ARKIV FÖR MATEMATIK Band 3 nr 5

Communicated 14 October 1953 by T. Nagell and Otto Frostman

Weitere Untersuchungen zur Gruppenaxiomatik

Von Bengt Stolt

§ 1. Einleitung

In meiner Dissertation[1] habe ich nebst vollständigen und unvollständigen Axiomensysteme auch einige unbestimmte Systeme aufgestellt. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist u. a. die Vollständigkeit von noch vier Systemen zu zeigen. Es wird auch gezeigt, dass die hergeleiteten Systeme irreduzibel sind.

Weiter zeige ich, wie es möglich ist, durch Einführung zweier neuen Axiome vollständige Systeme herzuleiten, die weniger Axiome als die in der Dissertation hergeleiteten Systeme enthalten.

Für Bezeichnungen und Hilfssätze wird an die eben angeführte Dissertation verwiesen. Es wird hervorgehoben, dass, wenn eines der Axiome $l\varepsilon.J$, $lv.J$, $r\varepsilon.J$ und $rv.J$ besteht, es zwei Elemente c und d gibt, die eine gewisse Verknüpfung erfüllen. Wenn mehrere von diesen Axiomen bestehen, werden wir annehmen, dass c und d in allen Verknüpfungen dieselben sind.

§ 2. Das System A, E, U, $lE.i$, $lU.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$

In diesem Abschnitt wollen wir den folgenden Satz beweisen.

Satz 1. *Das System A, E. U, $lE.i$, $lU.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$ ist vollständig.*

Beweis: Der Annahme zufolge existiert ein d mit $lE.i$, $lU.i$, $r\varepsilon.i$ und $rv.i$. Wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt II bestehen $ed=d$ und $de=d$, wo e ein Element mit $lE.I$ und $lU.I$ ist.

Zunächst werden wir zeigen, dass e auch die Eigenschaften $r\varepsilon.I$ und $rv.I$ hat. Wegen $r\varepsilon.i$ und $rv.i$ gibt es zu d und einem gewissen c genau ein h' mit $ch'=d$, und wegen $lE.I$ und $lU.I$ bestehen $c'c=e$ und $c_\alpha c'=e$. Nun bilden wir

$$(ec)h'=e(ch')=ed=d,$$

woraus nach $lU.i$ $ec=c$ folgt. Ferner erhalten wir

$$(c'e)c=c'(ec)=c'c=e$$

und

$$(ec')c=e(c'c)=ee=e,$$

[1] Stolt, B.: Über Axiomensysteme, die eine abstrakte Gruppe bestimmen. Uppsala 1953.

woraus $c'e=c'$ und $ec'=c'$ folgen. Wir bilden auch

$$(c_\alpha e)c'=c_\alpha(ec')=c_\alpha c'=e,$$

woraus $c_\alpha e=c_\alpha$ folgt, und

$$c=ec=(c_\alpha c')c=c_\alpha(c'c)=c_\alpha e=c_\alpha,$$

woraus $c_\alpha=c$ folgt. Folglich bestehen $ce=c$ und $cc'=e$.

Um zu zeigen, dass auch *rv.I* besteht, nehmen wir an, dass es ein c'_α mit $cc'_\alpha=e$ gibt. Aus

$$e(c'_\alpha d)=(cc'_\alpha)d=ed=d$$

und

$$c(c'd)=(cc')d=ed=d$$

folgen $c'_\alpha d=h'$ und $c'd=h'$.

Wegen *lE.I* und *lU.I* gilt $d'd=e$. Dann erhalten wir

$$(dd')d=d(d'd)=de=d,$$

woraus $dd'=e$ folgt. Wir bilden ferner

$$h'd'=(c'd)d'=c'(dd')=c'e=c',$$

woraus $h'd'=c'$, und

$$c'_\alpha e=c'_\alpha(dd')=(c'_\alpha d)d'=h'd'=c'.$$

Dann gilt $c'_\alpha e=c'$. Schliesslich erhalten wir

$$c'_\alpha c=c'_\alpha(ec)=(c'_\alpha e)c=c'c=e,$$

und dann folgt $c'_\alpha c=e$. Wegen *lU.I* gilt $c'_\alpha=c'$, und folglich besteht *rv.I*.

Für ein beliebiges a mit $a'a=e$ gelten wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt II $aa'=e_\alpha$ und $e_\alpha e_\alpha=e_\alpha$. Wir werden nun zeigen, dass e_α gleich e ist.

Wegen *lE.I* und *lU.I* gilt $e'_\alpha e_\alpha=e$. Wir erhalten

$$ee_\alpha=(e'_\alpha e_\alpha)e_\alpha=e'_\alpha(e_\alpha e_\alpha)=e'_\alpha e_\alpha=e,$$

woraus $ee_\alpha=e$ folgt.

Wegen

$$ce_\alpha=(ce)e_\alpha=c(ee_\alpha)=ce=c$$

gilt $ce_\alpha=c$, und aus

$$c(e_\alpha c')=(ce_\alpha)c'=cc'=e$$

folgt wegen *rv.I* $e_\alpha c'=c'$. Schliesslich bilden wir

$$e_\alpha e=e_\alpha(c'c)=(e_\alpha c')c=c'c=e.$$

Folglich gilt $e_\alpha e=e$. Wegen *lU.I* gilt $e_\alpha=e$. Hiermit ist gezeigt, dass das Element e auch die Eigenschaft *rE.I* hat, und das System ist auf das vollständige System 7) im Abschnitt II zurückgeführt.

§ 3. Das System A, E, lE, U, $lv.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$

Die Vollständigkeit des im folgenden Satz aufgestellten Systems wurde bei der Disputation von Lennart Carleson gezeigt.

Satz 2. *Das System A, E, lE, U, $lv.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$ ist vollständig.*

Beweis: Wir werden zeigen, dass $rI(U)$ besteht. Sonst gäbe es zwei Elemente e und e_α mit $rI(E)$. Auf Grund der Annahme gibt es ein d mit $lv.i$, $r\varepsilon.i$ und $rv.i$, und folglich gibt es ein gewisses c mit $ch' = d$.

Aus

$$c(eh') = (ce)h' = ch' = d$$

und

$$c(e_\alpha h') = (ce_\alpha)h' = ch' = d$$

erhalten wir $eh' = h'$ und $e_\alpha h' = h'$.

Wegen lE gelten $h_1 h' = e$, $h_1' h_1 = e$ und $h_1'' h_1 = e_\alpha$. Dann bilden wir

$$h' = eh' = (h_1' h_1)h' = h_1'(h_1 h') = h_1' e = h_1'$$

und

$$h' = e_\alpha h' = (h_1'' h_1)h' = h_1''(h_1 h') = h_1'' e = h_1'',$$

woraus $h_1'' = h_1'$ folgt. Dann gilt $e_\alpha = e$, und $rI(U)$ besteht. Hiermit ist das System auf das vollständige System 14) im Abschnitt II zurückgeführt.

§ 4. Die Systeme A, E, $lE.ri$, $lU.ri$, $ri(U)$ und A, E, $lE.li$, $lU.li$, $ri(U)$

Wir wollen nun den folgenden Satz beweisen.

Satz 3. *Jedes der Systeme $A, E, lE.ri, lU.ri, ri(U)$ und $A, E, lE.li, lU.li, ri(U)$ ist vollständig.*

Beweis: Ein Element mit den Eigenschaften $lE.li$ und $lU.li$ des Systems $A, E, lE.li, lU.li, ri(U)$ hat wegen Hilfssatz 4 im Abschnitt III auch die Eigenschaften $lE.ri$ und $lU.ri$. Es gegnügt folglich, die Vollständigkeit des Systems $A, E, lE.ri, lU.ri, ri(U)$ zu zeigen.

Ein Element e mit $lE.ri$ und $lU.ri$ hat wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt III auch die Eigenschaft $I(E)$. Für ein beliebiges a gilt $a'a \supset e$, und wegen Hilfssatz 1 im Abschnitt III gilt auch $ea' \supset a'$. Aus

$$\overbrace{\overbrace{a' \quad a}^{e} \quad a'}^{a'}$$

folgen $aa' \supset e_k$ und $a'e_k \supset a'$. Wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt III gilt $e_k e_k \supset e_k$, und wegen $lE.I$ und $lU.I$ gilt $e_k' e_k \supset e$.

Aus

$$\underbrace{e'_k\quad\underbrace{e_k\quad e_k}_{e_k}}_{e}$$

folgen $e_i e_k \supset e$ und $e'_k e_k \supset e_i$. Wegen *lU.I* gilt $e_i = e'_k$, woraus $e'_k e_k \supset e'_k$ folgt.

Wir bilden nun

$$\overbrace{\overbrace{e'_k\quad e_k}^{e}\quad e'_k}^{e'_k},$$

woraus $e_k e'_k \supset e_h$ und $e'_k e_h \supset e'_k$ folgen. Wegen *ri*(U) gilt $e_h = e_k$. Hieraus folgt $e_k e'_k \supset e_k$. Wegen *ri*(U) gilt dann $e'_k = e_k$, woraus $e_k e_k \supset e$ folgt.

Dann bilden wir

$$\underbrace{e\quad\underbrace{e_k\quad e_k}_{e}}_{e}$$

Wegen *lU.I* gilt dann $e e_k \supset e_k$. Aus

$$\underbrace{e_k\quad\underbrace{e\quad e_k}_{e_k}}_{e}$$

folgt wegen *lU.I* $e_k e \supset e_k$. Aus *ri*(U) folgt $e_k = e$, womit gezeigt ist, dass e die Eigenschaft *rE.I* hat. Hiermit ist das System auf das vollständige System 10) im Abschnitt III zurückgeführt.

§ 5. Die Irreduzibilität der hergeleiteten Systeme

Es leuchtet unmittelbar ein, dass das erste und das zweite der hergeleiteten Systeme weniger umfassend als 19) im Abschnitt II, und das dritte und das vierte weniger umfassend als 2), 3), 6) und 7) im Abschnitt III sind. In der Tafel der unentschiedenen Systeme des Abschnitts IV fallen 3) und 4) aus, und 2) wird durch die folgenden unentschiedenen Systeme ersetzt.

$$A, E, U, lE.I, lU.I, r\varepsilon.I, li(U), rI(U),$$

$$A, E, U, lE.I, lU.I, rv.I, li(U), rI(U).$$

Aus der folgenden Tafel geht hervor, dass die vier Systeme *irreduzibel* sind.

Vollständiges System	Teilsystem, das aus dem vollständigen System hervorgeht	Auf Grund folgendes Satzes des Abschnitts IV ist das Teilsystem unvollständig
A, E, U, $lE.i$, $lU.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$	A, E, $lE.i$, $lU.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$	Satz 9
	A, E, U, $l\varepsilon.i$, $lU.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$	Satz 1
	A, E, U, $lE.i$, $lv.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$	Satz 3
	A, E, U, $lE.i$, $lU.i$, $rv.i$	Satz 5
	A, E, U, $lE.i$, $lU.i$, $r\varepsilon.i$	Satz 4
A, E, lE, U, $lv.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$	A, lE, U, $lv.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$	Satz 8
	A, E, $lE.i$, U, $lv.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$	Satz 3
	A, E, lE, $lv.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$	Satz 9
	A, E, lE, U, $r\varepsilon.i$, $rv.i$	Satz 7
	A, E, lE, U, $lv.i$, $rv.i$	Satz 5
	A, E, lE, U, $lv.i$, $r\varepsilon.i$	Satz 4
A, E, $lE.ri$, $lU.ri$, $ri(U)$	A, E, $l\varepsilon.ri$, $lU.ri$, $ri(U)$	Satz 1
	A, E, $lE.ri$, $lv.ri$, $ri(U)$	Satz 10
	A, E, $lE.i$, $lU.i$, $ri(U)$	Satz 10
	A, E, $lE.ri$, $lU.ri$, $rI(U)$	Satz 6
A, E, $lE.li$, $lU.li$, $ri(U)$	A, E, $l\varepsilon.li$, $lU.li$, $ri(U)$	Satz 1
	A, E, $lE.li$, $lv.li$, $ri(U)$	Satz 10
	A, E, $lE.i$, $lU.i$, $ri(U)$	Satz 10
	A, E, $lE.li$, $lU.li$, $rI(U)$	Satz 6

§ 6. Aufstellung der Axiome EUA_{St} und EUL_L

In den meisten vollständigen Systemen ist es möglich, die Axiome A und U bzw. A und E durch ein einziges Axiom zu ersetzen. Dadurch erreicht man, dass vollständige Systeme hervorgehen, die weniger Axiome enthalten.

Lorenzen[1] hat das Problem behandelt, die kürzesten vollständigen Axiomensysteme aufzustellen. Er stellt drei Systeme auf, die nur drei Axiome enthalten. In meiner Dissertation werden die von Lorenzen benutzten Formulierungen des assoziativen Gesetzes mit UA und EA_L bezeichnet. In der Dissertation werden noch zwei Formulierungen benutzt, die mit EA_H und EA_{St} bezeichnet worden sind. Weil in der Dissertation nur das Problem behandelt wird, die schwächsten vollständigen Systemen aufzustellen, umfassen diese Systeme mehrere Axiome als die Systeme Lorenzens.

Die früher behandelten Formulierungen des assoziativen Gesetzes enthalten entweder Existenzbedingungen oder Unitätsbedingungen. In dieser Arbeit aber wollen wir zwei Formulierungen aufstellen, die sowohl Existenzbedingungen als Unitätsbedingungen enthalten. Dann wollen wir einige Hilfssätze beweisen, und schliesslich werden wir die Vollständigkeit einiger Systeme zeigen.

Die neuen Axiome werden mit EUA_{St} und EUA_L bezeichnet und in folgender Weise formuliert.

[1] Lorenzen, P.: Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik. Math. Z. *49* (1943—44), 313—327.

EUA$_{St}$: *Wenn zu drei Elementen* a, b *und* c *die Verknüpfungen* $a\,b \supset u_h$ *und* $u_h\,c \supset t_i$ *bestehen, und wenn ein oder mehrere Elemente* $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$ *existieren, die* $a\,v_1 \supset t_i$ *erfüllen, gibt es unter diesen Elementen ein* v_k, *das* $b\,c \supset v_k$ *erfüllt.*

Wenn zu drei Elementen a, b *und* c *die Verknüpfungen* $b\,c \supset v_k$ *und* $a\,v_k \supset w_j$ *bestehen, und wenn ein oder mehrere Elemente* $u_1, u_2, \ldots, u_h, \ldots$ *existieren, die* $u_1\,c \supset w_j$ *erfüllen, gibt es unter diesen Elementen ein* u_h, *das* $a\,b \supset u_h$ *erfüllt.*

Wenn zu drei Elementen a, b *und* c *die Verknüpfungen* $a\,b \supset u_h$, $u_h\,c \supset t_i$, $b\,c \supset v_k$ *und* $a\,v_k \supset w_j$ *bestehen, gilt* $t_i = w_j$.

EUA$_L$: *Wenn zu drei Elementen* a, b *und* c *die Verknüpfungen* $a\,b \supset u_h$ *und* $u_h\,c \supset t_i$ *bestehen, bestehen auch* $b\,c \supset v_k$ *und* $a\,v_k \supset t_i$. *Wenn auch* $b\,c \supset v_{k'}$ *und* $a\,v_{k'} \supset w_j$ *bestehen, gilt* $t_i = w_j$.

Wenn zu drei Elementen a, b *und* c *die Verknüpfungen* $b\,c \supset v_k$ *und* $a\,v_k \supset w_j$ *bestehen, bestehen auch* $a\,b \supset u_h$ *und* $u_h\,c \supset w_j$. *Wenn auch* $a\,b \supset u_{h'}$ *und* $u_{h'}\,c \supset t_i$ *bestehen, gilt* $t_i = w_j$.

Es leuchtet unmittelbar ein, dass das erste Axiom die logische Summe von UA und EA_{St} und das zweite Axiom die logische Summe von UA und EA_L ist. Darum ist es möglich, gewisse Hilfssätze aus der Dissertation zu benutzen.

Es wird hervorgehoben, dass es möglich ist, in allen vollständigen Systemen des Abschnitts VI EA_H durch EA_{St} zu ersetzen. Die vollständigen Systeme dieser Arbeit, die EUA_{St} bzw. EUA_L enthalten, gehen aus den vollständigen Systemen der Abschnitte VI und VIII hervor, wenn die Axiome EA_H und U bzw. EA_L und U durch EUA_{St} bzw. EUA_L ersetzt werden. Die Beweise sind aber viel mühsamer.

Wir werden auch die Vollständigkeit dreier Systeme zeigen, die aus den folgenden Systemen hervorgehen.

$$EA_{St},\ lE,\ U,\ lv.i,\ r\varepsilon.i,\ rv.i$$
$$EA_L,\ U,\ lE.li,\ lU.li,\ r\varepsilon.li,\ rv.li$$
$$EA_L,\ U,\ lE.ri,\ lU.ri,\ r\varepsilon.ri,\ rv.ri.$$

Die Vollständigkeit dieser drei Systeme, die nicht in der Dissertation behandelt sind, folgt aus der Vollständigkeit der entsprechenden Systeme, die EUA_{St} bzw. EUA_L enthalten.

In den vollständigen Systemen 9) und 13) des Abschnitts VIII ist es möglich, das Axiom U wegzulassen. Darum werden wir uns mit der Vollständigkeit der EUA_L enthaltenden entsprechenden Systeme nicht beschäftigen. Die Vollständigkeitsbeweise der Systeme

$$EA_L,\ lE.li,\ lU.li,\ ri(U)$$
$$EA_L,\ lE.ri,\ lU.ri,\ ri(U)$$

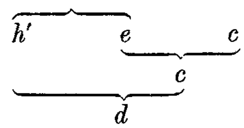
sind mit dem Beweis des Satzes 3 analog.

§ 7. Hilfssätze

Wir werden nun die folgenden Hilfssätze beweisen.

Hilfssatz 1. *Wenn* EUA_{St}, lE *und* $lv.i$ *bestehen, bestehen auch* $rI(E)$ *und* U.

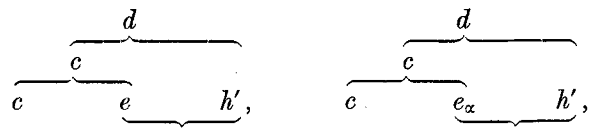
Beweis: Der Annahme zufolge besteht $h'\,c \supset d$, wo d die Eigenschaft $lv.i$ hat. Wegen lE gilt $e\,c \supset c$. Dann erhalten wir



Wegen EUA_{St}, lE und $lv.i$ gilt $h'e \supset h'$. e hat also die Eigenschaft $ri(E)$. Wegen Hilfssatz 6 im Abschnitt V hat e die Eigenschaft $rI(E)$, und ausserdem besteht U, w. z. b. w.

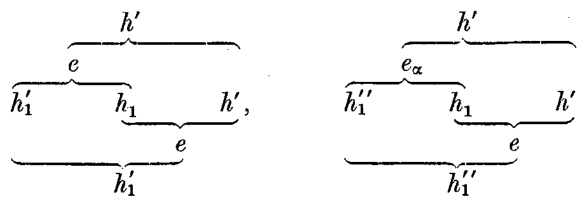
Hilfssatz 2. *Wenn EUA_{St}, lE, $r\varepsilon.i$ und $rv.i$ bestehen, besteht $rI(U)$.*

Beweis: Wenn $rI(U)$ nicht bestände, gäbe es zwei Elemente e, e_α mit $rI(E)$. Wegen $r\varepsilon.i$ und $rv.i$ gibt es zu zwei Elementen c und d genau ein h', das $ch' \supset d$ erfüllt. Wir bilden nun



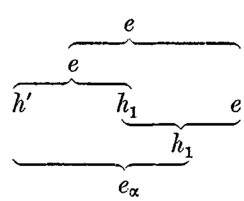
woraus nach EUA_{St}, $r\varepsilon.i$ und $rv.i$ $eh' \supset h'$ *bzw.* $e_\alpha h' \supset h'$ *folgen.*

Wegen lE gelten $h_1 h' \supset e$, $h_1' h_1 \supset e$ und $h_1'' h_1 \supset e_\alpha$. Dann erhalten wir



Wegen EUA_{St} gilt $h_1' = h' = h_1''$, woraus $h' h_1 \supset e$, e_α folgt.

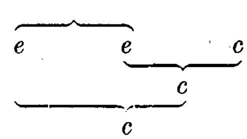
Schliesslich bilden wir



Aus EUA_{St} folgt $e_\alpha = e$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 3. *Wenn EUA_{St} und $r\varepsilon.li$ bestehen, besteht $I(E)$.*

Beweis: Der Annahme zufolge bestehen $ec \supset c$ und $cc_1' \supset e$. Aus



folgt wegen EUA_{St} und $li(E)$ $ee \supset e_\alpha$ und $e_\alpha c \supset c$, und aus

$$\overbrace{\overbrace{e\;c}^{c}\;c_1'}^{e} \qquad \underbrace{e\;\underbrace{c\;c_1'}_{e}}_{e_\alpha}$$

folgt wegen EUA_{St} $e_\alpha = e$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Wenn EUA_L, $lE.I$ und $lU.I$ bestehen, und wenn e ein Element mit $lE.I$ und $lU.I$ und a ein beliebiges Element ist, bestehen $a'a \supset e$, $ea' \supset a'$, $aa' \supset e_k$, $a'e_k \supset a'$ und $e_k e_k \supset e_k$.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 im Abschnitt VIII bestehen $a'a \supset e$, $ea' \supset a'$, $aa' \supset e_k$ und $a'e_k \supset a'$, wo e ein Element mit $lE.I$ und $lU.I$ und a ein beliebiges Element ist.

Aus

$$\overbrace{\overbrace{a'\;e_k}^{a'}\;e_k}^{a'} \qquad a'\;\underbrace{e_k\;e_k}$$

folgt wegen EUA_L $e_k e_k \supset e_h$ und $a'e_h \supset a'$. Wir bilden auch

$$\overbrace{\overbrace{a\;a'}^{e_k}\;e_k}^{e_h} \qquad \underbrace{a\;\underbrace{a'\;e_k}_{a'}}_{e_k}$$

Aus EUA_L folgt $e_h = e_k$, und dann gilt $e_k e_k \supset e_k$, w. z. b. w.

§ 8. Systeme, die EUA_{St} enthalten

Wir wollen nun die Vollständigkeit der folgenden Systeme zeigen.

1) EUA_{St}, lE, $li(U)$, $rI(U)$
2) EUA_{St}, lE, $lv.i$, $rI(U)$
3) EUA_{St}, lE, $r\varepsilon.li$, $rI(U)$
4) EUA_{St}, lE, $r\varepsilon.i$, $rv.i$, $li(U)$
5) EUA_{St}, lE, $r\varepsilon.li$, $rv.li$
6) EUA_{St}, lE, $lv.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$.

Satz 4. *Das System EUA_{St}, lE, $li(U)$ und $rI(U)$ ist vollständig.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt VII besteht ein Element mit $I(E)$, womit das System auf das vollständige System 4) im Abschnitt V zurückgeführt ist.

Satz 5. *Das System EUA_{St}, lE, $lv.i$ und $rI(U)$ ist vollständig.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 1 bestehen $rI(E)$ und U, womit das System auf das vollständige System 4) im Abschnitt II zurückgeführt ist.

Satz 6. *Das System EUA_{St}, lE, $r\varepsilon.li$ und $rI(U)$ ist vollständig.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 besteht $I(E)$, womit das System auf das vollständige System 4) im Abschnitt V zurückgeführt ist.

Satz 7. *Das System EUA_{St}, lE, $r\varepsilon.i$, $rv.i$ und $li(U)$ ist vollständig.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt VII besteht $I(E)$, und wegen Hilfssatz 2 besteht $rI(U)$, womit das System auf das vollständige System 4) im Abschnitt V zurückgeführt ist.

Satz 8. *Das System EUA_{St}, lE, $r\varepsilon.li$ und $rv.li$ ist vollständig.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 besteht $I(E)$, und wegen Hilfssatz 2 besteht $rI(U)$, womit das System auf das vollständige System 4) im Abschnitt V zurückgeführt ist.

Satz 9. *Das System EUA_{St}, lE, $lv.i$, $r\varepsilon.i$ und $rv.i$ ist vollständig.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 1 bestehen $rI(E)$ und U, und wegen Hilfssatz 2 besteht $rI(U)$, womit das System auf das vollständige System 4) im Abschnitt II zurückgeführt ist.

§ 9. Systeme, die EUA_L enthalten

Schliesslich werden wir die Vollständigkeit der folgenden Systeme zeigen.

1) EUA_L, $lE.lI$
2) EUA_L, $lE.ri$, $rU.ri$
3) EUA_L, $lE.li$, $lU.li$, $I(U)$
4) EUA_L, $lE.ri$, $lU.ri$, $I(U)$
5) EUA_L, $lE.li$, $lU.li$, $r\varepsilon.li$, $rv.li$
6) EUA_L, $lE.ri$, $lU.ri$, $r\varepsilon.ri$, $rv.ri$
7) EUA_L, $lE.rI$, $rI(U)$
8) EUA_L, $lE.rI$, $r\varepsilon.rI$, $rv.rI$
9) EUA_L, $lE.li$, $rU.li$, $r\varepsilon.li$
10) EUA_L, $lE.li$, $rU.li$, $lv.li$.

Das System 1) ist schwächer als die Systeme 4) und 5) Lorenzens und enthält nur zwei Axiome. In der Tafel gibt es zwei Systeme, die drei Axiome enthalten.

Satz 10. *Das System EUA_L, $lE.lI$ ist vollständig.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 1 im Abschnitt V besteht U, womit das System auf das vollständige System 1 im Abschnitt VIII zurückgeführt ist.

Satz 11. *Das System EUA_L, $lE.ri$ und $rU.ri$ ist vollständig.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 gibt es ein Element mit $lE.I$ und $rU.I$, und wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt VIII besteht E. Hiermit ist das System auf das vollständige System 5) im Abschnitt V zurückgefürt.

Satz 12. *Das System EUA_L, $lE.li$, $lU.li$ und $I(U)$ ist vollständig.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es ein Element e mit $lE.li$ und $lU.li$, das wegen Hilfssatz 4 im Abschnitt VIII auch $lE.ri$ und wegen Hilfssatz 3 sogar $lE.I$ und $lU.I$ hat. Wenn a ein beliebiges Element ist, bestehen wegen Hilfssatz 4 $a'a \supset e$, $aa' \supset e_k$ und $e_k e_k \supset e_k$. Wegen $I(U)$ gilt $e_k = e$. Dann hat e die Eigenschaft $rE.I$, womit dieses System auf 2) zurückgeführt ist.

Satz 13. *Das System EUA_L, $lE.ri$, $lU.ri$* und *$I(U)$ ist wollständig.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 bestehen $lE.I$ und $lU.I$, womit dieses System auf 2) zurückgeführt ist.

Satz 14. *Das System EUA_L, $lE.li$, $lU.li$, $r\varepsilon.li$ und $rv.li$ ist vollständig.*

Beweis: Der Annahme zufolge bestehen $ec \supset c$ und $cc' \supset e$, wo e die Eigenschaften $lE.li$, $lU.li$, $r\varepsilon.li$ und $rv.li$ hat. Wegen Hilfssatz 3 hat e auch die Eigenschaft $I(E)$, und wenn a ein beliebiges Element ist, bestehen nach Hilfssatz 4 $a'a \supset e$, $aa' \supset e_k$ und $e_k e_k \supset e_k$. Wir wollen zeigen, dass e_k gleich e ist.
Nach $lE.I$ und $lU.I$ gilt $e'_k e_k \supset e$. Aus

$$\overbrace{e'_k\quad e_k}\quad e_k \qquad \underbrace{e'_k\quad \underbrace{e_k\quad e_k}_{e_k}}_{e}$$

folgt nach EUA_L, $e'_k e_k \supset e'_k$, und aus

$$\overbrace{\overbrace{e'_k\quad e_k}^{e'_k}\quad e_k}^{e'_k} \qquad \underbrace{e'_k\quad \underbrace{e_k\quad e_k}_{e_k}}_{e}$$

folgt nach EUA_L, $e'_k = e$. Dann gilt $e e_k \supset e$. Wir bilden ferner

$$\overbrace{c\quad e}\quad e_k \qquad \underbrace{c\quad \underbrace{e\quad e_k}_{e}}_{c}$$

und nach EUA_L gelten $ce \supset c_\alpha$ und $c_\alpha e_k \supset c$. Aus

$$\overbrace{\overbrace{c \qquad e}^{c} \qquad e}^{c}$$
$$\underbrace{c \qquad \underbrace{e \qquad e}_{e}}_{c_\alpha}$$

folgt nach EUA_L $c_\alpha = c$, und dann gilt $c e_k \supset c$.

Nach $lE.I$ und $lU.I$ bestehen $c'_\alpha c \supset e$ und $c_\beta c'_\alpha \supset e$. Aus

$$\overbrace{e \qquad c'_\alpha} \qquad c$$
$$\underbrace{e \qquad \underbrace{c'_\alpha \qquad c}_{e}}_{e}$$

folgt $e c'_\alpha \supset c'_\alpha$, aus

$$\overbrace{c_\beta \qquad e} \qquad c'_\alpha$$
$$\underbrace{c_\beta \qquad \underbrace{e \qquad c'_\alpha}_{c'_\alpha}}_{e}$$

folgt $c_\beta e \supset c_\beta$, und aus

$$\overbrace{\overbrace{c_\beta \qquad c'_\alpha}^{e} \qquad c}^{c}$$
$$\underbrace{c_\beta \qquad \underbrace{c'_\alpha \qquad c}_{e}}_{c_\beta}$$

folgt $c_\beta = c$. Nach $lU.I$ gilt dann $c' c \supset e$.

Wegen

$$\overbrace{\overbrace{c \qquad e_k}^{c} \qquad c'}^{e}$$
$$c \qquad \underbrace{e_k \qquad c'}$$

gilt $e_k c' \supset c'$, und wegen

$$\overbrace{\overbrace{e \qquad e_k}^{e} \qquad e}^{e}$$
$$e \qquad \underbrace{e_k \qquad e}$$

gilt $e_k e \supset e_h$. Schliesslich bilden wir

$$\overbrace{\overbrace{e_k \qquad c'}^{c'} \qquad c}^{e}$$
$$\underbrace{e_k \qquad \underbrace{c' \qquad c}_{e}}_{e_h}$$

woraus nach EUA_L $e_h = e$ folgt. Dann gilt $e_k e \supset e$, und nach $lU.I$ gilt $e_k = e$. e hat also die Eigenschaft $rE.I$, womit das System auf 2) zurückgeführt ist.

Satz 15. *Das System EUA_L, $lE.ri$, $lU.ri$, $r\varepsilon.ri$ und $rv.ri$ ist vollständig.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 hat ein Element mit $lE.ri$, $lU.ri$, $r\varepsilon.ri$ und $rv.ri$ auch die Eigenschaft $I(E)$, womit das System auf das vorige System zurückgeführt ist.

Satz 16. *Die Systeme EUA_L, $lE.rI$, $rI(U)$ und EUA_L, $lE.rI$, $r\varepsilon.rI$, $rv.rI$ sind vollständig.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 1 im Abschnitt V besteht U, womit die Systeme auf die vollständigen Systeme 17) bzw. 18) im Abschnitt VIII zurückgeführt sind.

Satz 17. *Die Systeme EUA_L, $lE.li$, $rU.li$, $r\varepsilon.li$ und EUA_L, $lE.li$, $rU.li$, $lv.li$ sind vollständig.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 bzw. Hilfssatz 4 im Abschnitt VIII besteht ein Element mit $lE.I$ und $rU.I$, womit die Systeme auf 2) zurückgeführt sind.

§ 10. Systeme, die aus höchstens drei Axiomen bestehen

Schliesslich soll gezeigt werden, dass es nur acht vollständige Systeme gibt, die höchstens drei Axiome enthalten. Dazu ist es notwendig, alle vollständigen Systeme zu bilden, die eines oder mehrere der Axiome A, E, U und höchstens zwei andere Axiome enthalten. Dann wollen wir untersuchen, ob es möglich ist, einige der Axiome A, E, U durch eine gewisse Formulierung des assoziativen Gesetzes zu ersetzen.

Zuerst betrachten wir die unvollständigen Systeme des Abschnitts IV mit Berücksichtigung der Resultate des § 5. Wenn wir aus diesen Systemen Teilsysteme bilden, die eines oder mehrere von A, E, U und höchstens zwei andere Axiome enthalten, erhalten wir nur Systeme, die wegen der Sätze des Abschnitts IV unvollständig sind.

In den Abschnitten II und III gibt es vollständige Systeme, die eines oder mehrere von A, E, U und höchstens zwei andere Axiome enthalten. Aus einigen der übrigen Systeme ist es möglich, solche Systeme zu bilden, indem man zwei Axiome durch ein stärkeres Axiom ersetzt. Es ist möglich, die folgenden vollständigen Systeme zu bilden.

1) A, lE, U, $lI(E)$	5) A, E, lU, $rE.li$
2) A, lE, U, $rE.i$	6) A, E, U, $lE.lI$
3) A, lE, U, $rU.ri$	7) A, E, U, $lE.ri$, $lU.ri$
4) A, E, lU, $lE.lI$	8) A, E, U, $lE.rI$, $rI(U)$.

Die Systeme 1)—6) kommen in der Arbeit Lorenzens vor. 3)—5) sind reduzibel, wenn man die Axiomemenge meiner Dissertation betrachtet. In die von Lorenzen betrachteten Axiomemenge sind sie irreduzibel. Lorenzen hat gezeigt, dass 1)—6) die einzigen A enthaltenden viergliedrigen vollständigen Systeme sind.

Wenn Wir in 1)—8) die Axiome A, E, U durch eines der Axiome UA, EA_L oder EUA_L ersetzen, erhalten wir die folgenden Systeme.

1) $UA, lE, lI(E)$	5) $EA_L, lU, rE.li$
2) $UA, lE, rE.i$	6) $EUA_L, lE.lI$
3) $UA, lE, rU.ri$	7) $EUA_L, lE.ri, lU.ri$
4) $EA_L, lU, lE.lI$	8) $EUA_L, lE.rI, rI(U)$.

Die Vollständigkeit von 1)—5) ist von Lorenzen, die von 6)—8) in der vorliegenden Arbeit bewiesen. Es ist klar, dass diese Systeme die einzigen vollständigen Systeme sind, die höchstens dreigliedrig sind und aus der Menge der betrachteten Axiome gebildet werden können.

Tryckt den 18 januari 1954

Uppsala 1954. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB