= 0$ — lauter einfache Elementarteiler $s - C_1, \ldots, s - C_m$ (vergl. WEIERSTRASS, Berliner Monatsberichte 1868), so geht das erwähnte einfache Fundamentalsystem $z_{\alpha\beta}$, welches das zu dem singulären Puncte $t = c$ gehörige Fundamentalsystem genannt wird, bei einem Umlauf um den singulären Punkt über in

$$\begin{aligned} \bar{z}_{11} &= C_1 z_{11}, \quad \ldots, \quad \bar{z}_{m1} = C_1 z_{m1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{z}_{1m} &= C_m z_{1m}, \quad \ldots, \quad \bar{z}_{mm} = C_m z_{mm}; \end{aligned}$$

wenn man

$$C_1 = e^{2\pi i \cdot r_1}, \quad \ldots, \quad C_m = e^{2\pi i \cdot r_m}$$

setzt, so gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} z_{11} &= (t-c)^{r_1} \zeta_{11}, \quad \ldots, \quad z_{m1} = (t-c)^{r_1} \zeta_{m1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{1m} &= (t-c)^{r_m} \zeta_{1m}, \quad \ldots, \quad z_{mm} = (t-c)^{r_m} \zeta_{mm}, \end{aligned}$$

wo $\zeta_{\alpha\beta}$ in der Umgebung von $t = c$ eindeutig und daher in eine nach positiven und negativen Potenzen von $t - c$ fortschreitende Reihe entwickelbar ist.

Weniger einfach gestaltet sich die Entwicklung, wenn die Determinante $| C_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta} |$ auch mehrfache Elementarteiler besitzt; ist $s - C$ ein p-facher Elementarteiler derselben, so enthält das zu dem singulären Punkte gehörige Fundamentalsystem eine Gruppe von p Lösungen

$$\begin{array}{c} z_{11}, \ldots, z_{m1}, \\ \cdots\cdots \\ z_{1p}, \ldots, z_{mp}, \end{array}$$

welche durch den Umlauf um $t = c$ übergeführt wird in

$$\begin{array}{c} \bar{z}_{11}, \ldots, \bar{z}_{m1}, \\ \cdots\cdots \\ \bar{z}_{1p}, \ldots, \bar{z}_{mp}, \end{array}$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{z}_{\alpha 1} &= C z_{\alpha 1}, \\ \bar{z}_{\alpha 2} &= C z_{\alpha 2} + z_{\alpha 1}, \\ &\cdots\cdots \\ \bar{z}_{\alpha p} &= C z_{\alpha p} + z_{\alpha, p-1}. \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (\alpha = 1, \ldots, m)}$$

Für die in Rede stehenden p Lösungen besteht folgende Entwicklung

$$\begin{aligned} z_{\alpha 1} &= (t - c)^r \zeta_{\alpha 1}, \\ z_{\alpha 2} &= (t - c)^r \{ \zeta_{\alpha 2} + \zeta'_{\alpha 2} \log (t - c) \}, \\ &\cdots\cdots \\ z_{\alpha p} &= (t - c)^r \{ \zeta_{\alpha p} + \zeta'_{\alpha p} \log (t - c) + \ldots + \zeta_{\alpha p}^{(p-1)} [\log (t - c)]^{p-1} \}, \end{aligned}$$

wenn man

$$C = e^{2\pi i r}$$

setzt und unter sämtlichen ζ in der Umgebung von $t = c$ eindeutige Functionen versteht.

Von besonderem Interesse sind diejenigen Differentialgleichungensysteme, bei welchen in der Entwicklung des zu einem singulären Punkte $t = c$ gehörigen Fundamentalsystems sämtliche oben mit ζ bezeichneten Reihen bei geeigneter Wahl der Exponenten r nur positive Potenzen von $t - c$ enthalten, oder, wie man sich nach Herrn THOMÉ ausdrückt, bei welchen sich sämtliche Integrale in der Umgebung des singulären Punktes $= c$ regulär verhalten. Wir machen von dem folgenden Satze Gebrauch, dessen Beweis den Inhalt einer Arbeit von Herrn SAUVAGE (Annales de l'École Normale 1886) bildet:

»Das Differentialgleichungensystem

$$(\mathrm{C}') \qquad \frac{dz_\alpha}{dt} = \sum_\beta t^{p_\alpha - p_\beta - 1} g_{\alpha\beta}(t) \,.\, z_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

worin $p_1, \ldots, p_m$ positive oder negative ganze Zahlen und die Coefficienten

$$g_{\alpha\beta}(t) = a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta} t + a''_{\alpha\beta} t^2 + \ldots$$

Potenzreihen von t sind, besitzt in der Umgebung des singulären Punktes $t = 0$ lauter reguläre Lösungen.»

Es ist für folgende Anwendungen erforderlich, auf die Form dieser regulären Lösungen genauer einzugehen. (Ich hatte sowohl den soeben angeführten Satz bewiesen, als auch alle in der vorliegenden Arbeit enthaltenen Entwicklungen bereits ausgeführt, als ich von der zuletzt citierten Arbeit von Herrn SAUVAGE Kenntniss erhielt. Da mir dieselbe jetzt nicht zugänglich ist, so ist es mir nicht möglich, im Folgenden genau an dieselbe anzuknüpfen.)

Wir beschäftigen uns zunächst mit einem Differentialgleichungensystem von der Form

$$(\mathrm{C}'') \qquad t\frac{dv_\alpha}{dt} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta} t + \ldots) v_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

da das System (C') leicht auf die Form (C'') zurückgeführt werden kann. Soll dem System (C'') durch ein System von Potenzreihen

$$v_\alpha = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (v_\alpha)_\lambda t^\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

wo $\zeta_{\alpha\beta}$ in der Umgebung von $t = c$ eindeutig und daher in eine nach positiven und negativen Potenzen von $t - c$ fortschreitende Reihe entwickelbar ist.

Weniger einfach gestaltet sich die Entwicklung, wenn die Determinante $| C_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta} |$ auch mehrfache Elementarteiler besitzt; ist $s - C$ ein p-facher Elementarteiler derselben, so enthält das zu dem singulären Punkte gehörige Fundamentalsystem eine Gruppe von p Lösungen

$$\begin{array}{l} z_{11}, \ldots, z_{m1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_{1p}, \ldots, z_{mp}, \end{array}$$

welche durch den Umlauf um $t = c$ übergeführt wird in

$$\begin{array}{l} \bar{z}_{11}, \ldots, \bar{z}_{m1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \bar{z}_{1p}, \ldots, \bar{z}_{mp}, \end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{l} \bar{z}_{\alpha 1} = C z_{\alpha 1}, \\ \bar{z}_{\alpha 2} = C z_{\alpha 2} + z_{\alpha 1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \bar{z}_{\alpha p} = C z_{\alpha p} + z_{\alpha, p-1}. \end{array} \qquad {\scriptstyle (\alpha = 1, \ldots, m)}$$

Für die in Rede stehenden p Lösungen besteht folgende Entwicklung

$$\begin{array}{l} z_{\alpha 1} = (t - c)^r \zeta_{\alpha 1}, \\ z_{\alpha 2} = (t - c)^r \{ \zeta_{\alpha 2} + \zeta'_{\alpha 2} \log (t - c) \}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_{\alpha p} = (t - c)^r \{ \zeta_{\alpha p} + \zeta'_{\alpha p} \log (t - c) + \ldots + \zeta_{\alpha p}^{(p-1)} [\log (t - c)]^{p-1} \}, \end{array}$$

wenn man

$$C = e^{2\pi i r}$$

setzt und unter sämtlichen ζ in der Umgebung von $t = c$ eindeutige Functionen versteht.

und verschwindet die Determinante $|a_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta}|$ für keinen ganzzahligen positiven Wert von λ, so wird das Differentialgleichungensystem

$$t\frac{dv_\alpha}{dt} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}t + \ldots)v_\beta$$

durch μ Systeme von Potenzreihen

$$v_{1\beta} = \mathfrak{P}_{1\beta}(t)\ , \quad \ldots\ , \quad v_{m\beta} = \mathfrak{P}_{m\beta}(t) \qquad {\scriptstyle(\beta=1,\ldots,\mu)}$$

befriedigt.

Wir berechnen nun ein Fundamentalsystem des allgemeinen Differentialgleichungensystems (C″). Setzt man

$$v_\alpha = t^r\varphi_\alpha, \qquad {\scriptstyle(\alpha=1,\ldots,m)}$$

so erhält man für φ_α die Differentialgleichungen

$$t\frac{d\varphi_\alpha}{dt} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta})\varphi_\beta + \ldots,$$

aus welchen Potenzreihen für $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ hervorgehen, falls r der Gleichung

$$D(r) = |a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta}| = 0$$

genügt. Hat diese Gleichung lauter einfache Wurzeln $r_1, \ldots, r_m$, von denen keine zwei eine ganzzahlige Differenz besitzen, so ergeben sich m Lösungen

$$\begin{array}{ccc} v_{11} = t^{r_1}\varphi_{11}\ , & \ldots\ , & v_{m1} = t^{r_1}\varphi_{m1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_{1m} = t^{r_m}\varphi_{1m}\ , & \ldots\ , & v_{mm} = t^{r_m}\varphi_{mm}, \end{array}$$

wo sämtliche φ Potenzreihen von t sind.

Es sei nun $r = r_0$ eine μ-fache Wurzel von $D(r) = 0$, und $r - r_0$ trete μ-mal als einfacher Elementarteiler der Determinante

$$|a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta}|$$

auf, d. h. die Determinante sei durch $(r - r_0)^\mu$, alle Unterdeterminanten $(m - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch $(r - r_0)^{\mu-1}$ teilbar u. s. w., während nicht alle

Unterdeterminanten $(m-\mu)^{\text{ter}}$ Ordnung für $r = r_0$ verschwinden, so dass die Determinante

$$| a_{\alpha\beta} - r_0 \delta_{\alpha\beta} |$$

den Rang $m-\mu$ hat. Da somit dem Differentialgleichungensystem für $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ durch μ Systeme von Potenzreihen genügt wird, so besitzt das Differentialgleichungensystem für $v_1, \ldots, v_m$ μ Lösungen von der Form

$$v_\alpha = t^{r_0} \mathfrak{P}_\alpha(t). \qquad (\alpha=1,\ldots,m)$$

Wir haben also den Satz:

»Hat die Determinante

$$| a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta} |$$

lauter einfache Elementarteiler $r-r_1, \ldots, r-r_m$ (von denen auch mehrere einander gleich sein können), so besitzt das Differentialgleichungensystem

$$t\frac{dv_\alpha}{dt} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}t + \ldots)v_\beta \qquad (\alpha, \beta=1,\ldots,m)$$

in der Umgebung der singulären Stelle $t = 0$ ein Fundamentalsystem von der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} v_{11} = t^{r_1}\varphi_{11}, & \ldots, & v_{m1} = t^{r_1}\varphi_{m1}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ v_{1m} = t^{r_m}\varphi_{1m}, & \ldots, & v_{mm} = t^{r_m}\varphi_{mm}, \end{array}$$

wo $\varphi_{11}, \ldots, \varphi_{mm}$ in Potenzreihen von t entwickelbar sind.»

Um auch den Fall, wo die Determinante $D(r)$ einen mehrfachen Elementarteiler $r-r_0$ besitzt, behandeln zu können, untersuchen wir zunächst das System

$$t\frac{dv_\alpha}{dt} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}t + \ldots)v_\beta$$

unter der Voraussetzung, dass $| a_{\alpha\beta} | = 0$ ist und dass die Determinante

$$D(\lambda) = | a_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta} |$$

den Elementarteiler λ^e besitzt. Es ist gleichgültig, ob noch andere Elementarteiler von der Form $\lambda^{e'}$ vorkommen oder nicht. Wir werden sehen, dass eine Lösung von der Form

$$v_\alpha = \sum_{\nu=0}^{e-1} v_\alpha^{(\nu)} (\log t)^{e-\nu-1}$$

existiert, wo $v_\alpha^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, e-1)$ Potenzreihen sind, die sich aus den Differentialgleichungen

$$t\frac{dv_\alpha^{(0)}}{dt} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(0)} + \ldots,$$

$$t\frac{dv_\alpha^{(1)}}{dt} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(1)} - (e-1)v_\alpha^{(0)} + \ldots,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$t\frac{dv_\alpha^{(\nu)}}{dt} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(\nu)} - (e-\nu)v_\alpha^{(\nu-1)} + \ldots,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$t\frac{dv_\alpha^{(e-1)}}{dt} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(e-1)} - v_\alpha^{(e-2)} + \ldots$$

ergeben. Diese Differentialgleichungensysteme erhält man, wenn man den obigen Ausdruck für v_α in (C″) substituiert und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $\log t$ betrachtet. Damit diesen Differentialgleichungen durch Potenzreihen $v_\alpha^{(\nu)}$ genügt wird, ist, vorausgesetzt, dass $D(\lambda) = 0$ keine ganze positive Wurzel besitzt, notwendig und hinreichend, dass die Gleichungen

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(0)} = 0,$$

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(1)} = (e-1)v_\alpha^{(0)},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(\nu)} = (e-\nu)v_\alpha^{(\nu-1)},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(e-1)} = v_\alpha^{(e-2)}$$

durch endliche, nicht sämtlich verschwindende Werthe von $v_\alpha^{(0)}, v_\alpha^{(1)}, \ldots, v_\alpha^{(e-1)}$ erfüllbar sind. Man erkennt dies sofort, wenn man die obigen e Differentialgleichungensysteme als ein einziges System mit den em Functionen $v_\alpha^{(\nu)}$ auffasst. Aus der Theorie der Transformation einer Schar bilinearer Formen in die Normalform (Weierstrass, Berliner Monatsberichte 1868) ergiebt sich Folgendes: Multipliciert man die Gleichung

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(\nu)} = (e-\nu) v_\alpha^{(\nu-1)}$$

mit einer Unbestimmten u_α und summiert über $\alpha = 1, \ldots, m$, so erhält man die Gleichung

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta^{(\nu)} = (e-\nu) \sum_\alpha u_\alpha v_\alpha^{(\nu-1)}.$$

Führt man statt der Variablen $u_1, \ldots, u_m$ vermittels einer bilinearen Substitution neue $U_1, \ldots, U_m$ und statt der $v_1^{(\nu)}, \ldots, v_m^{(\nu)}$ vermittels der Substitution

$$v_\alpha^{(\nu)} = \sum_\beta c_{\alpha\beta} v_\beta^{(\nu)} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, e-1)$$

eine neue Reihe $V_1^{(\nu)}, \ldots, V_m^{(\nu)}$ ein, so gehen die beiden bilinearen Formen

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta^{(\nu)}, \quad \sum_\alpha u_\alpha v_\alpha^{(\nu-1)}$$

über in

$$(U_1 V_{e-1}^{(\nu)} + \cdots + U_{e-1} V_1^{(\nu)}) + \cdots, \quad (U_1 V_e^{(\nu-1)} + \cdots + U_e V_1^{(\nu-1)}) + \cdots,$$

es besteht also die Gleichung

$$U_1 V_{e-1}^{(\nu)} + \cdots + U_{e-1} V_1^{(\nu)} + \cdots = (e-\nu)(U_1 V_e^{(\nu-1)} + \cdots + U_e V_1^{(\nu-1)}) + \cdots;$$

setzt man die Coefficienten der verschiedenen U auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= V_1^{(\nu-1)}, \\ V_1^{(\nu)} &= (e-\nu) V_2^{(\nu-1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ V_{e-1}^{(\nu)} &= (e-\nu) V_e^{(\nu-1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, e-1)$$

welche dadurch befriedigt werden, dass man $V_e^{(0)}, V_e^{(1)}, \ldots, V_e^{(e-1)}$ willkürlich lässt, ferner

$$
\begin{aligned}
&V_{e-1}^{(1)} = (e-1)V_e^{(0)}\\
&V_{e-1}^{(2)} = (e-2)V_e^{(1)},\ V_{e-2}^{(2)} = (e-2)(e-1)V_e^{(0)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&V_{e-1}^{(e-1)} = V_e^{(e-2)},\ V_{e-2}^{(e-1)} = (1\,,\,2)V_e^{(e-3)}, \ldots, V_1^{(e-1)} = (1\,,\,e-1)V_e^{(0)},
\end{aligned}
$$

alle übrigen V gleich Null setzt. Die Functionen $V_\alpha^{(0)}, V_\alpha^{(1)}, \ldots V_\alpha^{(e-1)}$ enthalten e willkürliche Constanten, nämlich die zu $t = 0$ gehörigen Werte von $V_1^{(0)}, V_1^{(1)}, \ldots, V_1^{(e-1)}$. Man erhält also auch für $v_\alpha^{(0)}, v_\alpha^{(1)}, \ldots, v_\alpha^{(e-1)}$ Potenzreihen von t, welche e willkürliche Grössen linear enthalten; daher treten e dem Elementarteiler λ^e entsprechende linear unabhängige Lösungen von der Form

$$v_\alpha = \sum_{\nu=0}^{e-1} v_\alpha^{(\nu)}(\log t)^{e-\nu-1} \qquad (\alpha=1,\ldots,m)$$

auf; giebt man den in den $v_\alpha^{(\nu)}$ vorkommenden willkürlichen Constanten geeignete Werte, so erhält man e linear unabhängige Lösungen von der Gestalt

$$
\begin{aligned}
v_\alpha &= v_\alpha^{(0)}\\
v_\alpha &= v_\alpha^{(0)}\log t + v_\alpha^{(1)}\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Hiernach kann man den folgenden Satz aussprechen:

»Die Wurzeln der Gleichung

$$D(r) = |\, a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta}\,| = 0$$

seien so beschaffen, dass keine zwei eine ganzzahlige (von Null verschiedene) Differenz besitzen. $r = r_0$ sei eine mehrfache Wurzel und $r - r_0$ ein e-facher Elementarteiler der Determinante $D(r)$. Dann besitzt das System der Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
t\frac{dv_\alpha}{dt} &= \sum_\beta g_{\alpha\beta}(t)\,.\,v_\beta \qquad (\alpha,\beta=1,\ldots,m)\\
g_{\alpha\beta}(0) &= a_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

e Lösungen von der Gestalt

$$
\begin{aligned}
v_\alpha &= t^{r_0}\varphi_{\alpha 0},\\
v_\alpha &= t^{r_0}\{\varphi_{\alpha 1} + \varphi'_{\alpha 1}\log t\},\\
v_\alpha &= t^{r_0}\{\varphi_{\alpha 2} + \varphi'_{\alpha 2}\log t + \varphi''_{\alpha 2}(\log t)^2\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_\alpha &= t^{r_0}\{\varphi_{\alpha, e-1} + \varphi'_{\alpha, e-1}\log t + \ldots + \varphi^{e-1}_{\alpha, e-1}(\log t)^{e-1}\},
\end{aligned}
$$

wobei sämtliche φ Potenzreihen von t sind, zwischen denen ähnliche Relationen bestehen, wie im Falle der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen.»

Bevor wir den Fall behandeln, wo die Gleichung $|a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta}| = 0$ Wurzeln mit ganzzahliger Differenz besitzt, dehnen wir die bisher für das Differentialgleichungensystem (C″) gewonnenen Resultate auf das allgemeinere System

$$
\text{C}') \qquad \frac{dz_\alpha}{dt} = \sum_\beta t^{p_\alpha - p_\beta - 1} g_{\alpha\beta}(t) \, . \, z_\beta
$$

aus, welches durch die Substitution

$$
z_\alpha = t^{p_\alpha} v_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)
$$

in

$$
t\frac{dv_\alpha}{dt} = \sum_\beta [g_{\alpha\beta}(t) - \delta_{\alpha\beta} p_\alpha] v_\beta
$$

übergeführt wird.

»Hat die Determinante

$$
|a_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}(p_\alpha + r)|
$$

lauter einfache Elementarteiler $r - r_1, \ldots, r - r_m$, so besitzt das System (C′) in der Umgebung des singulären Punktes $t = 0$ ein Fundamentalsystem von der Form

$$
\begin{aligned}
&z_{11} = t^{r_1 + p_1}\zeta_{11}, \ldots, z_{m1} = t^{r_1 + p_m}\zeta_{m1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&z_{1m} = t^{r_m + p_1}\zeta_{1m}, \ldots, z_{mm} = t^{r_m + p_m}\zeta_{mm},
\end{aligned}
$$

wo $\zeta_{11}, \ldots, \zeta_{mm}$ in Potenzreihen von t entwickelbar sind. Einem e-fachen Elementarteiler $(r - r_0)^e$ der Determinante

$$| a_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}(p_\alpha + r) |$$

entspricht eine Gruppe von e Lösungen des Systems (C′)

$$z_{1\beta} = t^{r_0+p_1} u_{1\beta}, \ldots, z_{m\beta} = t^{r_0+p_m} u_{m\beta}, \qquad (\beta=1,\ldots,e)$$

wobei $u_{1\beta}, \ldots, u_{m\beta}$ Ausdrücke von der Form

$$\zeta + \zeta' \log t + \ldots + \zeta^{(\beta-1)} (\log t)^{\beta-1}$$

sind, unter $\zeta, \zeta', \ldots$ Potenzreihen von t verstanden.»

Die Gleichung

$$| a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta} | = 0$$

$$\text{bez.}\ | a_{\alpha\beta} - (p_\alpha + r)\delta_{\alpha\beta} | = 0$$

kann man die zu dem singulären Punkte $t = 0$ gehörige determinierende Gleichung des Systems (C″) bez. (C′) nennen.

Es bliebe nun noch der Fall zu behandeln, dass mehrere Wurzeln der determinierenden Gleichung des Systems (C′) oder (C″) um ganze Zahlen verschieden sind. Wir werden diesen Fall nicht erschöpfend behandeln, sondern nur so weit entwickeln, als es für die Anwendungen im nächsten Abschnitte erforderlich ist. Hat die determinierende Gleichung des Differentialgleichungensystems (C″) die beiden Wurzeln r_0 und $r_0 + e$, unter e eine ganze positive Zahl verstanden, und sind beide einfache Wurzeln, oder was auch schon hinreichend ist, $r - r_0$ und $r - (r_0 + e)$ einfache Elementarteiler der Determinante $| a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta} |$, so sind zwei Lösungen von folgender Form vorhanden

$$v_\alpha = t^{r_0+e} \varphi_\alpha,$$
$$v'_\alpha = t^{r_0+e} k \varphi_\alpha \log t + t^{r_0} \varphi'_\alpha,$$

wo φ_α und φ'_α Potenzreihen von t und k eine Constante ist. Tritt $r - (r_0 + e)$ μ mal, $r - r_0$ ν mal als einfacher Elementarteiler auf, so sind μ Lösungen von der Form v_α, ν Lösungen von der Form v'_α vorhanden. Ist $r - (r_0 + e)$

ein zweifacher, $r - r_0$ ein einfacher Elementarteiler, so sind drei Lösungen von folgender Form vorhanden

$$\begin{aligned} v_\alpha &= t^{r_0+e}\varphi_\alpha, \\ v'_\alpha &= t^{r_0+e}\{\varphi_\alpha \log t + \varphi'_\alpha\}, \\ v''_\alpha &= t^{r_0+e}\{\varphi_\alpha(\log t)^2 + k\varphi'_\alpha \log t\} + t^{r_0}\varphi''_\alpha; \end{aligned}$$

ist dagegen $r - r_0$ ein zweifacher, $r - (r_0 + e)$ ein einfacher Elementarteiler, so haben wir drei Lösungen von der Gestalt:

$$\begin{aligned} v_\alpha &= t^{r_0+e}\varphi_\alpha, \\ v'_\alpha &= t^{r_0+e}\varphi_\alpha \log t + t^{r_0}\varphi'_\alpha, \\ v''_\alpha &= t^{r_0+e}\varphi_\alpha(\log t)^2 + t^{r_0}\{k\varphi'_\alpha \log t + \varphi''_\alpha\}. \end{aligned}$$

Diese Sätze ergeben sich teils von selbst, teils vermittels einiger weiterer Betrachtungen aus der Arbeit von Herrn SAUVAGE (Annales de l'École Normale 1886). Die analogen Sätze für das System (C') sind leicht aus den angegebenen herzuleiten.

Es ist nun unter Zuhilfenahme der in Nr. I angestellten Betrachtungen nicht schwer, die vorstehenden Entwicklungen auf das Differentialgleichungensystem

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial z_\alpha}{\partial x} = \sum_\beta A_{\alpha\beta} z_\beta, \qquad \frac{\partial z_\alpha}{\partial y} = \sum_\beta B_{\alpha\beta} z_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

auszudehnen, worin $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ Functionen von x, y sind, welche den Integrabilitätsbedingungen Genüge leisten. Auf jedem im Gebiete der Variablen (x, y) verlaufenden geschlossenen Wege erfährt ein Fundamentalsystem des Systems (B) dieselbe Veränderung wie im Falle einer unabhängigen Veränderlichen, es geht nämlich

$$\begin{matrix} z_{11}, \ldots, z_{m1} \\ \cdots\cdots \\ z_{1m}, \ldots, z_{mm} \end{matrix}$$

über in

$$\begin{array}{c} \bar{z}_{11}, \ldots, \bar{z}_{m1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \bar{z}_{1m}, \ldots, \bar{z}_{mm}, \end{array}$$

wo

$$\begin{array}{c} \bar{z}_{\alpha 1} = C_{11} z_{\alpha 1} + \ldots + C_{1m} z_{\alpha m}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \bar{z}_{\alpha m} = C_{m1} z_{\alpha 1} + \ldots + C_{mm} z_{\alpha m} \end{array} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

ist. Setzt man die Coefficienten $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ als rationale Functionen von x, y voraus, deren Nenner die irreductiblen Factoren $\varphi(x, y), \psi(x, y), \ldots$ enthalten, so sind

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0, \ \ldots$$

die singulären Curven des Systems (B). Während früher das Verhalten eines Fundamentalsystems bei einem Umlauf der unabhängigen Variablen t um einen singulären Punkt untersucht wurde, betrachten wir hier ein Fundamentalsystem, welches auf einem geschlossenen Wege, der eine singuläre Curve $\psi(x, y) = 0$ umwindet, ein besonders einfaches Verfahren zeigt. Aus den Entwicklungen des ersten Abschnitts ist ersichtlich, dass in der Umgebung einer jeden Stelle von $\psi(x, y) = 0$ ein Fundamentalsystem existiert, welches bei einer Umwindung der singulären Curve dasselbe Verhalten zeigt, gleichviel in der Umgebung welcher Stelle die Umwindung stattfindet. In den Ausdrücken, die für die Lösungen eines solchen Fundamentalsystems im Falle einer Variablen oben aufgestellt wurden, braucht man, um die Gestalt des zu der Stelle (a, b) der singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ gehörigen Fundamentalsystems zu erhalten, bloss $(t - c)^r$ durch $\psi(x, y)^r$, $\log(t - c)$ durch $\log\psi(x, y)$ zu ersetzen und unter den ζ Functionen von x, y zu verstehen, welche sich in der Umgebung der Stelle (a, b) eindeutig verhalten, möglicherweise aber an den Stellen der Curve $\psi(x, y) = 0$ unendlich werden. Die Functionen ζ lassen eine Darstellung von folgender Gestalt zu:

$$\zeta = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{P}_\lambda(x - a, y - b)}{\psi(x, y)^\lambda}.$$

Durch die Substitution

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y)$$

geht die Function ζ, welche in der Umgebung von (a, b) eindeutig ist und nur an den Stellen von $\psi(x, y) = 0$ unendlich wird, in eine Function von u, v über, welche in der Umgebung der Stelle $(u = 0, v = 0)$ eindeutig ist und nur unendlich wird, wenn $v = 0$ ist. Sie ist nach dem LAURENT'schen Satze in der Form

$$\zeta = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} C_\lambda v^\lambda$$

darstellbar, wo C_λ in eine Potenzreihe von u entwickelbar ist. Führt man wieder x, y ein, so ergiebt sich die oben angegebene Form der Function ζ.

Von besonderem Interesse sind nun wieder diejenigen Differentialgleichungen, deren sämtliche Lösungen sich in der Umgebung der Stellen einer singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ regulär verhalten; in diesem Falle können die Exponenten r in der angedeuteten Entwicklung so gewählt werden, dass die Functionen ζ in Potenzreihen von $x - a, y - b$ entwickelbar sind. Ein Differentialgleichungensystem, dessen Lösungen die erwähnte Eigenschaft haben, ist z. B.

$$(\mathrm{B}') \qquad \begin{aligned} \psi(x, y)\frac{\partial z_\alpha}{\partial x} &= \sum_\beta f_{\alpha\beta}(x, y) \, . \, z_\beta, \\ \psi(x, y)\frac{\partial z_\alpha}{\partial y} &= \sum_\beta g_{\alpha\beta}(x, y) \, . \, z_\beta \end{aligned}$$

oder das allgemeinere

$$(\mathrm{B}'') \qquad \begin{aligned} \frac{\partial z_\alpha}{\partial x} &= \sum_\beta \psi(x, y)^{p_\alpha - p_\beta - 1} f_{\alpha\beta}(x, y) \, . \, z_\beta, \\ \frac{\partial z_\alpha}{\partial y} &= \sum_\beta \psi(x, y)^{p_\alpha - p_\beta - 1} g_{\alpha\beta}(x, y) \, . \, z_\beta, \end{aligned}$$

wo $p_1, \ldots, p_m$ positive oder negative ganze Zahlen sind, $f_{\alpha\beta}(x, y)$ und $g_{\alpha\beta}(x, y)$ Potenzreihen von $x - a, y - b$, welche den Integrabilitätsbedingungen Genüge leisten — unter (a, b) irgend eine Stelle der singulären Curve verstanden.

Aus dem Früheren folgt die Existenz eines Fundamentalsystems des Systems (B′), dessen Glieder von der Form

$$z_a = \psi(x, y)^r \zeta_a,$$

$$z_a = \psi(x, y)^r \{\zeta_a + \zeta_a' \log \psi(x, y) + \ldots\}$$

sind; $\zeta_a, \zeta_a', \ldots$ verhalten sich in der Umgebung der Stelle (a, b) eindeutig. Dass diese Functionen in unserem Falle bei geeigneter Wahl von r nicht unendlich werden, also in Potenzreihen von $x - a, y - b$ entwickelbar sind, lehrt folgende Betrachtung. Setzt man

$$x = a + a't, \qquad y = b + b't,$$

wo (a, b) eine einfache Stelle der Curve $\psi(x, y) = 0$ und

$$a'\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{a,b} + b'\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{a,b}$$

nicht gleich Null ist, so wird

$$\psi(x, y) = t\varphi(t),$$

$$\log \psi(x, y) = \log t + \chi(t),$$

$$z_a = t^r \bar{\zeta}_a,$$

$$z_a = t^r \{\bar{\zeta}_a + \bar{\zeta}_a' \log t + \ldots\};$$

$\varphi(t)$ ist eine für $t = 0$ nicht verschwindende Potenzreihe von t; $\bar{\zeta}_a, \bar{\zeta}_a', \ldots$ sind in der Umgebung von $t = 0$ eindeutige Functionen von t, die für $t = 0$ unendlich werden oder nicht, je nachdem $\zeta_a, \zeta_a', \ldots$ an den Stellen von $\psi(x, y) = 0$ unendlich werden oder nicht. Da aber z_a den Differentialgleichungen

$$t\frac{dz_a}{dt} = \sum_\beta h_{a\beta}(t) \cdot z_\beta,$$

$$h_{a\beta}(t) = \frac{a' f_{a\beta}(a + a't, b + b't) + b' g_{a\beta}(a + a't, b + b't)}{\varphi(t)}$$

genügt, so sind $\bar{\zeta}_a, \bar{\zeta}_a', \ldots$ bei geeigneter Wahl von r Potenzreihen von t, also auch $\zeta_a, \zeta_a', \ldots$ Potenzreihen von $x - a, y - b$. Für das System (B″) ergiebt sich hieraus der Satz:

»Das Differentialgleichungensystem (B'') besitzt in der Umgebung der Stelle (a, b) der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ m Lösungen von der Form

$$z_\alpha = \phi(x, y)^{r+p_\alpha}\zeta_\alpha,$$

$$z_\alpha = \phi(x, y)^{r+p_\alpha}\{\zeta_\alpha + \zeta_\alpha' \log \phi(x, y) + \dots\},$$

wo sämtliche ζ Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ sind.»

Wird das System (B') durch ein System von Potenzreihen $z_1, \dots, z_m$ befriedigt, so bestehen die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} \sum_\beta f_{\alpha\beta}(x, y) \,.\, z_\beta &\equiv 0 \\ \sum_\beta g_{\alpha\beta}(x, y) \,.\, z_\beta &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod \phi(x, y),$$

aus welchen sich die folgenden ergeben:

$$\left.\begin{aligned} | f_{\alpha\beta}(x, y) | &\equiv 0 \\ | g_{\alpha\beta}(x, y) | &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod \phi(x, y).$$

Setzt man nun

$$z_\alpha = \phi(x, y)^r \zeta_\alpha$$

in das allgemeine System (B') ein, so genügt ζ_α den Differentialgleichungen

$$\phi(x, y)\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial x} = \sum_\beta \left[f_{\alpha\beta}(x, y) - r\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right]\zeta_\beta.$$

$$\phi(x, y)\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial y} = \sum_\beta \left[g_{\alpha\beta}(x, y) - r\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right]\zeta_\beta.$$

Sollen nun $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ sein, so muss r die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} \left| f_{\alpha\beta}(x, y) - r\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right| &\equiv 0 \\ \left| g_{\alpha\beta}(x, y) - r\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right| &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod \phi(x, y)$$

befriedigen, aus welchen, wenn man $x = a$, $y = b$ setzt, die Gleichungen

$$\left| f_{\alpha\beta}(a, b) - r\delta_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial \phi}{\partial x}\right]_{x=a,\, y=b}\right| = 0,$$

$$\left| g_{\alpha\beta}(a, b) - r\delta_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial \phi}{\partial y}\right]_{x=a,\, y=b}\right| = 0$$

hervorgehen. Die beiden Congruenzen müssen, da die Existenz von Integralen von der Gestalt

$$z_a = \phi(x, y)^r \mathfrak{P}_a(x - a, y - b)$$

bereits feststeht, dieselben m Wurzeln $r_1, \ldots, r_m$ haben; man erhält für $r_1, \ldots, r_m$ dieselben Werte, welche Stelle (a, b) der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ man auch in die Congruenzen einsetzt, um aus denselben Gleichungen herzuleiten. Nimmt man Rücksicht auf die Form der Lösungen, wie wir sie im Falle eines mehrfachen Elementarteilers bei einem System mit einer unabhängigen Variablen kennen gelernt haben, so erkennt man, dass die beiden Determinanten

$$\left| f_{\alpha\beta}(x, y) - r\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x} \right|,$$
$$\left| g_{\alpha\beta}(x, y) - r\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial y} \right|$$

dieselben Elementarteiler $(r - r_0)^e$ besitzen, wenn man darin für (x, y) irgend eine Stelle von $\phi(x, y) = 0$ setzt. Geht man schliesslich, ähnlich wie es oben bei einem Systeme mit einer Variablen geschehen ist, von dem System (B′) zu (B″) über, so ergiebt sich der Satz:

»Die aus dem System (B″) hergeleiteten Determinanten

$$\left| f_{\alpha\beta}(x, y) - (r + p_\alpha)\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x} \right|,$$
$$\left| g_{\alpha\beta}(x, y) - (r + p_\alpha)\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial y} \right|$$

stimmen, wenn man für (x, y) eine Stelle von $\phi(x, y) = 0$ setzt, in den Elementarteilern überein. Sind lauter einfache Elementarteiler $r - r_1, \ldots, r - r_m$ vorhanden, und befinden sich unter den Grössen $r_1, \ldots, r_m$ keine zwei mit ganzzahliger Differenz, so ist in der Umgebung einer Stelle (a, b) der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ — die nicht zugleich einer anderen singulären Curve angehört — ein Fundamentalsystem von der Form

$$\begin{array}{lcl} z_{11} = \phi(x, y)^{r_1 + p_1}\zeta_{11}, & \ldots, & z_{m1} = \phi(x, y)^{r_1 + p_m}\zeta_{m1}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ z_{1m} = \phi(x, y)^{r_m + p_1}\zeta_{1m}, & \ldots, & z_{mm} = \phi(x, y)^{r_m + p_m}\zeta_{mm} \end{array}$$

vorhanden, wo sämtliche ζ Potenzreihen von $x-a, y-b$ sind. Einem e-fachen Elementarteiler $r-r_0$ entsprechen e Lösungen, deren Gestalt sich aus der Entwicklung auf S. 142 dadurch ergiebt, dass man t^{r_0} durch $\psi(x, y)^{r_0}$, $\log t$ durch $\log\psi(x, y)$ ersetzt und sich sämtliche ζ als Potenzreihen von $x-a, y-b$ vorstellt. In ähnlicher Weise erhält man die Gestalt eines Fundamentalsystems in dem Falle, dass mehrere Wurzeln r sich um ganze Zahlen unterscheiden.»

III.

Die im vorigen Abschnitte über totale lineare Differentialgleichungen abgeleiteten Sätze wenden wir nun an, um das System linearer partieller Differentialgleichungen

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung zu integrieren, dass die Coefficienten a, b, c solche rationale Functionen von x, y sind, dass sich drei linear unabhängige Integrale ergeben. Damit dies der Fall ist, müssen die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

die Integrabilitätsbedingungen des Systems (A), identisch in $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ erfüllt sein. Dass unter dieser Bedingung auch wirklich drei linear un-

»Das Differentialgleichungensystem (B″) besitzt in der Umgebung der Stelle (a, b) der singulären Curve $\phi(x,y) = 0$ m Lösungen von der Form

$$z_\alpha = \phi(x, y)^{r+p_\alpha}\zeta_\alpha,$$

$$z_\alpha = \phi(x, y)^{r+p_\alpha}\{\zeta_\alpha + \zeta'_\alpha \log\phi(x, y) + \ldots\},$$

wo sämtliche ζ Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ sind.»

Wird das System (B′) durch ein System von Potenzreihen $z_1, \ldots, z_m$ befriedigt, so bestehen die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_\beta f_{\alpha\beta}(x, y) \,.\, z_\beta \equiv 0 \\ \sum\limits_\beta g_{\alpha\beta}(x, y) \,.\, z_\beta \equiv 0 \end{array}\right\} \mod \phi(x, y),$$

aus welchen sich die folgenden ergeben:

$$\left.\begin{array}{l} | f_{\alpha\beta}(x, y) | \equiv 0 \\ | g_{\alpha\beta}(x, y) | \equiv 0 \end{array}\right\} \mod \phi(x, y).$$

Setzt man nun

$$z_\alpha = \phi(x, y)^r \zeta_\alpha$$

in das allgemeine System (B′) ein, so genügt ζ_α den Differentialgleichungen

$$\phi(x, y)\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial x} = \sum_\beta\left[f_{\alpha\beta}(x, y) - r\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]\zeta_\beta.$$

$$\phi(x, y)\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial y} = \sum_\beta\left[g_{\alpha\beta}(x, y) - r\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]\zeta_\beta.$$

Sollen nun $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ sein, so muss r die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} \left| f_{\alpha\beta}(x, y) - r\delta_{\alpha\beta}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right| \equiv 0 \\ \left| g_{\alpha\beta}(x, y) - r\delta_{\alpha\beta}\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right| \equiv 0 \end{array}\right\} \mod \phi(x, y)$$

befriedigen, aus welchen, wenn man $x = a$, $y = b$ setzt, die Gleichungen

$$\left| f_{\alpha\beta}(a, b) - r\delta_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]_{x=a,\, y=b}\right| = 0,$$

$$\left| g_{\alpha\beta}(a, b) - r\delta_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]_{x=a,\, y=b}\right| = 0$$

übergeführt, wo die c Constanten sind, die nur von der Wahl des Weges abhängen. In der Umgebung einer Stelle (a, b) einer singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ existiert ein Fundamentalsystem, dessen Elemente von der Form

$$z = \phi(x, y)^r \zeta,$$

$$z = \phi(x, y)^r \{\zeta + \zeta' \log \phi(x, y) + \ldots\}$$

sind, wo $\zeta, \zeta', \ldots$ Functionen sind, die sich in der Umgebung von (a, b) eindeutig verhalten.

Wir gehen auf das allgemeine System (A) nicht weiter ein, sondern machen über die Coefficienten die Voraussetzung, dass sie in der Umgebung der Stellen $(x = a, y = b)$ der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ die Form

$$a_0 = \frac{A_0}{\phi^2}, \qquad a_1 = \frac{A_1}{\phi}, \qquad a_2 = \frac{A_2}{\phi},$$

$$b_0 = \frac{B_0}{\phi^2}, \qquad b_1 = \frac{B_1}{\phi}, \qquad b_2 = \frac{B_2}{\phi},$$

$$c_0 = \frac{C_0}{\phi^2}, \qquad c_1 = \frac{C_1}{\phi}, \qquad c_2 = \frac{C_2}{\phi}$$

haben, wo A, B, C in Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ entwickelbar sind.

Diese Form besitzen die Coefficienten des Differentialgleichungensystems der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ in der Umgebung der Stellen der sämtlichen singulären Curven.

Das Differentialgleichungensystem

$$(\mathrm{A}') \qquad \begin{aligned} \phi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= A_0 z + \phi A_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \phi A_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \phi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= B_0 z + \phi B_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \phi B_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \phi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= C_0 z + \phi C_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \phi C_2 \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

geht, wenn man

$$z_0 = z, \qquad z_1 = \phi \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad z_2 = \phi \frac{\partial z}{\partial y}$$

setzt, über in das System totaler linearer Differentialgleichungen

$$\phi\frac{\partial z_0}{\partial x} = z_1, \qquad \phi\frac{\partial z_0}{\partial y} = z_2,$$

$$\phi\frac{\partial z_1}{\partial x} = A_0 z_0 + \left(A_1 - \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)z_1 + A_2 z_2,$$

$$\phi\frac{\partial z_1}{\partial y} = B_0 z_0 + \left(B_1 - \frac{\partial\phi}{\partial y}\right)z_1 + B_2 z_2,$$

$$\phi\frac{\partial z_2}{\partial x} = B_0 z_0 + B_1 z_1 + \left(B_2 - \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)z_2,$$

$$\phi\frac{\partial z_2}{\partial y} = C_0 z_0 + C_1 z_1 + \left(C_2 - \frac{\partial\phi}{\partial y}\right)z_2,$$

welches von der in II. behandelten Form (B') ist. Daher haben alle Integrale von (A') die Form

$$z = \phi(x, y)^r \mathfrak{P}(x-a, y-b),$$

$$z = \phi(x, y)^r \{\mathfrak{P}_1(x-a, y-b) + \mathfrak{P}_2(x-a, y-b)\log\phi(x, y) + \ldots\}.$$

Jedenfalls muss ein Integral

$$z = \phi(x, y)^r \zeta,$$

wo ζ eine Potenzreihe von $x-a, y-b$ ist, vorhanden sein; setzt man diesen Ausdruck in (A') ein, so ergeben sich für ζ die Differentialgleichungen

$$\phi^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = P_0\zeta + \phi P_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \phi P_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$\phi^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} = Q_0\zeta + \phi Q_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \phi Q_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$\phi^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = R_0\zeta + \phi R_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \phi R_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

wenn man bezeichnet:

$$P_0 = A_0 + r\left(A_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - r(r-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2,$$

$$Q_0 = B_0 + r\left(B_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + B_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - r(r-1)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$R_0 = C_0 + r\left(C_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + C_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - r(r-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2,$$

$$P_1 = A_1 - 2r\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad Q_1 = B_1 - r\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad R_1 = C_1,$$

$$P_2 = A_2, \qquad Q_2 = B_2 - r\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad R_2 = C_2 - 2r\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Soll ζ eine Potenzreihe von $x-a$, $y-b$ sein, welche nicht das Produkt aus $\psi(x, y)$ in eine andere Potenzreihe von $x-a$, $y-b$ ist, so muss

$$\left.\begin{aligned} P_0 &\equiv 0 \\ Q_0 &\equiv 0 \\ R_0 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \mod \psi(x, y)$$

sein. Es muss also eine Grösse r, welche diese drei Congruenzen gleichzeitig befriedigt, vorhanden sein; wir werden sogleich sehen, dass die drei Gleichungen zweiten Grades in r

$$A_0 + r\left(A_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = r(r-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2,$$

$$B_0 + r\left(B_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + B_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = r(r-1)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$C_0 + r\left(C_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + C_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = r(r-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2,$$

welche man aus den obigen Congruenzen erhält, wenn man für (x, y) eine beliebige Stelle (a, b) der Curve $\psi(x, y) = 0$ setzt, zwei Wurzeln r_1, r_2 gemein haben, welche von der Wahl der Stelle (a, b) unabhängig sind. Es ist allerdings möglich, dass diese Gleichungen zum Teil identisch erfüllt sind. Hätten die drei Gleichungen nur eine Wurzel gemein, so müsste das System (A′) drei Integrale von einer der folgenden Formen

1) $\phi^r \zeta_1\,,\ \phi^r \zeta_2\,,\ \phi^r \zeta_3,$

2) $\phi^r \zeta_1\,,\ \phi^r \zeta_2\,,\ \phi^r(\zeta' + \zeta'' \log \phi),$

3) $\phi^r \zeta_1\,,\ \phi^r(\zeta_2 \log \phi + \zeta_2')\,,\ \phi^r[\zeta_3(\log \phi)^2 + \zeta_3' \log \phi + \zeta_3'']$

besitzen. Setzt man

$$P_0 = \phi P_0', \qquad Q_0 = \phi Q_0', \qquad R_0 = \phi R_0',$$

so müsste das System

$$\phi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = P_0' \zeta + P_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$\phi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = Q_0' \zeta + Q_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$\phi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = R_0' \zeta + R_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + R_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

entweder ein Integral

$$\zeta = \zeta' \log \phi + \zeta'',$$

wo ζ', ζ'' Potenzreihen sind, besitzen oder durch drei nicht durch $\phi(x, y)$ teilbare Potenzreihen ζ_1, ζ_2, ζ_3 befriedigt werden. Im ersten Falle genügt ζ' demselben Differentialgleichungensystem wie ζ, während sich für ζ'' das System

$$\phi \frac{\partial^2 \zeta''}{\partial x^2} = P_0' \zeta'' + P_1 \frac{\partial \zeta''}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \zeta''}{\partial y} + U\zeta' - 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta'}{\partial x},$$

$$\phi \frac{\partial^2 \zeta''}{\partial x \partial y} = Q_0' \zeta'' + Q_1 \frac{\partial \zeta''}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial \zeta''}{\partial y} + V\zeta' - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta'}{\partial y}\right),$$

$$\phi \frac{\partial^2 \zeta''}{\partial y^2} = R_0' \zeta'' + R_1 \frac{\partial \zeta''}{\partial x} + R_2 \frac{\partial \zeta''}{\partial y} + W\zeta' - 2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta'}{\partial y}$$

ergiebt, worin

$$U = \frac{P_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2}{\psi},$$

$$V = \frac{Q_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\psi},$$

$$W = \frac{R_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + R_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}{\psi}.$$

Da nun die Potenzreihe ζ' nicht durch $\psi(x, y)$ teilbar sein darf, so müssen die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} P_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 &\equiv 0 \\ Q_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} &\equiv 0 \\ R_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + R_1 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod \psi$$

bestehen; d. h. die determinierenden Gleichungen des Systems für ζ:

$$s\left(P_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - s(s-1)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \equiv 0,$$

$$s\left(Q_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - s(s-1)\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} \equiv 0,$$

$$s\left(R_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + R_2 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - s(s-1)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \equiv 0$$

haben die doppelte Wurzel $s = 0$; dann ist r eine doppelte gemeinschaftliche Wurzel der obigen drei Gleichungen, so dass diese doch zwei Wurzeln gemein haben.

Würde das System für ζ durch drei nicht durch $\psi(x, y)$ teilbare Potenzreihen befriedigt, so wäre $\psi(x, y) = 0$ gar keine singuläre Curve, und das System für ζ hätte die Form

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = L_0\zeta + L_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + L_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} = M_0\zeta + M_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + M_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = N_0\zeta + N_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + N_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

unter L, M, N Potenzreihen von $x - a, y - b$ verstanden. Die Substitution

$$\zeta = \phi^{-r}z$$

liefert das Differentialgleichungensystem, welchem z genügt. Man findet, dass die determinierenden Gleichungen dieses Systems die beiden Wurzeln r und $r + 1$ besitzen, was mit der Annahme, dass dieselben nur eine einzige Wurzel r gemein haben, in Widerspruch steht.

Somit ist bewiesen, dass die drei Congruenzen

$$P_0 \equiv 0, \qquad Q_0 \equiv 0, \qquad R_0 \equiv 0, \qquad \bmod \phi(x, y),$$

wo P_0, Q_0, R_0 die oben definierten ganzen Functionen zweiten Grades von r sind, zwei (verschiedene oder zusammenfallende) Wurzeln gemein haben. Sind die beiden Wurzeln r_1, r_2 von einander verschieden und ist ihre Differenz keine ganze Zahl, so sind zwei Integrale von der Form

$$z = \phi(x, y)^{r_1}\zeta$$

und eines von der Form

$$z = \phi(x, y)^{r_2}\zeta$$

vorhanden, unter ζ Potenzreihen von $x - a, y - b$ verstanden. Es ist nur zu ermitteln, welcher der beiden Wurzeln zwei Integrale zugehören. Man berechnet, unter r eine der beiden Wurzeln verstehend, die oben eingeführten Grössen P, Q, R; da dem System

$$\phi\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = P_0'\zeta + P_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + P_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$\phi\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} = Q_0'\zeta + Q_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + Q_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$\phi\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = R_0'\zeta + R_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + R_2\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

durch eine Potenzreihe ζ genügt wird, so bestehen die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} P'_0\zeta + P_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + P_2\frac{\partial\zeta}{\partial y} &\equiv 0 \\ Q'_0\zeta + Q_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + Q_2\frac{\partial\zeta}{\partial y} &\equiv 0 \\ R'_0\zeta + R_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + R_2\frac{\partial\zeta}{\partial y} &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod \phi(x, y)$$

so dass auch

$$\begin{vmatrix} P'_0, & P_1, & P_2 \\ Q'_0, & Q_1, & Q_2 \\ R'_0, & R_1, & R_2 \end{vmatrix} \equiv 0, \bmod \phi(x, y)$$

sein muss. Sind nicht alle Subdeterminanten dieser Determinante $\equiv 0$, mod $\phi(x, y)$, so kann man von den zu einer Stelle (a, b) der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ gehörigen Werten von $\zeta, \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}$ zwei durch den dritten ausdrücken, während in dem Falle, wo alle jene Subdeterminanten $\equiv 0$, mod $\phi(x, y)$ sind, zwei der Grössen $\zeta, \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}$ willkürlich bleiben. Im ersteren Falle existiert eine, im letzteren zwei Potenzreihen ζ.

»Infolge der Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungensystems (A′) haben die drei Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} A_0 + r\left(A_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + A_2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) &\equiv r(r-1)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \\ B_0 + r\left(B_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + B_2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) &\equiv r(r-1)\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ C_0 + r\left(C_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + C_2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) &\equiv r(r-1)\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 \end{aligned}\right\} \bmod \phi(x, y)$$

zwei Wurzeln r_1, r_2 — die von x, y unabhängig sind — gemein. Sind dieselben voneinander verschieden und ist ihre Differenz keine ganze Zahl, so besitzt (A′) in der Umgebung einer Stelle (a, b) der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ ein Fundamentalsystem von folgender Gestalt:

$$z_0 = \phi(x, y)^{r_1}\mathfrak{P}_0(x-a, y-b),$$

$$z_1 = \phi(x, y)^{r_1}\mathfrak{P}_1(x-a, y-b),$$

$$z_2 = \phi(x, y)^{r_2}\mathfrak{P}_2(x-a, y-b).»$$

Wir haben noch die beiden Fälle zu behandeln, wo $r_1 = r_2$ und $r_2 - r_1 = e$ eine ganze Zahl ist. Im ersten Falle könnte nach dem Früheren ein Integral

$$z = \phi(x, y)^{r_1}\{\zeta' (\log\phi)^2 + \zeta'' \log\phi + \zeta'''\},$$

worin ζ', ζ'', ζ''' Potenzreihen sind, vorkommen. Die erste der drei zur Bestimmung von ζ''' dienenden Differentialgleichungen wäre:

$$\phi\frac{\partial^2\zeta'''}{\partial x^2} = P_0'\zeta''' + P_1\frac{\partial\zeta'''}{\partial x} + P_2\frac{\partial\zeta'''}{\partial y} + U\zeta'' - 2\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta''}{\partial x} - 2\frac{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2}{\phi}\zeta';$$

da hier ζ' nicht durch ϕ teilbar sein dürfte, so müsste

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \equiv 0, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} \equiv 0, \qquad \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 \equiv 0, \qquad \text{mod } \phi$$

sein; da diese Bedingungen nicht erfüllbar sind, so ist ein Integral von der vorausgesetzten Form nicht vorhanden. Ein Integral

$$z = \phi(x, y)^r(\zeta' \log\phi + \zeta'')$$

muss aber existieren, da zwei um 1 verschiedene Wurzeln vorhanden sind, wenn das System (A') durch drei Integrale $z = \phi^r\zeta$ befriedigt wird. In unserem Falle müssen alle aus dem System

$$\begin{matrix} P_0', & P_1, & P_2, \\ Q_0', & Q_1, & Q_2, \\ R_0', & R_1, & R_2 \end{matrix}$$

gebildeten Determinanten zweiten Grades $\equiv 0$, mod ϕ, sein, denn wäre dies nicht der Fall, so hätte das System (A') nur ein Integral $z = \psi^r \zeta$, aber, wie man leicht nachrechnet, auch nur ein Integral

$$z = \psi^r(\zeta' \log \psi + \zeta''),$$

also nur zwei linear unabhängige Integrale.

»Ist $r_1 = r_2 = r$, so besitzt das System (A') ein Fundamentalsystem von folgender Form

$$\begin{aligned} z_1 &= \psi(x, y)^r \zeta_1, \\ z_2 &= \psi(x, y)^r \zeta_2, \\ z_3 &= \psi(x, y)^r [\zeta' \log \psi(x, y) + \zeta'']; \end{aligned}$$

$\zeta_1, \zeta_2, \zeta', \zeta''$ sind Potenzreihen von $x - a, y - b$, und es ist

$$\zeta' = c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2.«$$

Letzteres kommt daher, dass auch der Coefficient von $\log \psi$ in z_3, nämlich $\psi^r \zeta'$, ein Integral von (A') ist. Es sei nun $r_2 = r, r_1 = r + e$, wo e eine ganze positive Zahl ist. Soll ein Integral vorhanden sein, welches in Bezug auf $\log \psi$ vom zweiten Grade ist, so muss dasselbe eine der beiden Formen

$$\psi^{r+e} \zeta^{(0)} (\log \psi)^2 + \psi^{r+e} \zeta' \log \psi + \psi^r \zeta'',$$

$$\psi^{r+e} \zeta^{(0)} (\log \psi)^2 + \psi^r \zeta' \log \psi + \psi^r \zeta''$$

haben. Im ersten Falle müsste auch ein Integral von der Form

$$\psi^{r+e}(\zeta^{(0)} \log \psi + c\zeta')$$

existieren, was aber nur dann möglich ist, wenn $r_1 = r_2$ ist. Im zweiten Falle ergeben sich für ζ'' drei Differentialgleichungen, deren erste ist

$$\psi \frac{\partial^2 \zeta''}{\partial x^2} = P_0' \zeta'' + P_1 \frac{\partial \zeta''}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \zeta''}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \zeta' - 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + \psi^{e-1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \zeta^{(0)}$$

$$+ \frac{P_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2}{\psi} \zeta^{(0)};$$

der Zähler des letzten Gliedes müsste durch ϕ teilbar und folglich $r_1 = r_2$ sein.

»Ist $r_1 - r_2 = e$ eine ganze positive Zahl, so hat das System (A') ein oder zwei Integrale von der Form

$$z = \phi(x, y)^{r_1}\zeta$$

und zwei bez. ein Integral von der Form

$$z = \phi(x, y)^{r_1}\zeta' \log\phi(x, y) + \phi(x, y)^{r_2}\zeta'',$$

wo sämtliche ζ Potenzreihen von $x - a, y - b$ sind.»

Ob ein oder zwei Integrale von der ersten Form vorhanden sind, erkennt man wie oben; es kann auch vorkommen, dass die logarithmischen Glieder wegfallen, was aber nicht möglich ist, wenn $r_1 = r_2$ ist.

Wir sind nun im Stande, das Differentialgleichungensystem der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ zu behandeln. Man kann demselben die Form geben:

$$x(1 - x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left((\alpha + \beta + 1)x - \gamma - \frac{\beta'(1 - x)y}{x - y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta y(1 - y)}{x - y}\frac{\partial z}{\partial y} + \alpha\beta z,$$

$$(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \beta'\frac{\partial z}{\partial x} - \beta\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$y(1 - y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left((\alpha + \beta' + 1)y - \gamma - \frac{\beta x(1 - y)}{y - x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\beta' x(1 - x)}{y - x}\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha\beta' z.$$

In der Umgebung der Stellen der singulären Curven $x = 0$, $y = 0$, $1 - x = 0$, $1 - y = 0$, $x - y = 0$ ist das System von der Form (A'). Führt man dasselbe durch die Substitution $x = \frac{1}{x'}$ über in

$$x'^2(1 - x')\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} =$$

$$x'\left(\alpha + \beta - 1 - (\gamma - 2)x' + \frac{\beta' x'(1 - x')y}{1 - x'y}\right)\frac{\partial z}{\partial x'} - \frac{\beta x' y(1 - y)}{1 - x'y}\frac{\partial z}{\partial y} - \alpha\beta z,$$

$$x'(1 - x'y)\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y} = \beta' x'^2\frac{\partial z}{\partial x'} + \beta\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$y(1 - y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\beta' x'(1 - x')}{x'y - 1}\frac{\partial z}{\partial x'} + \left((\alpha + \beta' + 1)y - \gamma - \frac{\beta(1 - y)}{x'y - 1}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \alpha\beta' z,$$

so erkennt man, dass es auch in der Nähe der unendlich fernen Linie $x = \infty$ oder $x' = 0$ dieselbe Form besitzt. Dasselbe gilt für die andere unendlich ferne Linie $y = \infty$. Setzt man für $\psi(x, y)$ der Reihe nach

$$1)\quad x, \qquad 2)\quad 1 - x, \qquad 3)\quad x - y, \qquad 4)\quad x',$$

so erhält man für die Coefficienten des Systems (A′)

$$\begin{matrix} A_0, A_1, A_2, \\ B_0, B_1, B_2, \\ C_0, C_1, C_2 \end{matrix}$$

an einer Stelle (x, y) der jedesmaligen singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ bezw. die folgenden Werte:

$$1)\quad \begin{matrix} 0, & \beta' - \gamma, & -\beta(1-y), \\ 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0; \end{matrix}$$

$$2)\quad \begin{matrix} 0, & \alpha + \beta - \gamma + 1, & \beta y, \\ 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0; \end{matrix}$$

$$3)\quad \begin{matrix} 0, & -\beta', & \beta, \\ 0, & \beta', & -\beta, \\ 0, & -\beta', & \beta; \end{matrix}$$

$$4)\quad \begin{matrix} -\alpha\beta, & \alpha + \beta - 1, & -\beta y(1-y), \\ 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0. \end{matrix}$$

Die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} A_0 + r\left(A_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) &\equiv r(r-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \\ B_0 + r\left(B_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + B_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) &\equiv r(r-1)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ C_0 + r\left(C_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + C_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) &\equiv r(r-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 \end{aligned}\right\} \bmod \psi(x, y)$$

liefern, wenn man für (x, y) eine Stelle der jedesmaligen singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ setzt, die zur Bestimmung von r dienenden Gleichungen:

$$1)\quad r(\beta' - \gamma) = r(r - 1),$$

$$2)\quad - r(\alpha + \beta - \gamma + 1) = r(r - 1),$$

$$3)\quad r(\beta + \beta') = - r(r - 1),$$

$$4)\quad \alpha\beta + r(\alpha + \beta - 1) = r(r - 1),$$

welche die Wurzeln 1) $0, 1 + \beta' - \gamma$; 2) $0, \gamma - \alpha - \beta$; 3) $0, 1 - \beta - \beta'$; 4) α, β ergeben. Ähnlich verfährt man bei den singulären Curven $y = 0$, $1 - y = 0$, $y = \infty$. Sind die Constanten der Reihe $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ so beschaffen, dass keine der Gleichungen für r zwei gleiche oder um eine ganze Zahl verschiedene Wurzeln besitzt, so ergeben sich die in der Einleitung angegebenen Fundamentalsysteme.

Die Frage nach dem Verhalten der Integrale von (A) und (A′) in der Umgebung einer Schnittstelle (a, b) zweier singulärer Curven $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$ möge für eine andere Gelegenheit aufgespart bleiben, ebenso die Frage nach den notwendigen Bedingungen für das Vorhandensein lauter regulärer Integrale in der Umgebung der Stellen einer singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen von der Form (A).

IV.

Die bisherigen Resultate können in verschiedener Hinsicht verallgemeinert werden.

Wenn man die Entwicklungen des ersten Abschnitts auf Functionen mit n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ ausdehnt, was ohne irgend welche Mühe möglich ist, so ergeben sich folgende Definitionen und Sätze:

Wenn sich eine analytische Function von $x_1, \ldots, x_n$, $F(x_1, \ldots, x_n)$, an allen der irreduciblen algebraischen Gleichung $\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ genügenden Stellen $(x_1, \ldots, x_n)$ singulär verhält, so wird das algebraische

Gebilde $\phi(x_1, \dots, x_n) = 0$ ein singuläres Gebilde der Function $F(x_1, \dots, x_n)$ genannt. Ein im Gebiete der Variablen $x_1, \dots, x_n$ verlaufender geschlossener Weg umwindet das singuläre Gebilde $\phi(x_1, \dots, x_n) = 0$ λ-fach in positivem Sinne, wenn beim Durchlaufen dieses Weges das Argument der complexen Grösse $\phi(x_1, \dots, x_n)$ um $2\lambda\pi i$ wächst. Ist nun $(a_1, \dots, a_n)$ eine Stelle des singulären Gebildes $\phi(x_1, \dots, x_n) = 0$, welche nicht zugleich einem anderen singulären Gebilde angehört, so führt jeder in der Umgebung von $(a_1, \dots, a_n)$ verlaufende geschlossene Weg, welcher das Gebilde $\phi(x_1, \dots, x_n) = 0$ nicht umwindet, die mehrdeutige Function $F(x_1, \dots, x_n)$ zu ihrem ursprünglichen Werte zurück. Ist $(b_1, \dots, b_n)$ irgend eine andere Stelle des irreductiblen Gebildes $\phi(x_1, \dots, x_n) = 0$, so zeigt die Function, wenn sie das singuläre Gebilde in der Umgebung der Stelle $(b_1, \dots, b_n)$ umwindet, das nämliche Verhalten, wie wenn die Umwindung in der Umgebung der Stelle $(a_1, \dots, a_n)$ stattfindet, wie dies für $n = 2$ im ersten Abschnitt näher auseinandergesetzt wurde.

Die Anwendung dieser Sätze auf bestimmte mehrdeutige Functionen von n Veränderlichen, wie z. B. auf die Integrale linearer Differentialgleichungen mit n unabhängigen Variablen, geschieht in derselben Weise wie im Falle zweier Variablen. Die Ausdehnung der im zweiten Abschnitt über totale lineare Differentialgleichungen mit einer und zwei unabhängigen Variablen bewiesenen Sätze auf Differentialgleichungen mit n Variablen, d. h. auf Differentialgleichungensysteme von der Form

$$dy_\alpha = \sum_\beta A^{(1)}_{\alpha\beta} y_\beta \, . \, dx_1 + \dots + \sum_\beta A^{(n)}_{\alpha\beta} y_\beta \, . \, dx_n \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots, m)$$

wo $A^{(1)}_{\alpha\beta}, \dots, A^{(n)}_{\alpha\beta}$ Functionen von $x_1, \dots, x_n$ sind, welche die Integrabilitätsbedingungen erfüllen, ist so einfach, dass wir von einer Angabe der verallgemeinerten Sätze absehen können.

Schwieriger dagegen ist die Ausdehnung der Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung auf Differentialgleichungen mit n Variablen, d. h. die Verallgemeinerung der Entwicklungen von III.

Das allgemeine Integral einer linearen partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{(\nu)} A_{\nu_1, \dots, \nu_n} \frac{\partial^{\nu_1 + \dots + \nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} = 0,$$

deren Coefficienten $A_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ Functionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind, enthält nicht wie das allgemeine Integral einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung m willkürliche Constanten, sondern m willkürliche Functionen von $n-1$ Veränderlichen. Mehrere lineare partielle Differentialgleichungen haben im allgemeinen gar kein Integral gemein; wenn aber die Coefficienten gewisse Bedingungen erfüllen, kann es eintreten, dass die Differentialgleichungen ein gemeinsames Integral mit einer endlichen Anzahl willkürlicher Functionen von $n-1, n-2, \ldots, 1, 0$ Variablen besitzen. Wir beschäftigen uns hier nur mit dem Fall, wo das allgemeine Integral des Differentialgleichungensystems

$$\sum_{(\nu)} A^{(\alpha)}_{\nu_1,\ldots,\nu_n} \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}} = 0 \qquad (\alpha=1,\ldots,p)$$

— unter $A^{(\alpha)}_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ sind Functionen von $x_1, \ldots, x_n$ verstanden — m willkürliche Constanten $c_1, \ldots, c_m$ enthält, also von der Form

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_m y_m$$

ist, und zwar stellen wir zunächst solche Differentialgleichungensysteme von besonderer Gestalt auf.

Eine Differentialgleichung mit einer unabhängigen Variablen x erhält man, indem man $\frac{d^m y}{dx^m}$ als lineare homogene Function von $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ darstellt:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_{m-1}\frac{dy}{dx} + p_m y.$$

Durch wiederholte Differentiation der Differentialgleichung kann man alle Ableitungen $\frac{d^\lambda y}{dx^\lambda}$ durch $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ linear ausdrücken. Auch im Falle von n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ nehmen wir zunächst gewisse m niedrigste Ableitungen — zu denen auch y selbst gehört — an und stellen gewisse nächst höhere Ableitungen als lineare homogene Functionen jener m Ableitungen dar, so dass man durch wiederholte Differentiation alle höheren Ableitungen durch die m zuerst angenommenen

Ableitungen ausgedrückt erhält. Für die partiellen Ableitungen wird die Bezeichnung

$$y^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = \frac{\partial^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n} y}{\partial x_1^{\lambda_1} \ldots \partial x_n^{\lambda_n}}$$

angewandt; das Wertsystem $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ wird als Indexsystem der Ableitung bezeichnet. Wir bilden zunächst eine Gruppe von m Indexsystemen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von der Eigenschaft, dass, wenn $(\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ ein Indexsystem der Gruppe ist, auch das Indexsystem $(\alpha_1'', \ldots, \alpha_n'')$ derselben angehört, falls $\alpha_1'' \leqq \alpha_1', \ldots, \alpha_n'' \leqq \alpha_n'$ ist. Aus dieser ersten Gruppe leiten wir eine zweite Gruppe von Indexsystemen $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ ab; wir bilden nämlich aus jedem Indexsystem $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ der ersten Gruppe die Indexsysteme $(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha_1, \alpha_2 + 1, \ldots, \alpha_n)$, $\ldots$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n + 1)$, lassen aber diejenigen, welche schon in der ersten Gruppe vorkommen, wieder weg. Sodann denken wir uns alle Ableitungen, deren Indexsysteme der zweiten Gruppe angehören, als lineare homogene Functionen derjenigen m Ableitungen dargestellt, deren Indexsysteme in der ersten Gruppe enthalten sind. Wir erhalten so eine Anzahl Gleichungen von der Form

$$y^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} = \sum_{(\alpha)} P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} \cdot y^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)};$$

die Coefficienten P setzen wir als eindeutige analytische Functionen von $x_1, \ldots, x_n$ voraus. Ist nun $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ irgend ein Indexsystem, so erhält man $y^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}$ durch Differentiation aus den gegebenen Differentialgleichungen und zwar im allgemeinen auf verschiedene Arten. Damit sämtliche Ausdrücke, die sich für $y^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}$ ergeben, übereinstimmen, müssen die Coefficienten $P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}$ gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllen, deren Aufstellung wir unterlassen, die wir aber immer als erfüllt voraussetzen. Man erhält dann

$$y^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = \sum_{(\alpha)} P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} \cdot y^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)},$$

wo die Coefficienten $P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}$ aus den Functionen $P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}$ und deren Ableitungen gebildet sind, und zwar durch Addition und Multiplication. Wenn sich sämtliche Functionen $P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}$ an der Stelle $(x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n)$ regulär verhalten und wenn die Werte der p Ableitungen der ersten Gruppe an dieser Stelle willkürlich festgesetzt sind, $y^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = \eta^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$, so erhält man für alle übrigen Ableitungen endliche Werte, z. B. $y^{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} = \eta^{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}$. Die Potenzreihe

$$y = \sum_\lambda \eta^{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} \frac{(x_1 - a_1)^{\lambda_1}}{\underline{|\lambda_1}} \cdots \frac{(x_n - a_n)^{\lambda_n}}{\underline{|\lambda_n}}$$

convergiert — wie sich aus einem Satze von Bouquet über totale Differentialgleichungen ergiebt — und stellt somit ein dem Differentialgleichungensystem genügendes Functionselement dar. Da sich sämtliche Grössen $\eta^{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}$ als lineare homogene Functionen der m Ableitungen $\eta^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$, deren Anfangswerte wir nun mit $c_1, \dots, c_m$ bezeichnen, darstellen lassen, so nimmt obige Potenzreihe die Form an:

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_m y_m,$$

wo $y_1, \dots, y_m$ Potenzreihen von $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$ sind. Unser Differentialgleichungensystem besitzt also m linear unabhängige Integrale $y_1, \dots, y_m$, durch welche sich jedes Integral y linear ausdrücken lässt; wir sagen, dass $y_1, \dots, y_m$ ein Fundamentalsystem bilden, und nennen die Determinante

$$\left| y_\alpha^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \right|,$$

in welcher für α die Zahlen $1, \dots, m$ und für $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ die bekannten m Indexsysteme zu setzen sind, die Determinante des Fundamentalsystems.

Ein Differentialgleichungensystem der betrachteten Art ist z. B. das folgende:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\alpha\beta}^{(\nu)} \frac{\partial y}{\partial x_\nu} + a_{\alpha\beta} y, \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots, n)$$

ferner das System, welches man erhält, wenn man

$$\frac{\partial^m y}{\partial x_\alpha^m}, \frac{\partial y}{\partial x_\beta}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \dots, \frac{\partial^m y}{\partial x_\alpha^{m-1} \partial x_\beta},$$

wo für α eine bestimmte der Zahlen $1, \dots, n$ und für β die Zahlen $1, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, n$ zu setzen sind, linear durch

$$y, \frac{\partial y}{\partial x_\alpha}, \dots, \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x_\alpha^{m-1}}$$

ausdrückt.

Es sei nun ein System linearer partieller Differentialgleichungen von beliebiger Gestalt

$$\sum_{(\nu)} A^{(a)}_{\nu_1,\ldots,\nu_n} \cdot y^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = 0 \qquad (a=1,\ldots,p)$$

gegeben, welches m linear unabhängige Integrale besitzt. Die Bedingungen, welche die Coefficienten erfüllen müssen, damit dies stattfindet, werden hier nicht aufgestellt. Es giebt dann m Integrale $y_1, \ldots, y_m$ von der Beschaffenheit, dass sich jedes Integral y in der Form

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_m y_m$$

darstellen lässt. Gehen $y_1, \ldots, y_m$, wenn die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ einen geschlossenen Weg beschreiben, über in $y'_1, \ldots, y'_m$, so bestehen Relationen von der Form

$$\begin{aligned} y'_1 &= c_{11} y_1 + \cdots + c_{1m} y_m, \\ &\cdot\ \cdot\ ,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y'_m &= c_{m1} y_1 + \cdots + c_{mm} y_m \end{aligned}$$

mit constanten Coefficienten. Hat man nun ein System von m Functionen, welches sich bei einem Umlauf der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ in der angegebenen Weise verhält, so genügen dieselben einem Systeme linearer Differentialgleichungen von der Gestalt

$$y^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} = \sum_{(\alpha)} P^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} y^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)},$$

vorausgesetzt, dass die Determinante

$$\Delta = \left| y_\gamma^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} \right| \qquad (\gamma=1,\ldots,m)$$

nicht identisch verschwindet. Aus den m Gleichungen

$$y_\gamma^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} = \sum_{(\alpha)} P^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} y_\gamma^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} \qquad (\gamma=1,\ldots,m)$$

berechnet man

$$P^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \frac{\Delta^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}}{\Delta},$$

wo $\Delta^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ die Determinante ist, welche aus Δ hervorgeht, wenn man das eine Indexsystem $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ durch $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ ersetzt. Bei jedem geschlossenen Wege der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gehen $y_1, \ldots, y_m$ über in Ausdrücke von der Form

$$c_{11}y_1 + \ldots + c_{1m}y_m, \ldots, c_{m1}y_1 + \ldots + c_{mm}y_m,$$

die beiden Determinanten Δ und $\Delta_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}$ werden dadurch mit

$$| c_{\alpha\beta} | \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

multipliciert, so dass ihr Quotient ungeändert bleibt; $P_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}$ ist daher eine eindeutige Function von $x_1, \ldots, x_n$.

Sind $y_1, \ldots, y_m$ Functionen einer einzigen Veränderlichen x, so nennt man bekanntlich die Determinante

$$\left| y_\alpha, \frac{dy_\alpha}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y_\alpha}{dx^{m-1}} \right| \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

die Determinante des Functionensystems; man beweist, dass diese Determinante nicht identisch verschwindet, wenn die m Functionen linear unabhängig sind, d. h. wenn keine Relation

$$c_1 y_1 + \ldots + c_m y_m = 0$$

mit constanten Coefficienten besteht. Sind $y_1, \ldots, y_m$ Functionen von $x_1, \ldots, x_n$, so lassen sich mehrere der obigen analoge Determinanten bilden; einem System von drei Functionen y_0, y_1, y_2 zweier Variablen x_1, x_2 entsprechen z. B. die Determinanten

$$\left| y_\alpha, \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_2} \right|,$$
$$\left| y_\alpha, \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x_1^2} \right|, \qquad (\alpha = 0, 1, 2)$$
$$\left| y_\alpha, \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x_2^2} \right|.$$

Im allgemeinen Falle entspricht jeder der verschiedenen Gruppen von je m Indexsystemen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, welche in der oben angegebenen Weise gebildet werden können, eine Determinante

$$| y_\gamma^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} |. \qquad (\gamma = 1, \ldots, m)$$

Wir werden sehen, dass nicht alle diese Determinanten identisch verschwinden können, wenn die Functionen $y_1, \ldots, y_m$ linear unabhängig sind. Nimmt man die Zahlen $1, \ldots, n$ in irgend einer Reihenfolge, und sind für je zwei aufeinanderfolgende Zahlen α, β sämtliche Determinanten

$$\left| y_\gamma, \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha}, \ldots, \frac{\partial^\lambda y_\gamma}{\partial x_\alpha^\lambda}, \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta}, \ldots, \frac{\partial^\mu y_\gamma}{\partial x_\beta^\mu} \right|, \qquad (\gamma=1,\ldots,m)$$

worin λ, μ irgend zwei ganze positive Zahlen (einschliesslich 0) mit der Summe $\lambda + \mu = m - 1$ sind, identisch gleich Null, so sind m Functionen $C_1, \ldots, C_m$ von $x_1, \ldots, x_n$ derart vorhanden, dass gleichzeitig folgende Gleichungen bestehen:

$$\sum_\gamma C_\gamma y_\gamma = 0, \qquad \sum_\gamma C_\gamma \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_\gamma C_\gamma \frac{\partial^{m-1} y_\gamma}{\partial x_\alpha^{m-1}} = 0. \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$

Durch Differentiation dieser Gleichungen erhält man die folgenden:

$$\sum_\gamma \frac{\partial C_\gamma}{\partial x_\alpha} y_\gamma = 0, \quad \sum_\gamma \frac{\partial C_\gamma}{\partial x_\alpha}\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_\gamma \frac{\partial C_\gamma}{\partial x_\alpha}\frac{\partial^{m-2} y_\gamma}{\partial x_\alpha^{m-2}} = 0. \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$

Die Vergleichung der beiden Reihen von Gleichungen ergiebt:

$$C_1 : \ldots : C_m = \frac{\partial C_1}{\partial x_\alpha} : \ldots : \frac{\partial C_m}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{C_1}{C_\gamma} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{C_m}{C_\gamma} = 0, \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$

wo γ eine der Zahlen $1, \ldots, n$ ist; d. h. die Verhältnisse der Grössen $C_1, \ldots, C_m$ sind constant und mithin $y_1, \ldots, y_m$ nicht unabhängig. Sollen also diese Functionen linear unabhängig sein, so dürfen nicht alle oben angeschriebenen Determinanten verschwinden.

Hiermit ist bewiesen, dass die Integrale eines Differentialgleichungensystems von der Form

$$\sum_{(\nu)} A^{(\alpha)}_{\nu_1,\ldots,\nu_n} \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}} = 0 \qquad (\alpha=1,\ldots,p)$$

mit m linear unabhängigen Integralen übereinstimmen mit den Integralen eines Systems von der Gestalt

$$\text{(D)} \qquad y^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} = \sum_{(\alpha)} P^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} y^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}.$$

Wenn man auch nicht jede der möglichen Gruppen von m Indexsystemen dem letzteren System von Differentialgleichungen zu Grunde legen kann, so ist doch sicher eine dieser Gruppen zulässig, weil immer eine Determinante nicht verschwindet. Es muss also möglich sein, aus dem ersten Differentialgleichungensystem alle Ableitungen $y^{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}$ durch die m Ableitungen $y^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$ auszudrücken; indem man die $y^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}$ durch die $y^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$ ausdrückt, erhält man das letztere System.

Man hätte nun folgende Aufgabe zu lösen: Ist ein beliebiges System linearer partieller Differentialgleichungen

$$\sum_{(\nu)} A^{(\alpha)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x^{\nu_n}} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, p)$$

gegeben, so sind die Bedingungen zu ermitteln, unter welchen dasselbe m linear unabhängige Integrale besitzt; man hat dann, wenn man mit $y_1, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungensystems bezeichnet, zu untersuchen, welche der verschiedenen Determinanten

$$\left| y_i^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \right| \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

von Null verschieden sind; hat man gefunden, dass eine bestimmte dieser Determinanten nicht verschwindet, so hat man das gegebene System von Differentialgleichungen auf die Form

$$y^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} = \sum_{(\alpha)} P^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} y^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$$

zu bringen. Diese Aufgabe, die eine Verallgemeinerung der bereits gelösten Frage nach den Bedingungen, unter welchen zwei gewöhnliche Differentialgleichungen mehrere particuläre Integrale gemein haben (vgl. Grünfeld, Zeitschrift für Mathematik 1885), darstellt, soll jedoch hier nicht behandelt werden.

Man könnte sich also auf Systeme von der Form

$$y^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} = \sum_{(\alpha)} P^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} y^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$$

beschränken, welche sich, wie wir gleich sehen werden, auf Systeme totaler linearer Differentialgleichungen zurückführen lassen. Bezeichnet man die m Ableitungen $y^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$ in irgend einer Reihenfolge mit y_α $(\alpha = 1, \dots, m)$, so ist $\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\nu}$ $(\nu = 1, \dots, n)$ eine lineare homogene Function von $y_1, \dots, y_m$. Ist nämlich $y_\alpha = y^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$ und gehört $(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu + 1, \dots, \alpha_n)$ der Gruppe der Indexsysteme $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nicht ebenfalls an, so muss es in der Gruppe der $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ enthalten sein; es ist daher

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\nu} = \sum_{(\alpha)} P_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{(\beta_1,\dots,\beta_n)} y^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)},$$

d. h. eine lineare homogene Function von $y_1, \dots, y_m$.

Unser System linearer partieller Differentialgleichungen ist somit auf ein System von der Form

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\nu} = \sum_\beta A_{\alpha\beta}^{(\nu)} y_\beta, \qquad \binom{\alpha, \beta = 1, \dots, m}{\nu = 1, \dots, n}$$

also auf ein System totaler linearer Differentialgleichungen zurückgeführt, worin die Coefficienten $A_{\alpha\beta}^{(\nu)}$ Functionen von $x_1, \dots, x_n$ sind.

Indem man die über totale Differentialgleichungen im zweiten Abschnitte bewiesenen Sätze, die sich ohne Mühe auf Differentialgleichungen mit n unabhängigen Veränderlichen ausdehnen lassen, auf das System (D) anwendet, ergiebt sich Folgendes: Die singulären Gebilde der Functionen $P_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{(\beta_1,\dots,\beta_n)}$ sind auch die singulären Gebilde des Differentialgleichungensystems.

In der Umgebung einer Stelle $(a_1, \dots, a_n)$ des singulären Gebildes $\psi(x_1, \dots, x_n) = 0$ ist ein Fundamentalsystem von m Integralen vorhanden, welche eine Entwicklung von der Form

$$y = \psi(x_1, \dots, x_n)^r \eta$$

oder von der Form

$$y = \psi(x_1, \dots, x_n)^r \{\eta_0 + \eta_1 \log \psi(x_1, \dots, x_n) + \dots\}$$

zulassen, wo unter η Functionen zu verstehen sind, welche sich in der Umgebung der Stelle $(a_1, \dots, a_n)$ eindeutig verhalten, allenfalls aber noch an den Stellen des singulären Gebildes $\psi(x_1, \dots, x_n) = 0$ unendlich werden können. Von dem Verhalten der Integrale an den Schnittstellen mehrerer singulärer Gebilde sehen wir für jetzt ab.

Wir betrachten nun eine Klasse von Differentialgleichungensystemen (D), deren sämtliche Integrale sich in der Umgebung einer Stelle $(a_1, \ldots, a_n)$ eines singulären Gebildes $\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ regulär verhalten; ein solches System hat man z. B., wenn die Coefficienten des Systems (D) die Form haben

$$P^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} = \frac{G^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}}{\psi^{(\beta_1 + \ldots + \beta_n) - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)}},$$

wo $G^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$ in eine Potenzreihe von $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ entwickelbar ist.

Dass sich die Integrale des Systems

$$(\mathrm{D}') \qquad y^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} = \sum_{(\alpha)} \frac{G^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}}{\psi^{(\beta_1 + \ldots + \beta_n) - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)}} y^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$$

in der Umgebung der Stelle $(a_1, \ldots, a_n)$ des singulären Gebildes $\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ regulär verhalten, erkennt man, indem man das System (D′) auf ein System totaler linearer Differentialgleichungen mit den m abhängigen Variablen $y^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$ zurückführt.

Um die *notwendigen* Bedingungen für das Vorhandensein lauter regulärer Integrale aufzufinden, müsste die Theorie der totalen linearen Differentialgleichungen weiter geführt werden, wovon wir in der vorliegenden Arbeit absehen. Da nun feststeht, dass die Integrale von (D′) in der Umgebung der Stelle $(a_1, \ldots, a_n)$ des Gebildes $\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ die Form haben

$$y = \psi(x_1, \ldots, x_n)^r \eta$$

oder

$$y = \psi^r(\eta + \eta' \log \psi + \ldots),$$

wo $\eta, \eta', \ldots$ Potenzreihen von $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ darstellen, so können wir uns zur Berechnung der Exponenten r wenden.

Die wiederholte Differentiation des Ausdrucks $y = \psi^r \eta$ — ein Integral von dieser Form ist immer vorhanden — ergiebt

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} y}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \psi^{r - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)} \left\{ [r, \alpha_1 + \ldots + \alpha_n] \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \cdot \eta + \psi Q_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \right\},$$

wobei $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ ein aus den Ableitungen von ϕ und η durch Addition und Multiplication gebildeter Ausdruck ist; ferner ist die Bezeichnung

$$[r\,,\,m] = r(r-1)\ldots(r-m+1)\,;\,[r\,,\,0] = 1$$

angewandt. Durch Einsetzen in eine der Differentialgleichungen (D′) findet man, dass

$$[r\,,\,\beta_1 + \ldots + \beta_n]\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^{\beta_1}\ldots\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)^{\beta_n} \equiv$$

$$\sum_{(\alpha)}[r\,,\,\alpha_1 + \ldots + \alpha_n]\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.\,P^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},\ \mathrm{mod}\ \phi$$

sein muss, da η als nicht durch ϕ teilbar vorausgesetzt wird. Jede der m Differentialgleichungen des Systems (D′) liefert eine solche Congruenz. Setzt man für $(x_1\,,\ldots,\,x_n)$ irgend eine Stelle des Gebildes $\phi = 0$, so gehen die Congruenzen in Gleichungen für r über, die allerdings zum Teil auch Identitäten werden können. Die nicht identischen Gleichungen müssen eine Anzahl gemeinsamer Wurzeln r besitzen. Von der weiteren Ausführung, die den für das specielle System (A′) angestellten Betrachtungen ähnlich sein wird, sehen wir hier ab, ebenso von der Behandlung einiger anderen Fragen, welche durch die seitherigen Entwicklungen nahe gelegt werden. Es ist dies namentlich die Aufsuchung der notwendigen Bedingungen für das Vorhandensein lauter regulärer Integrale bei den verschiedenen Systemen linearer Differentialgleichungen, die uns seither begegnet sind, sowie die Frage nach dem Verhalten der Integrale der seither betrachteten Differentialgleichungen in der Umgebung einer Schnittstelle mehrerer singulärer Gebilde.

Besonders interessante specielle Systeme linearer partieller Differentialgleichungen sind die Differentialgleichungensysteme, welchen die hypergeometrischen Reihen mehrerer Veränderlichen genügen. Eine Reihe dieser Art ist z. B.

$$F(x_1\,,\ldots,\,x_n) = \sum_{(\lambda)} A_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}, \qquad (\lambda_1,\ldots,\lambda_n = 0,\ldots\infty)$$

$$A_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} = \frac{\prod\limits_{\alpha}(a_\alpha\,,\,u_{\alpha 1}\lambda_1 + \ldots + u_{\alpha n}\lambda_n)}{\prod\limits_{\beta}(b_\beta\,,\,v_{\beta 1}\lambda_1 + \ldots + v_{\beta n}\lambda_n)}, \qquad (\alpha = 1,\ldots,\rho\,;\,\beta = 1,\ldots,\sigma)$$

wobei die Bezeichnung

$$(a\,,\,m) = a(a+1)\dots(a+m-1)$$

gebraucht ist und

$$u_{\alpha 1}\,,\,\dots\,,\,u_{\alpha n}$$

$$v_{\beta 1}\,,\,\dots\,,\,v_{\beta n}$$

ganze positive Zahlen von der Art sind, dass

$$\sum_\alpha u_{\alpha 1} = \dots = \sum_\alpha u_{\alpha n} = \sum_\beta v_{\beta 1} = \dots = \sum_\beta v_{\beta n} = \mu$$

ist. Es lässt sich nachweisen, dass diese Reihe in einem gewissen Bereiche von endlicher Ausdehnung convergiert, und dass sie, falls der Nenner von $A_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$ die Factoren $(1\,,\,\lambda_1)\,,\,\dots\,,\,(1\,,\,\lambda_n)$ enthält, einem System linearer partieller Differentialgleichungen von der Form

$$\sum_{(\nu)} \left(a^{(i)}_{\nu_1,\dots,\nu_n} x_1^{\nu_1}\dots x_n^{\nu_n} - b^{(i)}_{\nu_1,\dots,\nu_n} x_1^{\nu_1}\dots x_i^{\nu_i-1}\dots x_n^{\nu_n}\right)\cdot\frac{\partial^{\nu_1+\dots+\nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1}\dots\partial x_n^{\nu_n}} = 0$$
$$(i=1,\dots,n;\ \nu_1+\dots+\nu_n \leqq \mu)$$

genügt, wo $a^{(i)}_{\nu_1,\dots,\nu_n}\,,\ b^{(i)}_{\nu_1,\dots,\nu_n}$ ganze Functionen der a_α und b_β sind.

Es bietet sich hier die Aufgabe dar, die Theorie der Reihenentwicklung der Integrale eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen in einer solchen Form darzustellen, dass sie auf die Differentialgleichungensysteme der hypergeometrischen Reihen angewandt werden kann. Die aus der oben eingeführten Reihe hervorgehenden Functionen sind im Falle $n = 1$ als höhere hypergeometrische Functionen von den Herren THOMÆ (Math. Ann. Bd. **2**), GOURSAT (Ann. de l'Ec. norm. 1883) und POCHHAMMER (Crelles Journal Bd. **102**) untersucht worden.

Rehbach (Hessen), Mai 1888.