LA GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE JACOBI DE L'INTÉGRATION DES SYSTÈMES COMPLETS D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ET HOMOGÈNES; LA GÉNÉRALISATION DES RECHERCHES CORRESPONDANTES DE CLEBSCH.

PAR

G. PFEIFFER

à KIEW.

Introduction.

Dans une série de travaux, A. Weiler[1] a affirmé, qu'en intégrant un système complet d'équations linéaires et homogènes on n'a pas besoin de passer à un système en involution, comme le fait Jacobi. Sa pensée est tout à fait juste, mais Weiler n'a pas su en donner une preuve convaincante. Les travaux de Weiler sont embrouillés, ils contiennent beaucoup de méprises. On lui a indiqué l'obscurité de l'exposition, les fausses conclusions, . . . Il débattait, parfois admettait qu'il avait tort, à nouveau développait ses idées et de nouveau commettait des inexactitudes. En même temps Weiler faisait une polémique fâcheuse, et il est parvenu à ce résultat que sa pensée, bien que juste, n'est pas entrée en usage, tandis que la méthode de Jacobi devenait généralement connue.

---

[1] A. WEILER, Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit $n+1$ Veränderlichen. Zeitschr. für Math. und Physik, 1863, B. 8, ss. 264—292. — Integration der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung von unbeschränkter Allgemeinheit. Zeitsch. für Math. und Physik, 1875, B. 20, ss. 271—299. — Nachträge zu meinen Abhandlungen über Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Zeitschr. für Math. und Physik, 1877, B. 22, ss. 100—125. — Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Zeitschr. für Math. und Physik, 1894, B. 39, ss. 355—375.

Dans »Leçons sur le problème de Pfaff» M. Ed. Goursat[1] a marqué le problème très intéressant de M. A. Buhl.[2]

A ce problème sont liés beaucoup de noms saillants: P. APPELL, TH. DE-DONDER, ED. GOURSAT, S. LIE—FR. ENGEL, S. LIE—G. SCHEFFERS, H. POINCARÉ, C. POPOVICI, N. SALTYKOW.

Il s'est trouvé, que nos recherches de l'année 1922 sont proches de ce problème et nous avons publié trois notes: la première dans le Bull. des sciences math., la seconde dans les Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de l'URSS. et la troisième aux Actes du Congrès Intern., Bologne, 1928.[3] Les théorèmes de la seconde note nous ont donné la possibilité de généraliser la méthode de Jacobi de l'intégration des systèmes complets d'équations linéaires et homogènes[4] et aussi de généraliser les recherches correspondantes de Clebsch.[5] Nous sommes arrivés à la conclusion, que l'intégration des systèmes complets ne demande pas le passage aux systèmes en involution: on peut se servir des systèmes plus généraux, que nous proposons d'appeler *les systèmes des systèmes complets successifs.*

Une suite d'autres conclusions est également exposée dans le présent mémoire. Entre autres choses sera introduite la conception de *système Jacobien généralisé.*

---

[1] ED. GOURSAT, Leçons sur le problème de Pfaff. Paris, 1922, p. 234.

[2] A. BUHL, Sur les formes linéaires aux dérivées partielles d'une intégrale d'un système d'équations différentielles simultanées, qui sont aussi des intégrales de ce système. C. R., 1901, t. 132, p. 313. — Sur les équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe. Thèse, Gauthier-Villars, Paris, 1901. — Sur la permutation des intégrales d'un système d'équations différentielles. C. R., 1907, t. 145, p. 1134. — Sur les opérateurs différentiels permutables ou non. Bull. des sc. math., 1928, série 2, t. LII, pp. 353—361. — Aperçus modernes sur la théorie des groupes continus et finis. Mémorial des sc. mathém., fasc. XXXIII, Paris, 1928.

[3] G. PFEIFFER, Sur la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre. Bull. des sc. math., 1928, série 2, t. LII, pp. 350—352. — Les théorèmes expliquant une série de questions dans le problème de la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre. Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de l'URSS., A, 1929, pp. 177—182. — Quelques additions au problème de M. Buhl. Atti del Congresso Intern. dei Matem., Bologna, 1928, T. III, pp. 45—46.

[4] G. PFEIFFER, Généralisation de la méthode de Jacobi pour l'intégration des systèmes complets d'équations linéaires homogènes. Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de l'URSS., A, 1930, pp. 405—409.

[5] A. CLEBSCH, Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. Journ. für die reine und ang. Math., 1866, B. 65, ss. 257—268.

G. PFEIFFER, Sur les opérateurs d'un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue. Comptes rendus, t. 190, 1930, pp. 909—911.

§ 1.

Sur les opérateurs différentiels des systèmes de deux équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue.

Prenons un système complet de deux équations linéaires et homogènes:

$$X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

$$Y(f) = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{2}$$

qui satisfont à la condition:

$$XY(f) - YX(f) = \lambda X(f) + \mu Y(f), \tag{3}$$
$$\lambda \not\equiv 0, \ \mu \not\equiv 0.$$

Les équations (1), (2) possèdent $(n-2)$ intégrales indépendantes communes:

$$u_1, \ u_2, \ \ldots \ u_{n-2}. \tag{4}$$

A l'équation (1) appartiennent $(n-1)$ intégrales indépendantes. Si l'on ajoute aux intégrales (4) une intégrale de l'équation (1), u_0, qui ne satisfait pas à l'équation (2), on aura formé un système de $(n-1)$ intégrales indépendantes de l'équation (1):

$$u_0, \ u_1, \ u_2, \ \ldots \ u_{n-2}. \tag{5}$$

Le système le plus général des intégrales indépendantes de l'équation (1) a la forme:

$$v_0 = \varphi_0(u_0, u_1, \ldots u_{n-2}), \ v_1 = \varphi_1(u_0, u_1, \ldots u_{n-2}), \ \ldots \ v_{n-2} = \varphi_{n-2}(u_0, u_1, \ldots u_{n-2}). \tag{6}$$

Celles des intégrales v_i—(6), pour lesquelles:

$$\frac{\partial v_i}{\partial u_0} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_0} \equiv 0, \tag{7}$$

sont des intégrales communes aux équations (1), (2).

Parmi les intégrales (6) une au moins n'appartient pas à l'équation (2), mais elles peuvent toutes ne pas être des intégrales communes aux équations (1), (2).

Partageons les intégrales (6) en deux catégories: à la première rapportons les intégrales, qui n'appartiennent qu'à l'équation (1):

$$\text{(a)} \quad \varphi_0 = \omega_0(u_0, u_1, \ldots u_{n-2}),\ \varphi_1 = \omega_1(u_0, u_1, \ldots u_{n-2}), \ldots \varphi_i = \omega_i(u_0, u_1, \ldots u_{n-2}), \tag{8}$$

$$\frac{\partial \omega_\nu}{\partial u_0} \not\equiv 0, \tag{9}$$

$$\nu = 0, 1, \ldots i,$$

à la deuxième les intégrales communes aux équations (1), (2):

$$\text{(b)} \quad \psi_{i+1} = \tilde{\omega}_{i+1}(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}),\ \psi_{i+2} = \tilde{\omega}_{i+2}(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}), \ldots$$
$$\psi_{n-2} = \tilde{\omega}_{n-2}(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}). \tag{10}$$

Si l'on substitue l'une des intégrales (b)—(10), soit ψ, dans l'identité (3), alors ses termes, chacun séparément, seront nuls; si l'on substitue l'une des intégrales (a)—(8), soit φ, on obtient l'identité:

$$X\,Y(\varphi) \equiv \mu\, Y(\varphi), \tag{11}$$

$$X \log \sigma \equiv -\mu, \tag{12}$$

$$\sigma = \frac{1}{Y(\varphi)}. \tag{13}$$

D'après nos résultats[1], le système d'équations:

$$X(f) = 0, \qquad Z(f) \equiv \sigma Y(f) = 0 \tag{14}$$

possède la propriété:

$$X Z(f) - Z X(f) \equiv l X(f), \tag{15}$$

$$l = \sigma\lambda \neq 0.$$

La substitution dans la ligne (15) d'une intégrale φ', du groupe (a)—(8), et différente de φ, donne l'identité:

$$X(Z(\varphi')) \equiv 0. \tag{16}$$

Ceci montre, que l'expression:

---

[1] G. Pfeiffer, Les théorèmes expliquant une série de questions dans le problème de la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre. Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de l'URSS., A, 1929, pp. 177—182.

$$Z(\varphi') = \sigma Y(\varphi') = \frac{Y(\varphi')}{Y(\varphi)} \tag{17}$$

est une intégrale de l'équation (1).

De là découle, qu'il existe la possibilité de construire, à partir de deux intégrales φ, φ' de l'équation (1) ne vérifiant pas l'équation (2), une troisième intégrale v—(6) de l'équation (1):

$$v = \frac{Y(\varphi')}{Y(\varphi)}. \tag{18}$$

La transformation infinitésimale:

$$Z(f) = \sigma Y(f) = \frac{1}{Y(\varphi)} Y(f) \tag{19}$$

est l'opérateur différentiel, traduisant des intégrales (a)—(8) de l'équation (1) en des intégrales v—(6).

Si dans la relation (3) μ était nul, alors nous n'aurions pas besoin de passer à la relation (15). Nous aurions l'identité:

$$X(Y(\varphi)) \equiv 0; \tag{20}$$

l'intégrale φ donnerait l'intégrale v'—(6) de l'équation (1):

$$v' = Y(\varphi). \tag{21}$$

Mais, en même temps que (21), l'expression (18) serait aussi une intégrale de l'équation (1).

Les transformations infinitésimales:

$$\underline{\overline{Z}}(f) = Y(f), \ Z(f) = \frac{1}{Y(\varphi)} Y(f) \tag{22}$$

représentent des opérateurs différentiels, traduisant les intégrales (a)—(8) de l'équations (1) en ses intégrales v—(6).

Fixons la circonstance suivante: l'opérateur différentiel, traduisant les intégrales (a)—(8) de l'équation (1) en des intégrales v—(6), reste aussi opérateur différentiel lorsqu'on le multiplie ou divise par une intégrale de l'équation (1). Quand $\mu \equiv 0$, $Y(\varphi)$ est une intégrale de l'équation (1); en divisant le premier opérateur (22) par $Y(\varphi)$, on obtient le deuxième.

A partir des intégrales φ—(8) on forme les σ correspondants — (13):

$$\sigma_0 = \frac{1}{Y(\varphi_0)} = \frac{1}{\frac{\partial \omega_0}{\partial u_0} Y(u_0)}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{Y(\varphi_1)} = \frac{1}{\frac{\partial \omega_1}{\partial u_0} Y(u_0)}, \ldots, \sigma_i = \frac{1}{Y(\varphi_i)} = \frac{1}{\frac{\partial \omega_i}{\partial u_0} Y(u_0)} \tag{23}$$

et les opérateurs correspondants (19):

$$Z_0(f) = \sigma_0 Y(f), \ Z_1(f) = \sigma_1 Y(f), \ldots Z_i(f) = \sigma_i Y(f). \tag{24}$$

Quand $\mu \equiv 0$, aux opérateurs (24) on peut joindre l'opérateur:

$$Y(f). \tag{25}$$

En multipliant les opérateurs (24) par des constantes arbitraires ou des fonctions des intégrales (6):

$$E_0, \ E_1, \ldots E_i \tag{26}$$

et en les ajoutant, nout obtiendrons l'opérateur:

$$\begin{aligned} Z(f) &= E_0 Z_0(f) + E_1 Z_1(f) + \cdots + E_i Z_i(f) = \\ &= (E_0 \sigma_0 + E_1 \sigma_1 + \cdots + E_i \sigma_i) Y(f) = \\ &= \left(\frac{E_0}{\frac{\partial \omega_0}{\partial u_0}} + \frac{E_1}{\frac{\partial \omega_1}{\partial u_0}} + \cdots + \frac{E_i}{\frac{\partial \omega_i}{\partial u_0}} \right) \frac{Y(f)}{Y(u_0)}. \end{aligned} \tag{27}$$

Le rapport de deux σ—(23):

$$\frac{\sigma_\pi}{\sigma_\varrho} = \frac{Y(\varphi_\varrho)}{Y(\varphi_\pi)} = \frac{\frac{\partial \omega_\varrho}{\partial u_0}}{\frac{\partial \omega_\pi}{\partial u_0}} = Z_\pi(\varphi_\varrho) \tag{28}$$

est une intégrale de l'équation (1).

De là résulte, que tous les opérateurs (24) découlent de l'un d'eux en le multipliant par les intégrales de l'équation (1).

Prenons deux intégrales de l'équation (1):

$$\begin{aligned} &\Phi(\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_i, \psi_{i+1}, \ldots \psi_{n-2}), \\ &\Psi(\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_i, \psi_{i+1}, \ldots \psi_{n-2}), \end{aligned} \tag{29}$$

qui ne satisfont pas à l'équation (2):

$$\begin{aligned} Y(\Phi) &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_0} Y(\varphi_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} Y(\varphi_1) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i} Y(\varphi_i) \not\equiv 0, \\ Y(\Psi) &= \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_0} Y(\varphi_0) + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_1} Y(\varphi_1) + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_i} Y(\varphi_i) \not\equiv 0, \end{aligned} \tag{30}$$

Φ, Ψ sont des fonctions arbitraires des arguments, prises de manière précise.

Le rapport des expression (30):

$$\frac{Y(\Phi)}{Y(\Psi)} = \frac{\frac{1}{\sigma_0}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_0} + \frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} + \cdots + \frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i}}{\frac{1}{\sigma_0}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_0} + \frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_1} + \cdots + \frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_i}} \tag{31}$$

est une intégrale l'équation (1):

L'intégrale (28) satisfait à l'équation (2), si:

$$\frac{\partial \omega_\varrho}{\partial u_0} = \frac{\partial \omega_\pi}{\partial u_0} \Phi(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}), \tag{32}$$

$$\omega_\varrho = \omega_\pi \Phi(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}), \tag{33}$$

où Φ, Ψ sont des fonctions arbitraires de leurs arguments.[1]

En particulieur l'intégrale (28) peut être une quantité constante K, alors:

$$\omega_\varrho = K\omega_\pi + \Psi(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}). \tag{34}$$

Pour:

---

[1] Le rapport:

$$\frac{\partial \omega_\varrho}{\partial u_0} \Big/ \frac{\partial \omega_\pi}{\partial u_0}$$

est une fonction des arguments $u_0, u_1, \ldots u_{n-2}$. S'il satisfait à l'équation (2), alors il ne dépend pas de u_0, par conséquent:

$$\frac{\partial \omega_\varrho}{\partial u_0} \Big/ \frac{\partial \omega_\pi}{\partial u_0} = \Phi(u_1, u_2, \ldots u_{n-2}),$$

$$\frac{\partial^2 \omega_\varrho}{\partial u_0^2} \cdot \frac{\partial \omega_\pi}{\partial u_0} - \frac{\partial^2 \omega_\pi}{\partial u_0^2}\, \frac{\partial \omega_\varrho}{\partial u_0} \equiv 0.$$

Dans les lignes (33) les fonctions Φ, Ψ, étant intégrales de l'équation (1), sont en même temps des intégrales de l'équation (2).

$$\begin{gathered}\varphi' = \varphi + \Psi, \\ K = 1, \quad \Psi = \Psi(u_1, u_2, \ldots u_{n-2})\end{gathered} \tag{35}$$

l'égalité (17) donne l'unité:

$$Z(\varphi) = \frac{Y(\varphi)}{Y(\varphi)} = 1. \tag{36}$$

En appliquant à chaque intégrale (a)—(8) $(i+1)$ opérateurs (24), nous formons $(i+1)$ groupes, équivalents l'un à l'autre, des intégrales (28) de l'équation (1):

$$\begin{array}{lllll} Z_0(\varphi_0) = 1, & Z_1(\varphi_0) = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, & Z_2(\varphi_0) = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}, & \ldots & Z_i(\varphi_0) = \frac{\sigma_i}{\sigma_0}; \\ Z_0(\varphi_1) = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}, & Z_1(\varphi_0) = 1, & Z_2(\varphi_1) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, & \ldots & Z_i(\varphi_1) = \frac{\sigma_i}{\sigma_1}; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_0(\varphi_i) = \frac{\sigma_0}{\sigma_i}, & Z_1(\varphi_i) = \frac{\sigma_1}{\sigma_i}, & Z_2(\varphi_i) = \frac{\sigma_2}{\sigma_i}, & \ldots & Z_i(\varphi_i) = 1. \end{array} \tag{37}$$

Les intégrales:

$$\begin{gathered}\frac{\sigma_0}{\sigma_\nu}, \frac{\sigma_1}{\sigma_\nu}, \ldots \frac{\sigma_{\nu-1}}{\sigma_\nu}, \quad 1, \quad \frac{\sigma_{\nu+1}}{\sigma_\nu}, \ldots \frac{\sigma_i}{\sigma_\nu}, \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots i,\end{gathered} \tag{38}$$

peuvent aussi être formées par l'opérateur (27):

$$\begin{gathered}\underline{\underline{\overline{\overline{Z}}}}(\varphi_\nu) = E_0 \frac{\sigma_0}{\sigma_\nu} + E_1 \frac{\sigma_1}{\sigma_\nu} + \cdots + E_{\nu-1} \frac{\sigma_{\nu-1}}{\sigma_\nu} + E_\nu + E_{\nu+1} \frac{\sigma_{\nu+1}}{\sigma_\nu} + \cdots + E_i \frac{\sigma_i}{\sigma_\nu}, \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots i.\end{gathered}$$

En soumettant les intégrales (a)—(8) à l'action de l'opérateur arbitraire (24):

$$\begin{gathered}Z_j(f) = \sigma_j Y(f), \\ j = 0, 1, \ldots i,\end{gathered} \tag{39}$$

nous trouverons la colonne de rang $(j+1)$ des intégrales (37):

$$Z_j(\varphi_0) = \frac{\sigma_j}{\sigma_0}, \; Z_j(\varphi_1) = \frac{\sigma_j}{\sigma_1}, \ldots Z_j(\varphi_i) = \frac{\sigma_j}{\sigma_i}. \tag{40}$$

Dans le cas où les intégrales:

$$\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \tag{41}$$

de la catégorie (a)—(8) sont liées par les relations:

$$\varphi' = Z_j(\varphi), \quad \varphi'' = Z_j(\varphi'), \ldots, \tag{42}$$

on reconnait le procédé de Jacobi, qui s'exprime par la ligne:

$$\varphi, \; \varphi' = Z_j(\varphi), \; \varphi'' = Z_j(\varphi'), \ldots. \tag{43}$$

Il consiste dans l'application successive du même opérateur à l'intégrale φ de la catégorie (a)—(8).

Après que les moyens de construction des opérateurs différentiels, possédant la propriété marquée par Poisson[1] sont constitués, la généralisation de la méthode de Jacobi se fait évidente. Il ne reste plus, qu'à s'adresser à un des plus beaux manuels, par exemple, aux leçons de M. Ed. Goursat.[2]

Tout ce qui a été dit à propos de l'équation (1) peut, il va sans dire, être appliqué à l'équation (2).

§ 2.

Les systèmes de systèmes complets successifs.[3]

Considérons des systèmes complets d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue, comprenant plus de deux équations, pour lesquels se généralisent immédiatement les résultats du paragraphe précédent. Nous qualifierons la nature des systèmes complets, qui peuvent être intégrés par la méthode jacobienne généralisée, et proposerons de les nommer: *systèmes des systèmes complets successifs.*

Supposons, qu'il est donné un système complet des q ($q > 2$) équations linéaires et homogènes:

---

[1] »Encyklopädie der math. Wissenschaften...« B. II, 1, Heft. 2/3, s. 335.

[2] ED. GOURSAT, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, 1921, pp. 77—81.

[3] G. PFEIFFER, Généralisation de la méthode de Jacobi pour l'intégration des systèmes complets d'équations linéaires homogènes. Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de l'URSS, A, 1930, pp. 405—409.

$$X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0,\ \ldots,\ X_{q-1}(f) = 0, \tag{44}$$

$$X_q(f) = Y(f) = 0, \tag{45}$$

les symboles $X_q(\quad)$, $Y(\quad)$ étant identiques.

Admettons en outre que les équations (44) forment un système complet; alors, pour le système complet (44), (45) sont réalisées les conditions:

$$X_i X_k(f) - X_k X_i(f) \equiv \sum_{j=1}^{q-1} r_{ik}^j X_j(f), \tag{46}$$

$$i, k = 1, 2, \ldots (q-1);\ i \neq k,$$

qui expriment que le système (44) est complet, et les conditions:

$$\begin{aligned} X_1 Y(f) - Y X_1(f) &\equiv \sum_{h=1}^{q-1} \lambda_1^h X_h(f) + \mu_1 Y(f); \\ X_2 Y(f) - Y X_2(f) &\equiv \sum_{h=1}^{q-1} \lambda_2^h X_h(f) + \mu_2 Y(f), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ X_{q-1} Y(f) - Y X_{q-1}(f) &\equiv \sum_{h=1}^{q-1} \lambda_{q-1}^h X_h(f) + \mu_{q-1} Y(f). \end{aligned} \tag{47}$$

Notons une circonstance importante. Si les équations (44), (45) sont multipliées par des multiplicateurs quelconques:

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \ldots\ \Theta_{q-1},\ \Theta_q, \tag{48}$$

fonctions des variables indépendantes, le système:

$$Z_1(f) = \Theta_1 X_1(f) = 0,\ Z_2(f) = \Theta_2 X_2(f) = 0, \ldots Z_{q-1}(f) = \Theta_{q-1} X_{q-1}(f) = 0, \tag{49}$$

$$Z_q(f) = \Theta_q X_q(f) = \Theta_q Y(f) = 0 \tag{50}$$

possède encore le caractère (46), (47): dans le système (49), (50) sera compris le système complet (49).

Les équations (44), (45) possèdent $(n-q)$ intégrales indépendantes communes:

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-q}. \tag{51}$$

Aux équations (44) appartiennent $(n-q+1)$ intégrales indépendantes communes:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-q}. \tag{52}$$

L'intégrale u_0 du système (44) ne satisfait pas à l'équation (45).

Le système le plus général de $(n-q+1)$ intégrales indépendantes du système (44) a la forme:

$$v_0=\varphi_0(u_0,\ u_1,\ \ldots\ u_{n-q}),\ v_1=\varphi_1(u_0,\ u_1,\ \ldots\ u_{n-q}),\ \ldots\ v_{n-q}=\varphi_{n-q}(u_0,\ u_1,\ \ldots\ u_{n-q}). \tag{53}$$

Ces intégrales v_i—(53), pour lesquelles:

$$\frac{\partial v_i}{\partial u_0}=\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_0}\equiv 0 \tag{54}$$

sont des intégrales communes aux équations (44), (45).

Parmi les intégrales (53) une au moins n'appartient pas à l'équation (45), mais toutes peuvent n'être pas des intégrales de l'équation (45).

Partageons les intégrales (53) en deux catégories: dans la première plaçons les intégrales, qui n'appartiennent qu'aux équations (44):

$$(a)\ \ \varphi_0=\omega_0(u_0,\ u_1,\ \ldots\ u_{n-q}),\ \varphi_1=\omega_1(u_0,\ u_1,\ \ldots\ u_{n-q}),\ \ldots\ \varphi_i=\omega_i(u_0,\ u_1,\ \ldots\ u_{n-q}), \tag{55}$$

$$\frac{\partial \omega_\nu}{\partial u_0}\not\equiv 0 \tag{56}$$

$$\nu=0,\ 1,\ \ldots\ i,$$

à la deuxième — les intégrales communes aux équations (44), (45):

$$(b)\qquad \psi_{i+1}=\tilde{\omega}_{i+1}(u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-q}),\ \psi_{i+2}=\tilde{\omega}_{i+2}(u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-q}),\ \ldots$$
$$\ldots\ \psi_{n-q}=\tilde{\omega}_{n-q}(u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-q}). \tag{57}$$

Substituons une intégrale ψ, c'est-à-dire l'une des intégrales (b)—(57), dans les identités (46), (47); alors dans celles-ci tous les termes, chacun séparément, seront nuls; si l'on substitue une intégrale φ, c'est-à-dire une des intégrales (a)—(55), alors dans les relations (46) tous les membres seront nuls, mais les relations (47) conduiront aux identités:

$$
\begin{aligned}
X_1\, Y(\varphi) &\equiv \mu_1\, Y(\varphi),\\
X_2\, Y(\varphi) &\equiv \mu_2\, Y(\varphi),\\
&\ldots\ldots\\
X_{q-1}\, Y(\varphi) &\equiv \mu_{q-1}\, Y(\varphi),
\end{aligned} \tag{58}
$$

ou encore

$$
\begin{aligned}
X_1 \log \sigma &= -\mu_1,\\
X_2 \log \sigma &= -\mu_2,\\
&\ldots\ldots\\
X_{q-1} \log \sigma &= -\mu_{q-1},
\end{aligned} \tag{59}
$$

$$\sigma = \frac{1}{Y(\varphi)}. \tag{60}$$

D'après nos résultats[1], le système d'équations:

$$X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0, \ldots X_{q-1}(f) = 0,\ Z(f) = \sigma\, Y(f) = 0 \tag{61}$$

possède les propriétés:

$$X_i\, X_k(f) - X_k\, X_i(f) \equiv \sum_{j=1}^{q-1} r_{ik}^j\, X_j(f), \tag{62}$$

$$i, k = 1, 2, \ldots (q-1);\ i \neq k;$$

$$X_i\, Z(f) - Z\, X_i(f) \equiv \sum_{h=1}^{q-1} l_i^h\, X_h(f), \tag{63}$$

$$i = 1, 2, \ldots (q-1),$$

$$l_i^h = \sigma \lambda_i^h.$$

En substituant dans les relations (62), (63) l'une des intégrales (a)—(55), soit φ' différente de φ, nous observons, que dans la ligne (62) tous les termes se réduisent séparement à zéro, tandis que la ligne (63) donne les identités:

$$X_i(Z(\varphi')) \equiv 0, \tag{64}$$

$$i = 1, 2, \ldots (q-1).$$

[1] G. Pfeiffer, Les théorèmes, expliquant une série de questions dans le problème de la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre. Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de l'URSS, A, 1929, pp. 177—182.

Celles-ci montrent, que l'expression:

$$Z(\varphi') = \sigma Y(\varphi') = \frac{Y(\varphi')}{Y(\varphi)} \tag{65}$$

est une intégrale du système (44).

De là découle, qu'il existe la possibilité de construire, à partir de deux intégrales φ, φ' du système (44), qui ne réduisent pas l'équation (45) à l'identité, une troisième intégrale v—(53) du système (44) et aussi, à l'aide de l'intégrale φ du système (44) — son opérateur $Z(f)$:

$$v = \frac{Y(\varphi')}{Y(\varphi)}, \quad Z(f) = \frac{Y(f)}{Y(\varphi)}. \tag{66}$$

Et ainsi de suite.

La généralisation de la méthode de Jacobi est évidente.

Les systèmes complets:

$$(R) \qquad X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0, \; \dots \; X_{q-1}(f) = 0, \quad X_q(f) = 0, \tag{67}$$

intégrables par la méthode jacobienne généralisée, doivent posséder les propriétés:

$$(S_1) \quad X_1 X_2(f) - X_2 X_1(f) \equiv \lambda_{12}^1 X_1(f) + \lambda_{12}^2 X_2(f); \tag{68}$$

$$(S_2) \quad X_i X_3(f) - X_3 X_i(f) \equiv \lambda_{i3}^1 X_1(f) + \lambda_{i3}^2 X_2(f) + \lambda_{i3}^3 X_3(f), \tag{69}$$

$$i = 1, 2;$$

$$(S) \quad (S_3) \quad X_i X_4(f) - X_4 X_i(f) \equiv \lambda_{i4}^1 X_1(f) + \lambda_{i4}^2 X_2(f) + \lambda_{i4}^3 X_3(f) + \lambda_{i4}^4 X_4(f), \tag{70}$$

$$i = 1, 2, 3;$$

. . . .

$$(S_{q-2}) \quad X_i X_{q-1}(f) - X_{q-1} X_i(f) \equiv \lambda_{i,q-1}^1 X_1(f) + \\ + \lambda_{i,q-1}^2 X_2(f) + \cdots + \lambda_{i,q-1}^{q-1} X_{q-1}(f) \tag{71}$$

$$i = 1, 2, \dots (q-2);$$

$$(S_{q-1}) \quad X_i X_q(f) - X_q X_i(f) \equiv \lambda_{iq}^1 X_1(f) + \lambda_{iq}^2 X_2(f) + \cdots + \lambda_{iq}^q X_q(f) \tag{72}$$

$$i = 1, 2, \dots (q-1).$$

Nous proposons de les nommer — *systèmes des systèmes complets successifs.*

Aux conditions (S) le système (R)—(67) est non seulement complet, mais aussi — *système des systèmes complets successifs.* Les systèmes:

$$(R_1)\qquad X_1(f)=0,\quad X_2(f)=0,\ \ldots\ X_{q-1}(f)=0; \tag{73}$$

$$(R_2)\qquad X_1(f)=0,\quad X_2(f)=0,\ \ldots\ X_{q-2}(f)=0; \tag{74}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(R_{q-3})\qquad X_1(f)=0,\quad X_2(f)=0,\quad X_3(f)=0; \tag{75}$$

$$(R_{q-2})\qquad X_1(f)=0,\quad X_2(f)=0, \tag{76}$$

renfermés en lui, sont tous complets. Les systèmes: (R_1)—(73), (R_2)—(74) . . . (R_{q-3})—(75), de même que le système (R)—(67), sont les *systèmes des systèmes complets successifs.* A chacun des derniers systèmes se rapportent les conclusions, auxquelles nous sommes arrivés, en examinant le système (44), (45), possédant les propriétés (46), (47); si l'on multiplie les équations du système (R)—(67), possédant la propriété (S), par les multiplicateurs (48), ce système ne perdra pas la propriété (S).

Aux équations (67) appartiennent $(n-q)$ intégrales indépendantes communes:

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-q}; \tag{77}$$

aux équations (73)—$(n-q+1)$:

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-q},\ v_1, \tag{78}$$

$$X_q(v_1)\not\equiv 0; \tag{79}$$

aux équations (74)—$(n-q+2)$:

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-q},\ v_1,\ v_2, \tag{80}$$

$$X_{q-1}(v_2)\not\equiv 0; \tag{81}$$

et ainsi de suite: aux équations (75)—$(n-3)$:

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-q},\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_{q-3}, \tag{82}$$

$$X_4(v_{q-3})\not\equiv 0; \tag{83}$$

aux équations (76)—$(n-2)$:

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-q},\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_{q-2}, \tag{84}$$

$$X_3(v_{q-2})\not\equiv 0; \tag{85}$$

à l'équation $X_1(f)=0$ — $(n-1)$:

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-q},\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_{q-1}, \tag{86}$$

$$X_2(v_{q-1})\not\equiv 0. \tag{87}$$

§ 3.

La réduction d'un système complet quelconque d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue au système des systèmes complets successifs.[1]

Montrons, que tout système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue peut être réduit au *système des systèmes complets successifs* d'une infinité de façons.

Nos raisonnements représentent la généralisation des recherches de A. Clebsch.[2] Ils sont plus simples, que ceux-ci. En effet, Clebsch réduit le système complet des équations linéaires au système en involution, pour intégrer par la méthode de Jacobi, nous réduisons le système complet des équations linéaires au *système des systèmes complets successifs*, — qui est moins restreint, que le système en involution, — pour intégrer par la méthode jacobienne généralisée.

Supposons que soit donné le système complet des $q\,(q > 2)$ équations linéaires et homogènes:

$$\begin{aligned} A_1(f) &= \xi_1^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2^1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n^1 \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ A_2(f) &= \xi_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_q(f) &= \xi_1^q \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2^q \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n^q \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \end{aligned} \tag{88}$$

dont les intégrales indépendantes communes sont:

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-q}. \tag{89}$$

Montrons, qu'il est possible de construire, a partir du système (88), le système (R)—(67), possédant les mêmes intégrales indépendantes (89), et jouissant en outre de la propriété (S).

---

[1] G. PFEIFFER, Sur les opérateurs d'un système complet d'équations linéaries et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue. Comptes rendus, t. 190, 1930, pp. 909—911.

[2] A. CLEBSCH, Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. Journ. für die reine und ang. Math., 1886, B. 65, ss. 257—268.

En profitant de la circonstance, ci-dessus indiquée, savoir que le système (R)—(67) possède encore la propriété (S), après la multiplication par des multiplicateurs quelconques des premiers membres des équations (67), nous ferons les raisonnements, non pas sur la forme la plus générale de ce système, mais sur une forme légèrement simplifiée.

Il n'est pas difficile de se convaincre, que les coefficients des relations:

$$\begin{aligned}
A_1(f) &= X_1(f) + \alpha_{12} X_2(f) + \cdots + \alpha_{1,q-2} X_{q-2}(f) + \alpha_{1,q-1} X_{q-1}(f) + \alpha_{1,q} X_q(f), \\
A_2(f) &= X_2(f) + \cdots + \alpha_{2,q-2} X_{q-2}(f) + \alpha_{2,q-1} X_{q-1}(f) + \alpha_{2,q} X_q(f), \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (90) \\
A_{q-1}(f) &= X_{q-1}(f) + \alpha_{q-1,q} X_q(f), \\
A_q(f) &= X_q(f)
\end{aligned}$$

peuvent être déterminés de façon que les expressions:

$$X_1(f), \quad X_2(f), \ldots X_{q-1}(f), \quad X_q(f), \tag{91}$$

fournies par la résolution des équations (90), constituent un système (R)—(67), aux intégrales (89), possédant la propriété (S).

Les intégrales (89) appartiennent à ce système (R)—(67). C'est évident par ce que les systèmes (88) et (R)—(67) sont équivalents.

Pour que le système (R)—(67) jouisse de la propriété (S), il est suffisant et nécessaire, que les conditions suivantes soient remplies.

Première condition. Le système (R_1)—(73) doit avoir une intégrale v_1, qui ne transforme pas l'équation:

$$X_q(f) = A_q(f) = 0 \tag{92}$$

en identité:

$$X_q(v_1) = A_q(v_1) \not\equiv 0; \tag{93}$$

la fonction v_1 est restreinte par la non-identité (93); par ailleurs elle est arbitraire.

Cette condition détermine les coefficients:

$$\alpha_{1q} = \frac{A_1(v_1)}{X_q(v_1)} = \frac{A_1(v_1)}{A_q(v_1)}, \tag{94}$$

$$\begin{gathered}
\alpha_{2q} = \frac{A_2(v_1)}{X_q(v_1)} = \frac{A_2(v_1)}{A_q(v_1)}, \\
\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_{q-1,q} = \frac{A_{q-1}(v_1)}{X_q(v_1)} = \frac{A_{q-1}(v_1)}{A_q(v_1)}.
\end{gathered} \tag{94}$$

Les relations (90) prennent alors la forme:

$$\begin{aligned}
B_1(f) &= A_1(f) - \frac{A_1(v_1)}{A_q(v_1)} A_q(f) = X_1(f) + \alpha_{12} X_2(f) + \cdots \\
&\qquad + \alpha_{1,q-2} X_{q-2}(f) + \alpha_{1,q-1} X_{q-1}(f), \\
B_2(f) &= A_2(f) - \frac{A_2(v_1)}{A_q(v_1)} A_q(f) = \qquad X_2(f) + \cdots \\
&\qquad + \alpha_{2,q-2} X_{q-2}(f) + \alpha_{2,q-1} X_{q-1}(f), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
B_{q-2}(f) &= A_{q-2}(f) - \frac{A_{q-2}(v_1)}{A_q(v_1)} A_q(f) = \qquad X_{q-2}(f) + \alpha_{q-2,q-1} X_{q-1}(f), \\
B_{q-1}(f) &= A_{q-1}(f) - \frac{A_{q-1}(v_1)}{A_q(v_1)} A_q(f) = \qquad X_{q-1}(f), \\
A_q(f) &= X_q(f).
\end{aligned} \tag{95}$$

Il est intéressant de faire attention au cas particulier, où la fonction v_1 est intégrale du système:

$$A_1(f) = 0, \quad A_2(f) = 0, \; \dots \; A_{q-1}(f) = 0. \tag{96}$$

Ce dernier doit être complet.

Les coefficients (94) se réduisent alors à zéro; il n'en résultera aucun changement dans les raisonnements.

Deuxième condition. Le système (R_2)—(74) doit avoir une intégrale v_2, qui ne réduise pas l'équation:

$$X_{q-1}(f) = B_{q-1}(f) = 0 \tag{97}$$

à une identité:

$$X_{q-1}(v_2) \equiv B_{q-1}(v_2) \not\equiv 0; \tag{98}$$

la fonction v_2 est restreinte par la non-identité (98); par ailleurs elle est arbitraire.

Cette condition détermine les coefficients:

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_{1,\,q-1} &= \frac{B_1(v_2)}{X_{q-1}(v_2)} = \frac{B_1(v_2)}{B_{q-1}(v_2)}, \\
\alpha_{2,\,q-1} &= \frac{B_2(v_2)}{X_{q-1}(v_2)} = \frac{B_2(v_2)}{B_{q-1}(v_2)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{q-2,\,q-1} &= \frac{B_{q-2}(v_2)}{X_{q-1}(v_2)} = \frac{B_{q-2}(v_2)}{B_{q-1}(v_2)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (99)
$$

Les relations (95) s'écrivent sous la forme:

$$
\begin{aligned}
C_1(f) &= B_1(f) - \frac{B_1(v_2)}{B_{q-1}(v_2)} B_{q-1}(f) = X_1(f) + \alpha_{12} X_2(f) + \cdots + \alpha_{1,\,q-2} X_{q-2}(f), \\
C_2(f) &= B_2(f) - \frac{B_2(v_2)}{B_{q-1}(v_2)} B_{q-1}(f) = \qquad X_2(f) + \cdots + \alpha_{2,\,q-2} X_{q-2}(f), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (100) \\
C_{q-2}(f) &= B_{q-2}(f) - \frac{B_{q-2}(v_2)}{B_{q-1}(v_2)} B_{q-1}(f) = \qquad X_{q-2}(f), \\
B_{q-1}(f) &= A_{q-1}(f) - \frac{A_{q-1}(v_1)}{A_q(v_1)} = X_{q-1}(f), \\
A_q(f) &= X_q(f).
\end{aligned}
$$

Et ainsi de suite.

En définitive nous aurons le système (R)—(67), aux intégrales indépendantes communes (89), possédant la propriété (S):

$$
\left.\begin{aligned}
W_1(f) &= V_1(f) - \frac{V_1(v_{q-1})}{V_2(v_{q-1})} V_2(f) = X_1(f) = 0, \\
V_2(f) &= U_2(f) - \frac{U_2(v_{q-2})}{U_3(v_{q-2})} U_3(f) = X_2(f) = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_{q-2}(f) &= B_{q-2}(f) - \frac{B_{q-2}(v_2)}{B_{q-1}(v_2)} B_{q-1}(f) = X_{q-2}(f) = 0, \\
B_{q-1}(f) &= A_{q-1}(f) - \frac{A_{q-1}(v_1)}{A_q(v_1)} A_q(f) = X_{q-1}(f) = 0; \\
A_q(f) &= X_q(f) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (101)
$$

Il est clair, que l'on peut passer du système complet donné (88) au *système des systèmes complets successifs* (101) d'une infinité de façons: les fonctions v sont presque arbitraires et les expressions $A(f)$ peuvent être prises dans n'importe quel ordre.

Cas particulier. Supposons que les intégrales:

$$v_1, \; v_2, \ldots v_{q-1}, \tag{102}$$

satisfaisant aux non-identités:

$$X_q(v_1) \not\equiv 0, \quad X_{q-1}(v_2) \not\equiv 0, \; \ldots \; X_2(v_{q-1}) \not\equiv 0 \tag{103}$$

sont les variables:

$$x_1, \; x_2, \ldots x_{q-1}, \tag{104}$$

alors:

$$\alpha_{1q} = \frac{\xi_1^1}{\xi_1^q}, \quad \alpha_{2q} = \frac{\xi_1^2}{\xi_1^q}, \quad \ldots \; \alpha_{q-1,q} = \frac{\xi_1^{q-1}}{\xi_1^q}; \tag{105}$$

$$\begin{aligned} B_1(f) &= \eta_2^1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \eta_3^1 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \cdots + \eta_n^1 \frac{\partial f}{\partial x_n}, \\ B_2(f) &= \eta_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \eta_3^2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \cdots + \eta_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{q-1}(f) &= \eta_2^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \eta_3^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_3} + \cdots + \eta_n^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_n} = X_{q-1}(f), \\ A_q(f) &= \xi_1^q \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2^q \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n^q \frac{\partial f}{\partial x_n} = X_q(f) \end{aligned} \tag{106}$$

avec

$$\eta_j^k = \frac{\xi_j^k \xi_1^q - \xi_1^k \xi_j^q}{\xi_1^q}, \tag{107}$$

$$k = 1, 2, \ldots (q-1); \quad j = 2, 3, \ldots n;$$

$$\alpha_{1, q-1} = \frac{\eta_2^1}{\eta_2^{q-1}}, \quad \alpha_{2, q-1} = \frac{\eta_2^2}{\eta_2^{q-1}}, \; \ldots \; \alpha_{q-2, q-1} = \frac{\eta_2^{q-2}}{\eta_2^{q-1}}; \tag{108}$$

$$C_1(f) = \zeta_3^1 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \zeta_4^1 \frac{\partial f}{\partial x_4} + \cdots + \zeta_n^1 \frac{\partial f}{\partial x_n}, \tag{109}$$

$$C_2(f) = \zeta_3^2 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \zeta_4^2 \frac{\partial f}{\partial x_4} + \cdots + \zeta_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{109}$$

$$C_{q-2}(f) = \zeta_3^{q-2} \frac{\partial f}{\partial x_3} + \zeta_4^{q-2} \frac{\partial f}{\partial x_4} + \cdots + \zeta_n^{q-2} \frac{\partial f}{\partial x_n} = X_{q-2}(f),$$

$$B_{q-1}(f) = \eta_2^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \eta_3^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_3} + \cdots + \eta_n^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_n} = X_{q-1}(f),$$

$$A_q(f) = \xi_1^q \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2^q \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n^q \frac{\partial f}{\partial x_n} = X_q(f);$$

où

$$\zeta_j^k = \frac{\eta_j^k \eta_2^{q-1} - \eta_2^k \eta_j^{q-1}}{\eta_2^{q-1}}, \tag{110}$$

$$k = 1, 2, \ldots (q-2); \; j = 3, 4, \ldots n.$$

Et ainsi de suite.

Le système (88) se transformera en le *système des systèmes complets successifs*:

$$X_1(f) = \pi_q^1 \frac{\partial f}{\partial x_q} + \pi_{q+1}^1 \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \pi_n^1 \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$$X_2(f) = \pi_{q-1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} + \pi_q^2 \frac{\partial f}{\partial x_q} + \pi_{q+1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \pi_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$$X_3(f) = \pi_{q-2}^3 \frac{\partial f}{\partial x_{q-2}} + \pi_{q-1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} + \pi_q^3 \frac{\partial f}{\partial x_q} + \pi_{q+1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \pi_n^3 \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{111}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_q(f) = \pi_1^q \frac{\partial f}{\partial x_1} + \pi_2^q \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \pi_{q-1}^q \frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} + \pi_q^q \frac{\partial f}{\partial x_q} + $$
$$+ \pi_{q+1}^q \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \cdots + \pi_n^q \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

possédant la propriété:

$$X_1 X_2(f) - X_2 X_1(f) \equiv \lambda_{12}^1 X_1(f) + X_1(\pi_{q-1}^2) X_2(f);$$

$$X_i X_3(f) - X_3 X_i(f) \equiv \lambda_{i3}^1 X_1(f) + \lambda_{i3}^2 X_2(f) + X_i(\pi_{q-2}^3) X_3(f),$$

$$i = 1, 2; \tag{112}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_i X_q(f) - X_q X_i(f) \equiv \lambda_{iq}^1 X_1(f) + \lambda_{iq}^2 X_2(f) + \cdots +$$
$$+ \lambda_{iq}^{q-1} X_{q-1}(f) + X_i(\pi_1^q) X_q(f),$$

$$i = 1, 2, \ldots (q-1).$$

Dans le système (111) les opérateurs de l'équation:

$$X_1(f) = 0 \tag{113}$$

et des systèmes complets:

$$\begin{aligned} &X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0; \\ &X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0, \quad X_3(f) = 0; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0, \dots X_{q-2}(f) = 0, \quad X_{q-1}(f) = 0 \end{aligned} \tag{114}$$

sont les transformations infinitésimales:

$$Z_1(f) = \frac{X_2(f)}{X_2(x_{q-1})} = \frac{X_2(f)}{\pi^2_{q-1}}, \quad Z_2(f) = \frac{X_3(f)}{X_3(x_{q-2})} = $$

$$= \frac{X_3(f)}{\pi^3_{q-2}}, \dots Z_{q-1}(f) = \frac{X_q(f)}{X_q(x_1)} = \frac{X_q(f)}{\pi^q_1}. \tag{115}$$

A partir du système complet:

$$A_1(f) = 0, \quad A_2(f) = 0, \dots A_{q-1}(f) = 0, \quad A_q(f) = 0 \tag{116}$$

il est commode de construire le système (111) de la façon suivante.

Prenons l'une des équations (116), contenant la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_1}$; soit $A_q(f) = 0$. A l'aide de $A_q(f) = 0$ éliminons la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ des autres équations (116); nous obtiendrons le système:

$$B_1(f) = 0, \quad B_2(f) = 0, \dots B_{q-2}(f) = 0, \quad B_{q-1}(f) = 0. \tag{117}$$

Parmi les équations (117) considérons en une, qui contienne la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_2}$; soit $B_{q-1}(f) = 0$. A l'aide de $B_{q-1}(f) = 0$ éliminons la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ du reste des équations (117); nous obtiendrons le système:

$$C_1(f) = 0, \quad C_2(f) = 0, \dots C_{q-3}(f) = 0, \quad C_{q-2}(f) = 0. \tag{118}$$

Parmi les équations (118) prenons en une, qui contienne la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, et ainsi de suite.

En définitive nous parviendrons au système des systèmes complets successifs (111):

$$W_1(f) = X_2(f) = 0, \quad V_2(f) = X_2(f) = 0, \ \ldots \ C_{q-2}(f) = X_{q-2}(f) = 0,$$
$$B_{q-1}(f) = X_{q-1}(f) = 0, \quad A_q(f) = X_q(f) = 0. \tag{119}$$

Si l'on prend:

$$\pi^2_{q-1} = \pi^3_{q-2} = \cdots = \pi^q_1 = 1,$$

ce qu'on peut toujours atteindre en divisant les seconde, troisième, ... dernière équation (111) par leurs premiers coefficients, les opérateurs de l'équation (113) et des systèmes complets (114) seront les transformations infinitésimales:

$$X_2(f), \quad X_3(f), \ \ldots \ X_q(f); \tag{120}$$

dans les relations (112) les derniers termes disparaîtront. Avec cette condition:

$$\pi^1_q = \pi^2_{q-1} = \pi^3_{q-2} = \cdots = \pi^q_1 = 1 \tag{121}$$

nous nommons le système (111) *système des systèmes complets successifs*, généralisant le système de Jacobi. Il est simple de vue et supplée en entier le système de Jacobi.

§ 4.

L'intégration des systèmes des systèmes complets successifs.

Occupons-nous de l'intégration du *système des systèmes complets successifs* (R)—(67), dont la propriété caractéristique est (S).

Posons que dans l'identité (S_1) les coefficients λ^1_{12}, λ^2_{12} sont différents de zéro:

$$\lambda^1_{12} \neq 0, \quad \lambda^2_{12} \neq 0. \tag{122}$$

Dans ce cas il est indifférent de commencer par intégrer[1] l'une ou l'autre des deux premières équations du système (R):

$$X_1(f) = 0 \quad \text{ou} \quad X_2(f) = 0. \tag{123}$$

Désignons les intégrales indépendantes de l'équation:

$$\boldsymbol{X_1(f) = 0} \tag{124}$$

[1] En pratique, il est clair, qu'on commence par intégrer l'équation qui paraît la plus simple.

par:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}. \tag{125}$$

A la condition que:

$$X_2(\varphi_{n-1}) \neq 0, \tag{126}$$

ce qui ne restreint pas la généralité des raisonnements, la transformation infinitésimale:

$$Z(f) = \frac{X_2(f)}{X_2(\varphi_{n-1})} \tag{127}$$

est l'opérateur de l'équation (124).

Ayant constitué les identités:

$$Z(\varphi_1) = \omega_1(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}), \quad Z(\varphi_2) = \omega_2(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}), \ldots$$
$$\ldots Z(\varphi_{n-2}) = \omega_{n-2}(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}), \quad Z(\varphi_{n-1}) = 1, \tag{128}$$

nous prenons la fonction:

$$\theta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}) \tag{129}$$

et exigeons, que:

$$Z(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\omega_1 + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\omega_2 + \cdots + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_{n-2}}\omega_{n-2} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_{n-1}} = 0, \tag{130}$$

$$\frac{d\varphi_1}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2}{\omega_2} = \cdots = \frac{d\varphi_{n-2}}{\omega_{n-2}} = \frac{d\varphi_{n-1}}{1}. \tag{131}$$

Les intégrales indépendantes du système complet:

$$\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{f}) = 0, \quad \boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{f}) = 0 \tag{132}$$

seront les intégrales indépendantes du système (131):

$$\varphi_1^1, \varphi_2^1, \ldots \varphi_{n-2}^1. \tag{133}$$

Quand dans l'identité (S_1) le coefficient λ_{12}^2 est nul, le coefficient λ_{12}^1 est nul ou non; supposons tout d'abord, qu'il n'est pas nul:

$$\lambda_{12}^1 \neq 0, \quad \lambda_{12}^2 = 0; \tag{134}$$

l'expression (126) représente une intégrale de l'équation (124):

$$X_2(\varphi_{n-1}) = \tilde{\omega}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}). \tag{135}$$

Les transformations infinitésimales:

$$X_2(f), \quad Z(f) = \frac{X_2(f)}{X_2(\varphi_{n-1})} \tag{136}$$

sont les opérateurs de l'équation (124).

L'équation (124) admet simultanément les intégrales:

$$X_2(\varphi_1) = \tilde{\omega}_1(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}), \ldots X_2(\varphi_{n-2}) = \tilde{\omega}_{n-2}(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}),$$
$$X_2(\varphi_{n-1}) = \tilde{\omega}(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}) \tag{137}$$

et les intégrales:

$$Z(\varphi_1) = \frac{X_2(\varphi_1)}{X_2(\varphi_{n-1})} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}} = \omega_1(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}), \ldots$$

$$\ldots Z(\varphi_{n-2}) = \frac{X_2(\varphi_{n-2})}{X_2(\varphi_{n-1})} = \frac{\tilde{\omega}_{n-2}}{\tilde{\omega}} = \omega_{n-2}(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}), \; Z(\varphi_{n-1}) = \frac{X_2(\varphi_{n-1})}{X_2(\varphi_{n-1})} = 1. \tag{138}$$

Les équations:

$$X_2(\theta) = 0 \quad \text{et} \quad Z(\theta) = 0 \tag{139}$$

sont équivalentes l'une à l'autre:

$$X_2(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\tilde{\omega}_1 + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\tilde{\omega}_2 + \cdots + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_{n-2}}\tilde{\omega}_{n-2} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_{n-1}}\tilde{\omega} =$$
$$= \tilde{\omega}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\omega_1 + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\omega_2 + \cdots + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_{n-2}}\omega_{n-2} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_{n-1}}\right) = \tilde{\omega}\, Z(\theta). \tag{140}$$

Quand:

$$\lambda_{12}^1 = 0, \quad \lambda_{12}^2 \neq 0, \tag{141}$$

on commence par intégrer non pas l'équation (124), mais l'équation:

$$X_2(f) = 0 \tag{142}$$

et l'on prend:

$$X_1(f) \tag{143}$$

comme opérateur.

Lorsque le système (132) est en involution, c'est-à-dire que

$$\lambda_{12}^1 = 0, \quad \lambda_{12}^2 = 0, \tag{144}$$

il n'importe pas de commencer par l'une ou l'autre des deux premières équations (123) du système (R)—(67). Pour l'équation $X_1(f) = 0$ l'opérateur est la transformation infinitésimale $X_2(f)$, pour l'équation $X_2(f) = 0$ l'opérateur est la transformation infinitésimale $X_1(f)$.

En disposant des intégrales (133) du système (132), nous allons à la considération des identités (S_2).

Supposons d'abord, que l'un au moins des coefficients:

$$\lambda_{i3}^3 \qquad (i = 1, 2) \tag{145}$$

n'est pas nul; alors à la condition que:

$$X_3(\varphi_{n-2}^1) \neq 0, \tag{146}$$

ce qui ne restreind pas la généralité des raisonnements, la transformation infinitésimale:

$$Z_1(f) = \frac{X_3(f)}{X_3(\varphi_{n-2}^1)} \tag{147}$$

est l'opérateur du système (132).

Ayant constitué les identités:

$$Z_1(\varphi_1^1) = \omega_1^1(\varphi_1^1, \ldots \varphi_{n-2}^1), \; Z_1(\varphi_2^1) = \omega_2^1(\varphi_1^1, \ldots \varphi_{n-2}^1), \ldots$$
$$\ldots Z_1(\varphi_{n-3}^1) = \omega_{n-3}^1(\varphi_1^1, \ldots \varphi_{n-2}^1), \; Z_1(\varphi_{n-2}^1) = 1, \tag{148}$$

nous prenons la fonction:

$$\theta(\varphi_1^1, \varphi_2^1, \ldots \varphi_{n-2}^1) \tag{149}$$

et lui imposons de vérifier:

$$Z_1(\theta_1) = \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi_1^1}\omega_1^1 + \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi_2^1}\omega_2^1 + \cdots + \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi_{n-3}^1}\omega_{n-3}^1 + \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi_{n-2}^1} = 0; \tag{150}$$

$$\frac{d\varphi_1^1}{\omega_1^1} = \frac{d\varphi_2^1}{\omega_2^1} = \cdots = \frac{d\varphi_{n-3}^1}{\omega_{n-3}^1} = \frac{d\varphi_{n-2}^1}{1}. \tag{151}$$

Les intégrales du système complet:

$$\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{f}) = 0, \quad \boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{f}) = 0, \quad \boldsymbol{X}_3(\boldsymbol{f}) = 0 \tag{152}$$

seront les intégrales du système (151):

$$\varphi_1^2, \varphi_2^2, \ldots \varphi_{n-3}^2. \tag{153}$$

Si les deux coefficients (145) étaient nuls:

$$\lambda_{13}^{3} = 0, \quad \lambda_{23}^{3} = 0, \tag{154}$$

les transformations infinitésimales:

$$X_3(f),\ Z_1(f) = \frac{X_3(f)}{X_3(\varphi_{n-2}^{1})} \tag{155}$$

seraient les opérateurs du système (132).

Et ainsi de suite.

Supposons, que les intégrales du système complet:

$$X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0, \ldots\ X_l(f) = 0, \tag{156}$$

$$l \leq q - 1$$

sont trouvées:

$$\varphi_1^{l-1},\ \varphi_2^{l-1}, \ldots\ \varphi_{n-l}^{l-1}, \tag{157}$$

alors nous passons à la considération des identités (S_l).

Si un au moins des coefficients:

$$\lambda_{i,\,l+1}^{l+1} \tag{158}$$

$$(i = 1, 2, \ldots l)$$

n'est pas nul, la transformation infinitésimale:

$$Z_{l-1}(f) = \frac{X_{l+1}(f)}{X_{l+1}(\varphi_{n-l}^{l-1})}, \tag{159}$$

avec la condition:

$$X_{l+1}(\varphi_{n-l}^{l-1}) \neq 0, \tag{160}$$

est l'opérateur du système (156).

Ayant constitué les identités:

$$Z_{l-1}(\varphi_1^{l-1}) = \omega_1^{l-1}(\varphi_1^{l-1}, \ldots \varphi_{n-l}^{l-1}), \ldots$$

$$\ldots Z_{l-1}(\varphi_{n-l-1}^{l-1}) = \omega_{n-l-1}^{l-1}(\varphi_1^{l-1}, \ldots \varphi_{n-l}^{l-1}),\ Z_{l-1}(\varphi_{n-l}^{l-1}) = 1, \tag{161}$$

nous prenons la fonction:

$$\theta_{l-1}(\varphi_1^{l-1}, \varphi_2^{l-1}, \ldots \varphi_{n-l}^{l-1}) \tag{162}$$

et ainsi de suite.

Quand les coefficients (158) sont nuls:

$$\lambda_{1,\,l+1}^{l+1} = 0,\ \lambda_{2,\,l+1}^{l+1} = 0, \ldots\ \lambda_{l,\,l+1}^{l+1} = 0, \tag{163}$$

les transformations infinitésimales:

$$X_{l+1}(f),\ Z_{l-1}(f) = \frac{X_{l+1}(f)}{X_{l+1}(\varphi_{n-l}^{l-1})} \tag{164}$$

sont les opérateurs du système (156).

La question, à proprement parler, est épuisée, mais nous voulons demeurer au procès de Jacobi, sous lequel nous entendons l'application successive d'un même opérateur à l'intégrale donnée.

Il est, non au fond, mais pratiquement, la partie essentielle de la méthode de Jacobi.

En admettant que l'intégration du système (R)—(67) est commencée par l'équation (124), examinons deux cas essentiels.

Premier cas. Admettons que sont différents de zéro les coefficients:

$$\lambda_{12}^{2} \tag{165}$$

et du moins un des coefficients dans chacune des suites:

$$\begin{array}{l} \lambda_{13}^{3},\quad \lambda_{23}^{3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{1,l+1}^{l+1},\ \lambda_{2,l+1}^{l+1},\ \ldots\ \lambda_{l,l+1}^{l+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{166}$$

En supposant, que dans les groupes des intégrales (125), (133), (153) ... (157) ...

$$\begin{array}{l} \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_{n-2},\ \varphi_{n-1}; \\ \varphi_1^1,\ \varphi_2^1,\ \ldots\ \varphi_{n-2}^1; \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_1^{l-1},\ \varphi_2^{l-1},\ \ldots\ \varphi_{n-l}^{l-1}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array} \tag{167}$$

outre les dernières intégrales:

$$\varphi_{n-1},\ \varphi_{n-2}^1,\ \ldots\ \varphi_{n-l}^{l-1},\ \ldots, \tag{168}$$

qui satisfont aux non identités (126), (146), ... (159), ...

$$X_2(\varphi_{n-1}) \neq 0,\ X_3(\varphi_{n-2}^1) \neq 0,\ \ldots\ X_{l+1}(\varphi_{n-l}^{l-1}) \neq 0,\ \ldots \tag{169}$$

ne sont connues que les premières:

$$\varphi_1, \varphi_1^1, \dots \varphi_1^{l-1}, \dots, \tag{170}$$

à l'aide des opérateurs (127), (147), ... (160), ...:

$$Z(f),\ Z_1(f), \dots Z_{l-1}(f), \dots \tag{171}$$

constituons les suites des intégrales:

$$\begin{gathered}
\varphi_1, \varphi_2 = Z(\varphi_1),\ \varphi_3 = Z(\varphi_2), \dots \varphi_i = Z(\varphi_{i-1}),\ \varphi_{i+1} = Z(\varphi_i) = \pi(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_i); \\
\varphi_1^1, \varphi_2^1 = Z_1(\varphi_1^1),\ \varphi_3^1 = Z_1(\varphi_2^1), \dots \varphi_{i_1}^1 = Z_1(\varphi_{i_1-1}^1),\ \varphi_{i_1+1}^1 = Z_1(\varphi_{i_1}^1) = \pi_1(\varphi_1^1, \varphi_2^1, \dots \varphi_{i_1}^1); \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\varphi_1^{l-1}, \varphi_2^{l-1} = Z_{l-1}(\varphi_1^{l-1}), \varphi_3^{l-1} = Z_{l-1}(\varphi_2^{l-1}), \dots \varphi_{i_{l-1}}^{l-1} = Z_{l-1}\left(\varphi_{i_{l-1}-1}^{l-1}\right), \\
\varphi_{i_{l-1}+1}^{l-1} = Z_{l-1}\left(\varphi_{i_{l-1}}^{l-1}\right) = \pi_{l-1}\left(\varphi_1^{l-1}, \varphi_2^{l-1}, \dots \varphi_{i_{l-1}}^{l-1}\right) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered} \tag{172}$$

Dans les systèmes (131), (151), ... se distinguent les systèmes:

$$\begin{gathered}
\frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{d\varphi_2}{\varphi_3} = \dots = \frac{d\varphi_{i-1}}{\varphi_i} = \frac{d\varphi_i}{\pi_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_i)} = \frac{d\varphi_{n-1}}{1}; \\
\frac{d\varphi_1^1}{\varphi_2^1} = \frac{d\varphi_2^1}{\varphi_3^1} = \dots = \frac{d\varphi_{i-1}^1}{\varphi_i^1} = \frac{d\varphi_i^1}{\pi_1(\varphi_1^1, \varphi_2^1, \dots \varphi_i^1)} = \frac{d\varphi_{n-2}^1}{1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{gathered} \tag{173}$$

qui s'intégrent indépendamment des autres équations des systèmes (131), (151), ...

Deuxième cas. Admettons, que le coefficient (165) et tous les coefficients des suites (166) sont égaux à zéro.

En supposant, que dans les groupes des intégrales (167) sont connues seulement les premières (170), à l'aide des opérateurs:

$$X_2(f),\ X_3(f), \dots X_{l+1}(f), \dots \tag{174}$$

constituons les suites des intégrales[1]:

$$\begin{gathered}
\varphi_1, \varphi_2 = X_2(\varphi_1),\ \varphi_3 = X_2(\varphi_2), \dots \varphi_i = X_2(\varphi_{i-1}), \\
\varphi_{i+1} = X_2(\varphi_i) = \pi(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_i); \\
\varphi_1^1, \varphi_2^1 = X_3(\varphi_1^1),\ \varphi_3^1 = X_3(\varphi_2^1), \dots \varphi_{i_1}^1 = X_3(\varphi_{i_1-1}^1), \\
\varphi_{i_1+1}^1 = X_3(\varphi_{i_1}^1) = \pi_1(\varphi_1^1, \varphi_2^1, \dots \varphi_{i_1}^1); \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered} \tag{175}$$

[1] Nous nous n'arrêterons pas sur les cas particuliers.

Parmi les systèmes (131), (151), ... se distinguent les systèmes:

$$\begin{gathered}
\frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{d\varphi_2}{\varphi_3} = \cdots = \frac{d\varphi_{i-1}}{\varphi_i} = \frac{d\varphi_i}{\pi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_i)}; \\
\frac{d\varphi_1^1}{\varphi_2^1} = \frac{d\varphi_2^1}{\varphi_3^1} = \cdots = \frac{d\varphi_{i_1-1}^1}{\varphi_{i_1}^1} = \frac{d\varphi_{i_1}^1}{\pi_1(\varphi_1^1, \varphi_2^1, \ldots \varphi_{i_1}^1)}; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{176}$$

qui s'intégrent indépendamment des autres équations des systèmes (131), (151), ...

Si nous désignons les rapport des suites (176) par:

$$dt_1, \quad dt_2, \ldots \tag{177}$$

alors, en intégrant les systèmes (176), nous trouverons $t_1, t_2, \ldots$ par des quadratures. Ce seront celles des intégrales $t_1, t_2, \ldots$ du groupe (167), analogues aux intégrales (168), pour lesquelles:

$$X_2(t_1) = 1, \ X_3(t_2) = 1, \ldots X_{l+1}(t_l) = 1, \ldots \tag{178}$$

La méthode mentionnée de l'intégration du *système des systèmes complets successifs* (R)—(67), auquel se ramène n'importe quel système complet, représente absolument la généralisation de la méthode de Jacobi.

Nous ne croyons pas inutile de donner des exemples.[1]

§ 5.

Les exemples.

Exemple premier.[2] Considérons le système complet:

$$\begin{aligned}
X_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\
X_2(f) &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\
X_3(f) &= x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,
\end{aligned} \tag{179}$$

[1] Nous avons intégré par la méthode indiquée beaucoup d'exemples.

[2] I. A. SERRET, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Dritte Aufl., B. III, Leipzig, 1909, ss. 529 und 537—538.

$$X_1 X_2(f) - X_2 X_1(f) = X_1(f), \qquad (180_1)$$
$$X_1 X_3(f) - X_3 X_1(f) = 2 X_2(f), \qquad (180_2) \qquad (180)$$
$$X_2 X_3(f) - X_3 X_2(f) = X_3(f). \qquad (180_3)$$

Les intégrales indépendantes de l'équation:

$$\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{f}) = 0, \tag{181}$$

$$dx_1 = dx_2 = \cdots = dx_n \tag{182}$$

sont les fonctions:

$$\varphi_1 = x_1 - x_n, \ \varphi_2 = x_2 - x_n, \ldots \varphi_{n-1} = x_{n-1} - x_n. \tag{183}$$

En vertu de l'idéntité (180_1), la transformation infinitésimale:

$$X_2(f) \tag{184}$$

est l'opérateur de l'équation (181):

$$X_2(\varphi_1) = \varphi_1, \ X_2(\varphi_2) = \varphi_2, \ldots, X_2(\varphi_{n-1}) = \varphi_{n-1}. \tag{185}$$

Formons la fonction:

$$\theta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}) \tag{186}$$

de façon que:

$$X_2(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1}\varphi_1 + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2}\varphi_2 + \cdots + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{n-1}}\varphi_{n-1} = 0, \tag{187}$$

$$\frac{d\varphi_1}{\varphi_1} = \frac{d\varphi_2}{\varphi_2} = \cdots = \frac{d\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-1}}. \tag{188}$$

De là on voit, qu'au système:

$$\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{f}) = 0, \quad \boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{f}) = 0 \tag{189}$$

appartiennent les intégrales indépendants:

$$\psi_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_{n-1}}, \ \psi_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_{n-1}}, \ldots \psi_{n-2} = \frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_{n-1}}. \tag{190}$$

En vertu des identités (180_2), (180_3), la transformation infinitésimale:

$$Z(f) = \frac{X_3(f)}{X_3(\psi_{n-2})} \tag{191}$$

est l'opérateur du système (189).

Et comme:

$$
\begin{aligned}
X_3(\varphi_1) &= (x_1 + x_n)\varphi_1, \\
X_3(\varphi_2) &= (x_2 + x_n)\varphi_2, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
X_3(\varphi_{n-1}) &= (x_{n-1} + x_n)\varphi_{n-1};
\end{aligned}
\tag{192}
$$

$$
\begin{aligned}
X_3(\psi_1) &= \psi_1(\varphi_1 - \varphi_{n-1}), \\
X_3(\psi_2) &= \psi_2(\varphi_2 - \varphi_{n-1}), \\
&\cdots\cdots\cdots \\
X_3(\psi_{n-2}) &= \psi_{n-2}(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}),
\end{aligned}
\tag{193}
$$

alors:

$$
\begin{aligned}
Z(\psi_1) &= \frac{\psi_1}{\psi_{n-2}}\frac{(\psi_1 - 1)}{(\psi_{n-2} - 1)}, \\
Z(\psi_2) &= \frac{\psi_2}{\psi_{n-2}}\frac{(\psi_2 - 1)}{(\psi_{n-2} - 1)}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
Z(\psi_{n-3}) &= \frac{\psi_{n-3}(\psi_{n-3} - 1)}{\psi_{n-2}(\psi_{n-2} - 1)}, \\
Z(\psi_{n-2}) &= 1.
\end{aligned}
\tag{194}
$$

Cherchons la fonction:

$$\theta(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n-2}, \psi_{n-1}) \tag{195}$$

telle que:

$$
\begin{aligned}
Z(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial\psi_1}\frac{\psi_1(\psi_1 - 1)}{\psi_{n-2}(\psi_{n-2} - 1)} + \frac{\partial\theta}{\partial\psi_2}\frac{\psi_2(\psi_2 - 1)}{\psi_{n-2}(\psi_{n-2} - 1)} + \cdots + \\
+ \frac{\partial\theta}{\partial\psi_{n-3}}\frac{\psi_{n-3}(\psi_{n-3} - 1)}{\psi_{n-2}(\psi_{n-2} - 1)} + \frac{\partial\theta}{\partial\psi_{n-2}} = 0,
\end{aligned}
\tag{196}
$$

$$\frac{d\psi_1}{\psi_1(\psi_1 - 1)} = \frac{d\psi_2}{\psi_2(\psi_2 - 1)} = \cdots = \frac{d\psi_{n-3}}{\psi_{n-3}(\psi_{n-3} - 1)} = \frac{d\psi_{n-2}}{\psi_{n-2}(\psi_{n-2} - 1)}. \tag{197}$$

Les expressions:

$$\chi_1 = \frac{\psi_{n-2}(\psi_1 - 1)}{\psi_1(\psi_{n-2} - 1)} = \frac{\varphi_{n-2}(\varphi_1 - \varphi_{n-1})}{\varphi_1(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1})} = \frac{(x_{n-2} - x_n)(x_1 - x_{n-1})}{(x_1 - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})}, \tag{198}$$

$$\chi_2 = \frac{\psi_{n-2}(\psi_2 - 1)}{\psi_2(\psi_{n-2} - 1)} = \frac{\varphi_{n-2}(\varphi_2 - \varphi_{n-1})}{\varphi_2(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1})} = \frac{(x_{n-2} - x_n)(x_2 - x_{n-1})}{(x_2 - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (198)$$
$$\chi_{n-3} = \frac{\psi_{n-2}(\psi_{n-3} - 1)}{\psi_{n-3}(\psi_{n-2} - 1)} = \frac{\varphi_{n-2}(\varphi_{n-3} - \varphi_{n-1})}{\varphi_{n-3}(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1})} = \frac{(x_{n-2} - x_n)(x_{n-3} - x_{n-1})}{(x_{n-3} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})}$$

sont les intégrales idépendantes du système donné:

$$\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{f}) = 0, \quad \boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{f}) = 0, \quad \boldsymbol{X}_3(\boldsymbol{f}) = 0. \qquad (199)$$

L'intégration du système (179) peut s'effectuer d'une autre manière.

Remplaçons le système (179) par le système, qui lui est equivalent, *système des systèmes complets successifs:*

$$H_1(f) = (x_1 - x_{n-1})(x_1 - x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_2 - x_{n-1})(x_2 - x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots +$$
$$+ (x_{n-2} - x_{n-1})(x_{n-2} - x_n)\frac{\partial f}{\partial x_{n-2}} = 0,$$

$$H_2(f) = (x_1 - x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_2 - x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + (x_{n-2} - x_n)\frac{\partial f}{\partial x_{n-2}} + \qquad (200)$$
$$+ (x_{n-1} - x_n)\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = 0,$$

$$H_3(f) = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_{n-2}\frac{\partial f}{\partial x_{n-2}} + x_{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Les expressions (198) sont les intégrales du système:

$$\frac{dx_1}{(x_1 - x_{n-1})(x_1 - x_n)} = \frac{dx_2}{(x_2 - x_{n-1})(x_2 - x_n)} = \cdots =$$
$$= \frac{dx_{n-3}}{(x_{n-3} - x_{n-1})(x_{n-3} - x_n)} = \frac{dx_{n-2}}{(x_{n-2} - x_{n-1})(x_{n-2} - x_n)} = \frac{dx_{n-1}}{0} = \frac{dx_n}{0}, \qquad (201)$$

ce qui est la même chose que les intégrales de la première équation (200).

Exemple deuxième (Forsyth).[1]

Considérons le système complet:

[1] Ed. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, 1921, p. 96.

$$
\begin{aligned}
X_1(f) &= (x_4 - x_5)\frac{\partial f}{\partial x_3} + (x_5 - x_6)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_6 - x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,\\
X_2(f) &= (x_4 - x_5)\frac{\partial f}{\partial x_6} + (x_5 - x_3)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_3 - x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,\\
X_3(f) &= (x_4 - x_5)\frac{\partial f}{\partial x_4} + (x_5 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_1 - x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,\\
X_4(f) &= (x_4 - x_5)\frac{\partial f}{\partial x_5} + (x_5 - x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_2 - x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,
\end{aligned}
\tag{202}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
X_1 X_2(f) - X_2 X_1(f) &\equiv 0, && (203_1)\\
X_1 X_3(f) - X_3 X_1(f) &\equiv -X_1(f), && (203_2)\\
X_2 X_3(f) - X_3 X_2(f) &\equiv -X_2(f), && (203_3)\\
X_1 X_4(f) - X_4 X_1(f) &\equiv X_1(f), && (203_4)\\
X_2 X_4(f) - X_4 X_2(f) &\equiv X_2(f), && (203_5)\\
X_3 X_4(f) - X_4 X_3(f) &\equiv X_3(f) + X_4(f). && (203_6)
\end{aligned}
\right\}
\tag{203}
$$

Les intégrales indépendantes de l'équation:

$$\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{f}) = \mathbf{0}, \tag{204}$$

$$\frac{dx_1}{x_5 - x_6} = \frac{dx_2}{x_6 - x_4} = \frac{dx_3}{x_4 - x_5} = \frac{dx_4}{0} = \frac{dx_5}{0} = \frac{dx_6}{0} \tag{205}$$

sont les fonctions:

$$
\begin{gathered}
\varphi_1 = x_1(x_4 - x_5) - x_3(x_5 - x_6), \quad \varphi_2 = x_2(x_4 - x_5) - x_3(x_6 - x_4),\\
\varphi_3 = x_4, \quad \varphi_4 = x_5, \quad \varphi_5 = x_6.
\end{gathered}
\tag{206}
$$

En vertu de l'identité (203_1), la transformation infinitésimale:

$$X_2(f) \tag{207}$$

est l'opérateur de l'équation (204):

$$
\begin{gathered}
X_2(\varphi_1) = (\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_4, \quad X_2(\varphi_2) = -(\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_3, \quad X_2(\varphi_3) = 0,\\
X_2(\varphi_1) = 0, \quad X_2(\varphi_5) = \varphi_3 - \varphi_4.
\end{gathered}
\tag{208}
$$

Cherchons la fonction:

$$\theta(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) \tag{209}$$

telle que:

$$X_2(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}(\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_4 - \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}(\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_3 + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_5}(\varphi_3 - \varphi_4) = 0, \tag{210}$$

$$\frac{d\varphi_1}{\varphi_4} = \frac{d\varphi_2}{-\varphi_3} = \frac{d\varphi_3}{0} = \frac{d\varphi_4}{0} = \frac{d\varphi_5}{1}. \tag{211}$$

On déduit de là, qu'au système:

$$\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{f}) = 0, \quad \boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{f}) = 0 \tag{212}$$

appartiennent les intégrales indépendantes:

$$\psi_1 = \varphi_1 - \varphi_4\varphi_5, \quad \psi_2 = \varphi_2 + \varphi_3\varphi_5, \quad \psi_3 = \varphi_3, \quad \psi_4 = \varphi_4. \tag{213}$$

Grâce aux identités (203_2), (203_3), la transformation infinitésimale:

$$X_3(f) \tag{214}$$

est l'opérateur du système (212).

Attendu que:

$$\begin{aligned} X_3(\varphi_1) &= (\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_4, \\ X_3(\varphi_2) &= \varphi_1 + \varphi_2 - (\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_3, \\ X_3(\varphi_3) &= \varphi_3 - \varphi_4, \\ X_3(\varphi_4) &= 0, \\ X_3(\varphi_5) &= 0, \end{aligned} \tag{215}$$

on a:

$$\begin{aligned} X_3(\psi_1) &= (\psi_3 - \psi_4)\psi_4, \\ X_3(\psi_2) &= \psi_1 + \psi_2 - (\psi_3 - \psi_4)\psi_3, \\ X_3(\psi_3) &= \psi_3 - \psi_4, \\ X_3(\psi_4) &= 0. \end{aligned} \tag{216}$$

Cherchons la fonction:

$$\theta(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \tag{217}$$

telle que:

$$X_3(\theta) = \frac{\partial\theta}{\partial\psi_1}(\psi_3 - \psi_4)\psi_4 + \frac{\partial\theta}{\partial\psi_2}[\psi_1 + \psi_2 - (\psi_3 - \psi_4)\psi_3] + \frac{\partial\theta}{\partial\psi_3}(\psi_3 - \psi_4) = 0, \tag{218}$$

$$\frac{d\psi_1}{(\psi_3 - \psi_4)\psi_4} = \frac{d\psi_2}{\psi_1 + \psi_2 - (\psi_3 - \psi_4)\psi_3} = \frac{d\psi_3}{\psi_3 - \psi_4} = \frac{d\psi_4}{0}. \tag{219}$$

Au système:

$$\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{f}) = 0, \quad \boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{f}) = 0, \quad \boldsymbol{X}_3(\boldsymbol{f}) = 0 \tag{220}$$

appartiennent les intégrales indépendantes:

$$\chi_1 = \psi_1 - \psi_3\,\psi_4, \quad \chi_2 = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_3 - \psi_4} + \psi_3, \quad \chi_3 = \psi_4. \tag{221}$$

En vertu des identités (203_4), (203_5), (203_6), la transformation infinitésimale:

$$Z(f) = \frac{X_4(f)}{X_4(\psi_4)} = \frac{X_4(f)}{x_4 - x_5} = \frac{X_4(f)}{\varphi_3 - \varphi_4} = \frac{X_4(f)}{\psi_3 - \psi_4} \tag{222}$$

est l'opérateur du système (220).

Parce que:

$$\begin{aligned} X_4(\varphi_1) &= -(\varphi_1 + \varphi_2) + (\varphi_3 - \varphi_4)\,\varphi_4, \\ X_4(\varphi_2) &= -(\varphi_3 - \varphi_4)\,\varphi_3, \\ X_4(\varphi_3) &= 0, \\ X_4(\varphi_4) &= \varphi_3 - \varphi_4, \\ X_4(\varphi_5) &= 0; \end{aligned} \tag{223}$$

$$\begin{aligned} X_4(\psi_1) &= -(\psi_1 + \psi_2) + (\psi_3 - \psi_4)\,\psi_4, \\ X_4(\psi_2) &= -(\psi_3 - \psi_4)\,\psi_3, \\ X_4(\psi_3) &= 0, \\ X_4(\psi_4) &= \psi_3 - \psi_4; \end{aligned} \tag{224}$$

$$\begin{aligned} X_4(\chi_1) &= -(\psi_1 + \psi_2) - (\psi_3 - \psi_4)^2, \\ X_4(\chi_2) &= -(\psi_3 - \psi_4), \\ X_4(\chi_3) &= \psi_3 - \psi_4, \end{aligned} \tag{225}$$

on a:

$$\begin{aligned} Z(\chi_1) &= -\chi_2 + \chi_3, \\ Z(\chi_2) &= -1, \\ Z(\chi_3) &= 1. \end{aligned} \tag{226}$$

Cherchons la fonction:

$$\theta(\chi_1, \chi_2, \chi_3) \tag{227}$$

telle que:

$$Z(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial \chi_1}(\chi_3 - \chi_2) - \frac{\partial \theta}{\partial \chi_2} + \frac{\partial \theta}{\partial \chi_3} = 0, \tag{228}$$

$$\frac{d\chi_1}{\chi_3 - \chi_2} = \frac{d\chi_2}{-1} = \frac{d\chi_3}{1}. \tag{229}$$

Les expressions:

$$v_1 = \chi_2 + \chi_3 = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_3 - \psi_4} + \psi_3 + \psi_4 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\varphi_3 - \varphi_4} + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5,$$

$$\begin{aligned} v_2 = (\chi_3 - \chi_2)^2 - 4\chi_1 &= \left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{\psi_3 - \psi_4} + \psi_3 - \psi_4\right)^2 - 4\psi_1 + 4(\psi_3 - \psi_4)\psi_4 = \\ &= \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\varphi_3 - \varphi_4} + \varphi_3 - \varphi_4 + \varphi_5\right)^2 - 4[\varphi_1 - \varphi_4\varphi_5 - (\varphi_3 - \varphi_4)\varphi_4] \end{aligned} \tag{230}$$

sont des intégrales indépendantes du système donné:

$$\boldsymbol{X}_1(f) = 0, \quad \boldsymbol{X}_2(f) = 0, \quad \boldsymbol{X}_3(f) = 0, \quad \boldsymbol{X}_4(f) = 0. \tag{231}$$

Le système (202) peut être facilement mis en forme de Jacobi, mais on n'a pas besoin de le faire.