Communiqué le 11 Octobre 1950 par F. CARLSON et J. MALMQUIST

Sur les fractions continues monotones non-décroissantes périodiques

Par FOLKE RYDE

Soit donnée une fraction continue de la forme

$$\frac{a_1|}{|s a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_m|}{|a_m} + \cdots,$$

où s; $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m, \ldots$ sont des nombres entiers positifs tels qu'on ait

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_m \leqq \cdots.$$

Dans un mémoire présenté à l'Académie des sciences de Stockholm[1], j'ai traité cette classe de fractions continues sous le nom de *fractions continues monotones non-décroissantes.*

Les fractions continues monotones non-décroissantes sont *périodiques* si et seulement si tous les nombres a_n sont égaux pour tous les indices n à partir d'une certaine valeur N. Évidemment chaque fraction continue monotone non-décroissante périodique représente une quantité irrationnelle quadratique réelle. Mais le problème inverse présente des difficultés singulières. Le résultat le plus précis que j'ai obtenu dans cette direction est contenu dans le *théorème* suivant:

Soit donnée une équation quadratique irréductible $P\theta^2 + Q\theta + R = 0$, dont les coefficients P, Q et R sont des nombres entiers sans aucun facteur commun et dont l'une des racines, soit

$$\theta = \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} - \frac{Q}{2P},$$

satisfait à la condition

$$0 < \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} - \frac{Q}{2P} < 1.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le développement uniquement déterminé de θ sous la forme d'une fraction continue monotone non-décroissante soit périodique, c'est-à-dire qu'on ait

---

[1] *Eine neue Art monotoner Kettenbruchentwicklungen,* Arkiv för matematik Bd 1. Nr 22 (1950).

$$\frac{\sqrt{Q^2-4PR}}{2P}-\frac{Q}{2P}=\frac{a_1|}{|s a_1}+\frac{a_2|}{|a_2}+\frac{a_3|}{|a_3}+\cdots+$$
$$+\frac{a_{m-2}|}{|a_{m-2}}+\frac{a_{m-1}|}{|a_{m-1}}+\frac{a_m|}{|a_m}+\frac{\sigma|}{|\sigma}+\frac{\sigma|}{|\sigma}+\cdots,$$

où s; $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{m-2}, a_{m-1}, a_m$ *et* σ *sont des nombres entiers positifs tels qu'on ait*

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{m-2} \leqq a_{m-1} \leqq a_m \leqq \sigma,$$

est que

1. σ *soit contenu dans l'ensemble des nombres entiers*

$$2^{1-n}\cdot\left\{T^n+\binom{n}{2}T^{n-2}(T-2)(T+2)+\binom{n}{4}T^{n-4}(T-2)^2(T+2)^2+\cdots\right\}-2,$$

où n *est un nombre entier positif et où* $(T;\, U)$ *est le système des solutions les plus petites positives de l'équation de* Fermat-Pell, $t^2-Du^2=4$, *où* $Q^2-4PR=S^2D$, S^2 *étant le facteur entier carré le plus grand qui est contenu dans* Q^2-4PR;

2. a_{m-1} *et* a_m *dépendent de* $P, Q, R, s, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{m-2}$ *et* σ *de la manière suivante*

$$a_{m-1}=\frac{\phi\cdot(E_2-E_1)\cdot\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{Q^2-4PR}{\sigma(\sigma+4)}}-\left\{PE_1\phi^2+\frac{Q}{2}(E_1+E_2)\phi+RE_2\right\}}{E_1E_2(P\phi^2+Q\phi+R)}$$

et

$$a_m=\frac{\sigma}{2}-\sqrt{\frac{\sigma(\sigma+4)}{Q^2-4PR}}\cdot\frac{PE_1\phi^2+\frac{Q}{2}(E_1+E_2)\phi+RE_2}{(E_2-E_1)\phi},$$

où

$$\phi=\frac{a_1|}{|s a_1}+\frac{a_2|}{|a_2}+\frac{a_3|}{|a_3}+\cdots+\frac{a_{m-2}|}{|a_{m-2}}+1$$

et

$$E_1=1+\frac{1\ |}{|a_{m-2}}+\frac{a_{m-2}|}{|a_{m-3}}+\cdots+\frac{a_3|}{|a_2}+\frac{a_2|}{|s a_1}$$

et

$$E_2=1+\frac{1\ |}{|a_{m-2}}+\frac{a_{m-2}|}{|a_{m-3}}+\cdots+\frac{a_3|}{|a_2}.$$ [1]

Dans le cas où $m=2$ *les expressions ci-dessus se simplifient en*

[1] Remarquons ici qu'on peut, en partant des expressions ci-dessus de a_{m-1} et a_m, obtenir des expressions de a_m et σ en $P, Q, R, s, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{m-1}$.

$$a_1 = \frac{\frac{\sigma}{2}\cdot\sqrt{\frac{Q^2-4PR}{\sigma(\sigma+4)}}-\left(\frac{Q}{2}+Rs\right)}{s\left(\frac{P}{s}+Q+Rs\right)}$$

et

$$a_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma(\sigma+4)}{Q^2-4PR}}\cdot\left(\frac{Q}{2}+Rs\right).$$

De même, pour $m = 1$ les conditions correspondantes deviennent

$$a_1 = R\cdot\frac{\frac{\sigma}{2}}{\frac{Q}{2}+Rs} = -R\cdot\sqrt{\frac{\sigma(\sigma+4)}{Q^2-4PR}}.$$

Pour démontrer la *nécessité* des conditions, supposons que le nombre entier positif Q^2-4PR contienne un facteur entier carré S^2 et que S^2 soit le facteur entier carré le plus grand qui est contenu dans Q^2-4PR. Posons $Q^2-4PR = S^2D$ et considérons l'équation diophantienne de Fermat-Pell

$$t^2 - Du^2 = 4. \tag{1}$$

D'après la théorie générale de cette équation il existe une infinité de solutions en nombres entiers positifs t et u, et on les obtient toutes par l'équation

$$\frac{t+u\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^n,$$

où T, U est la solution la plus petite en nombres entiers positifs et où l'exposant doit parcourir tous les nombres entiers positifs. Ainsi nous obtenons

$$t = 2^{1-n}\left\{T^n + \binom{n}{2}T^{n-2}DU^2 + \binom{n}{4}T^{n-4}\cdot D^2U^4 + \cdots\right\}. \tag{2}$$

En éliminant D par suite de la relation $D = (T^2-4)/U^2$ nous obtenons

$$t = 2^{1-n}\left\{T^n + \binom{n}{2}T^{n-2}(T-2)(T+2) + \binom{n}{4}T^{n-4}(T-2)^2(T+2)^2 + \cdots\right\}. \tag{2'}$$

De même, en éliminant D par suite de la relation $D = (t^2-4)/u^2$ nous obtenons que le nombre $Q^2-4PR = S^2D$ peut s'écrire

$$Q^2-4PR = S^2\cdot D = \frac{S^2}{u^2}(t^2-4) = \frac{S^2}{u^2}\{(t-2)^2+4(t-2)\} = \frac{S^2}{u^2}v(v+4),$$

où

$$(2'') \quad v = t - 2 = 2^{1-n}\left\{T^n + \binom{n}{2} T^{n-2}(T-2)(T+2) + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{4} T^{n-4}(T-2)^2(T+2)^2 + \cdots\right\} - 2.$$

Il s'ensuit que le nombre $\theta = (\sqrt{Q^2 - 4PR} - Q)/2P$ peut s'écrire

$$\theta = \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR} - Q}{2P} = \frac{S\sqrt{v(v+4)} - Qu}{2Pu} = \frac{2S\omega + Sv - Qu}{2Pu},$$

où $\omega = (\sqrt{v(v+4)} - v)/2$.

Employons maintenant le théorème suivant que j'ai démontré ailleurs:[1] «Soit donnée une substitution linéaire

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

dont les coefficients α, β, γ et δ sont des nombres entiers quelconques avec la seule restriction que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Soit aussi donnée une équation quadratique irréductible $p\omega^2 + q\omega + r = 0$, dont les coefficients p, q et r sont des nombres entiers sans aucun facteur commun, d'ailleurs quelconques avec la seule restriction qu'entraîne la condition d'irréductibilité. Cela posé, on peut toujours déterminer – et d'une infinité double de manières – une autre substitution linéaire $(A\omega + B)/(C\omega + D)$, dont les coefficients A, B, C et D sont des nombres entiers tels que l'équation quadratique donnée peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} = \frac{A\omega + B}{C\omega + D}.»$$

En vertu de ce théorème l'équation $\omega^2 + v\omega = v$, qui est satisfaite par

$$\omega = \frac{\sqrt{v^2 + 4v} - v}{2},$$

peut s'écrire

$$\frac{2S\cdot\omega + Sv - Qu}{0\cdot\omega + 2Pu} = \frac{A\omega + B}{C\omega + D},$$

où A, B, C et D sont des nombres entiers, et, par conséquent, le nombre $\theta = \dfrac{\sqrt{Q^2 - 4PR} - Q}{2P}$ peut toujours s'exprimer et d'ailleurs d'une infinité double de manières sous la forme $\theta = \dfrac{\sqrt{Q^2 - 4PR} - Q}{2P} = \dfrac{A\omega + B}{C\omega + D}$ et cela pour toute

[1] *Les quantités irrationnelles quadratiques et les substitutions linéaires.* **Arkiv för matematik. Bd 1. Nr 15 (1949).**

valeur donnée de $\omega = \frac{1}{2}(\sqrt{v(v+4)} - v)$, où v est un nombre entier positif arbitrairement choisi parmi l'ensemble des nombres entiers positifs (2″).

Quant aux coefficients A, B, C et D nous obtenons les relations suivantes (3) en identifiant les équations

$$\frac{2S\omega + Sv - Qu}{2Pu} = \frac{A\omega + B}{C\omega + D} \text{ et } \omega^2 + v\omega = v:$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{C(Sv - Qu) - 2PuA + 2SD}{2SC} = v \\ \dfrac{D(Sv - Qu) - 2PuB}{2SC} = -v, \end{cases}$$

d'où découle

$$(3\,\text{A}) \qquad D = \frac{Pu}{S} \cdot A + \frac{Sv + Qu}{2S} \cdot C$$

et

$$B = \frac{Sv}{Pu} \cdot C + \frac{Sv - Qu}{2Pu} \cdot D,$$

d'où par (3 A)

$$\begin{aligned} B &= \frac{Sv}{Pu} \cdot C + \frac{Sv - Qu}{2Pu}\left(\frac{Pu}{S} \cdot A + \frac{Sv + Qu}{2S} \cdot C\right) \\ &= \frac{Sv - Qu}{2S} \cdot A + \left(\frac{Sv}{Pu} + \frac{S^2v^2 - Q^2u^2}{4PuS}\right) \cdot C \\ &= \frac{Sv - Qu}{2S} \cdot A + \frac{S^2v(v+4) - Q^2u^2}{4PuS} \cdot C \\ &= \frac{Sv - Qu}{2S} \cdot A + \frac{S^2Du^2 - Q^2u^2}{4PuS} \cdot C \\ &= \frac{Sv - Qu}{2S} \cdot A + \frac{u}{4PS}(S^2D - Q^2) \cdot C \\ &= \frac{Sv - Qu}{2S} \cdot A - \frac{u}{4PS} \cdot 4PR \cdot C \end{aligned}$$

et ainsi

$$(3\,\text{B}) \qquad B = \frac{Sv - Qu}{2S} \cdot A - \frac{Ru}{S} \cdot C.$$

Il s'ensuit que le nombre $\theta = (\sqrt{Q^2 - 4PR} - Q)/2P$ peut toujours s'exprimer sous la forme

$$\theta = \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR} - Q}{2P} = \frac{A\omega + B}{C\omega + D} = \frac{A\omega + \frac{Sv - Qu}{2S}\cdot A - \frac{Ru}{S}\cdot C}{C\omega + \frac{Pu}{S}\cdot A + \frac{Sv + Qu}{2S}\cdot C},$$

d'où

$$\theta = \frac{A}{C}\cdot\frac{\omega + \frac{Sv - Qu}{2S} - \frac{Ru}{S}\cdot\frac{C}{A}}{\omega + \frac{Pu}{S}\cdot\frac{A}{C} + \frac{Sv + Qu}{2S}}, \tag{4}$$

où $\omega = \frac{1}{2}(\sqrt{v(v+4)} - v)$, v étant donné par (2″). L'expression (4) peut être modifiée de la manière suivante. Nous avons $Q^2 - 4PR = S^2 D$ et $v(v+4) = Du^2$, d'où l'on conclut que

$$\sqrt{\frac{v(v+4)}{Q^2 - 4PR}} = \frac{u}{S}.$$

(Remarquons en passant que le nombre $\sqrt{\frac{v(v+4)}{Q^2 - 4PR}}$ est rationnel.) Nous obtenons

$$\theta = \frac{A}{C}\cdot\frac{\omega + \frac{v - Q\cdot\sqrt{\frac{v(v+4)}{Q^2-4PR}}}{2} - \frac{R\cdot\sqrt{\frac{v(v+4)}{Q^2-4PR}}}{A/C}}{\omega + \frac{v + Q\cdot\sqrt{\frac{v(v+4)}{Q^2-4PR}}}{2} + P\sqrt{\frac{v(v+4)}{Q^2-4PR}}\cdot\frac{A}{C}}. \tag{4'}$$

Supposons maintenant pour démontrer la nécessité des conditions du théorème énoncé que le développement de $\theta = (\sqrt{Q^2 - 4PR} - Q)/2P$ en fraction continue monotone non-décroissante soit périodique, c'est-à-dire de la forme

$$\theta = \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR} - Q}{2P} = \frac{a_1|}{|sa_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{m-2}|}{|a_{m-2}} + \frac{a_{m-1}|}{|a_{m-1}} + \frac{a_m|}{|a_m} + \frac{\sigma|}{|\sigma} + \frac{\sigma|}{|\sigma} + \cdots;$$

où s; $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{m-2}, a_{m-1}, a_m$ et σ sont des entiers positifs tels qu'on ait

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{m-2} \leqq a_{m-1} \leqq a_m \leqq \sigma.$$

D'après la théorie générale des fractions continues nous pouvons écrire

$$(5)\qquad \theta = \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR} - Q}{2P} = \frac{A_m + A_{m-1}\cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sigma(\sigma+4)} - \sigma\right)}{B_m + B_{m-1}\cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sigma(\sigma+4)} - \sigma\right)}$$

$$= \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sigma(\sigma+4)} - \sigma\right) + \dfrac{A_m}{A_{m-1}}}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sigma(\sigma+4)} - \sigma\right) + \dfrac{B_m}{B_{m-1}}},$$

où

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{a_1|}{|sa_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{m-2}|}{|a_{m-2}} + \frac{a_{m-1}|}{|a_{m-1}} + \frac{a_m|}{|a_m}$$

et

$$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{a_1|}{|sa_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{m-2}|}{|a_{m-2}} + \frac{a_{m-1}|}{|a_{m-1}},$$

car la quantité positive

$$x = \frac{\sigma|}{|\sigma} + \frac{\sigma|}{|\sigma} + \cdots$$

satisfait évidemment à l'équation quadratique $x^2 + \sigma x = \sigma$.

En identifiant les expressions (4') et (5) de θ nous obtenons

$$(6)\qquad \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4)} - \sigma + \dfrac{2A_m}{A_{m-1}}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4)} - \sigma + \dfrac{2B_m}{B_{m-1}}} =$$

$$= \frac{A}{C} \cdot \frac{\sqrt{v(v+4)} - Q\cdot\sqrt{\dfrac{v(v+4)}{Q^2-4PR}} - \dfrac{2R\sqrt{\dfrac{v(v+4)}{Q^2-4PR}}}{A/C}}{\sqrt{v(v+4)} + Q\cdot\sqrt{\dfrac{v(v+4)}{Q^2-4PR}} + 2P\sqrt{\dfrac{v(v+4)}{Q^2-4PR}}\cdot\dfrac{A}{C}}.$$

En posant

$$K = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$$

$$k = \frac{A}{C}$$

$$M = -\sigma + \frac{2A_m}{A_{m-1}}$$

$$N = -\sigma + \frac{2B_m}{B_{m-1}} \qquad (M \neq N)$$

$$M_1 = -\left(Q + 2R\cdot\frac{C}{A}\right)\sqrt{\frac{v(v+4)}{Q^2-4PR}}\,.$$

$$N_1 = \left(Q + 2P\cdot\frac{A}{C}\right)\sqrt{\frac{v(v+4)}{Q^2-4PR}} \qquad (M_1 \neq N_1),$$

où toutes les expressions sont rationnelles, l'équation (6) se simplifie en

$$K\cdot\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4)}+M}{\sqrt{\sigma(\sigma+4)}+N} = k\cdot\frac{\sqrt{v(v+4)}+M_1}{\sqrt{v(v+4)}+N_1},$$

d'où découle

$$K + K\cdot\frac{M-N}{\sqrt{\sigma(\sigma+4)}+N} = k + k\cdot\frac{M_1-N_1}{\sqrt{v(v+4)}+N_1}$$

et par suite

$$K + \frac{K(M-N)(\sqrt{\sigma(\sigma+4)}-N)}{\sigma(\sigma+4)-N^2} = k + \frac{k(M_1-N_1)(\sqrt{v(v+4)}-N_1)}{v(v+4)-N_1^2}.$$

On en déduit

$$\frac{K(M-N)}{\sigma(\sigma+4)-N^2}\cdot\sqrt{\sigma(\sigma+4)} - \frac{k(M_1-N_1)}{v(v+4)-N_1^2}\cdot\sqrt{v(v+4)} =$$
$$= k - K + \frac{KN(M-N)}{\sigma(\sigma+4)-N^2} - \frac{kN_1(M_1-N_1)}{v(v+4)-N_1^2}.$$

En observant que l'expression à droite est rationnelle tandis que l'expression à gauche est irrationnelle, à moins qu'elle ne soit nulle, nous obtenons que le nombre $\dfrac{\sqrt{\sigma(\sigma+4)}}{\sqrt{v(v+4)}}$ doit être rationnel, soit $=\dfrac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers positifs sans aucun facteur commun. Cela posé, nous obtenons

$$\sigma(\sigma+4) = (\sigma+2)^2 - 4 = \frac{p^2}{q^2}\cdot((v+2)^2-4).$$

Mais $(v+2, u)$ est une solution de l'équation $t^2 - 4 = Du^2$. Il s'ensuit que

$$(\sigma+2)^2 - 4 = \frac{p^2u^2}{q^2}\cdot D.$$

En observant que l'expression à gauche représente un nombre entier, nous obtenons que $\dfrac{pu}{q}$ doit être aussi un nombre entier. En effet, nous avons supposé que le nombre D ne contienne pas de facteur carré. Par conséquent, q ne peut pas contenir de facteur qui n'entre pas comme facteur en u, car au cas contraire D doit contenir ce facteur doublement, ce qui est impossible. Il s'ensuit que $(\sigma + 2, pu/q)$ est une solution de l'équation (1) de Fermat-Pell et, par conséquent, σ est contenu dans l'ensemble des nombres entiers (2'').

Nous pouvons donc fixer la valeur du nombre v en le posant égal à σ. Observons de plus que les nombres entiers A et C dans l'expression (4') sont encore indéterminés. Ainsi nous sommes en droit de fixer leurs valeurs de la manière suivante $A = 2SA_{m-1}$, $C = 2SB_{m-1}$, d'où

$$\frac{A}{C} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}. \tag{7}$$

En abrégeant nous posons $\frac{A}{C} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \phi$. Alors l'équation (6) peut s'écrire

$$\frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4)} - \sigma + \frac{2A_m}{A_{m-1}}}{\sqrt{\sigma(\sigma+4)} - \sigma + \frac{2B_m}{B_{m-1}}} = \frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4)} - \left(Q + \frac{2R}{\phi}\right)r}{\sqrt{\sigma(\sigma+4)} + (Q + 2P\phi)r},$$

où $r = \sqrt{\frac{\sigma(\sigma+4)}{Q^2 - 4PR}}$ désigne un nombre rationnel. De cela découle

$$\sqrt{\sigma(\sigma+4)} \cdot \left(r(Q + 2P\phi) + \frac{2A_m}{A_{m-1}} - \frac{2B_m}{B_{m-1}} + r\left(Q + \frac{2R}{\phi}\right)\right)$$
$$= r\left(\sigma - \frac{2A_m}{A_{m-1}}\right)(Q + 2P\phi) + r\left(\sigma - \frac{2B_m}{B_{m-1}}\right)\left(Q + \frac{2R}{\phi}\right).$$

En observant que l'expression à droite est rationnelle tandis que l'expression à gauche est irrationnelle, à moins que la parenthèse dans l'expression à gauche ne soit nulle, nous obtenons

$$\frac{B_m}{B_{m-1}} - \frac{A_m}{A_{m-1}} = \frac{r}{\phi} \cdot (P\phi^2 + Q\phi + R) \tag{8}$$

et

$$\frac{A_m}{A_{m-1}} \cdot (Q + 2P\phi) + \frac{B_m}{B_{m-1}} \cdot \left(Q + \frac{2R}{\phi}\right) = \frac{\sigma}{\phi} \cdot (P\phi^2 + Q\phi + R). \tag{9}$$

Remarquons en passant qu'il découle de (8) et (9) en éliminant $(P\phi^2 + Q\phi + R)/\phi$ que

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{\sigma\phi - Qr\phi - 2Rr}{\sigma + Qr + 2Pr\phi}.$$

D'après la théorie générale des fractions continues nous avons (cf. O. PERRON, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig und Berlin 1929, p. 12)

$$\frac{B_m}{B_{m-1}} = a_m + \frac{a_m \,|}{|\, a_{m-1}} + \frac{a_{m-1}|}{|\, a_{m-2}} + \cdots + \frac{a_3 \,|}{|\, a_2} + \frac{a_2 \,|}{|\, s\, a_1} = a_m + \frac{a_m}{a_{m-1} \cdot E_1},$$

où

$$E_1 = 1 + \frac{1 \,|}{|\, a_{m-2}} + \frac{a_{m-2}|}{|\, a_{m-3}} + \cdots + \frac{a_3 \,|}{|\, a_2} + \frac{a_2 \,|}{|\, s\, a_1} \cdot (m > 2).$$

De même nous posons

$$\frac{A_m}{A_{m-1}} = a_m + \frac{a_m \,|}{|\, a_{m-1}} + \frac{a_{m-1}|}{|\, a_{m-2}} + \cdots + \frac{a_4 \,|}{|\, a_3} + \frac{a_3 \,|}{|\, a_2} = a_m + \frac{a_m}{a_{m-1} \cdot E_2},$$

où

$$E_2 = 1 + \frac{1 \,|}{|\, a_{m-2}} + \frac{a_{m-2}|}{|\, a_{m-3}} + \cdots + \frac{a_4 \,|}{|\, a_3} + \frac{a_3 \,|}{|\, a_2} \cdot (m > 2) \cdot (E_2 = 1 \text{ pour } m = 3).$$

En faisant usage de ces relations on trouve par l'intermédiaire de (8)

$$\frac{a_m}{a_{m-1} \cdot E_1} - \frac{a_m}{a_{m-1} \cdot E_2} = \frac{r}{\phi} \cdot (P\phi^2 + Q\phi + R),$$

d'où découle

$$\text{(8')} \qquad \frac{a_m}{a_{m-1}} = \frac{E_1 E_2}{E_2 - E_1} \cdot \frac{r}{\phi} \cdot (P\phi^2 + Q\phi + R)$$

et par l'intermédiaire de (9)

$$\text{(9')} \qquad \left(a_m + \frac{a_m}{a_{m-1}} \cdot \frac{1}{E_2}\right)(Q + 2P\phi) + \left(a_m + \frac{a_m}{a_{m-1}} \cdot \frac{1}{E_1}\right)\left(Q + \frac{2R}{\phi}\right)$$
$$= \frac{\sigma}{\phi} \cdot (P\phi^2 + Q\phi + R),$$

d'où découle

$$2\,a_m\left(Q + P\phi + \frac{R}{\phi}\right) = \frac{\sigma}{\phi} \cdot (P\phi^2 + Q\phi + R) - \frac{a_m}{a_{m-1}} \cdot \left(\frac{Q + 2P\phi}{E_2} + \frac{Q + \frac{2R}{\phi}}{E_1}\right).$$

En remplaçant ici a_m / a_{m-1} par l'expression dans (8′) nous obtenons

$$\frac{2\,a_m}{\phi} \cdot (P\phi^2 + Q\phi + R) = \frac{\sigma}{\phi} \cdot (P\phi^2 + Q\phi + R) -$$
$$- \frac{E_1 E_2}{E_2 - E_1} \cdot \frac{r}{\phi} \cdot (P\phi^2 + Q\phi + R) \cdot \left(\frac{Q + 2P\phi}{E_2} + \frac{Q + \frac{2R}{\phi}}{E_1}\right).$$

En divisant par l'expression $2(P\phi^2 + Q\phi + R)/\phi$, qui ne peut pas s'annuler, on trouve, en tenant compte de la valeur de r,

$$(10)\qquad a_m = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma(\sigma+4)}{Q^2-4PR}} \cdot \frac{PE_1\phi^2 + Q\cdot\frac{E_1+E_2}{2}\phi + RE_2}{(E_2-E_1)\phi}.$$

Par l'intermédiaire de (8′) nous obtenons finalement

$$(11)\qquad a_{m-1} = \frac{\phi\cdot(E_2-E_1)\cdot\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{Q^2-4PR}{\sigma(\sigma+4)}} - \left(PE_1\phi^2 + Q\cdot\frac{E_1+E_2}{2}\phi + RE_2\right)}{E_1E_2\cdot(P\phi^2+Q\phi+R)}.$$

Il s'ensuit que les conditions du théorème énoncé sont de nécessité remplies.

Il reste à démontrer que les conditions du théorème en question sont *suffisantes* pour que le nombre irrationnel

$$\theta = \frac{a_1|}{|sa_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{m-2}|}{|a_{m-2}} + \frac{a_{m-1}|}{|a_{m-1}} + \frac{a_m|}{|a_m} + \frac{\sigma|}{|\sigma} + \frac{\sigma|}{|\sigma} + \cdots,$$

où s; a_1, a_2, a_3, . . . a_{m-2}, a_{m-1}, a_m, σ sont des nombres entiers positifs tels qu'on ait

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{m-2} \leqq a_{m-1} \leqq a_m \leqq \sigma,$$

satisfasse à l'équation quadratique $P\theta^2 + Q\theta + R = 0$. D'après la théorie générale des fractions continues nous pouvons écrire (cf. (5))

$$\theta = \frac{A_{m-1}\cdot\varphi + A_m}{B_{m-1}\cdot\varphi + B_m} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\cdot\frac{\varphi + A_m/A_{m-1}}{\varphi + B_m/B_{m-1}}$$

$$= \phi\cdot\frac{\varphi + a_m + \frac{a_m}{a_{m-1}\cdot E_2}}{\varphi + a_m + \frac{a_m}{a_{m-1}\cdot E_1}}$$

selon la définition de ϕ, E_1 et E_2 et en posant

$$\varphi = \frac{\sqrt{\sigma(\sigma+4)}-\sigma}{2} = \frac{\sigma|}{|\sigma} + \frac{\sigma|}{|\sigma} + \cdots.$$

En divisant les expressions de a_m et a_{m-1} de l'énoncé du théorème en question on obtient

$$\frac{a_m}{a_{m-1}} = \frac{E_1E_2}{E_2-E_1}\cdot\sqrt{\frac{\sigma(\sigma+4)}{Q^2-4PR}}\cdot\frac{P\phi^2+Q\phi+R}{\phi}.$$

En substituant aussi les expressions de φ et de a_m nous obtenons

$$\theta = \phi \cdot \frac{\dfrac{\sqrt{\sigma(\sigma+4)}}{2} - \sqrt{\dfrac{\sigma(\sigma+4)}{Q^2-4PR}} \cdot \dfrac{PE_1\phi + \dfrac{Q}{2}(E_1+E_2) + \dfrac{RE_2}{\phi}}{E_2-E_1} + \dfrac{E_1}{E_2-E_1}\sqrt{\dfrac{\sigma(\sigma+4)}{Q^2-4PR}} \cdot \dfrac{P\phi^2+Q\phi+R}{\phi}}{\dfrac{\sqrt{\sigma(\sigma+4)}}{2} - \sqrt{\dfrac{\sigma(\sigma+4)}{Q^2-4PR}} \cdot \dfrac{PE_1\phi + \dfrac{Q}{2}(E_1+E_2) + \dfrac{RE_2}{\phi}}{E_2-E_1} + \dfrac{E_2}{E_2-E_1}\sqrt{\dfrac{\sigma(\sigma+4)}{Q^2-4PR}} \cdot \dfrac{P\phi^2+Q\phi+R}{\phi}},$$

d'où

$$\theta = \phi \, \frac{\dfrac{\sqrt{Q^2-4PR}}{2} + \dfrac{1}{E_2-E_1} \cdot \left(QE_1 + \dfrac{RE_1}{\phi} - \dfrac{QE_1}{2} - \dfrac{QE_2}{2} - \dfrac{RE_2}{\phi}\right)}{\dfrac{\sqrt{Q^2-4PR}}{2} + \dfrac{1}{E_2-E_1} \cdot \left(PE_2\phi + QE_2 - PE_1\phi - \dfrac{QE_1}{2} - \dfrac{QE_2}{2}\right)}$$

$$= \phi \cdot \frac{\dfrac{\sqrt{Q^2-4PR}}{2} - \dfrac{Q}{2} - \dfrac{R}{\phi}}{\dfrac{\sqrt{Q^2-4PR}}{2} + \dfrac{Q}{2} + P\phi}.$$

En multipliant le numérateur ainsi que le dénominateur par $(\sqrt{Q^2-4PR}-Q)/2$ nous obtenons

$$\theta = \phi \cdot \frac{\left(\dfrac{\sqrt{Q^2-4PR}}{2} - \dfrac{Q}{2} - \dfrac{R}{\phi}\right)\left(\dfrac{\sqrt{Q^2-4PR}}{2} - \dfrac{Q}{2}\right)}{\dfrac{Q^2-4PR}{4} - \dfrac{Q^2}{4} + P\phi\left(\dfrac{\sqrt{Q^2-4PR}}{2} - \dfrac{Q}{2}\right)}$$

$$= \phi \cdot \frac{\left(\dfrac{\sqrt{Q^2-4PR}}{2} - \dfrac{Q}{2} - \dfrac{R}{\phi}\right)\left(\dfrac{\sqrt{Q^2-4PR}}{2} - \dfrac{Q}{2}\right)}{P\phi\left(\dfrac{\sqrt{Q^2-4PR}}{2} - \dfrac{Q}{2} - \dfrac{R}{\phi}\right)} = \frac{\sqrt{Q^2-4PR}}{2P} - \frac{Q}{2P},$$

c'est-à-dire, le nombre θ satisfait à l'équation $P\theta^2 + Q\theta + R = 0$.

Tryckt den 28 februari 1951

Uppsala 1951. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB