ARKIV FÖR MATEMATIK Band 2 nr 20

Mitgeteilt am 23. April 1952 durch F. CARLSON und T. NAGELL

Zur Theorie der Zerlegung von Permutationen in Zyklen

Von OSIAS GRUDER

Jede Permutation von n Elementen kann bekanntlich auf eine und — von der Reihenfolge der Zyklen abgesehen — nur eine Art als Produkt zyklischer Permutationen, die kein Element gemeinsam haben, dargestellt werden. Die Zerlegung von Permutationen in Zyklen gewinnt bei mehreren gruppentheoretischen Untersuchungen eine besondere Bedeutung.

J. J. SYLVESTER[1] hat über die Zerlegung von Permutationen in Zyklen die folgenden Sätze aufgestellt:

I. Die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die als Produkt von k elementenfremden Zyklen darstellbar sind, ist gleich der Summe der Produkte von je $n-k$ verschiedenen der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$.

II. Die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die als Produkt von k elementenfremden Zyklen ungerader Ordnung darstellbar sind, ist gleich der Summe aller jener Produkte von je $n-k$ verschiedenen der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$, in welchen die $n-k$ Faktoren aus $\frac{n-k}{2}$ Gruppen von je 2 aufeinanderfolgenden Zahlen bestehen.

III. Die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die als Produkt von k elementenfremden Zyklen darstellbar sind, wobei die Ordnungen aller Zyklen $\equiv 1 \pmod{m}$ sind, ist gleich der Summe aller jener Produkte von je $n-k$ verschiedenen der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$, in welchen die $n-k$ Faktoren aus $\frac{n-k}{m}$ Gruppen von je m aufeinanderfolgenden Zahlen bestehen.

SYLVESTER betrachtet hier kurz auch den allgemeinen Fall, in dem die Ordnungen aller Zyklen $\equiv a \pmod{b}$ sein sollen, ohne jedoch für diesen Fall das Bildungsgesetz für die gesuchte Anzahl der Permutationen mitzuteilen.

IV. Die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, deren Zyklen alle von ungerader Ordnung sind, ist gleich

$$[1.\,3.\,5.\,\ldots\,(n-1)]^2 \quad \text{für} \quad n=2m$$
$$[1.\,3.\,5.\,\ldots\,(n-2)]^2 n \quad \text{für} \quad n=2m+1.$$

[1] JAMES JOSEPH SYLVESTER:

1. Généralisation d'un théorème de M. Cauchy, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1861, tome 53, p. 644—645.
2. Addition à la note intitulée: "Généralisation d'un théorème de M. Cauchy". Comptes Rendus, Paris, 1861, tome 53, p. 722—724.
3. On a generalization of a theorem of Cauchy on arrangements. Philosophical Magazine, 1861, volume 22, p. 378—382.

1, 2 und 3 auch in: The collected mathematical papers of J. J. Sylvester, vol. II, p. 245—246, 247—249, 290—293, (Cambridge, University Press, 1908).

V. Die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, deren Zyklen alle von gerader Ordnung sind, ist gleich

$$[1.\,3.\,5.\,\ldots\,(n-1)]^2 \quad \text{für} \quad n=2m.$$

SYLVESTER hat die Sätze I, IV und V bewiesen, bezüglich der Sätze II, III und des allgemeinen Falles bemerkt, dass sich dieselben durch Verallgemeinerung der von ihm verwendeten Methode ergeben.

Zu den ältesten Aufgaben, die mit der Zerlegung der Permutationen in Zyklen zusammenhängen und zu einem Zeitpunkt gestellt wurden, da der Begriff des Zyklus als eines Faktors der Permutation noch nicht bekannt war, gehört das „problème des rencontres".[2] Diese bekannte kombinatorische Aufgabe, die dem Glückspiel „Jeu du Treize" entstammt und die EULER als „quaestio curiosa ex doctrina combinationis" bezeichnet hat, lautet: Wie viele der $n!$ Anordnungen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ sind so beschaffen, dass keine Zahl auf ihrem „natürlichen" Platze steht? Die gesuchte Anzahl ist offenbar gleich der Anzahl aller jener Permutationen von n Elementen, in welchen die Ordnungen aller elementenfremden Zyklen $\geqq 2$ sind.

Die in den angeführten Sätzen von SYLVESTER und in der erwähnten kombinatorischen Aufgabe behandelten Fragen können als Spezialfälle des folgenden allgemeinen Problems aufgefasst werden:

Es ist die Anzahl aller Permutationen von n Elementen zu bestimmen, die in eine vorgegebene Anzahl k von elementenfremden Zyklen zerfallen und in welchen für die Ordnungen der Zyklen ein Wertevorrat

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

beliebig gewählter, ganzer positiver Zahlen vorgeschrieben ist.

Der Behandlung dieses allgemeinen Problems und einiger Spezialfälle desselben ist diese Arbeit gewidmet.

Das Ergebnis der *Abschnitte 1 und 2* lautet (Satz 1 und 2):

Bezeichnet $F(n)$ die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, in welchen die Ordnungen aller elementenfremden Zyklen dem Wertevorrat $a_1, a_2, a_3, \ldots$ angehören, und setzt man

$$h(z)=\frac{z^{a_1}}{a_1}+\frac{z^{a_2}}{a_2}+\cdots$$

so lautet die erzeugende Funktion für die $F(n)$:

$$e^{h(z)}=\sum_{n=0}^{\infty} F(n)\,\frac{z^n}{n!}\,.$$

Bezeichnet $f(k, n)$ die Anzahl jener unter den $F(n)$ Permutationen, die in

[2] P. R. DE MONTMORT: Essai d'analyse sur les jeux de hazard, Paris, 1708, p. 54—64. EUGEN NETTO: Lehrbuch der Combinatorik, zweite Auflage von VIGGO BRUN und TH. SKOLEM, Leipzig, 1927, p. 66—72.

eine vorgegebene Anzahl k von elementenfremden Zyklen zerfallen, so erhält man $f(k, n)$ als Koeffizienten von

$$\frac{x^k z^n}{n!}$$

in der Entwicklung von $e^{x h(z)}$ nach Potenzen von z.

Im *Abschnitt 3* wird als Wertevorrat für die Ordnungen der Zyklen die Folge $a, a+b, a+2b, \ldots$ angenommen, wobei die a, b beliebig gewählte, ganze positive Zahlen bezeichnen. Die Methode der erzeugenden Funktionen führt wohl auf kurzem Wege zum Ziele, wenn der Wertevorrat $a_1, a_2, a_3, \ldots$ für die Ordnungen der Zyklen ganz allgemein vorgeschrieben wird. Aber dieser Weg lässt die eigentliche Quelle nicht erkennen, der die hier herrschenden kombinatorischen Beziehungen entspringen. Wir haben daher die Ergebnisse des Abschnittes 3 ohne Benützung des Satzes 2 abgeleitet. Das Resultat lautet (Satz 3 und 4):

Bezeichnet $f(k, n)$ die Anzahl aller aus k elementenfremden Zyklen zusammengesetzten Permutationen von n Elementen, in welchen die Ordnung eines jeden Zyklus $\geqq a$ und $\equiv a$ (mod. b) ist, bezeichnet ferner $F(n)$ die Anzahl aller solcher Permutationen für jede mögliche Anzahl von Zyklen, so gelten die folgenden Rekursionsformeln:

$$\frac{f(k, n)}{(n-1)!} = \frac{f(k-1, n-a)}{(n-a)!} + \frac{f(k, n-b)}{(n-b-1)!}$$

$$\frac{F(n)}{(n-1)!} = \frac{F(n-a)}{(n-a)!} + \frac{F(n-b)}{(n-b-1)!}$$

mit den im Text angeführten Anfangswerten.

Für spezielle Werte von a, b ergeben diese Formeln die einleitend angeführten Sätze I bis V von SYLVESTER und die bekannte Lösung der erwähnten kombinatorischen Aufgabe.

Die independente Lösung obiger Rekursionsformeln für allgemeine Werte von a, b wird im Abschnitt 5 gegeben. Die hierzu erforderlichen Ausführungen konnten wir durch Einführung einer kombinatorischen Matrix wesentlich abkürzen.

Die im *Abschnitt 4* eingeführte kombinatorische Matrix

$$A(k, l) = \| a_{rs} \| \quad \begin{array}{ll} \text{mit Zeilen} & r = 1, 2, 3, \ldots, k \\ \text{und Kolonnen} & s = 0, 1, 2, \ldots, l \end{array}$$

wird wie folgt definiert:

$$\| a_{rs} \| = \sum a_{1 i_1} a_{2 i_2} \ldots a_{k i_k},$$

die Summe erstreckt über alle Kombinationen k-ter Klasse mit Wiederholung $i_1, i_2, \ldots, i_k$ der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, l$. Besteht also die Matrix aus einer Zeile, so ist sie gleich der Summe der Elemente dieser Zeile, besteht sie aus einer Kolonne, so ist sie gleich dem Produkte der Elemente dieser Kolonne. Für die Entwicklung dieser Matrix nach den Elementen der letzten Zeile oder der letzten Kolonne ergeben sich einfache Formeln.

Im *Abschnitt 5* wählen wir als Elemente der Matrix die Zahlen

$$a_{rs} = \frac{1}{ar + bs}.$$

In diesem Falle liefert das Entwicklungsgesetz der kombinatorischen Matrix Rekursionsformeln, welche mit denen für die Zahlen $f(k, n)$ übereinstimmen. Hierdurch erhalten wir das allgemeine Bildungsgesetz für die Anzahl aller aus k elementenfremden Zyklen zusammengesetzten Permutationen von n Elementen, in denen die Ordnung eines jeden Zyklus $\geqq a$ und $\equiv a \pmod{b}$ ist (Satz 5 und Korrolar zu Satz 5).

Im *Abschnitt 6* werden die Sätze I, II und III von SYLVESTER als Spezialfälle unseres Satzes 5 bewiesen.

Der *Abschnitt 7* enthält eine Anwendung unserer Sätze 2 und 4 auf die erwähnte kombinatorische Aufgabe. Die für diese Aufgabe von verschiedenen Autoren aufgestellten Formeln können auf Grund dieser Sätze auf kurzem Wege bewiesen werden. Ferner ergibt sich hier das folgende Resultat:

Bestimmt man ein Polynom $H_n(x)$ durch die symbolische Rekursionsformel:

$$(H(x) + x)^n = x(x+1)(x+2) \ldots (x+n-1), \quad n \geqq 1,$$

$$H_0(x) = 1, \quad (H(x))^n = H_n(x)$$

und setzt

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} p(k, n)\, x^k, \quad H_n(1) = P_n,$$

so ist der Koeffizient $p(k, n)$ gleich der Anzahl aller jener Permutationen von n Elementen, die jedes Element durch ein von ihm verschiedenes ersetzen und in k elementenfremde Zyklen zerfallen. Für den Spezialfall $x = 1$ übergeht obige Rekursionsformel in eine bekannte Formel $(P+1)^n = n!$ für die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die jedes Element durch ein von ihm verschiedenes ersetzen.

Das nähere Studium obiger Rekursionsformel für die Polynome $H_n(x)$ ergibt eine Übersicht über die Verteilung aller $n!$ Permutationen in: 1) Permutationen, die in eine vorgegebene Anzahl k von elementenfremden Zyklen zerfallen, 2) Permutationen, die bei Zerlegung in elementenfremde Zyklen eine vorgegebene Anzahl $s \geqq 0$ von Zyklen von der Ordnung 1 aufweisen, 3) Permutationen, für welche die Anzahl k und die Anzahl s gleichzeitig vorgeschrieben sind.

Im *Abschnitt 8* werden die entsprechenden Beziehungen für die Anzahl aller jener Permutationen von n Elementen abgeleitet, die bei Zerlegung in elementenfremde Zyklen keinen Zyklus von weniger als a Elemente aufweisen. Die hier erhaltenen Formeln geben ein Bild darüber, wie alle $n!$ Permutationen durch die Zahl a in gewisse Teilgesamtheiten verteilt werden, die keine Permutation gemeinsam haben. Der Spezialfall $a = 2$ führt auf die wiederholt erwähnte „quaestio curiosa ex doctrina combinationis".

Im *Abschnitt 9* wird gezeigt, dass man der bekannten kombinatorischen Definition der Zahl e

$$e = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{P_n}.$$

(P_n bezeichnet, wie oben, die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die jedes Element durch ein von ihm verschiedenes ersetzen) ähnliche kombinatorische Definitionen für zwei andere transzendente Zahlen, für die Eulersche Konstante und für die Zahl π, zur Seite stellen kann.

1.

Zerfällt eine Permutation von n Elementen in k elementenfremde Zyklen, und zwar in a_1 Zyklen ($a_1 \geqq 0$) mit je einem Element, in a_2 Zyklen ($a_2 \geqq 0$) mit je zwei Elementen, ..., so ist

$$\begin{aligned} &a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n = n, \\ &a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k, \\ &a_1 \geqq 0,\ a_2 \geqq 0,\ \ldots,\ a_n \geqq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

In der symmetrischen Gruppe aller $n!$ Permutationen gibt es genau

$$\frac{n!}{a_1!\, a_2! \ldots a_n!\, 1^{a_1} 2^{a_2} \ldots n^{a_n}} \tag{2}$$

Permutationen, die vollkommen gleichartig in k elementenfremde Zyklen (also in a_1 Zyklen von der Ordnung 1, in a_2 Zyklen von der Ordnung 2, ...) zerfallen.[3]

Es soll zunächst der Ausdruck (2) so umgeformt werden, dass an Stelle der Anzahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ die wirklich vorkommenden Ordnungen $c_1, c_2, \ldots c_k$ der k Zyklen ($c_i > 0$) in Evidenz gesetzt werden. Zu diesem Zwecke vermerken wir den

Hilfssatz: Die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die in k elementenfremde Zyklen mit den vorgegebenen Ordnungen $c_1, c_2, \ldots c_k$ zerfallen, ist gleich

$$\frac{n!}{k!} \sum \frac{1}{c_1 c_2 \ldots c_k} \tag{3}$$

wobei die Summe über alle Anordnungen (Permutationen im Sinne der Kombinatorik) der Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_k$ zu erstrecken ist.

Beweis: Sind unter den Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_k$ etwa a Zahlen gleich α, b Zahlen gleich β, ..., so ist:

$$c_1 c_2 \ldots c_k = \alpha^a \beta^b \ldots \delta^d$$

$$\sum \frac{1}{c_1 c_2 \ldots c_k} = \frac{1}{\alpha^a \beta^b \ldots \delta^d} \cdot \frac{k!}{a!\, b! \ldots d!},$$

[3] A. CAUCHY: Oeuvres complètes, I^re Série, Tome 9, p. 421 (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Tome 21, p. 1123). Der von CAUCHY für (2) gegebene Beweis ist auch bei J. A. SERRET: Handbuch der höheren Algebra (deutsch von G. Wertheim), Band II p. 218 der 2. Auflage, angeführt.

wodurch (3) auf (2) zurückgeführt ist. Der Ausdruck (3) ist also nur eine andere Schreibweise für (2), eine Umformung, die sich für unsere Zwecke als sehr bequem erweisen wird.[4]

Es soll nun die Anzahl aller Permutationen von n Elementen bestimmt werden, die in k elementenfremde Zyklen zerfallen, wobei die Ordnungen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ der Zyklen gewissen Bedingungen genügen sollen. Als allgemeinste Fassung wählen wir die Bedingung, dass die $x_1, x_2, \ldots, x_k$ einem beliebig vorgegebenen Wertevorrat angehören sollen und stellen die Frage nach der Anzahl solcher Permutationen.

Satz 1. Bezeichnet $f(k, n)$ die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Jede Permutation zerfällt in k elementenfremde Zyklen.

2. Die Ordnungen der Zyklen sind Zahlen eines beliebig vorgegebenen Wertevorrats ganzer positiver Zahlen:

$$a_1, a_2, \ldots, a_s, \tag{4}$$

so besteht die Beziehung:

$$f(k, n) = \frac{n!}{k!} \sum \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_k}. \tag{5}$$

In (5) ist die Summe über alle jene Lösungen von

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \tag{6}$$

zu erstrecken, die dem Wertevorrat (4) angehören.

Beweis. Es seien

$$c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \ldots, c_k^{(i)}$$
$$i = 1, 2, \ldots, r$$

---

[4] Nachstehend sei noch ein anderer (direkter) Beweis von (3) angeführt: Es ist auf

$$g = \binom{n}{c_1} \binom{n-c_1}{c_2} \binom{n-c_1-c_2}{c_3} \cdots = \frac{n!}{c_1!\, c_2! \ldots c_k!}.$$

Arten möglich, aus n Elementen zuerst einen Komplex von c_1 Elementen, dann einen Komplex von c_2 Elementen, ..., schliesslich einen Komplex der letzten c_k Elemente herauszugreifen. Fasst man jeden Komplex als einen Zyklus auf, so erhält man Permutationen von der Form

$$P = (e_1^{(1)} e_2^{(1)} \ldots e_{c_1}^{(1)})(e_1^{(2)} \ldots e_{c_2}^{(2)}) \ldots (e_1^{(k)} \ldots e_{c_k}^{(k)}).$$

Jede der g Arten ergibt je

$$h = (c_1 - 1)!\,(c_2 - 1)! \ldots (c_k - 1)!$$

solcher Permutationen, wenn man innerhalb eines jeden Zyklus die Elemente in jeder möglichen Reihenfolge anordnet. Befinden sich unter den Zahlen $c_1, c_2, \ldots c_k$ etwa a Zahlen gleich α, b Zahlen gleich β, ..., so sind von den so erhaltenen $g\,h$ Permutationen je

$$t = a!\, b! \ldots d!$$

identisch, da sie sich nur durch die Reihenfolge der Zyklen gleicher Ordnung unterscheiden. Man erhält also

$$\frac{g\,h}{t} = \frac{n!}{c_1 c_2 \ldots c_k} \cdot \frac{1}{a!\, b! \ldots d!} = \frac{n!}{k!} \sum \frac{1}{c_1 c_2 \ldots c_k}$$

verschiedene Permutationen von der Form P und es ist offenbar, dass man auf diesem Wege auch alle Permutationen von n Elementen und der Form P erhalten muss.

alle Kombinationen k^{ter} Klasse mit Wiederholung der Zahlen (4), für welche die Bedingung

$$c_1^{(i)} + c_2^{(i)} + \cdots + c_k^{(i)} = n$$

erfüllt ist. Alle diese und nur diese r Kombinationen kommen als Ordnungen der k Zyklen in Betracht. Gibt es keine solche Kombination der Zahlen (4), so ist sinngemäss und auch nach dem Wortlaut des zu beweisenden Satzes $f(k, n) = 0$. Es sei also $r \geqq 1$. Setzt man für ein festes i:

$$A_i = \frac{n!}{k!} \sum \frac{1}{c_1^{(i)} c_2^{(i)} \ldots c_k^{(i)}}$$

wobei die Summe über alle Anordnungen (Permutationen im Sinne der Kombinatorik) der k Zahlen $c_1^{(i)}, \ldots, c_k^{(i)}$ zu erstrecken ist, so ist A_i nach dem vorangestellten Hilfssatz gleich der Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die in k elementenfremde Zyklen mit den Ordnungen $c_1^{(i)}, \ldots, c_k^{(i)}$ zerfallen. Für die Anzahl $f(k, n)$ der im Satz 1 angeführten Permutationen gilt offenbar:

$$f(k, n) = \sum_{i=1}^{r} A_i = \frac{n!}{k!} \sum_{i=1}^{r} \sum \frac{1}{c_1^{(i)} c_2^{(i)} \ldots c_k^{(i)}}.$$

Da $c_1^{(i)}, \ldots, c_k^{(i)}$ eine Lösung von (6) ist, so ist auch jede andere Anordnung dieser k Zahlen eine Lösung von (6), und es ist daher:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum \frac{1}{c_1^{(i)} \ldots c_k^{(i)}} = \sum \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_k},$$

wobei die Summe rechts über alle ganzzahligen positiven Lösungen von (6) zu erstrecken ist, die dem Wertevorrat (4) angehören.

Korollar 1. Die Anzahl aller aus k elementenfremden Zyklen zusammengesetzten Permutationen von n Elementen, in welchen die Ordnungen aller Zyklen

$$\equiv a \ (\mathit{mod.}\ b) \ \mathit{und} \ \geqq a$$

sind (a, b ganze positive Zahlen), ist gleich

$$\frac{n!}{k!} \sum \frac{1}{(a + b z_1)(a + b z_2) \ldots (a + b z_k)}, \tag{7}$$

wobei die Summe über alle ganzzahligen, nichtnegativen Lösungen der Gleichung

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_k = \frac{n - a k}{b}$$

zu erstrecken ist.

Beweis: Als Wertevorrat (4) wähle man:

$$a, \ a + b, \ a + 2b, \ \ldots, \ a + \frac{n - a k}{b} b.$$

Naturgemäss muss $n \equiv ak$ (mod. b) und $n \geqq ak$ sein; für ein n, welches diese beiden (notwendigen und hinreichenden) Bedingungen nicht erfüllt, gibt es keine Permutation von der im Korollar 1 beschriebenen Art.

Korollar 2. Die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die jedes Element durch ein anderes ersetzen, ist gleich

$$\sum_{k=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{n!}{k!} \sum \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_k}. \tag{8}$$

Hier ist die innere Summe über alle Lösungen der Gleichung:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

in ganzen positiven Zahlen, die $\geqq 2$ *sind, zu erstrecken.*[5]

Beweis: Als Wertevorrat (4) wähle man:

$$2, 3, \ldots, n - 2k + 2.$$

Korollar 3. Die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die in k elementenfremde Zyklen zerfallen, ist gleich

$$\frac{n!}{k!} \sum \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_k} \tag{9}$$

wobei die Summe über alle Lösungen der Gleichung:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

in ganzen positiven Zahlen zu erstrecken ist.

Beweis: Als Wertevorrat (4) wähle man:

$$1, 2, \ldots, n - k + 1.$$

2.

Der hier folgende Satz ermöglicht es, erzeugende Funktionen für die Anzahl $F(n)$ aller Permutationen von n Elementen aufzustellen, in welchen die Ordnungen der Zyklen beliebig vorgegebenen Teilbarkeitsbedingungen genügen. Es ergibt sich hierbei ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der erzeugenden Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) \frac{z^n}{n!} \qquad (F(0) = 1)$$

für die Zahlen $F(n)$ und einer anderen Potenzreihe, deren Koeffizienten in einfacher Weise die Anzahl jener unter den $F(n)$ Permutationen zu bestimmen gestatten, die in eine vorgegebene Anzahl von Zyklen zerfallen.

[5] Die Formeln (8) und (9) wurden auf anderem Wege von E. SCHRÖDER bewiesen. Archiv der Mathematik und Physik (Grunert-Hoppe), 68. Band, 1882, p. 366, 374.

Satz 2. Es bezeichne

(10) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

eine (endliche oder unendliche) Folge beliebig gewählter, ganzer positiver Zahlen, die ungleich und der Grösse nach geordnet sind ($a_i < a_{i+1}$). *Zu jedem endlichen* n *gehöre als „Wertevorrat" die Gesamtheit*

(11) $$a_1, a_2, \ldots, a_s,$$

aller jener Zahlen von (10), die $\leqq n$ *sind.*

$F(n)$ *bezeichne die Anzahl aller Permutationen von* n *Elementen, die (bei Zerlegung in elementenfremde Zyklen) als Ordnungen der Zyklen nur Zahlen des Wertevorrats (10) aufweisen, und* $f(k, n)$ *sei die Anzahl jener der* $F(n)$ *Permutationen, die in* k *elementenfremde Zyklen zerfallen. Ferner sei definitionsmässig:*

(12) $$F(0) = 1, \quad f(0, 0) = 1, \quad f(0, n) = 0 \text{ für } n \geqq 1.$$

Setzt man:

(13) $$h(z) = \frac{z^{a_1}}{a_1} + \frac{z^{a_2}}{a_2} + \cdots$$

so bestehen die folgenden Beziehungen:

(14) $$f(z) = e^{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \frac{z^n}{n!}$$

(15) $$(f(z))^x = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

(16) $$H_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k, n) x^k.$$

Beweis[6]*:* Durch Vergleich von (13) mit

$$l \frac{1}{1-z} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots$$

erkennt man, dass $h(z)$ und daher auch alle bei diesem Beweis vorkommenden Potenzreihen für $|z| < 1$ konvergent sind. Setzt man:

$$(h(z))^k = \sum_{n=k}^{\infty} S_n(k) z^n$$

so folgt aus (13):

(17) $$S_n(k) = \sum \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_k},$$

wobei diese Summe über alle jene Lösungen von

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

[6] Wir benützen bei diesem Beweis eine Verallgemeinerung der Methode, nach welcher SYLVESTER den in der Einleitung angeführten Satz I bewiesen hat.

zu erstrecken ist, die dem Wertevorrat (11) angehören; für jene n, für welche es keine solchen Lösungen gibt, ist demgemäss:

$$S_n(k) = 0.$$

Aus (17) in Verbindung mit (5) ergibt sich:

$$S_n(k) = \frac{k!}{n!} f(k, n).$$

Es ist also:

$$e^{x\, h(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} (h(z))^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{n=k}^{\infty} f(k, n) \frac{z^n}{n!}.$$

Ordnet man die Doppelsumme rechts[7] nach Potenzen von z, so ergibt sich:

$$e^{x\, h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} f(k, n) x^k.$$

Hierdurch erscheint (15) und (16) bewiesen.

Nach der Definition von $F(n)$ ist:

$$F(n) = f(1, n) + f(2, n) + \cdots + f(n, n) \text{ für } n \geqq 1.$$

(Die Zahlen $f(k, n)$ können natürlich auch gleich Null sein). Nach (12) darf rechts das Glied $f(0, n)$ hinzugefügt werden; es ist also:

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k, n) = H_n(1) \text{ für } n \geqq 0, \tag{18}$$

womit auch (14) bewiesen ist.

Die in der Einleitung erwähnten Sätze I, IV und V von SYLVESTER kann man leicht als Spezialfälle des Satzes 2 ableiten.

Wählt man als (10) die Folge 1, 2, 3, ..., so ergibt sich der Satz I, wie folgt:

$$h(z) = l \frac{1}{1-z}, \quad f(z) = \frac{1}{1-z},$$

$$H_n(x) = (-1)^n n! \binom{-x}{n} = x(x+1) \ldots (x+n-1) \text{ für } n \geqq 1. \tag{19}$$

Der Vergleich von (19) mit (16) ergibt unmittelbar den Satz I von SYLVESTER.[8]

---

[7] Das ist erlaubt, denn nach der Definition von $f(k, n)$ ist $f(k, n) < n!$ also

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} f(k, n) \frac{z^n}{n!} \right| < \frac{1}{1-|z|} \quad \text{für } |z| < 1.$$

[8] Um den Satz II und III auf demselben Wege zu erhalten, hat man als (10) die Folge $1, 1+b, 1+2b, \ldots$ zu wählen. Wir unterlassen hier die Durchführung der diesbezüglichen Rechnung, um im Abschnitt 6 den Sats III als Spezialfall eines anderen Satzes und nach einer anderen Methode zu beweisen.

Wird als (10) die Folge 1, 3, 5, ... gewählt, so erhält man den Satz IV:

$$f(z) = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \frac{z^n}{n!},$$

$$\frac{F(2n)}{(2n)!} = \frac{F(2n+1)}{(2n+1)!} = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}. \tag{20}$$

Wählt man als (10) die Folge 2, 4, 6 ..., so ergibt sich der Satz V:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \frac{z^n}{n!},$$

$$\frac{F(2n)}{(2n)!} = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}, \quad F(2n+1) = 0. \tag{21}$$

Es seien noch die folgenden zwei Korollare zu Satz 2 vermerkt:

Korollar 1. Die Polynome $H_n(x)$ genügen der Rekursionsformel:

$$\frac{H_n(x)}{(n-1)!} = x \left(\frac{H_{n-a_1}(x)}{(n-a_1)!} + \frac{H_{n-a_2}(x)}{(n-a_2)!} + \cdots + \frac{H_{n-a_s}(x)}{(n-a_s)!} \right) \tag{22}$$

für alle n des Intervalls:

$$a_s \leqq n < a_{s+1}. \tag{23}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} &H_0(x) = 1, \ H_n(x) = 0 \ \textit{für} \ 1 \leqq n < a_1, \\ &H_n(x) = (n-1)!\, x \qquad \textit{für} \ n = a_1. \end{aligned} \tag{24}$$

Beweis. Differenziert man (15) nach z so ergibt sich:

$$x \frac{dh(z)}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Hieraus folgt durch Vergleich der beiderseitigen Koeffizienten von z^{n-1} die zweite der Gleichungen (24) für $1 \leqq n < a_1$ und die Formel (22) für alle n des Intervalls (23).

Die erste der Gleichungen (24) folgt aus (12) und (16), die dritte aus (22) für $s = 1$.

Korollar 2. Für die im Satz 2 näher beschriebene Anzahl $F(n)$ von Permutationen gilt die Rekursionsformel:

$$\frac{F(n)}{(n-1)!} = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{F(n-a_\nu)}{(n-a_\nu)!} \quad \textit{für} \ a_s \leqq n < a_{s+1} \tag{25}$$

mit den Anfangswerten:

$$\begin{aligned} &F(0) = 1, \ F(n) = 0 \ \textit{für} \ 1 \leqq n < a_1, \\ &F(n) = (n-1)! \qquad \textit{für} \ n = a_1. \end{aligned} \tag{26}$$

Beweis: Man setze in (22) und (24) $x=1$ und beachte (18).

Durch Vergleich der Koeffizienten von x^k auf beiden Seiten von (22) und (24) ergibt sich eine ähnliche Rekursionsformel auch für die Anzahl $f(k, n)$ jener der $F(n)$ Permutationen, die aus k elementenfremden Zyklen zusammengesetzt sind.

3.

Die weiteren Ausführungen beziehen sich auf den Fall, dass als (10) die Folge

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ \ldots$$

gewählt wird. Es wäre leicht möglich, die für diesen Fall geltenden besonderen Formeln für $F(n)$ und $f(k, n)$ aus (22) abzuleiten. Wir wählen jedoch einen anderen Weg, und zwar aus dem folgenden Grunde: Die im Abschnitt 2 angewendete Methode (Vergleichung von Koeffizienten von Potenzreihen) führt auf kurzem Wege zum Ziele, vielleicht auf dem kürzesten, wenn die Folge (10) ganz allgemein gegeben ist. Aber dieser Weg lässt die eigentliche Quelle nicht erkennen, der die hier herrschenden kombinatorischen Beziehungen entspringen. Wir werden daher die nächsten drei Sätze ohne Benützung des Satzes 2 und nach einer anderen Methode ableiten.

Zu diesem Zwecke beweisen wir zunächst einen Hilfssatz über den Ausdruck

$$\sum \frac{1}{x_1\, x_2 \ldots x_k},$$

diese Summe erstreckt über alle jene Lösungen der Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \tag{27}$$

die dem Wertevorrat

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ \ldots$$

(a, b ganze positive Zahlen) entnommen werden können.[9]

[9] Die Anzahl der Lösungen von (27) in ganzen, nichtnegativen Zahlen ist bekanntlich gleich

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

(Einen kurzen Beweis dieser Formel ergibt die später, im Anschluss an (71), gemachte Bemerkung.)

Setzt man in (27) $x_i = a + b\, z_i$, so ergibt sich:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_k = \frac{n - a\, k}{b} = l.$$

Die Anzahl aller Lösungen von (27), die dem Wertesystem $a, a+b, a+2b, \ldots$, entnommen werden können, ist also gleich

$$\binom{l+k-1}{k-1}$$

Naturgemäss muss, wenn solche Lösungen existieren sollen, l eine ganze nichtnegative Zahl sein.

Hilfssatz. Für ganzzahlige, nichtnegative k, l sei $g(k, l)$, wie folgt, definiert:

$$g(0, 0) = 1, \quad g(0, l) = 0 \text{ für } l > 0 \tag{28}$$

$$g(k, l) = \sum \frac{1}{(a + b z_1)(a + b z_2) \ldots (a + b z_k)} \text{ für } k \geqq 1, \ l \geqq 0; \tag{29}$$

in (29) ist die Summe über alle Lösungen der Gleichung

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_k = l \tag{30}$$

in ganzen nichtnegativen Zahlen zu erstrecken; a, b bezeichnen beliebig gewählte, ganze positive Zahlen.

Für die so definierten $g(k, l)$ besteht die Rekursionsformel:

$$(a k + b l)\, g(k, l) = k \sum_{\lambda=0}^{l} g(k - 1, \lambda) \quad \text{für } k \geqq 1, \ l \geqq 0 \tag{31}$$

mit den Anfangsbedingungen (28).

Beweis: Für $k = 1$ folgt aus (31):

$$g(1, l) = \frac{1}{a + b l} \tag{32}$$

in Uebereinstimmung mit (29); es ist daher (31) nur für $k \geqq 2$ zu beweisen. Führt man

$$x_i = a + b z_i, \quad n = a k + b l$$

in (30) ein, so folgt aus

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

für $k \geqq 2$:

$$\frac{n}{x_1 x_2 \ldots x_k} = \frac{1}{x_2 x_3 \ldots x_k} + \frac{1}{x_1 x_3 \ldots x_k} + \cdots + \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_{k-1}}.$$

Es ist daher auch

$$\sum \frac{n}{x_1 x_2 \ldots x_k} = \sum \frac{1}{x_2 x_3 \ldots x_k} + \sum \frac{1}{x_1 x_3 \ldots x_k} + \cdots + \sum \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_{k-1}} \tag{33}$$

wenn in (33) x_i wieder durch $a + b z_i$ ersetzt und jede Summe über alle ganzen nichtnegativen $z_1, z_2, \ldots, z_k$, für die

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_k = l$$

ist, erstreckt wird.

Die linke Seite von (33) ist mit $(a k + b l)\, g(k, l)$ identisch; für die rechte Seite gilt:

$$\sum \frac{1}{x_2 x_3 \ldots x_k} = \sum \frac{1}{x_1 x_3 \ldots x_k} = \cdots = \sum \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_{k-1}}$$

und jede dieser k Summen[10] ist gleich

$$g(k-1,0)+g(k-1,1)+\cdots+g(k-1,l),$$

womit (31) bewiesen erscheint.

Ersetzt man in (31) l durch $l+1$ und subtrahiert (31) von der so erhaltenen Gleichung, so ergibt sich die zum Beweis des nächsten Satzes dienende Rekursionsformel:

$$(34)\quad (ak+b(l+1))\,g(k,l+1)=(ak+bl)\,g(k,l)+k\,g(k-1,l+1)\quad \text{für } k\geqq 1,\ l\geqq 0.$$

Satz 3. Bezeichnet $f(k,n)$ die Anzahl aller aus k elementenfremden Zyklen zusammengesetzten Permutationen von n Elementen, in welchen die Ordnungen aller Zyklen

$$\equiv a \ (\text{mod. } b) \text{ und } \geqq a$$

sind, und wird für $k=0$ definitionsmässig

$$(35)\qquad f(0,0)=1,\quad f(0,n)=0\quad \text{für } n\geqq 1$$

festgesetzt, so besteht die Rekursionsformel:

$$(36)\qquad \frac{f(k,n)}{(n-1)!}=\frac{f(k,n-b)}{(n-b-1)!}+\frac{f(k-1,n-a)}{(n-a)!}$$

für alle Wertesysteme ganzzahliger

$$(37)\qquad a\geqq 1\quad b\geqq 1,\quad k\geqq 1,\quad n\geqq 1.$$

Hierbei wird jedoch festgesetzt, dass in (36) rechts der erste Summand für

$$(38)\qquad n=1,2,\ldots,b$$

und der zweite Summand für

$$(39)\qquad n=1,2\ldots,a-1\quad (\text{also nur für } a>1)$$

durch Null zu ersetzen ist.

Als Anfangswerte gelten (35) und:

$$(40)\qquad \begin{aligned} &f(1,n)=(n-1)! &&\text{für } n\equiv a\ (\text{mod. } b) \text{ und } \geqq a\\ &f(1,n)=0 &&\text{für alle anderen } n. \end{aligned}$$

---

[10] Die i^{te} dieser k Summen:

$$\sum \frac{1}{(a+bz_1)\ldots(a+bz_{i-1})(a+bz_{i+1})\ldots(a+bz_k)}$$

ist über alle ganzen, nichtnegativen Lösungen der Gleichung

$$z_1+z_2+\cdots+z_{i-1}+z_{i+1}+\cdots+z_k=l-z_i$$

für die Werte $z_i=0,1,\ldots l$ zu erstrecken. Es ist also jede der k Summen über dieselben Systeme von je $k-1$ Zahlen zu erstrecken.

Ferner ist:

$$f(k, a k) = \frac{(a k)!}{k! \, a^k}. \tag{41}$$

Der Wert von $f(k, n)$ ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn die beiden Bedingungen

$$n \equiv a k \ (\text{mod. } b), \quad n \geqq a k \tag{42}$$

erfüllt sind.

Beweis. Ist $f(k, n) > 0$, so ist (42) erfüllt und umgekehrt. Die zweite der Formeln (40) folgt aus dem Nichterfülltsein von (42). Die erste der Formeln (40) und die Formel (41) folgen aus (7). Es ist also nur noch (36) zu beweisen. Zu diesem Zwecke unterscheiden wir die folgenden drei Fälle:

1. $f(k, n) > 0 \quad \text{und} \quad n > a k$
2. $f(k, n) > 0 \quad \text{und} \quad n = a k$
3. $f(k, n) = 0.$

Ad 1. Nach (7) und (29) ist

$$f(k, n) = \frac{n!}{k!} g(k, l) \tag{43}$$

für alle ganzzahligen

$$a \geqq 1, \quad b \geqq 1, \quad k \geqq 1, \quad l \geqq 0, \quad n = a k + b l.$$

Nach (28) und (35) gilt (43) auch für $k = l = n = 0$. Führt man nun (43) in (34) ein, so ergibt sich die Richtigkeit von (36) für die Werte

$$n = a k + b l, \quad l \geqq 1.$$

Ad 2. Ist $n = a k$, so ist in (36) der erste Summand rechts für $n \leqq b$ wegen (38) und für $n > b$ wegen (42) durch Null zu ersetzen. Es übergeht also (36) für $n = a k$ in

$$\frac{f(k, n)}{(n-1)!} = \frac{f(k-1, n-a)}{(n-a)!}$$

und diese Formel ist durch (41) erfüllt.

Ad 1. und 2. Die Werte

$$n = a k, \quad a k + b, \quad a k + 2 b, \ldots$$

umfassen nach (42) alle jene und nur jene Wertesysteme von

$$a \geqq 1, \quad b \geqq 1, \quad k \geqq 1, \quad n \geqq 1,$$

für die $f(k, n)$ von Null verschieden ist.

Ad 3. Ist $f(k, n)=0$, so sind auch die beiden Summanden auf der rechten Seite von (36) gleich Null, und zwar der erste Summand für $n \leqq b$ nach (38) und für $n > b$ nach (42), der zweite Summand für $n \leqq a-1$ nach (39) und für $n > a-1$ nach (42).

Hiedurch ist (36) für alle Wertesysteme (37) bewiesen.

Dem Satz 3 kann man nochmals als Spezialfälle die in der Einleitung erwähnten Sätze I, II und III von SYLVESTER entnehmen: Satz I folgt aus (36) für $a=b=1$, Satz II und III für $a=1$, $b \geqq 1$. Die hierzu erforderliche Lösung der Rekursionsformel (36) für den allgemeinen Fall $a \geqq 1$, $b \geqq 1$ wird im Abschnitt 5 angeführt. Hier sei noch im Anschluss an Satz 3 der Fall betrachtet, dass die Anzahl k der Zyklen nicht vorgeschrieben ist. Für diesen Fall erhält man:

Satz 4. Bezeichnet $F(n)$ die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, in welchen (bei Zerlegung in elementenfremde Zyklen) die Ordnungen aller Zyklen

$$\equiv a \ (\mathrm{mod.}\ b) \ \text{und} \ \geqq a \tag{44}$$

sind, und wird definitionsmässig

$$F(0)=1, \tag{45}$$

festgesetzt, so besteht die Rekursionsformel:

$$\frac{F(n)}{(n-1)!}=\frac{F(n-b)}{(n-b-1)!}+\frac{F(n-a)}{(n-a)!} \tag{46}$$

für alle Wertesysteme ganzzahliger

$$a \geqq 1, \quad b \geqq 1, \quad n \geqq 1.$$

Hierbei wird jedoch festgesetzt, dass in (46) rechts der erste Summand für

$$n=1, 2, \ldots, b \tag{47}$$

und der zweite Summand für

$$n=1, 2, \ldots, a-1 \qquad (\text{also nur für } a>1) \tag{48}$$

durch Null zu ersetzen ist.

Als Anfangswerte gelten (45) und:

$$F(1)=F(2)=\cdots=F(a-1)=0 \quad \text{für } a>1, \tag{49}$$

$$F(a)=(a-1)! \quad \text{für } a \geqq 1. \tag{50}$$

Der Wert von $F(n)$ ist für $n \geqq 1$ dann und nur dann von Null verschieden, wenn für mindestens ein ganzzahliges $k \geqq 1$ die beiden Bedingungen

$$n \equiv a k \ (\mathrm{mod.}\ b), \quad n \geqq a k \tag{51}$$

erfüllt sind.

Beweis: Aus der Definition von $F(n)$ für $n \geqq 1$ folgt:

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k, n) \quad \text{für } n \geqq 1.$$

Berücksichtigt man (35) und (45), so ergibt sich:

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k, n) \quad \text{für } n \geqq 0. \tag{52}$$

(49) folgt aus der zweiten der Bedingungen (44).
(50) folgt aus (40), denn nach (52) ist $F(a) = f(1, a)$.
(51) folgt aus (42) und (52) für $n \geqq 1$.

Es ist also nur noch (46) zu beweisen. Zu diesem Zwecke seien in (36) a, b, n fest und k durchlaufe die Werte $1, 2, \ldots, n$. Addiert man die so erhaltenen n Gleichungen, so ergibt sich (46), wenn die Formel (52) entsprechend berücksichtigt wird.[11]

Satz 4 ergibt als Spezialfälle die in der Einleitung erwähnten Sätze IV und V von SYLVESTER und eine Rekursionsformel für das dort erwähnte kombinatorische Problem.

4.

Die hier folgenden Ausführungen über eine kombinatorische Matrix gelangen im nächsten Abschnitt zur Anwendung.

Wir führen die folgende Matrix ein:

---

[11] Die Addition der n Gleichungen ergibt:

$$\frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} f(k, n) = \frac{1}{(n-b-1)!} \sum_{k=1}^{n} f(k, n-b) + \frac{1}{(n-a)!} \sum_{k=1}^{n} f(k-1, n-a).$$

Diese drei Summen können, wie folgt, umgeformt werden:

Für die erste Summe gilt nach (35) und (52):

$$\sum_{k=1}^{n} f(k, n) = \sum_{k=0}^{n} f(k, n) = F(n) \quad \text{für } n \geqq 1.$$

Für die zweite Summe gilt, wenn $n > b$ ist:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k, n-b) = \sum_{k=0}^{n-b} f(k, n-b) = F(n-b).$$

Für die Werte $n \leqq b$ kommt die Vorschrift zu (47) in Betracht, die der Vorschrift zu (38) entspricht.

Schliesslich ergibt sich für die dritte Summe, wenn $n \geqq a$ ist:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k-1, n-a) = \sum_{k=0}^{n-a} f(k, n-a) = F(n-a).$$

Für $n < a$ entspricht die Vorschrift zu (48) der Vorschrift zu (39).

Auf diesem Wege ergibt die im Text erwähnte Addition der Gleichungen die Rekursionsformel (46) mit der bei (47) und (48) angeführten Vorschrift.

$$A(k,\,l)=\begin{pmatrix} a_{10}\; a_{11}\; \ldots\; a_{1l} \\ a_{20}\; a_{21}\; \ldots\; a_{2l} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{k0}\; a_{k1}\; \ldots\; a_{kl} \end{pmatrix} = \|a_{rs}\|. \tag{53}$$

Es sei gestattet, das Wort „Matrix" zu benützen, obwohl hier die üblichen Verknüpfungsregeln für Matrizen nicht gelten. Die Indizes der Spalten bezeichnen wir mit $0, 1, 2, \ldots, l$ um $A(k, l)$ auch für $l=0$ benützen zu können.

Der Wert der Matrix (53) *sei durch die folgende Summe definiert:*

$$A(k,\,l)=\sum a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ki_k}, \tag{54}$$

die Summe erstreckt über alle Kombinationen k^{ter} *Klasse mit Wiederholung* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *der Zahlen* $0, 1, 2, \ldots l$. *Es ist also:*

$$0 \leqq i_1 \leqq i_2 \ldots \leqq l.$$

Ferner sei

$$A(0,l)=1 \quad \textit{für}\ l\geqq 0 \tag{55}$$

definitionsmässig festgesetzt.

Aus (54) folgt: Besteht die Matrix $A(k,l)$ aus *einer* Spalte, so ist sie gleich dem Produkt der Elemente dieser Spalte, besteht sie aus *einer* Zeile, so ist sie gleich der Summe der Elemente dieser Zeile:

$$A(k,0)=a_{10}\, a_{20} \ldots a_{k0} \quad \text{für } k\geqq 1, \tag{56}$$

$$A(1,l)=a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{1l} \quad \text{für } l\geqq 0. \tag{57}$$

Für die Entwicklung der Matrix $A(k,l)$ nach den Elementen der *letzten* Zeile ergibt sich:

$$A(k,\,l)=\sum_{\lambda=0}^{l} a_{k\lambda} A(k-1,\,\lambda) \tag{58}$$

für $k>1$; wegen (55) gilt (58) auch für $k=1$.

Für die Entwicklung der Matrix $A(k,l)$ nach den Elementen der *letzten* Spalte erhält man:

$$A(k,\,l)=A(k,\,l-1)+\sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu,l}\, a_{\nu+1,l} \ldots a_{k,l}\, A(\nu-1,\,l-1), \quad k\geqq 1, \quad l\geqq 1. \tag{59}$$

Wegen (55) gilt (59) auch für $k=1$.

Aus (58) folgt die Rekursionsformel:

$$A(k,\,l+1)=A(k,\,l)+a_{k,l+1}\,A(k-1,\,l+1), \quad k\geqq 1,\ l\geqq 0, \tag{60}$$

mit den Anfangswerten (55), (56).

Nach dieser Darstellung kann die Lösung einer Rekursionsformel von der Form (60) aufgestellt werden, wenn als Anfangswerte (55) und (56) vorgeschrieben sind. Es ist dies die Matrix (53), wenn der Wert derselben durch (54) und (55) definiert ist. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass man die Rekursionsformel (36) für die Anzahl $f(k, n)$ der im Satz 3 näher bezeichneten Permutationen auf die Form (60) bringen kann. Hierdurch wird sich die Matrix $A(k, l)$ bei geeigneter Wahl der Elemente a_{rs} auch als Lösung von (36) erweisen und ein independenter Ausdruck für $f(k, n)$ gewonnen werden.

5.

Wählt man in (53) als Elemente a_{rs} der Matrix $A(k, l)$ die Zahlen

$$a_{rs} = \frac{1}{ar + bs}, \qquad \begin{matrix} r = 1, 2, \ldots, k \\ s = 0, 1, \ldots, l \end{matrix}$$

so ergibt sich der folgende Satz:

Satz 5. Bezeichnet $f(k, n)$ für beliebig gewählte, ganzzahlige

$$a \geqq 1, \quad b \geqq 1, \quad k \geqq 1, \quad n \geqq 1$$

die Anzahl aller aus k elementenfremden Zyklen zusammengesetzten Permutationen von n Elementen, in welchen die Ordnungen aller Zyklen

$$\equiv a \ (\mathrm{mod.}\ b) \text{ und } \geqq a$$

sind, und ist $f(k, n)$ von Null verschieden (das ist dann und nur dann der Fall, wenn die Zahl

$$l = \frac{n - ak}{b} \text{ ganz und } \geqq 0 \tag{61}$$

ist), so gilt für $k = 1$ die Formel:

$$f(1, n) = (n-1)! \tag{62}$$

und für $k \geqq 2$ die Formel:

$$f(k, n) = \sum \frac{(n-1)!}{(a + b i_1)(2a + b i_2) \ldots ((k-1)a + b i_{k-1})}. \tag{63}$$

In (63) ist die Summe über alle Kombinationen $(k-1)$-ter Klasse mit Wiederholung

$$i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$$

der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, l$ zu erstrecken.

Beweis: (61) folgt aus (42), (62) aus (40). Um (63) zu beweisen, schreiben wir (36) in der Form:

$$\frac{f(k+1, n+a+b)}{(n+a+b-1)!} = \frac{f(k+1, n+a)}{(n+a-1)!} + \frac{f(k, n+b)}{(n+b)!} \tag{64}$$

und setzen:

$$\frac{f(k, n)}{(n-1)!} = \bar{A}(k, l) \quad \text{für } k \geqq 1, \ l \geqq 0, \ n = a k + b l. \tag{65}$$

Führt man (65) in (64) ein, so ergibt sich:

$$\bar{A}(k+1, l+1) = \bar{A}(k+1, l) + \frac{1}{a k + b(l+1)} \bar{A}(k, l+1), \quad \text{für } k \geqq 1, \ l \geqq 0. \tag{66}$$

Aus (65), (40) und (41) folgt:

$$\bar{A}(1, l) = 1 \quad \text{für } l \geqq 0, \tag{67}$$

$$\bar{A}(k, 0) = \frac{1}{(k-1)! \, a^{k-1}} \quad \text{für } k \geqq 1. \tag{68}$$

Durch Vergleich der Rekursionsformel (60) mit der Rekursionsformel (66) und der Anfangswerte (55), (56) mit den Werten (67), (68) erhält man die Beziehung:

$$\bar{A}(k+1, l) = A(k, l) \quad \text{für } k \geqq 1, \ l \geqq 0, \tag{69}$$

und für die Elemente a_{rs} die Werte (a_{rs} für $s=0$ folgt aus (68)):

$$a_{rs} = \frac{1}{a r + b s}, \quad \begin{array}{l} r = 1, 2, \ldots, k; \\ s = 0, 1, \ldots, l. \end{array}$$

Aus (65) und (69) ergibt sich schliesslich:

$$\frac{f(k, n)}{(n-1)!} = A(k-1, l) \quad \text{für } k \geqq 2, \ l \geqq 0,$$

womit (63) bewiesen ist.

Aus Satz 5 folgt: Die Anzahl $f(k, n)$ ist für $a > 1$ durch die ersten $a-1$ und durch die letzten $a-1$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ teilbar. Ergänzend sei bemerkt, dass $f(k, n)$ auch durch n teilbar ist, wenn $k > 1$ und n eine Primzahl ist; das folgt aus (29) und (43).

Die unter (62) und (63) angeführte Vorschrift zur Berechnung der $f(k, n)$ kann auch, wie folgt, ausgesprochen werden:

Korollar zu Satz 5. Die Anzahl $f(k, n)$ der im Satz 5 näher bezeichneten Permutationen ist gleich der Summe aller jener Produkte P von je $n-k$ verschiedenen der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$, welche die folgenden Eigenschaften haben:

1. Teilt man die $n-k$ Faktoren so in Teilgruppen ein, dass man alle in der natürlichen Reihenfolge unmittelbar aufeinanderfolgenden Zahlen zu je einer Teilgruppe vereinigt, so zerfallen in jedem Produkt P die $n-k$ Faktoren in k Teilgruppen.

2. Die Anzahl der Faktoren einer jeden Teilgruppe ist[12]

[12] Man bemerke den folgenden Zusammenhang:

1. Jede der $f(k, n)$ Permutationen zerfällt in k elementenfremde Zyklen und jedes der Produkte P zerfällt in k Teilprodukte aufeinanderfolgender Zahlen.

2. Die Anzahl der in jedem der k Zyklen vorkommenden Elemente ist

$$\equiv a \ (\mathrm{mod.}\ b) \text{ und } \geqq a,$$

und die Anzahl der Faktoren eines jeden der k Teilprodukte ist

$$\equiv a-1 \ (\mathrm{mod.}\ b) \text{ und } \geqq a-1.$$

(70) $$\equiv a-1 \ (mod.\ b) \ und \ \geqq a-1.$$

Der Fall $a=1$ bildet nur insofern eine Ausnahme, als für $a=1$, $k>1$ die Anzahl der Teilgruppen, in welche die $n-k$ Faktoren zerfallen, nicht genau gleich k sondern $\leqq k$ ist.

Beweis. Es ist hier erforderlich auf einen Zusammenhang hinzuweisen, der zwischen den Lösungen der Gleichung

(71) $$l_1+l_2+\cdots+l_k=l$$

in ganzen nichtnegativen Zahlen und den Kombinationen $(k-1)^{\text{ter}}$ Klasse mit Wiederholung der Zahlen $0, 1, \ldots, l$ besteht. Bezeichnet $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ eine solche Kombination und $l_1, l_2, \ldots, l_k$ eine Lösung von (71) in ganzen nichtnegativen Zahlen, so gibt es eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den Wertesystemen $i_1, i_2, \ldots i_{k-1}$ und den Wertesystemen $l_1, l_2, \ldots, l_k$, und zwar[13]: Zu dem Wertesystem $l_1, \ldots, l_k$ gehört das folgende Wertesystem der $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$:

$$i_1=l_1, \quad i_2=l_1+l_2, \ldots, i_{k-1}=l_1+l_2+\cdots+l_{k-1}.$$

Zu dem Wertesystem $i_1, \ldots, i_{k-1}$ gehört das folgende Wertesystem der $l_1, l_2, \ldots l_k$:

$$l_1=i_1, \quad l_2=i_2-i_1, \ldots, l_{k-1}=i_{k-1}-i_{k-2}, \quad l_k=l-i_{k-1}.$$

Es sei nun P ein Produkt von $n-k$ verschiedenen der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$, das die beiden in obigem Korollar angeführten Eigenschaften besitzt. Demgemäss sei:

$$P=T_1 T_2 \ldots T_k$$

wobei T_s das Produkt jener t_s aufeinanderfolgenden Zahlen bezeichnet, welche die s-te der k Teilgruppen bilden. Nach der Eigenschaft 2 ist:

$$t_s=a-1+b\,l_s, \quad l_s \geqq 0,$$

und daher

$$t_1+t_2+\cdots+t_k=k(a-1)+b(l_1+l_2+\cdots+l_k).$$

Ferner ist:

$$t_1+t_2+\cdots+t_k=n-k.$$

Wird noch

$$\frac{n-a\,k}{b}=l$$

gesetzt, so ergibt sich:

$$l_1+l_2+\cdots+l_k=l.$$

[13] Eine ähnliche, ein-eindeutige Zuordnung besteht zwischen den Lösungen der Gleichung (71) in ganzen *positiven* Zahlen und den Kombinationen $(k-1)$-ter Klasse *ohne* Wiederholung der Zahlen $1, 2, \ldots, l-1$. Bezeichnet man diese Kombinationen mit $c_1, \ldots, c_{k-1}$ so ist:

$$c_1=l_1, \quad c_2=l_1+l_2, \ldots, c_{k-1}=l_1+l_2+\cdots+l_{k-1};$$

$$l_1=c_1, \quad l_2=c_2-c_1, \ldots, l_{k-1}=c_{k-1}-c_{k-2}, \quad l_k=l-c_{k-1}.$$

Diese und die im Text erwähnte ein-eindeutige Zuordnung liefert gleichzeitig einen einfachen Beweis für die Anzahl der Lösungen von (71) in ganzen positiven, bezw. in ganzen nichtnegativen Zahlen.

Hieraus folgt: Die Anzahl aller jener Produkte P von je $n-k$ verschiedenen der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$, welche die in obigem Korollar unter 1 und 2 angeführten Eigenschaften besitzen, ist gleich der Anzahl der Lösungen der Gleichung (71) in ganzen nichtnegativen Zahlen, also gleich

$$\binom{l+k-1}{k-1}. \tag{71, 1}$$

Setzt man nun (zur Formel (62) und (63) zurückkehrend):

$$S=(n-1)! \quad \text{für } k=1,$$

$$S=\frac{(n-1)!}{(a+b i_1)(2a+b i_2)\ldots((k-1)a+b i_{k-1})} \quad \text{für } k \geqq 2,$$

so ist nach der bei (63) angeführten Bedeutung von $i_1, \ldots, i_{k-1}$:

$$0 \leqq i_1 \leqq i_2 \ldots \leqq i_{k-1} \leqq l, \quad l=\frac{n-ak}{b},$$

und der Ausdruck S ist ein Produkt von $n-k$ verschiedenen der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$. Ferner ist folgendes evident:

1. Die $n-k$ Faktoren von S haben die in obigem Korollar unter 1 angeführte Eigenschaft. Die k Teilgruppen $T_1, \ldots, T_k$ lauten für $a>1$ wie folgt:

$$1, 2, \ldots, a+b i_1-1;$$

$$a+b i_1+1 \quad a+b i_1+2, \ldots, 2a+b i_2-1; \quad \text{u.s.w.}$$

Für $a=1$, $k>1$ ist die Anzahl der Teilgruppen $\leqq k$.

2. Die Anzahl t_s der Zahlen der Teilgruppe T_s ist gleich

$$\begin{aligned} &a-1+b i_1 && \text{für } s=1, \\ &a-1+b(i_s-i_{s-1}) && \text{für } 2 \leqq s \leqq k-1, \\ &a-1+b(l-i_{k-1}) && \text{für } s=k. \end{aligned} \tag{72}$$

Die Bedingung (70) ist daher erfüllt.

Hieraus folgt, dass jedes Produkt S die beiden Eigenschaften der Produkte P besitzt. Da ferner die Anzahl der Produkte S (das ist die Anzahl der Kombinationen $(k-1)$-ter Klasse mit Wiederholung der Zahlen $0, 1, \ldots, l$) der unter (71, 1) angeführten Anzahl der Produkte P gleich ist, so ergibt sich, dass die Gesamtheit der Produkte S mit der Gesamtheit der Produkte P identisch ist. Es ist daher auch die Summe der Produkte P gleich der Summe der Produkte S, also nach (62) und (63) gleich $f(k, n)$.

6.

Auf Grund des Satzes 5 und der angeschlossenen Korollars ist es leicht möglich, die in der Einleitung angeführten Sätze I, II und III von SYLVESTER auf kurzem Wege in Evidenz zu setzen.

Für $k=1$ sind diese drei Sätze durch (62) bestätigt. Für $k=n$ verlieren die Sätze ihren Inhalt. (Für $k=n$ gibt es nur eine Permutation, die Einheitspermutation). Es sei also $2 \leqq k \leqq n-1$. Ferner sei

$$S = \frac{(n-1)!}{(a+b\,i_1)(2a+b\,i_2)\ldots((k-1)a+b\,i_{k-1})}. \tag{73}$$

Beweis des Satzes I: Für $a=b=1$ durchlaufen in (73) die Zahlen $a+b\,i_1$, $2a+b\,i_2, \ldots$ alle Kombinationen $(k-1)^{\text{ter}}$ Klasse *ohne* Wiederholung der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$. Es durchläuft also S alle Produkte von je $n-k$ verschiedenen der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$; nach (63) ist $f(k, n)$ gleich der Summe aller dieser S.

Beweis des Satzes II und III: Es sei: $a=1$, $b \geqq 1$. Nach dem Korollar zu Satz 5 ist $f(k, n)$ gleich der Summe aller Produkte P von der Form

$$P = T_1\,T_2 \ldots T_k \tag{74}$$

und mit den dort näher bezeichneten Eigenschaften. T_s ist ein Produkt von t_s aufeinanderfolgenden Zahlen. Es ist:

$$t_1+t_2+\cdots+t_k=n-k, \qquad k<n.$$

Für $a=1$ können nach (72) auch Werte $t_s=0$ vorkommen ($t_1=t_2=\cdots=t_k=0$ kann nicht vorkommen). Es sei daher festgesetzt, dass jene T_s für welche $t_s=0$ ist, in (74) als nicht angeschrieben zu betrachten sind. Nach (72) ist

$$t_s=b\,l_s, \quad l_s \geqq 0, \quad s=1, 2, \ldots, k.$$

Ist $t_s>0$, so besteht T_s aus $b\,l_s$ aufeinanderfolgenden Zahlen, also aus l_s Teilprodukten von je b aufeinanderfolgenden Zahlen. Es zerfällt daher in (74) das Produkt P in

$$l_1+l_2+\cdots+l_k=\frac{n-k}{b}$$

Teilprodukte von je b aufeinanderfolgenden Zahlen.

7.

Es sollen jetzt die erhaltenen Resultate auf ein wiederholt behandeltes kombinatorisches Problem angewendet werden, das wir schon in der Einleitung erwähnt haben und das wie folgt formuliert werden kann:

Es ist die Anzahl aller Permutationen von n Elementen zu bestimmen, die jedes Element durch ein von ihm verschiedenes ersetzen.

Über diese Anzahl — *sie sei mit P_n bezeichnet* — sind die folgenden Beziehungen bekannt[14]:

[14] Bezüglich der Literaturangaben sei auf das Lehrbuch von NETTO (l. c. 2) und auf die Studie von SCHRÖDER (l. c. 5) verwiesen.

Die Anzahl P_n wurde auch zur Theorie der Determinanten in Beziehung gesetzt (J. J. WEYRAUCH, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 74, 1872, p. 273—276): Für eine Determinante von n^2 Elementen:

$$\sum \pm a_{1\,i_1}\,a_{2\,i_2} \ldots a_{n\,i_n}$$

ist P_n die Anzahl aller jener Produkte

$$a_{1\,i_1}\,a_{2\,i_2} \ldots a_{n\,i_n},$$

die kein Element der Hauptdiagonale enthalten.

(75) $$P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2}), \quad n \geqq 2, \quad P_0 = 1, \quad P_1 = 0.$$

(76) $$P_n = n P_{n-1} + (-1)^n, \quad n \geqq 1, \quad P_0 = 1.$$

(77) $$P_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} n!, \quad n \geqq 0,$$

(78) $$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{z^n}{n!} = \frac{e^{-z}}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Die Formeln (75) bis (78) können leicht aus Satz 2 und 4 abgeleitet werden. Wird im Satz 4: $a=2$, $b=1$ angenommen, so ist $F(n) = P_n$ und (46) geht in (75) über. Mit (75) ist auch (76) und (77) bewiesen. Die Formel (78) folgt aus Satz 2, wenn als (10) die Folge 2, 3, 4, ... gewählt wird.

Auf Grund des Satzes 2 ist es ferner möglich, auch die Anzahl jener unter den P_n Permutationen zu bestimmen, die in k elementenfremde Zyklen zerfallen. *Bezeichnet* $p(k, n)$ *diese Anzahl*, so ist nach (15) und (16):

(79) $$\frac{e^{-xz}}{(1-z)^x} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!},$$

(80) $$H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} p(k, n) x^k, \quad n \geqq 1.$$

Aus der Definition von $p(k, n)$ folgt:

$$p(k, n) = 0 \quad \text{für } k > \frac{n}{2}.$$

Das Polynom $H_n(x)$ ist also vom Grade $E\left(\frac{n}{2}\right)$. Schreibt man nun (79) in der Form:

$$e^{xz} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!} = (1-z)^{-x}$$

so ergibt sich durch Vergleich der beiderseitigen Koeffizienten von z^k die folgende symbolische Rekursionsformel zur Bestimmung der Polynome $H_n(x)$, also auch der Zahlen $p(k, n)$:

(81) $$(H(x) + x)^n = x(x+1)(x+2) \ldots (x+n-1) \quad \text{für } n \geqq 1, \quad H_0(x) = 1.$$

An diese Formel[15] sei noch die folgende Bemerkung geknüpft:

---

[15] In (81) ist die linke Seite nach dem binomischen Lehrsatz zu entwickeln und dann die symbolische Potenz $(H(x))^s$ durch $H_s(x)$ zu ersetzen.

Die ersten Werte von $H_n(x)$ sind:

$$H_1(x) = 0, \quad H_2(x) = x, \quad H_3(x) = 2x, \quad H_4(x) = 3x^2 + 6x,$$
$$H_5(x) = 20x^2 + 24x, \quad H_6(x) = 15x^3 + 130x^2 + 120x.$$

Bezeichnet man mit:

$f(k, n)$ die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die in k elementenfremde Zyklen zerfallen;

$G(s, n)$ die Anzahl jener der $n!$ Permutationen, die s Zyklen von der Ordnung 1 aufweisen;

$f(k, n, s)$ die Anzahl jener der $f(k, n)$ Permutationen, die s Zyklen von der Ordnung 1 aufweisen ($=$ Anzahl jener der $G(s, n)$ Permutationen, die in k elementenfremde Zyklen zerfallen), so ist durch

$$n! = \sum_{k=1}^{n} f(k, n) = \sum_{s=0}^{n} G(s, n),$$

$$f(k, n) = \sum_{s=0}^{k} f(k, n, s), \qquad G(s, n) = \sum_{k=1}^{n} f(k, n, s)$$

die Einteilung der $n!$ Permutationen nach der Anzahl k der Zyklen und nach der Anzahl s der Zyklen von der Ordnung 1 gegeben. Es ist leicht zu zeigen, dass alle bei dieser Einteilung in Betracht kommenden Grössen, das ist $f(k, n)$, $G(s, n)$, $f(k, n, s)$ in der Formel (81) auftreten[16]:

Die $f(k, n)$ kommen als Koeffizienten auf der rechten Seite von (81) vor:

$$x(x+1) \ldots (x+n-1) = \sum_{k=1}^{n} f(k, n)\, x^k.$$

Die $G(s, n)$ kommen als Summanden auf der linken Seite von (81) vor, wenn $x = 1$ gesetzt wird:

$$(P+1)^n = n!, \quad n \geqq 1, \quad P_0 = 1. \tag{82}$$

$$\binom{n}{s} P_{n-s} = G(s, n), \quad s = 0, 1, \ldots, n. \tag{83}$$

Vergleicht man schliesslich in (81) die beiderseitigen Koeffizienten von x^k so ergibt sich:

$$p(k, n) + \binom{n}{1} p(k-1, n-1) + \cdots + \binom{n}{k-1} p(1, n-k+1) = f(k, n). \tag{84}$$

Die hier links auftretenden Summanden

$$\binom{n}{s} p(k-s, n-s), \quad s = 0, 1, \ldots, k-1,$$

sind die Zahlen $f(k, n, s)$.

Die Formel (81) ergibt also eine Übersicht über die Einteilung aller $n!$ Permutationen nach der Anzahl k der elementenfremden Zyklen und nach der Anzahl s der Zyklen von der Ordnung 1.

[16] Die hier folgenden Formeln (82) bis (84) sind nicht neu und können leicht auch direkt bewiesen werden (SCHRÖDER, l. c. 5, Seite 365 und 373; NETTO, l. c. 2, Seite 72).

8.

Auf Grund des Satzes 2 ist es leicht möglich, das im letzten Abschnitt behandelte Problem einer Verallgemeinerung zu unterziehen.

Es bezeichne

$P_n(a)$ die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die aus elementenfremden Zyklen, deren Ordnungen $\geqq a$ sind, zusammengesetzt werden können (wobei $a \geqq 2$ angenommen wird);

$R_n(a)$ die Anzahl jener der $n!$ Permutationen, in welchen die Ordnungen aller elementenfremder Zyklen $< a$ sind.

Um die $P_n(a)$ und $R_n(a)$ zu erhalten, hat man im Satz 2 als Wertevorrat (10) die Folge $a, a+1, a+2, \ldots$, beziehungsweise die endliche Folge $1, 2, \ldots, a-1$ zu wählen. Man erhält so als erzeugende Funktionen für $P_n(a)$ und $R_n(a)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(a) \frac{z^n}{n!} = \frac{e^{-z-\frac{z^2}{2}-\cdots-\frac{z^{a-1}}{a-1}}}{1-z} \tag{85}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(a) \frac{z^n}{n!} = e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^{a-1}}{a-1}}. \tag{86}$$

(85) ist eine Verallgemeinerung von (78). Aus (85) und (86) ergeben sich die Rekursionsformeln:

$$P_n(a) = (n-1) P_{n-1}(a) + \frac{(n-1)!}{(n-a)!} P_{n-a}(a)$$

$$R_n(a) = \qquad n R_{n-1}(a) - \frac{(n-1)!}{(n-a)!} R_{n-a}(a).$$

Diese Formeln gelten für $n \geqq a$. (Die erste ist eine Verallgemeinerung von (75) und ergibt sich auch aus Satz 4 für $b=1$). Für $n<a$ erhält man die Werte:

$$P_0(a) = 1, \quad P_n(a) = 0 \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots, a-1. \qquad (a \geqq 2)$$
$$R_0(a) = 1, \quad R_n(a) = n! \text{ für } n = 1, 2, \ldots, a-1. \qquad (a \geqq 2).$$

Führt man noch die Entwicklungskoeffizienten $T_n(a)$ ein:

$$e^{-z-\frac{z^2}{2}-\cdots-\frac{z^{a-1}}{a-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(a) \frac{z^n}{n!} \tag{87}$$

so ergeben sich als Verallgemeinerung von (76) und (77) die Formeln:

$$P_n(a) = n P_{n-1}(a) + T_n(a) \tag{88}$$

$$P_n(a) = n! \sum_{\nu=0}^{n} \frac{T_\nu(a)}{\nu!}. \tag{89}$$

Bezeichnet man mit $p(k, n; a)$ die Anzahl jener der $P_n(a)$ Permutationen, die in k elementenfremde Zyklen zerfallen, und setzt

$$H_n(x, a) = \sum_{k=1}^{n} p(k, n; a)\, x^k \qquad (n \geqq 1)$$

so ergibt sich (als Verallgemeinerung von (81) und auf dem gleichen Wege) die folgende symbolische Rekursionsformel zur Bestimmung der $H_n(x, a)$, also auch der $p(k, n; a)$:

$$(H(x, a) + x R(a))^n = x(x+1) \ldots (x+n-1). \tag{90}$$

Man kann sich leicht ein Bild darüber machen, wie *alle* $n!$ Permutationen durch die Zahl a verteilt werden, und zwar auf folgende Weise:

Bezeichnet man mit $G(s, n, a)$ die Anzahl jener der $n!$ Permutationen, in welchen die n Elemente auf die einzelnen (elementenfremden) Zyklen so verteilt sind, dass genau s Elemente in Zyklen, deren Ordnungen $< a$ sind, vorkommen (also genau $n-s$ Elemente in Zyklen von der Ordnung $\geqq a$), so ist

$$G(s, n, a) = \binom{n}{s} P_{n-s}(a) R_s(a). \tag{91}$$

Durch diese Verteilung sind alle $n!$ Permutationen in Teilgesamtheiten $G(s, n, a)$ verteilt, die keine Permutation gemeinsam haben. Diese — teilweise leeren — Teilgesamtheiten sind durch $s = 0, 1, 2, \ldots, n$ gegeben und es ist daher

$$n! = \sum_{s=0}^{n} G(s, n, a) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} P_{n-s}(a) R_s(a) \tag{92}$$

was man auch symbolisch schreiben kann:

$$(P(a) + R(a))^n = n! \tag{93}$$

(93) ist eine Verallgemeinerung von (82) und kann auch direkt aus (85) und (86) abgeleitet werden.

9.

Es bezeichne, wie früher,

P_n die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die jedes Element durch ein von ihm verschiedenes ersetzen, und

$P_n(a)$ die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die bei Zerlegung in elementenfremde Zyklen nur Zyklen mit Ordnungen $\geqq a$ aufweisen. Es ist also $P_n(2) = P_n$.

Aus (87) und (89) folgt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{P_n(a)} = e^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{a-1}}, \qquad (a \geqq 2) \tag{94}$$

Diese Formel ist eine Verallgemeinerung der folgenden bekannten kombinatorischen Definition der Zahl e:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{P_n} = e. \tag{95}$$

Aus (94) kann eine ähnliche kombinatorische Definition für die Eulersche Konstante C abgeleitet werden. Von den verschiedenen Definitionen der Eulerschen Konstante (die alle einander aequivalent sind) sei hier die folgende gewählt:[17]

$$C = \lim_{a\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{a-1} - \log a\right). \tag{96}$$

Schreibt man (94) in der Form

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a P_n(a)} = e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{a-1}-\log a} \tag{97}$$

so ergibt der Grenzübergang $a\to\infty$, der bei (97) gestattet ist:

$$C = \log \lim_{a\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a P_n(a)}\right). \tag{98}$$

Die Eulersche Konstante C hat also eine kombinatorische Definition, die durch (98) beschrieben ist.

Nachstehend sei eine ähnliche Betrachtung noch für eine dritte Teilgesamtheit durchgeführt, bei der sich als Grenzwert des Verhältnisses zwischen der Anzahl aller $n!$ Permutationen und der Anzahl der Permutationen der betrachteten Teilgesamtheit die Zahl π ergeben wird.

Es bezeichne $U(n)$ die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die bei Zerlegung in elementenfremde Zyklen nur Zyklen von einer ungeraden Ordnung aufweisen. Laut Formel (20) ist:

$$U(2n) = \frac{(2n)!^2}{n!^2\, 2^{2n}}, \tag{99}$$

$$U(2n+1) = (2n+1)\, U(2n). \tag{100}$$

Die Formel von WALLIS kann in der Form geschrieben werden:

[17] HARALD CRAMÉR: Mathematical Methods of Statistics, Uppsala 1945, p. 125, enthält die Abschätzung

$$\sum_1^n \frac{1}{\nu} = \log n + C + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

was man auch in der zu (96) führenden Form schreiben kann:

$$\sum_1^{n-1} \frac{1}{\nu} = \log n + C - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^4\, 2^{4n}}{[(2n)!]^2\,(2n+1)}.$$

Der Vergleich mit den Formeln (99) und (100) ergibt die folgenden zwei Darstellungen für die Zahl π:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{U(2n)\cdot\sqrt{2n+1}} \tag{101}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{U(2n+1)\cdot\sqrt{2n+1}}. \tag{102}$$

Die Formel (101) soll noch einer naheliegenden Umformung unterzogen werden, die es gestattet, (101) und (102) in eine einzige Formel zusammenzufassen. Bezeichnet man die rechte Seite von (101) mit $\lim a_n$, setzt

$$b_n = \sqrt{1 + \frac{1}{2n}}$$

und wendet den für allgemeine Werte von a_n und b_n giltigen Satz an:

$$(\lim a_n)(\lim b_n) = \lim (a_n b_n),$$

so ergibt sich an Stelle von (101):

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{U(2n)\cdot\sqrt{2n}}. \tag{103}$$

Schliesslich darf man an Stelle von lim für $n\to\infty$ in (102) lim für $(2n+1)\to\infty$ und in (103) lim für $2n\to\infty$ schreiben, wodurch beide Formeln in eine übergehen.

Nachstehend seien die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammengefasst:

Satz 6. Bezeichnet $P_n(a)$ die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die bei Zerlegung in elementenfremde Zyklen nur Zyklen von der Ordnung $\geqq a$ aufweisen, wobei $a \geqq 2$ angenommen wird, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{P_n(a)} = e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{a-1}}$$

Ist der Grenzübergang für $n\to\infty$ vollzogen, so ergibt der — der Reihenfolge nach zweite — Grenzübergang für $a\to\infty$ für die Eulersche Konstante C die Beziehung

$$C = \log \lim_{a\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a\,P_n(a)} \right).$$

Bezeichnet $U(n)$ die Anzahl aller Permutationen von n Elementen, die bei Zerlegung in elementenfremde Zyklen nur Zyklen ungerader Ordnung aufweisen, so gilt für die Zahl π die Darstellung:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{U(n)\cdot\sqrt{n}}. \tag{104}$$

In den Formeln (94), (95), (98) und (104) erscheinen Grenzwerte von Quotienten aus der Anzahl aller $n!$ Permutationen und der Anzahl der Permutationen der betrachteten Teilgesamtheit ($P_n(a)$, P_n, $a P_n(a)$ und $U(n)\cdot\sqrt{n}$). Es ist bemerkenswert, dass man auf diesem Wege nicht nur — wie es seit Euler bekannt ist — für die Zahl e, sondern auch für zwei andere transzendente Zahlen, die Eulersche Konstante und die Zahl π, Definitionen erhält, die man als kombinatorische bezeichnen kann.

Tryckt den 17 oktober 1952

Uppsala 1952. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB