ARKIV FÖR MATEMATIK Band 1 nr 23

Mitgeteilt am 12. April 1950 durch F. Carlson und J. Malmquist

Eine neue Art monotoner Kettenbruchentwicklungen

Von Folke Ryde

I

Der Algorithmus der monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbrüche.

Wir nennen einen endlichen oder unendlichen Kettenbruch der Form

$$\frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_m|}{|a_m} + \cdots,$$

wo s; $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m, \ldots$ ganze, positive Zahlen sind, einen *monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbruch*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind,

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_m \leqq \cdots.$$

Wir nennen einen endlichen Kettenbruch der Form

$$\frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{m-1}|}{|a_{m-1}} + \frac{a_m|}{|a_m} + \frac{1|}{|1},$$

wo s; $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{m-1}, a_m$ ganze positive Zahlen sind, einen *fast-monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbruch*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind,

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{m-1} < a_m.$$

Das spezielle Kennzeichen eines fast-monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbruches ist mithin, dass der letzte Teilbruch gleich $\frac{1|}{|1}$ ist, während der zweitletzte Teilzähler grösser als der vorhergehende ist. Wenn der Kettenbruch nur zwei Teilbrüche enthält, d. h. der Form $\frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{1|}{|1}$ ist, nehmen wir an, dass $a_1 > 1$. Wenn der Kettenbruch nur einen Teilbruch enthält, muss er der Form $\frac{1|}{|s}$ sein. Es sei sogleich bemerkt, dass jeder fast-monotone, nicht-abnehmende Kettenbruch in einen endlichen monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbruch transformiert werden kann: man hat nur den letzten Teilbruch $\frac{1|}{|1}$ durch $\frac{a_{m+1}|}{|a_{m+1}}$ zu ersetzen, wo a_{m+1} ganz und

$\geqq a_m$ aber übrigens beliebig gewählt werden kann. Dasselbe Ziel wird auch durch die Transformation

$$\frac{a_m|}{|a_m} + \frac{1|}{|1} = \frac{a_m - 1|}{|a_m - 1} + \frac{a_m - 1|}{|a_m - 1} + \frac{1|}{|1} = \frac{a_m - 1|}{|a_m - 1} + \frac{a_m - 1|}{|a_m - 1} + \frac{a_{m+1}|}{|a_{m+1}},$$

mit a_{m+1} ganz und $\geqq a_m - 1$ aber übrigens beliebig gewählt, erreicht.

Wir betrachten jetzt den nachstehenden Algorithmus, den wir den Algorithmus der monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbrüche nennen wollen:

Es sei θ eine reelle Zahl im Intervall $0 < \theta < 1$. Dann bilden wir folgendermassen eine Reihe von neuen Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots$

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} \theta &= \frac{\left[\dfrac{1}{\dfrac{1}{\theta} - \left[\dfrac{1}{\theta}\right]}\right]}{\left[\dfrac{1}{\theta} \cdot \left[\dfrac{1}{\dfrac{1}{\theta} - \left[\dfrac{1}{\theta}\right]}\right]\right] + \theta_1}, \\ \theta_1 &= \frac{\left[\dfrac{1}{\dfrac{1}{\theta_1} - \left[\dfrac{1}{\theta_1}\right]}\right]}{\left[\dfrac{1}{\theta_1} \cdot \left[\dfrac{1}{\dfrac{1}{\theta_1} - \left[\dfrac{1}{\theta_1}\right]}\right]\right] + \theta_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

usw, wo das Zeichen [ ] seine gewöhnliche Bedeutung hat.

Für den Algorithmus (A) gelten folgende Sätze:

Satz I. *Wenn* $1/2 < \theta < 1$ *und* $\theta/1 - \theta$ *nicht ganz ist, so gilt*

$$\left[\frac{1}{\dfrac{1}{\theta} - \left[\dfrac{1}{\theta}\right]}\right] = \left[\frac{1}{\theta} \cdot \left[\frac{1}{\dfrac{1}{\theta} - \left[\dfrac{1}{\theta}\right]}\right]\right].$$

Es gilt nämlich, wenn $\theta = 1/1 + \omega$ gesetzt wird, $0 < \omega < 1$, da $1/2 < \theta < 1$ angenommen ist. Dann ist

$$\left[\frac{1}{\dfrac{1}{\theta} - \left[\dfrac{1}{\theta}\right]}\right] = \left[\frac{1}{1 + \omega - [1 + \omega]}\right] = \left[\frac{1}{\omega}\right]$$

und

$$\left[\frac{1}{\theta}\cdot\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]\right]=\left[(1+\omega)\left[\frac{1}{\omega}\right]\right]=\left[\left[\frac{1}{\omega}\right]+\frac{\left[\frac{1}{\omega}\right]}{\frac{1}{\omega}}\right]=\left[\frac{1}{\omega}\right],$$

denn $\frac{1}{\omega}=\frac{\theta}{1-\theta}$ ist zufolge der Voraussetzung nicht ganzzahlig.

Satz II. *Wenn* $1/2<\theta<1$ *und* $\frac{\theta}{1-\theta}$ *eine ganze Zahl bedeutet, so gilt*

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]=\left[\frac{1}{\theta}\cdot\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]\right]-1.$$

Denn, wenn wir $\frac{\theta}{1-\theta}=n$ setzen, so ergibt sich durch direkte Ausrechnung

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]=n \quad\text{und}\quad \left[\frac{1}{\theta}\cdot\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]\right]=n+1.$$

θ_1 ist gleich Null zu setzen.

Satz III. *Wenn* $1/2<\theta<1$ *und* $\frac{\theta}{1-\theta}$ *nicht ganz ist, so gilt* $1/2<\theta_1<1$.

Wenn nämlich wie oben bei dem Satz I $\theta=\frac{1}{1+\omega}$ gesetzt wird, so ergibt sich aus (A)

$$\theta\cdot\left(\left[\frac{1}{\omega}\right]+\theta_1\right)=\left[\frac{1}{\omega}\right]$$

d. h.

$$\theta_1=\left[\frac{1}{\omega}\right]\cdot\left(\frac{1}{\theta}-1\right)=\omega\left[\frac{1}{\omega}\right].$$

Weil $1/2<\theta<1$, liegt ω im Intervall $0<\omega<1$. Weil $\frac{1}{\omega}=\frac{\theta}{1-\theta}$ nicht ganzzahlig ist, so ergibt sich $\left[\frac{1}{\omega}\right]<\frac{1}{\omega}$ und deshalb $\theta_1<1$. Ferner können wir das Intervall $0<\omega<1$ folgendermassen zerspalten: $0<\omega<1/2$ und $1/2<\omega<1$. Im letzten Fall ergibt sich $1<\frac{1}{\omega}<2$ und deshalb $\left[\frac{1}{\omega}\right]=1$ und

$$\theta_1=\omega\left[\frac{1}{\omega}\right]=\omega>\frac{1}{2}.$$

Im ersten Fall ergibt sich, da immer $\frac{1}{\omega} < \left[\frac{1}{\omega}\right] + 1$ ist,

$$\theta_1 = \omega\left[\frac{1}{\omega}\right] > \omega\left(\frac{1}{\omega} - 1\right) = 1 - \omega > \frac{1}{2}.$$

Satz IV. *Wenn* $0 < \theta < \frac{1}{2}$ *und* $1/\theta$ *nicht ganz ist und ebenso* $\dfrac{\theta}{1 - \theta \cdot \left[\frac{1}{\theta}\right]}$ *nicht ganz ist, so gilt*

$$\left[\frac{1}{\theta} \cdot \left[\frac{1}{\frac{1}{\theta} - \left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]\right] = s\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta} - \left[\frac{1}{\theta}\right]}\right],$$

wo $s = \left[\frac{1}{\theta}\right]$ *eine ganze Zahl* $\geqq 2$ *bedeutet.*

Wenn nämlich wie oben $\theta = \frac{1}{1+\omega}$ gesetzt wird, so ergibt sich $1 < \omega$ und

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta} - \left[\frac{1}{\theta}\right]}\right] = \left[\frac{1}{1 + \omega - [1 + \omega]}\right] = \left[\frac{1}{1 + \omega - 1 - [\omega]}\right] = \left[\frac{1}{\omega - [\omega]}\right].$$

Fernerhin ergibt sich

$$\left[\frac{1}{\theta} \cdot \left[\frac{1}{\frac{1}{\theta} - \left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]\right] = \left[(1 + \omega)\left[\frac{1}{\omega - [\omega]}\right]\right] = \left[(1 + [\omega] + (\omega - [\omega]))\left[\frac{1}{\omega - [\omega]}\right]\right]$$

$$= (1 + [\omega])\left[\frac{1}{\omega - [\omega]}\right] + \left[(\omega - [\omega])\left[\frac{1}{\omega - [\omega]}\right]\right] = s\left[\frac{1}{\omega - [\omega]}\right] = s\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta} - \left[\frac{1}{\theta}\right]}\right],$$

wo $s = 1 + [\omega] = 1 + \left[\frac{1}{\theta} - 1\right] = \left[\frac{1}{\theta}\right]$ eine ganze Zahl $\geqq 2$ bedeutet. Es ergibt sich nämlich

$$0 < (\omega - [\omega])\left[\frac{1}{\omega - [\omega]}\right] < (\omega - [\omega])\frac{1}{\omega - [\omega]} = 1,$$

denn die Zahl

$$\frac{1}{\omega - [\omega]} = \frac{1}{\frac{1}{\theta} - 1 - \left[\frac{1}{\theta} - 1\right]} = \frac{1}{\frac{1}{\theta} - \left[\frac{1}{\theta}\right]} = \frac{\theta}{1 - \theta\left[\frac{1}{\theta}\right]}$$

ist zufolge der Voraussetzung nicht ganz.

Satz V. *Wenn* $0 < \theta \leqq \frac{1}{2}$ *und* $1/\theta$ *ganz ist, werden die Ausdrücke* (*A*) *sinnlos.*

Wenn $0 < \theta < \frac{1}{2}$ *und* $1/\theta$ *nicht ganz ist, aber* $\dfrac{\theta}{1-\theta\left[\frac{1}{\theta}\right]}$ *ganz ist, so gilt*

$$\left[\frac{1}{\theta}\cdot\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]\right] = s\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]+1,$$

wo $s = \left[\frac{1}{\theta}\right]$ *eine ganze Zahl* $\geqq 2$ *bedeutet.*

Denn, wenn die ganze Zahl $\dfrac{\theta}{1-\theta\left[\frac{1}{\theta}\right]} = \dfrac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}$ gleich n gesetzt wird, so ergibt sich

$$\left[\frac{1}{\theta}\cdot\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]\right] = \left[\frac{n}{\theta}\right] = \left[n\left[\frac{1}{\theta}\right]+1\right] = n\left[\frac{1}{\theta}\right]+1 = \left[\frac{1}{\theta}\right]\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]+1.$$

(n muss $\geqq 2$ sein, weil $\frac{1}{\theta}$ nicht ganz ist.)

Satz VI. *Wenn* $0 < \theta < \frac{1}{2}$ *und* $1/\theta$ *nicht ganz ist und ebenso* $\dfrac{\theta}{1-\theta\left[\frac{1}{\theta}\right]}$ *nicht ganz ist, so gilt* $\frac{1}{2} < \theta_1 < 1$.

Wenn nämlich wie oben $\theta = \dfrac{1}{1+\omega}$ gesetzt wird, so ergibt sich aus (A) (vgl. den Beweis beim Satz IV)

$$\frac{1}{1+\omega}\left((1+[\omega])\left[\frac{1}{\omega-[\omega]}\right]+\theta_1\right) = \left[\frac{1}{\omega-[\omega]}\right]$$

d. h.

$$\theta_1 = \left[\frac{1}{\omega-[\omega]}\right](1+\omega-1-[\omega]) = (\omega-[\omega])\left[\frac{1}{\omega-[\omega]}\right].$$

Da $\dfrac{\theta}{1-\theta\left[\frac{1}{\theta}\right]} = \dfrac{1}{\omega-[\omega]}$ nicht ganz ist, so ergibt sich sofort

$$\theta_1 = (\omega-[\omega])\left[\frac{1}{\omega-[\omega]}\right] < (\omega-[\omega])\frac{1}{\omega-[\omega]} = 1.$$

Da $\omega = \frac{1}{\theta} - 1$ nicht ganz ist, so liegt $\omega - [\omega]$ im Intervall $0 < \omega - [\omega] < 1$.

Da fernerhin $\omega - [\omega] \neq \frac{1}{2}$ ist, denn sonst würde $\dfrac{\theta}{1-\theta\left[\frac{1}{\theta}\right]}$ ganz sein, so ergibt sich in gleicher Weise wie bei dem Beweis des Satzes III, dass $\frac{1}{2} < \theta_1$ ist.

Satz VII. (Die Monotonieeigenschaft des Algorithmus.) *Wenn* $\frac{1}{2} < \theta < 1$ *und* $\dfrac{\theta}{1-\theta}$ *nicht ganz ist, so gilt*

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right] \leqq \left[\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}-\left[\frac{1}{\theta_1}\right]}\right],$$

wo θ_1 *nach* (A) *definiert ist.*

Denn nach (A) und dem Satz I gilt

$$\theta = \frac{\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]}{\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]+\theta_1}.$$

Weiterhin ist nach dem Satz III $\frac{1}{2} < \theta_1 < 1$. Nach den Erörterungen bei dem Beweis des Satzes I ist dann

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right] = \left[\frac{\theta}{1-\theta}\right] \text{ und ebenso } \left[\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}-\left[\frac{1}{\theta_1}\right]}\right] = \left[\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right].$$

Es ergibt sich deshalb

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}-\left[\frac{1}{\theta_1}\right]}\right] = \left[\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right] = \left[\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}-1}\right] = \left[\frac{1}{\frac{1}{\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]}\cdot\frac{\theta}{1-\theta}-1}\right]$$

$$= \left[\frac{\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]}{\frac{\theta}{1-\theta}-\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]}\right] \geqq \left[\frac{\theta}{1-\theta}\right] = \left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right],$$

weil

$$0 < \frac{\theta}{1-\theta} - \left[\frac{\theta}{1-\theta}\right] < 1.$$

Satz VIII. (Die Monotonieeigenschaft des Algorithmus.). *Wenn* $0 < \theta < \frac{1}{2}$ *und* $1/\theta$ *nicht ganz ist und ebenso* $\dfrac{\theta}{1-\theta\left[\frac{1}{\theta}\right]}$ *nicht ganz ist, so gilt*

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right] \leqq \left[\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}-\left[\frac{1}{\theta_1}\right]}\right],$$

wo θ_1 *nach* (A) *definiert ist.*

Unter den angegebenen Bedingungen gilt nach den Sätzen IV und VI

$$\theta = \frac{\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]}{s\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]+\theta_1},$$

wo $s = \left[\frac{1}{\theta}\right]$ und wo $\frac{1}{2} < \theta_1 < 1$ ist. Es ergibt sich deshalb

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}-\left[\frac{1}{\theta_1}\right]}\right] = \left[\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}-1}\right] = \left[\frac{1}{\dfrac{1}{\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]}\cdot\dfrac{\theta}{1-s\theta}-1}\right] = \left[\frac{\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]}{\dfrac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}-\left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right]}\right]$$

$$\geqq \left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right],$$

weil

$$0 < \frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]} - \left[\frac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}\right] < 1,$$

denn $\dfrac{1}{\frac{1}{\theta}-\left[\frac{1}{\theta}\right]}$ ist gemäss der Voraussetzung, nicht ganz.

In den bei den vorigen Sätzen auftretenden Ausnahmefällen, die folgendermassen zusammengefasst werden können,

$$\theta = \frac{n}{s\,n + 1} \text{ mit } \begin{cases} \text{I.} & s = 1,\, n > 1 \\ \text{II.} & s \geqq 1,\, n = 1 \\ \text{III.} & s > 1,\, n > 1, \end{cases}$$

liegen von vornherein fast-monotone, nicht-abnehmende Kettenbrüche vor. Die Fälle II und III können wir beiseitelassen, da sie nicht bei der fortgesetzten Verwendung des Algorithmus auftreten können.

Satz IX. *Wenn der Algorithmus sukzessiv angewandt wird, entstehen aus den Gleichungen*

$$\theta = \frac{a_1}{s\,a_1 + \theta_1},\quad \theta_1 = \frac{a_2}{a_2 + \theta_2},\quad \theta_2 = \frac{a_3}{a_3 + \theta_3}, \ldots,$$

wo allgemein

$$a_\nu = \left[\frac{1}{\dfrac{1}{\theta_{\nu-1}} - \left[\dfrac{1}{\theta_{\nu-1}}\right]}\right] \qquad (\theta_0 = \theta.)$$

ist, eigentliche, nicht sinnlose Kettenbrüche

$$\frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|a_\nu} + \cdots.$$

Wenn der Algorithmus nimmer abbricht, entsteht ein konvergenter unendlicher Kettenbruch, der die Zahl θ darstellt.

Der erste Teil des Satzes folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass sämtliche Grössen $s, a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ positiv sind. Die Konvergenz der unendlichen, hier auftretenden Kettenbrüche folgt aus bekannten Kriterien. Vgl. z. B. Encykl. math. Wiss. Bd 1, Teil 1 p. 129. Um den letzten Teil des Satzes zu beweisen führen wir in bekannter Weise die Näherungsbrüche

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|a_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ein. Dann gilt

$$\theta = \frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_\nu\quad|}{|a_\nu + \theta_\nu} = \frac{A_\nu + A_{\nu-1}\cdot\theta_\nu}{B_\nu + B_{\nu-1}\cdot\theta_\nu}.$$

Mit Hilfe der bekannten Formeln

$$A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu = (-1)^{\nu-1} a_1 a_2 a_3 \ldots a_\nu$$

ergibt sich für $\nu \equiv 0 \pmod 2$

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} < \theta < \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$$

und für $\nu \equiv 1 \pmod 2$

$$\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} < \theta < \frac{A_\nu}{B_\nu},$$

da sämtliche Grössen $s, a_1, a_2, \ldots$ und $\theta_1, \theta_2, \ldots$ und A_ν und B_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ positiv sind. Hieraus und aus der Konvergenz der Kettenbrüche folgt

$$\theta = \frac{a_1 |}{| s a_1} + \frac{a_2 |}{| a_2} + \frac{a_3 |}{| a_3} + \cdots.$$

Satz X. *Der Algorithmus (A) auf einer im Intervall $0 < r < 1$ gelegenen, rationalen Zahl r angewandt, bricht nach einer endlichen Anzahl von Schritten ab. Es entsteht ein fast-monotoner, nicht-abnehmender Kettenbruch.*

Wenn $r = \frac{n}{s n + 1}$, wo s und n ganze, positive Zahlen bedeuten, liegen, wie oben bemerkt wurde, schon vornherein fast-monotone, nicht-abnehmende Kettenbrüche vor. In jedem anderen Fall führt der Algorithmus nach den Sätzen I, III, IV und VI zu einer Entwicklung

$$r = \frac{a_1 |}{| s a_1} + r_1,$$

wo s und a_1 ganze, positive Zahlen sind und wo $\frac{1}{2} < r_1 < 1$ ist. Schreiben wir r als einen irreduziblen Bruch $\frac{p}{q}$, so ergibt sich mithin

$$r_1 = \frac{a_1 (q - p s)}{p} = \frac{p_1}{p},$$

wo $1 \leqq p_1 < p < q$. ist. Wenn $\frac{p_1/p}{1 - p_1/p}$ nicht ganz ist, d. h. p_1/p nicht der Form $\frac{n}{n+1}$ ist, gibt der Algorithmus ebenso

$$r_1 = \frac{p_1}{p} = \frac{a_2 |}{| a_2} + r_2,$$

wo $\frac{1}{2} < r_2 < 1$ ist. Wie oben ergibt sich, wenn $r_2 = \frac{p_2}{p_1}$ geschrieben wird, für die ganze Zahl p_2 folgende Ungleichungen $1 \leqq p_2 < p_1 < p < q$, usf. Schliesslich muss der Algorithmus zum erstenmal zu einer Zahl $r_\nu = p_\nu / p_{\nu-1}$ der Form $\frac{n}{n+1}$ mit $a_\nu < n$ führen, denn es gibt nur eine endliche Anzahl ganzer Zahlen P im Intervall $1 \leqq P < q$. Dann liegt eine fast-monotone, nicht-abnehmende Kettenbruchentwicklung vor. (Der Fall $a_\nu = n$ ist ausgeschlossen, denn sonst würde schon

$$r_{\nu-1} = \frac{a_\nu |}{| a_\nu} + r_\nu = \frac{n |}{| n} + \frac{n |}{| n} + 1 = \frac{n+1}{n+2}$$

der angegebenen Form sein.) Die Monotonie der Entwicklung folgt aus den Sätzen VII und VIII.

Satz XI. *Der Algorithmus (A) auf einer im Intervall $0 < \varrho < 1$ gelegenen, irrationalen Zahl ϱ angewandt, bricht nimmer ab: es entsteht eine unendliche, monotone, nicht-abnehmende Kettenbruchentwicklung der Zahl ϱ.*

Denn, wenn der Algorithmus abbrechen sollte, dann würde die Zahl rational sein. Die Monotonie der Entwicklung folgt auch hier aus den Sätzen VII und VIII. Vgl. auch Satz IX.

Satz XII. (Die Eindeutigkeit der Entwicklungen bei den irrationalen Zahlen.) *Jede im Intervall $0 < \varrho < 1$ gelegene irrationale Zahl ϱ lässt sich auf eine und nur eine Weise in einen monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbruch entwickeln.*

Es bleibt der Nachweis der Eindeutigkeit übrig. Es sei allgemein

$$\frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|a_{\nu-1}} + \frac{a_\nu|}{|a_\nu} + \frac{a_{\nu+1}|}{|a_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|a_{\nu+2}} + \cdots \text{ ad inf.}$$

und

$$\frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|a_{\nu-1}} + \frac{b_\nu|}{|b_\nu} + \frac{b_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{b_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots \text{ ad inf.}$$

zwei Kettenbruchentwicklungen der Zahl ϱ, wobei $s, a_1, a_2, \ldots a_{\nu-1}$ ebenso wie $a_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots$ und $b_\nu, b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \ldots$ ganze, positive Zahlen derart bedeuten, dass

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{\nu-1} \quad \text{und} \quad a_{\nu-1} \leqq a_\nu \leqq a_{\nu+1} \leqq a_{\nu+2} \leqq \cdots$$

und ebenso

$$a_{\nu-1} \leqq b_\nu \leqq b_{\nu+1} \leqq b_{\nu+2} \leqq \cdots.$$

Wir schreiben

$$\varrho = \frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|a_{\nu-1}} + \frac{a_\nu|}{|a_\nu} + \frac{a_{\nu+1}|}{|a_{\nu+1}} + \theta_{\nu+1}$$

$$= \frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|a_{\nu-1}} + \frac{b_\nu|}{|b_\nu} + \frac{b_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \psi_{\nu+1},$$

wo (cf. Satz IX) $\theta_{\nu+1} = \frac{a_{\nu+2}|}{|a_{\nu+2}} + \cdots$ und $\psi_{\nu+1} = \frac{b_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots$ gewiss kleiner als 1 sind. Dann ergibt sich nach wiederholten Reduktionen und Invertierungen

$$\frac{a_\nu}{a_\nu + \dfrac{a_{\nu+1}}{a_{\nu+1} + \theta_{\nu+1}}} = \frac{b_\nu}{b_\nu + \dfrac{b_{\nu+1}}{b_{\nu+1} + \psi_{\nu+1}}},$$

d. h.

$$1 + \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu(a_{\nu+1} + \theta_{\nu+1})} = 1 + \frac{b_{\nu+1}}{b_\nu(b_{\nu+1} + \psi_{\nu+1})},$$

woraus sich ergibt

$$a_\nu + \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \cdot \theta_{\nu+1} = b_\nu + \frac{b_\nu}{b_{\nu+1}} \cdot \psi_{\nu+1}.$$

Hieraus folgt $a_\nu = b_\nu$, da a_ν und b_ν ganze Zahlen sind und

$$0 < \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \cdot \theta_{\nu+1} < 1 \text{ und } 0 < \frac{b_\nu}{b_{\nu+1}} \cdot \psi_{\nu+1} < 1.$$

Ebenso beweist man, dass auch alle folgenden Teilbrüche in den beiden Entwicklungen je zwei übereinstimmen müssen. — In gleicher Weise wird gezeigt, dass auch der erste Teilzähler sowie der erste Teilnenner eindeutig bestimmt ist.

Satz XIII. (Die Eindeutigkeit der Entwicklungen bei den rationalen Zahlen.) *Jede im Intervall* $0 < r < 1$ *gelegene rationale Zahl* r *lässt sich auf eine und nur eine Weise in einen fast-monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbruch entwickeln.*

Die Beweisführung bei dem Satz XII behält auch hier meistens ihre Gültigkeit. Nur müssen wir die Endlichkeit der beiden Entwicklungen berücksichtigen. Wenn der Abbruch bei dem $(\nu + 2)$-ten Teilbruch oder später einsetzt, behält die Beweisführung ihre Gültigkeit, denn wenn z. B. $\theta_{\nu+1} = 1$ ist, so muss $a_{\nu+1} > a_\nu$ sein, und die Ungleichungen

$$0 < \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \cdot \theta_{\nu+1} < 1$$

bestehen immer noch. Wenn der Abbruch in beiden Entwicklungen bei dem $(\nu + 1)$-ten bzw. bei dem ν-ten Teilbruch einsetzt, müssen die Entwicklungen offenbar zusammenfallen. Wenn der Abbruch in einer Entwicklung bei dem $(\nu + 1)$-ten Teilbruch einsetzt, kann er nicht später bei der anderen Entwicklung einsetzen. Denn aus z. B.

$$\frac{a_\nu}{a_\nu + 1} = \cfrac{b_\nu}{b_\nu + \cfrac{b_{\nu+1}}{b_{\nu+1} + \psi_{\nu+1}}}$$

folgt $a_\nu = b_\nu + \frac{b_\nu}{b_{\nu+1}} \cdot \psi_{\nu+1}$, was unmöglich ist, da die Ungleichungen

$$0 < \frac{b_\nu}{b_{\nu+1}} \cdot \psi_{\nu+1} < 1$$

immer noch bestehen. — Ebenso kann die eine Entwicklung nicht bei dem ν-ten Teilbruch und die andere später abbrechen.

Es folgt weiter aus den vorstehenden Erörterungen, dass ein unendlicher, monotoner, nicht-abnehmender Kettenbruch nimmer eine rationale Zahl darstellen kann. Vgl. Encykl. math. Wiss., loc. cit.

II

Schlussgleiche monotone, nicht-abnehmende Kettenbrüche.

Wenn wir den vorliegenden Algorithmus auf die Zahl $\pi - 3$ anwenden, entsteht die Entwicklung

$$\pi = 3 + \frac{15|}{|105} + \frac{15|}{|15} + \frac{292|}{|292} + \frac{460|}{|460} + \cdots.$$

In gleicher Weise erhalten wir

$$2\pi = 6 + \frac{1|}{|3} + \frac{1|}{|1} + \frac{7|}{|7} + \frac{14|}{|14} + \frac{292|}{|292} + \frac{460|}{|460} + \cdots .$$

Es leuchtet ein, dass die monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbruchentwicklungen von π und 2π vom dritten bzw. fünften Teilbruch übereinstimmen, was wir auch später bestätigen sollen. Wir sagen, dass π und 2π ${}^5_3M$-schlussgleich sind. Ebenso findet man, wenn $\gamma = 0{,}577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 8\ldots$ die Eulersche Konstante bedeutet,

$$g = \frac{\gamma}{8} = \frac{1|}{|13} + \frac{6|}{|6} + \frac{48|}{|48} + \frac{214|}{|214} + \frac{239|}{|239} + \cdots$$

und

$$4g = \frac{\gamma}{2} = \frac{2|}{|6} + \frac{13|}{|13} + \frac{52|}{|52} + \frac{214|}{|214} + \frac{239|}{|239} + \cdots,$$

so dass g und $4g$ ${}^4_4M$-schlussgleich erscheinen, was auch bestätigt werden kann.

Es entsteht die Frage, wann zwei Zahlen ψ und φ ${}^n_mM$-schlussgleich sind. Wir beginnen mit dem

Satz 1: (Notwendige Bedingung.) *Wenn zwei im Intervall* $0 < \theta < 1$ *gelegene irrationale Zahlen* ψ *und* φ ${}^n_mM$*-schlussgleich sind, muss zwischen ihnen eine Beziehung in der Form einer linearen Substitution*

$$\varphi = \frac{A\psi + B}{C\psi + D}$$

gelten, wo A, B, C *und* D *ganze Zahlen bedeuten.*

Wenn ψ und φ ${}^n_mM$-schlussgleich sind, gelten folgende Beziehungen

$$\psi = \frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_m|}{|a_m} + \omega$$

und

$$\varphi = \frac{b_1|}{|t\,b_1} + \frac{b_2|}{|h_2} + \frac{b_3|}{|b_2} + \cdots + \frac{b_n|}{|b_n} + \omega,$$

wo die Entwicklungen monotone, nicht-abnehmende Kettenbrüche sind. Mit den Bezeichnungen

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_m|}{|a_m} \quad \text{und} \quad \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{m-1}|}{|a_{m-1}}$$

bzw.

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{b_1|}{|t\,b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_n|}{|b_n} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} = \frac{b_1|}{|t\,b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_{n-1}|}{|b_{n-1}}$$

erhalten wir (vgl. den Beweis beim Satz IX, Teil I)

$$\psi = \frac{A_{m-1} \cdot \omega + A_m}{B_{m-1} \cdot \omega + B_m} \text{ und } \varphi = \frac{\alpha_{n-1} \cdot \omega + \alpha_n}{\beta_{n-1} \cdot \omega + \beta_n},$$

woraus sich ergibt

$$\omega = \frac{-B_m \cdot \psi + A_m}{B_{m-1} \cdot \psi - A_{m-1}}$$

und mithin

$$\varphi = \frac{\dfrac{-B_m \cdot \psi + A_m}{B_{m-1} \cdot \psi - A_{m-1}} \cdot \alpha_{n-1} + \alpha_n}{\dfrac{-B_m \cdot \psi + A_m}{B_{m-1} \cdot \psi - A_{m-1}} \cdot \beta_{n-1} + \beta_n}$$

d. h.

$$\varphi = \frac{(\alpha_n \cdot B_{m-1} - \alpha_{n-1} \cdot B_m)\,\psi + \alpha_{n-1} \cdot A_m - \alpha_n \cdot A_{m-1}}{(\beta_n \cdot B_{m-1} - \beta_{n-1} \cdot B_m)\,\psi + \beta_{n-1} \cdot A_m - \beta_n \cdot A_{m-1}}.$$

Es gilt folglich

$$\varphi = \frac{A\psi + B}{C\psi + D},$$

wo

$$A = \alpha_n \cdot B_{m-1} - \alpha_{n-1} \cdot B_m$$

$$B = \alpha_{n-1} \cdot A_m - \alpha_n \cdot A_{m-1}$$

$$C = \beta_n \cdot B_{m-1} - \beta_{n-1} \cdot B_m$$

$$D = \beta_{n-1} \cdot A_m - \beta_n \cdot A_{m-1}$$

ganze Zahlen sind.

Es sei bemerkt, dass die Substitutionsdeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A, & B \\ C, & D \end{vmatrix} = (-1)^{m+n} \cdot a_1 a_2 a_3 \ldots a_m \cdot b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$$

ist.

Es bleibt die Frage übrig, wann eine gegebene lineare Substitution

$$\varphi = \frac{A\psi + B}{C\psi + D}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten A, B, C und D eine irrationale Zahl ψ in eine ${}^n_m M$-schlussgleiche Zahl φ überführt. Man sieht sofort ein, dass die oben durchgeführte Betrachtung nicht nur für eine vereinzelte Irrationalzahl ω gilt sondern für sämtliche Irrationalzahlen im Intervall

$$\frac{g_{m,n}}{g_{m,n} + 1} < \omega < 1,$$

wo $g_{m,n}$ die grösste der Zahlen a_m und b_n bedeutet. Wir können daher das Problem folgendermassen präzisieren:

Es sei

$$\text{(S)} \qquad \varphi = \frac{A\,\psi + B}{C\,\psi + D}$$

eine gegebene lineare Substitution mit ganzzahligen Koeffizienten, $AD - BC \neq 0$. *Es sei ferner*

$$\text{(a)} \qquad \frac{a_1\,|}{|\,s\,a_1} + \frac{a_2\,|}{|\,a_2} + \frac{a_3\,|}{|\,a_3} + \cdots + \frac{a_m\,|}{|\,a_m}$$

der gegebene Anfang einer monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbruchentwicklung. Unter welchen Umständen ist es dann möglich einen anderen solchen Anfang einer monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbruchentwicklung

$$\text{(b)} \qquad \frac{b_1\,|}{|\,t\,b_1} + \frac{b_2\,|}{|\,b_2} + \frac{b_3\,|}{|\,b_3} + \cdots + \frac{b_n\,|}{|\,b_n}$$

so zu bestimmen, dass jede Irrationalzahl ψ *in dem Intervall, dessen Grenzpunkte*

$$\frac{a_1\,|}{|\,s\,a_1} + \frac{a_2\,|}{|\,a_2} + \frac{a_3\,|}{|\,a_3} + \cdots + \frac{a_m\,|}{|\,a_m} + \frac{g_{m,n}\,|}{|\,g_{m,n} + 1}$$

und

$$\frac{a_1\,|}{|\,s\,a_1} + \frac{a_2\,|}{|\,a_2} + \frac{a_3\,|}{|\,a_3} + \cdots + \frac{a_m\,|}{|\,a_m + 1}$$

sind, durch die Substitution (S) *in eine mit* ψ ${}^{n}_{m}M$*-schlussgleiche Zahl* φ, *dessen Anfang durch* (b) *gegeben ist, überführt wird? Dabei bedeutet* $g_{m,n}$ *die grösste der Zahlen* a_m *und* b_n.

Es gilt der **Satz 2:**

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des vorliegenden Problems kann folgendermassen formuliert werden:

1. *Aus dem Gegebenen berechnet man die Zahl*

$$r = \frac{A\left(\frac{A_m}{B_m}\right) + B}{C\left(\frac{A_m}{B_m}\right) + D},$$

wo

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{a_1\,|}{|\,s\,a_1} + \frac{a_2\,|}{|\,a_2} + \frac{a_3\,|}{|\,a_3} + \cdots + \frac{a_m\,|}{|\,a_m}.$$

Dann soll die Bedingung

$$\text{(A)} \qquad 0 < r < 1$$

erfüllt sein.

2. *Die gefundene rationale Zahl r wird dann in einen Kettenbruch folgender Form entwickelt*

$$r = \frac{b_1|}{|t\,b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{b_n|}{|b_n},$$

wo $t, b_1, b_2, b_3, \ldots b_{n-1}, b_n$ ganze positive Zahlen bedeuten, dergleichen dass

$$b_1 \leqq b_2 \leqq b_3 \leqq \cdots \leqq b_{n-1} \leqq b_n.$$

Dann sollen folgende Bedingungen erfüllt sein

$$\text{(B)} \qquad \frac{b_1|}{|t\,b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_{n-2}|}{|b_{n-2}} + \frac{b_{n-1}|}{|b_{n-1}} = \frac{A\left(\dfrac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\right) + B}{C\left(\dfrac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\right) + D}$$

und

$$\text{(C)} \qquad b_n + \frac{b_n \quad |}{|b_{n-1}} + \frac{b_{n-1}|}{|b_{n-2}} + \cdots + \frac{b_4|}{|b_3} + \frac{b_3|}{|b_2} + \frac{b_2|}{|t\,b_1} =$$

$$= \left(a_m + \frac{a_m \quad |}{|a_{m-1}} + \frac{a_{m-1}|}{|a_{m-2}} + \cdots + \frac{a_3|}{|a_2} + \frac{a_2|}{|s\,a_1}\right) \cdot \frac{C\left(\dfrac{A_m}{B_m}\right) + D}{C\left(\dfrac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\right) + D},$$

wo

$$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_{m-1}|}{|a_{m-1}}.$$

Was zunächst die *Notwendigkeit* der Bedingungen betrifft, so setzen wir voraus, dass

$$\frac{b_1|}{|t\,b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_n|}{|b_n}$$

der Anfang der monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbruchentwicklung jeder Zahl

$$\varphi = \frac{A\,\psi + B}{C\,\psi + D}$$

ist, wo

$$\psi = \frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_m|}{|a_m} + \omega$$

eine Irrationalzahl in dem Intervall bedeutet, dessen Grenzpunkte

$$\frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_m|}{|a_m} + \frac{g_{m,n} \quad |}{|g_{m,n} + 1}$$

und

$$\frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_m \quad |}{|a_m + 1}$$

sind. Hierbei bedeutet $g_{m,n}$ die grösste der Zahlen a_m und b_n. Weiter soll die Entwicklung der Zahl φ ${}^m_n M$-schlussgleich mit der Zahl ψ sein, d. h. die Beziehung

$$\varphi = \frac{A\psi + B}{C\psi + D} = \frac{b_1|}{|t b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_n|}{|b_n} + \omega$$

soll gelten. Es sei bemerkt, dass aus der Voraussetzung betreffs ψ folgt, dass

$$\frac{g_{m,n}}{g_{m,n}+1} < \omega < 1, \quad \text{d. h.} \quad 1 < \frac{1}{\omega} < 1 + \frac{1}{g_{m,n}},$$

so dass der erste Teilzähler bei der Entwicklung von ω in einen monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbruch $\geqq g_{m,n}$ ist. Die Entwicklungen von ψ und φ werden dann tatsächlich monotone, nicht-abnehmende Kettenbrüche.

Nach dem Beweis des Satzes 1 ist dann

$$\begin{aligned} \alpha_n \cdot B_{m-1} - \alpha_{n-1} \cdot B_m &= A k \\ \alpha_{n-1} \cdot A_m - \alpha_n \cdot A_{m-1} &= B k \\ \beta_n \cdot B_{m-1} - \beta_{n-1} \cdot B_m &= C k \\ \beta_{n-1} \cdot A_m - \beta_n \cdot A_{m-1} &= D k, \end{aligned}$$

wo k eine Konstante ist. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} r &= \frac{A\left(\frac{A_m}{B_m}\right) + B}{C\left(\frac{A_m}{B_m}\right) + D} = \frac{\frac{A_m}{B_m}(\alpha_n \cdot B_{m-1} - \alpha_{n-1} \cdot B_m) + \alpha_{n-1} \cdot A_m - \alpha_n \cdot A_{m-1}}{\frac{A_m}{B_m}(\beta_n \cdot B_{m-1} - \beta_{n-1} \cdot B_m) + \beta_{n-1} \cdot A_m - \beta_n \cdot A_{m-1}} \\ &= \frac{\alpha_n (A_m \cdot B_{m-1} - A_{m-1} \cdot B_m)}{\beta_n (A_m \cdot B_{m-1} - A_{m-1} \cdot B_m)} = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \\ &= \frac{b_1|}{|t b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{b_n|}{|b_n}, \end{aligned}$$

d. h. die Bedingung (A) ist erfüllt.

Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{A\left(\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\right) + B}{C\left(\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\right) + D} &= \frac{\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}(\alpha_n \cdot B_{m-1} - \alpha_{n-1} \cdot B_m) + \alpha_{n-1} \cdot A_m - \alpha_n \cdot A_{m-1}}{\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}(\beta_n \cdot B_{m-1} - \beta_{n-1} \cdot B_m) + \beta_{n-1} \cdot A_m - \beta_n \cdot A_{m-1}} \\ &= \frac{\alpha_{n-1} (A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m)}{\beta_{n-1} (A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m)} = \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} \\ &= \frac{b_1|}{|t b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_{n-1}|}{|b_{n-1}}. \end{aligned}$$

Die Bedingung (B) ist mithin erfüllt.

Ebenso ergibt sich

$$\frac{C\left(\frac{A_m}{B_m}\right)+D}{C\left(\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\right)+D}=\frac{\frac{A_m}{B_m}(\beta_n\cdot B_{m-1}-\beta_{n-1}\cdot B_m)+\beta_{n-1}\cdot A_m-\beta_n\cdot A_{m-1}}{\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}(\beta_n\cdot B_{m-1}-\beta_{n-1}\cdot B_m)+\beta_{n-1}\cdot A_m-\beta_n\cdot A_{m-1}}$$

$$=\frac{B_{m-1}}{B_m}\cdot\frac{\beta_n(A_m B_{m-1}-A_{m-1}B_m)}{\beta_{n-1}(A_m B_{m-1}-A_{m-1}B_m)}$$

$$=\frac{B_{m-1}}{B_m}\cdot\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}.$$

Es gilt aber (cf. O. PERRON: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig und Berlin 1929, p. 12)

$$\frac{B_m}{B_{m-1}}=a_m+\frac{a_m\,|}{|\,a_{m-1}}+\frac{a_{m-1}|}{|\,a_{m-2}}+\cdots+\frac{a_3|}{|\,a_2}+\frac{a_2\,|}{|\,s\,a_1}$$

und ebenso

$$\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}=b_n+\frac{b_n\,|}{|\,b_{n-1}}+\frac{b_{n-1}|}{|\,b_{n-2}}+\cdots+\frac{b_3|}{|\,b_2}+\frac{b_2\,|}{|\,t\,b_1}.$$ [1]

Die Bedingung (C) ist mithin erfüllt.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Bedingungen *hinreichend* sind. Wir setzen mithin voraus, dass die Bedingungen (A), (B) und (C) erfüllt sind und müssen dann folgendes nachweisen: Für jede Irrationalzahl

$$\psi=\frac{a_1\,|}{|\,s\,a_1}+\frac{a_2|}{|\,a_2}+\frac{a_3|}{|\,a_3}+\cdots+\frac{a_m|}{|\,a_m}+\omega$$

in dem Intervall, dessen Grenzpunkte

$$\frac{a_1\,|}{|\,s\,a_1}+\frac{a_2|}{|\,a_2}+\frac{a_3|}{|\,a_3}+\cdots+\frac{a_m|}{|\,a_m}+\frac{g_{m,n}\,|}{|\,g_{m,n}+1}\quad\text{und}\quad\frac{a_1\,|}{|\,s\,a_1}+\frac{a_2|}{|\,a_2}+\frac{a_3|}{|\,a_3}+\cdots+\frac{a_m\,|}{|\,a_m+1}$$

sind, gilt, dass die eindeutig bestimmte monotone, nicht-abnehmende Kettenbruchentwicklung der Irrationalzahl

$$\varphi=\frac{A\,\psi+B}{C\,\psi+D}$$

die folgende ist

[1] Die hier auftretenden Entwicklungen für B_m/B_{m-1} und β_n/β_{n-1} sind für $s\,a_1=1$, bzw. $t\,b_1=1$ monotone, nicht-wachsende Kettenbrüche und für $s\,a_1>2\,a_2$, bzw. $t\,b_1>2\,b_2$ fast-monotone, nicht-wachsende Kettenbrüche. Die fraglichen Kettenbrüche habe ich in einigen Schriften behandelt. (Cf. Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Bd 31 (1944) und Bd 34 (1947), und Arkiv för matematik, Bd 1 (1949).)

$$\varphi = \frac{b_1|}{|t\,b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_n|}{|b_n} + \omega,$$

wo für die Zahl ω ihre monotone, nicht-abnehmende Kettenbruchentwicklung eingesetzt wird. — Wie oben wird gezeigt, dass die Entwicklungen von ψ und φ unter den gemachten Voraussetzungen tatsächlich monotone, nicht-abnehmende Kettenbrüche werden, so dass ψ und φ dann in der Tat ${}^{n}_{m}M$-schlussgleich sind.

Der Beweis gestaltet sich folgendermassen: Aus

$$\psi = \frac{a_1|}{|s\,a_1} + \frac{a_2|}{|a_2} + \frac{a_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{a_m|}{|a_m} + \omega$$

folgt wie oben bei dem Beweis von dem Satz 1

$$\psi = \frac{A_{m-1}\,\omega + A_m}{B_{m-1}\,\omega + B_m}.$$

Dann ergibt sich

$$\varphi = \frac{A\,\psi + B}{C\,\psi + D} = \frac{A \cdot \dfrac{A_{m-1}\,\omega + A_m}{B_{m-1}\,\omega + B_m} + B}{C \cdot \dfrac{A_{m-1}\,\omega + A_m}{B_{m-1}\,\omega + B_m} + D}$$

$$= \frac{\omega\,(AA_{m-1} + BB_{m-1}) + AA_m + BB_m}{\omega\,(CA_{m-1} + DB_{m-1}) + CA_m + DB_m}$$

$$= \frac{\omega\,\dfrac{AA_{m-1} + BB_{m-1}}{CA_{m-1} + DB_{m-1}} + \dfrac{AA_m + BB_m}{CA_{m-1} + DB_{m-1}}}{\omega + \dfrac{CA_m + DB_m}{CA_{m-1} + DB_{m-1}}}$$

$$= \frac{\omega\,\dfrac{A\left(\dfrac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\right) + B}{C\left(\dfrac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\right) + D} + \dfrac{A\left(\dfrac{A_m}{B_m}\right) + B}{C\left(\dfrac{A_m}{B_m}\right) + D} \cdot \dfrac{C\left(\dfrac{A_m}{B_m}\right) + D}{C\left(\dfrac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\right) + D} \cdot \dfrac{B_m}{B_{m-1}}}{\omega + \dfrac{C\left(\dfrac{A_m}{B_m}\right) + D}{C\left(\dfrac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\right) + D} \cdot \dfrac{B_m}{B_{m-1}}}.$$

Nach den Bedingungen (B) und (C) wird dann

$$\varphi = \frac{A\,\psi + B}{C\,\psi + D} = \frac{\omega\,\dfrac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} + \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} \cdot \dfrac{\beta_n}{\beta_{n-1}}}{\omega + \dfrac{\beta_n}{\beta_{n-1}}} = \frac{\alpha_{n-1}\,\omega + \alpha_n}{\beta_{n-1}\,\omega + \beta_n}.$$

$$\frac{b_1|}{|t\,b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_n|}{|b_n} + \omega$$

kann aber folgendermassen geschrieben werden (vgl. den Beweis bei dem Satz 1)

$$\frac{\alpha_{n-1}\,\omega + \alpha_n}{\beta_{n-1}\,\omega + \beta_n},$$

woraus sich ergibt

$$\varphi = \frac{A\,\psi + B}{C\,\psi + D} = \frac{b_1|}{|t\,b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_n|}{|b_n} + \omega. —$$

Entwicklungen der im Satz 2 angegebenen Form

$$\frac{b_1|}{|t\,b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{b_n|}{|b_n}$$

können aus der fast-monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbruchentwicklung der Zahl r

$$r = \frac{c_1|}{|u\,c_1} + \frac{c_2|}{|c_2} + \frac{c_3|}{|c_3} + \cdots + \frac{c_\nu|}{|c_\nu} + \frac{1|}{|1}$$

mit $c_\nu > c_{\nu-1}$ in zweierlei Weise erhalten werden: entweder

$$r = \frac{c_1|}{|u\,c_1} + \frac{c_2|}{|c_2} + \frac{c_3|}{|c_3} + \cdots + \frac{c_{\nu-1}|}{|c_{\nu-1}} + \frac{c_\nu|}{|c_\nu} + \frac{c_{\nu+1}|}{|c_{\nu+1}} \text{ mit } c_{\nu+1} \geqq c_\nu$$

oder

$$r = \frac{c_1|}{|u\,c_1} + \frac{c_2|}{|c_2} + \frac{c_3|}{|c_3} + \cdots + \frac{c_{\nu-1}|}{|c_{\nu-1}} + \frac{c_\nu - 1|}{|c_\nu - 1} + \frac{c_\nu - 1|}{|c_\nu - 1} + \frac{c_{\nu+2}|}{|c_{\nu+2}} \text{ mit } c_{\nu+2} \geqq c_\nu - 1.$$

Andere Entwicklungen dieser Art gibt es nicht.

Wenn ins besondere die lineare Substitution *ganz* ist, d. h. $C = 0$, so vereinfachen sich die Bedingungen des Satzes 2 in folgender Weise:

(A) $$0 < \frac{A}{D}\frac{A_m}{B_m} + \frac{B}{D} < 1$$

(B) $$\frac{b_1|}{|t\,b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots + \frac{b_{n-2}|}{|b_{n-2}} + \frac{b_{n-1}|}{|b_{n-1}} = \frac{A}{D}\cdot\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} + \frac{B}{D}$$

(C) $$b_n + \frac{b_n|}{|b_{n-1}} + \frac{b_{n-1}|}{|b_{n-2}} + \cdots + \frac{b_4|}{|b_3} + \frac{b_3|}{|b_2} + \frac{b_2|}{|t\,b_1} = a_m + \frac{a_m|}{|a_{m-1}} + \frac{a_{m-1}|}{|a_{m-2}} + \cdots + \frac{a_3|}{|a_2} + \frac{a_2|}{|s\,a_1}.$$

Noch einfacher werden die Bedingungen, wenn $A > 0$, $B = 0$, $C = 0$ und $D = 1$, d. h. die Substitution von der Form $\varphi = A \cdot \psi$ ist. Dann ergibt sich für $m \geqq 3$ und $n \geqq 3$

$$\text{(A)} \quad \frac{a_1 |}{| s\, a_1} + \frac{a_2 |}{| a_2} + \frac{a_3 |}{| a_3} + \cdots + \frac{a_m |}{| a_m} < \frac{1}{A}$$

$$\text{(B)} \quad b_n + \frac{b_n |}{| b_{n-1}} + \frac{b_{n-1} |}{| b_{n-2}} + \cdots + \frac{b_4 |}{| b_3} + \frac{b_3 |}{| b_2} = a_m + \frac{a_m |}{| a_{m-1}} + \frac{a_{m-1} |}{| a_{m-2}} + \cdots + \frac{a_4 |}{| a_3} + \frac{a_3 |}{| a_2}$$

$$\text{(C)} \quad b_n + \frac{b_n |}{| b_{n-1}} + \frac{b_{n-1} |}{| b_{n-2}} + \cdots + \frac{b_3 |}{| b_2} + \frac{b_2 |}{| t\, b_1} = a_m + \frac{a_m |}{| a_{m-1}} + \frac{a_{m-1} |}{| a_{m-2}} + \cdots + \frac{a_3 |}{| a_2} + \frac{a_2 |}{| s\, a_1}$$

mit der als Definition der b_ν dienenden Gleichung

$$\frac{b_1 |}{| t\, b_1} + \frac{b_2 |}{| b_2} + \frac{b_3 |}{| b_3} + \cdots + \frac{b_{n-2} |}{| b_{n-2}} + \frac{b_{n-1} |}{| b_{n-1}} + \frac{b_n |}{| b_n} = A \left(\frac{a_1 |}{| s\, a_1} + \frac{a_2 |}{| a_2} + \frac{a_3 |}{| a_3} + \cdots + \frac{a_m |}{| a_m} \right).$$

Denn die Bedingung (B) in dem Satz 2 kann jetzt in folgender Weise geschrieben werden

$$\frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{B_{m-1}}{A_{m-1}}.$$

Die als Definition dienende Gleichung gibt

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = A \cdot \frac{A_m}{B_m}.$$

Die Bedingung (C) in dem Satz 2 kann in folgender Weise geschrieben werden

$$\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} = \frac{B_m}{B_{m-1}}.$$

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen erhält man

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{A_m}{A_{m-1}}.$$

Durch Induktion kann bewiesen werden, dass

$$\frac{A_m}{A_{m-1}} = a_m + \frac{a_m |}{| a_{m-1}} + \frac{a_{m-1} |}{| a_{m-2}} + \cdots + \frac{a_4 |}{| a_3} + \frac{a_3 |}{| a_2}$$

bzw.

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = b_n + \frac{b_n |}{| b_{n-1}} + \frac{b_{n-1} |}{| b_{n-2}} + \cdots + \frac{b_4 |}{| b_3} + \frac{b_3 |}{| b_2}.$$

Mithin ergibt sich die speziellere Bedingung (B) oben. — Es sei bemerkt, dass die vorstehenden Bedingungen (B) und (C) die Existenz von *mehrfachen* Kettenbruchentwicklungen der in Rede stehenden Art für die entsprechenden Zahlen fordern. (Cf. loc. cit.)

Verwenden wir das in dem Satz 2 ausgedruckte Kriterium auf die Substitution (S) mit $A = 2$, $B = 0$, $C = 0$ und $D = 1$, d. h. $\varphi = 2\psi$, und auf den Anfang (a) mit $m = 2$, $a_1 = 15$, $a_2 = 15$ und $s = 7$, so erhalten wir $r = 15/53$, d. h. die Bedingung (A) ist erfüllt. Ferner gibt die fast-monotone, nicht-abnehmende Kettenbruchentwicklung der Zahl r, $r = \frac{1|}{|3} + \frac{1|}{|1} + \frac{7|}{|7} + \frac{1|}{|1}$, zwei Reihen von Entwicklungen (b)

$$r = \frac{1|}{|3} + \frac{1|}{|1} + \frac{7|}{|7} + \frac{b_4|}{|b_4} \quad \text{und} \quad r = \frac{1|}{|3} + \frac{1|}{|1} + \frac{6|}{|6} + \frac{6|}{|6} + \frac{b_5|}{|b_5}.$$

Die Bedingung (B) wird nur für die erste Reihe erfüllt. Die Bedingung (C) gibt dann

$$b_4 + \frac{b_4|}{|7} + \frac{7|}{|1} + \frac{1|}{|3} = 15 + \frac{15|}{|105}$$

und mithin $b_4 = 14$. Jede Irrationalzahl ψ in dem Intervall, dessen Grenzpunkte $\frac{15\,|}{|105} + \frac{15|}{|15} + \frac{15|}{|16} = \frac{255}{1801} = 0{,}1415880\ldots$ und $\frac{15\,|}{|105} + \frac{15|}{|16} = \frac{16}{113} = 0{,}1415929\ldots$ sind, hat die Eigenschaft, dass die monotone, nicht-abnehmende Kettenbruchentwicklung von 2ψ ${}^3_5M$-schlussgleich mit ψ ist. Die Entwicklung von 2ψ beginnt mit $\frac{1|}{|3} + \frac{1|}{|1} + \frac{7|}{|7} + \frac{14|}{|14}$. Die Zahl $\pi - 3$ gehört diesem Intervall.

Möglicherweise können die monotonen, nicht-abnehmenden Kettenbrüche und ihre entsprechenden Intervall-Transformationen bei einer künftigen Theorie der transcendenten Zahlen von Nutzen sein.

Tryckt den 22 september 1950

Uppsala 1950. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB