ÜBER DIE ENTWICKLUNGSKOEFFIZIENTEN DER AUTOMORPHEN FORMEN.

VON

HANS PETERSSON

in HAMBURG.

Einleitung.

Unter den Modulformen, die in der Zahlentheorie eine Rolle spielen, sind diejenigen naturgemäss ausgezeichnet, welche im Innern der oberen Halbebene regulär sind. Dabei verstehen wir unter Modulform im allgemeinsten Sinne eine automorphe Form reeller Dimension $-r$, welche zu einer vorgegebenen Untergruppe der Modulgruppe und einem vorgegebenen Multiplikatorsystem des Betrages 1 gehört. Die so ausgezeichneten Modulformen zerfallen funktionentheoretisch in zwei Klassen, deren eine die ganzen Modulformen umfasst, während die Formen der anderen Klasse in den parabolischen Spitzen der betreffenden Gruppe Pole besitzen. Das Verhalten dieser Funktionen in den hier auftretenden singulären Punkten wird, wie üblich, in der ortsuniformisierenden Variablen dieser Punkte gemessen.

Die Einteilung der Modulformen in diese zwei Klassen ist insofern bedeutungsvoll, als die Menge der ganzen Formen eine lineare Schar bildet, deren Dimension endlich ist, falls die betreffende Untergruppe einen endlichen Index innerhalb der vollen Modulgruppe aufweist, während es in der anderen Klasse offenbar stets unendlich viele linear unabhängige Formen gibt. Betrachten wir vorab die ganzen Formen, so lässt sich aus dieser linearen Schar eine Teilschar herausheben, nämlich die Schar der ganzen Spitzenformen, d. h. derjenigen ganzen Formen, die in allen parabolischen Spitzen verschwinden. Will man also zunächst einen Überblick über die ganzen Modulformen erhalten, so erhebt sich hier die

Frage, ob es möglich ist, für jede Nebengruppe innerhalb der additiven Gruppe der ganzen Formen bezüglich der Untergruppe der ganzen Spitzenformen einen Repräsentanten anzugeben. Dies Problem wird nun, wie Hecke[1] am Beispiel der Kongruenzgruppen und ganzzahliger negativer Dimensionen $-r$ gezeigt hat, durch die Eisensteinreihen gelöst, sodass damit die Aufstellung eines vollen Systems linear-unabhängiger ganzer Modulformen auf die eines vollen Systems linear unabhängiger ganzer Spitzenformen zurückgeführt ist. In ähnlicher Weise lässt sich die Aufstellung der sämtlichen Modulformen, welche im Innern der oberen Halbebene regulär sind, auf die der ganzen Formen zurückführen, indem es auch hier gelingt, für jede Nebengruppe innerhalb der additiven Gruppe aller Formen bezüglich der Untergruppe der ganzen Formen einen Repräsentanten anzugeben.

Die danach erforderliche Konstruktion einer Modulform, deren Pole vorgeschriebene Lage und vorgeschriebenen Hauptteil haben, wird durch ein naheliegendes Prinzip angebahnt, das ich im folgenden auseinandersetzen möchte. Ich gelange dabei zur Formulierung der für die vorliegende Untersuchung wichtigen Ergebnisse meiner früheren Arbeiten[2], die den späteren Entwicklungen in gewissem Umfange zugrunde liegen, und deren Kenntnis überdies die Tragweite der vorliegenden Untersuchung zu überblicken gestattet. Ich bediene mich in dieser einleitenden Darstellung der Terminologie und einiger einfacher Bestandteile des formalen Apparats bei automorphen Formen reeller Dimension (vgl. (A), § 1, 2 und (E), § 1, 2).

Es sei Γ_0 eine Untergruppe der Modulgruppe $\Gamma(1)$, Γ_0 selbst Grenzkreisgruppe und $r > 2$ eine reelle Zahl. Ist s eine parabolische Spitze von Γ_0, so gibt es ein $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ aus $\Gamma(1)$ derart, dass

$$s = \frac{-a_2}{a_1} = A^{-1}\,\infty\,.$$

---

[1] E. Hecke, Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik, Hamb. Abh. V, p. 199.

[2] a) Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension usw., Math. Ann. Band 103, p. 369, im folgenden zitiert mit (A),

b) Darstellung der eigentlich-automorphen Formen (-2)-ter Dimension durch eine Art Poincaréscher Reihen usw., Math. Ann., Band 105, p. 206, im folgenden zitiert mit (J),

c) Ein Fundamentalsatz aus der Theorie der ganzen automorphen Formen, im Druck bei den Math. Ann., im folgenden zitiert mit (F),

d) Über die Entwicklungskoeffizienten der ganzen Modulformen usw., Hamb. Abh., Band VIII, p. 215, im folgenden zitiert mit (E).

Die Gruppe der Elemente von Γ_0 mit dem parabolischen Fixpunkt s ist zyklisch. Bezeichnet P eine Erzeugende dieser Gruppe, so lässt sich P in der Form

$$P = A^{-1} U^N A, \quad U^N = \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

schreiben, wo unter N eine gewisse natürliche Zahl zu verstehen ist. Eine Modulform $f(\tau)$ der Gruppe Γ_0 von der Dimension $-r$, welche zu einem Multiplikatorsystem

$$v(L) \text{ mit } |v(L)| = 1 \text{ für } L \subset \Gamma_0$$

gehört, genügt einer Gleichung

$$\text{(a)} \qquad f(L\tau) = v(L)(\gamma\tau + \delta)^r f(\tau), \quad \text{wenn } L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \subset \Gamma_0,$$

und hieraus ergibt sich, dass die Funktion $g(\tau) = (a_1\tau + a_2)^r f(\tau)$ die Invarianzeigenschaft

$$g(P\tau) = v(P)\, g(\tau)$$

besitzt. Schreibt man

$$v(P) = e^{2\pi i \varkappa}, \quad \varkappa = \varkappa(s), \quad 0 \leqq \varkappa < 1,$$

so erhellt, dass $e^{-2\pi i \frac{\tau}{N}\varkappa} g(A^{-1}\tau)$ die Periode N aufweist. An dieser Stelle tritt die erste Regularitätsforderung für die Form $f(\tau)$ in Kraft: Man verlangt, dass sich die etwaigen Pole der Funktion $f(\tau)$ nicht von innen her gegen s häufen sollen. Diese Einschränkung hat eine Laurent-Entwicklung für die Funktion $e^{-2\pi i \frac{\tau}{N}\varkappa} g(A^{-1}\tau)$ zur Folge, und aus dieser resultiert eine Darstellung

$$\text{(b)} \qquad f(\tau) = \frac{1}{(a_1\tau + a_2)^r} e^{2\pi i \frac{A\tau}{N}\varkappa} \mathfrak{P}\left(e^{2\pi i \frac{A\tau}{N}}\right),$$

in der $\mathfrak{P}(t)$ eine für hinreichend kleines $|t| \neq 0$ konvergente, nach positiven und negativen Potenzen von t fortschreitende Reihe bezeichnet. Die zweite Regularitätsforderung für Modulformen setzt fest, dass die Potenzreihe $\mathfrak{P}(t)$ nur endlich viele Glieder mit negativen Exponenten enthält. Danach ist das niedrigste Glied in der Potenzreihe $\mathfrak{P}(t)$ in erster Näherung ausschlaggebend für das Verhalten der Funktion $f(\tau)$ bei $\tau = s$; man sieht überdies, dass die Exponenten der Entwicklung von $(a_1\tau + a_2)^r f(\tau)$ in der durch Spitze und Multiplikatorsystem allein eindeutig bestimmten Restklasse $\varkappa$ mod 1 liegen.

Das erwähnte Prinzip, das zur Aufstellung einer Modulform mit vorgeschriebenen Hauptteil in einer parabolischen Spitze s führt, beruht auf dem Umstand, dass die obige Entwicklung für die Funktion $f(\tau)$ in der Nähe der Spitze s eine ganz analoge Entwicklung in allen zu s nach der Gruppe Γ_0 äquivalenten Spitzen nach sich zieht. Ist nämlich L ein Element von Γ_0, so folgt aus (a) und (b) die Gleichung

$$f(\tau) = \frac{1}{\sigma(A, L)\, v(L)\, (a_1'\tau + a_2')^r}\, e^{2\pi i \frac{A'\tau}{N}\varkappa}\, \mathfrak{P}\left(e^{2\pi i \frac{A'\tau}{N}}\right)$$

mit $A' = AL = \begin{pmatrix} a_0', & a_3' \\ a_1', & a_2' \end{pmatrix}$ und denselben $N, \varkappa, \mathfrak{P}(t)$ wie in (b). Wenn nun etwa $c_g t^g$, $g \leqq 0$, das niedrigste Glied in $\mathfrak{P}(t)$ ist, so wird $f(\tau)$ bei $\frac{-a_2'}{a_1'}$ in erster Näherung durch den Ausdruck

$$\text{(c)} \qquad \frac{e^{2\pi i(\varkappa+g)\frac{A'\tau}{N}}}{v(A')(a_1'\tau + a_2')^r}, \quad \text{wo } v(A') = \frac{1}{c_g}\,\sigma(A, L)\, v(L),$$

wiedergegeben. Diese Tatsache legt es nahe, die Hauptterme (c) über die verschiedenen zu s äquivalenten Spitzen zu summieren, mithin die Reihe

$$G_{-r}(\tau;\, v;\, A, \Gamma_0;\, R_g) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A)} \frac{e^{2\pi i(\varkappa+g)\frac{M\tau}{N}}}{v(M)(m_1\tau + m_2)^r}$$

zu bilden, in der Hoffnung, dass man hier eine Modulform erhält, deren Potenzreihe $\mathfrak{P}(t)$ in der Spitze s mit dem Glied $c_g t^g$ beginnt. Dabei bezeichnet $\mathfrak{S}(A)$ ein volles System von Matrizen $M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ aus der Nebengruppe $A\Gamma_0$, deren zweite Zeilen m_1, m_2 alle voneinander verschieden sind. In der Tat zeigte eine genauere Untersuchung folgendes: Betrachtet man die allgemeineren Ausdrücke

$$G_{-r}(\tau;\, v;\, A, \Gamma_0;\, R) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A)} \frac{e^{2\pi i \frac{M\tau}{N}\varkappa}\, R\left(e^{2\pi i \frac{M\tau}{N}}\right)}{v(M)(m_1\tau + m_2)^r},$$

wo $R(z)$ irgend eine auf dem Einheitskreis reguläre rationale Funktion von z bezeichnet, so sind diese Reihen

1) gliedweise invariant gegenüber der Auswahl des Systems $\mathfrak{S}(A)$ aus der Nebengruppe $A\Gamma_0$,
2) besitzen sie, da das Bildungsgesetz in den zu s äquivalenten Spitzen symmetrisch ist, als ganzes die Invarianzeigenschaft einer Modulform; sie sind aber auch
3) im Fundamentalbereich der Gruppe Γ_0 bis auf endlich viele Pole, gemessen in der ortsuniformisierenden Variablen, regulär.

Jetzt sieht man sofort, dass $G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_g)$ in der Spitze s das gewünschte Verhalten aufweist, und damit ist, wie eine weitere Überlegung zeigt, im Falle dass Γ_0 endlichen Index besitzt, wirklich in jeder Nebengruppe bezüglich der Untergruppe der ganzen Formen innerhalb der additiven Gruppe der in der oberen Halbebene regulären Formen ein Repräsentant beschafft. Dasselbe Verfahren liefert übrigens auch einen Repräsentanten für jede Nebengruppe zu der Untergruppe der ganzen Spitzenformen. Hier handelt es sich nur noch um die Aufstellung einer solchen ganzen Form $f(\tau)$, bei der die Entwicklung von $(a_1\tau + a_2)^r f(\tau)$ in der einen Spitze s (und folglich in allen zu s äquivalenten Spitzen) ein von Null verschiedenes konstantes Glied aufweist, während die Form in den zu s nicht-äquivalenten Spitzen verschwindet. Solche Formen gibt es natürlich nur, wenn $\varkappa(s) = 0$ ist. Dann aber leistet die Eisensteinreihe $G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, 1)$ das gewünschte.

Grössere Schwierigkeiten bereitet die Aufstellung eines vollen Systems linear-unabhängiger ganzer Spitzenformen. Hier möchte man in Analogie zu den eben angestellten Überlegungen vermuten, dass die Funktion

$$(a_1\tau + a_2)^r G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_g),\quad g + \varkappa > 0,\quad R_g(z) = z^g,$$

in der Spitze s wie $e^{2\pi i (g+\varkappa)\frac{A\tau}{N}}$ verschwindet; danach würde man, falls der Index von Γ_0 innerhalb $\Gamma(1)$ endlich ist, durch Abbauen hinreichend vieler solcher $G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma;\, R_\nu)$ mit $\nu + \varkappa > 0$ von einer vorgegebenen ganzen Spitzenform $\varphi(\tau)$ eine Form erzielen, welche in der Spitze s eine Nullstelle einer so hohen Ordnung besitzt, dass sie identisch verschwinden muss. Diese Argumentation ist aber leider nicht stichhaltig, und man kann, wenigstens vorläufig, mit diesen oder ähnlichen Methoden nichts ausrichten. Zu der Erkenntnis, dass sich jede ganze Spitzenform aus gewissen endlich vielen der $G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_\nu)$ mit $\nu + \varkappa > 0$ zusammensetzen lässt, gelangt man nur auf einem erheblichen Umwege, der auf den ersten Blick an dem so naheliegenden Ziel vorbeizuführen scheint.

Insgesamt erhält man unter den Linearkombinationen der Reihen

$$G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_\nu),\quad A \subset \Gamma(1),\quad \nu \leqq T,\quad R_\nu(z) = z^\nu,$$

wo T eine gewisse positive Zahl bezeichnet, die sämtlichen Modulformen, welche in der oberen τ-Halbebene regulär sind.

In den Fällen $r \leqq 2$ sind die Resultate weit spärlicher. Hier ist das obige Prinzip in seiner angegebenen Gestalt deswegen unbrauchbar, weil die dabei entstehenden Reihen nicht oder wenigstens nicht absolut konvergieren, sodass man die Invarianzeigenschaft dieser Reihen, wenn sie überhaupt konvergieren, nur mit den grössten Schwierigkeiten beweisen könnte. Das Verfahren, das benutzt wird, um diese Schwierigkeiten zu umgehen, führt nur unter sehr einschränkenden Voraussetzungen zu dem gewünschten Ergebnis; ich habe bisher lediglich den allereinfachsten Fall

$$r = 2,\quad \Gamma_0 = \Gamma(N),\quad v(L) = 1 \text{ für alle } L \text{ aus } \Gamma(N)$$

durchdiskutieren können. ($\Gamma(N)$ bezeichnet die Hauptkongruenzuntergruppe N-ter Stufe, d. h. die Gruppe der $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ aus $\Gamma(1)$, für die

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N};$$

N ist eine beliebige, aber feste natürliche Zahl.) Immerhin ist dieser Fall der wichtigste, denn gerade aus den zugehörigen Formen erhält man durch Integration nach $d\tau$ die Abelschen Integrale der Kongruenzgruppen. Dementsprechend entstehen auch bei der Übertragung der früheren Beweise ausserordentliche Komplikationen, die sich nur durch Heranziehung eines verwickelten analytischen Apparates bewältigen lassen.

Der Ansatz, den ich in den Arbeiten (J) und (F) zu dem genannten Zweck ausgebildet habe, geht in der Idee Herrn Hecke zurück, S. 170 N. 1; um ihn auf das vorliegende Problem anwenden zu können, muss man von den Reihen

$$\text{(d)}\qquad G_{-2}(s;\,\tau) = G_{-2}(s;\,\tau;\,A,\,N;\,R) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A)} \frac{R\left(e^{2\pi i \frac{M\tau}{N}}\right)}{(m_1\tau + m_2)^2\, |m_1\tau + m_2|^s}$$

ausgehen. Diese Reihen sind, wie man leicht erkennt, analytische Funktionen von s, sobald $\sigma = \Re s > 0$ ist. Es gelingt nun zu zeigen, dass diese für $\sigma > 0$ durch (d) definierten analytischen Funktionen von s bis an die Gerade $\sigma = -\frac{1}{4}$ heran fortsetzbar sind. Der Wert der Funktion $G_{-2}(s; \tau)$ für $s = 0$ besitzt die Invarianzeigenschaft einer Modulform (-2)-ter Dimension, und man sieht weiter, dass $G_{-2}(0; \tau)$ wirklich eine solche Modulform darstellt, falls nur $G_{-2}(0; \tau)$ eine analytische Funktion von τ ist. Dies ist nun keineswegs immer zutreffend; indessen zeigt sich, dass $G_{-2}(0; \tau)$ dann und nur dann eine analytische Funktion von τ ist, wenn die zu erwartenden Singularitäten dieser Funktion $\Big($einschliesslich der eventuell auftretenden konstanten Glieder in den Entwicklungen von $(c\tau + d)^2 G_{-2}(0; \tau)$ für die einzelnen Spitzen $\frac{-d}{c}\Big)$ eine geeignete Verteilung aufweisen; und zwar eine solche, dass die bekannte Bedingung für das aus $G_{-2}(0; \tau)$ durch Integration nach $d\tau$ entstehende Abelsche Integral, eine verschwindende Residuensumme zu besitzen, erfüllt ist. Für unsere Zwecke, nämlich die Aufstellung der in der oberen Halbebene regulären Formen, hat diese Bedingung nicht viel zu bedeuten. Sie tritt bei diesen Modulformen nur an einer Stelle in Erscheinung und hat dort zur Folge, dass es keine ganze Modulform (-2)-ter Dimension gibt, welche in genau einer Spitze eines Fundamentalbereichs der $\Gamma(N)$ nicht verschwindet; es gibt nur solche Modulformen, die in mindestens zwei Spitzen des Fundamentalbereichs nicht verschwinden, wobei die Summe der konstanten Glieder der Entwicklungen in diesen Spitzen gleich 0 sein muss. (S. 170, N. 1.) So gelten hier mutatis mutandis dieselben Sätze wie in den Fällen $r > 2$; den genauen Wortlaut dieser Sätze entnehme man den unter S. 170 N. 2 zitierten Arbeiten (A), (J), (F).

Aufgabe der gegenwärtigen Untersuchung ist es nun, einen *Überblick über die Entwicklungskoeffizienten der in Rede stehenden Modulformen,* welche in der oberen τ-Halbebene regulär sind, zu gewinnen. Es handelt sich dabei um die oben angeführten Entwicklungen $\mathfrak{P}(t)$ nach der ortsuniformisierenden Variablen $t = e^{2\pi i \frac{A\tau}{N}}$ für die parabolische Spitze $s = \frac{-a_2}{a_1} = A^{-1}\infty$. Wegen der Transformationseigenschaften dieser Modulformen genügt es, diese Entwicklung für die Spitze ∞ herzuleiten, wo also die ortsuniformisierende Variable die Gestalt $t = e^{2\pi i \frac{\tau}{N}}$ hat; die Darstellungssätze, die wir für diese Modulformen früher erhalten haben, zeigen ferner, dass es genügt, die Entwicklung der Reihen

$$G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_\nu) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A)} \frac{e^{2\pi i \frac{M\tau}{N}(\nu+\varkappa)}}{v(M)\,(m_1\tau + m_2)^r},$$

ν ganz rational, aufzustellen. Im Falle $r = 2$ wollen wir stillschweigend immer die einschränkende Voraussetzung $\Gamma_0 = \Gamma(N)$, $v(L) = 1$ für alle L aus $\Gamma(N)$ hinzufügen und danach an Stelle jener Reihen den Wert der analytischen Funktion

$$G_{-2}(s;\, \tau;\, A,\, N;\, R_\nu) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A)} \frac{e^{2\pi i \frac{M\tau}{N}\nu}}{(m_1\tau + m_2)^2\, |m_1\tau + m_2|^s}$$

im Punkte $s = 0$ zu Grunde legen.

Einen ganz speziellen Fall des hier formulierten Problems habe ich bei einer anderen Gelegenheit bereits behandelt. In der oben (S. 170 N. 2) zitierten Arbeit (E) habe ich die Entwicklungen der allgemeinen Eisensteinreihen, d. h. der Reihen

$$E_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0) = G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, 1) \quad \text{wo } \varkappa = 0,\ r > 2$$

angegeben und die Koeffizienten sowie deren summatorische Funktion dieser Entwicklungen ausführlich diskutiert. Dabei ergab sich für den Koeffizienten von $e^{2\pi i \frac{\tau}{N}(n+\eta)}$, $n + \eta > 0$, ein Ausdruck der Gestalt

$$\frac{(-2\pi i)^r}{N^r \Gamma(r)} (n+\eta)^{r-1} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A) \\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1}}{|m_1|^r} \sum_{j \subset \mathfrak{R}(m_1)} \frac{e^{2\pi i (n+\eta) \frac{j}{m_1 N}}}{v(m_1, j)},$$

wo mit geringen Abweichungen die Bezeichnungen von (E), § 3 benutzt sind. Dieser Ausdruck entsteht durch eine Art Fourierentwicklung, welche die Invarianz der Reihe $E(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0)$ gegenüber der Substitution $\tau \to \tau + N$ in Evidenz setzt. Die Fourierentwicklung liefert den Koeffizienten zunächst in der Form

$$\text{(e)} \qquad N^{-r} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A) \\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1}}{|m_1|^r} \left(\sum_{j \subset \mathfrak{R}(m_1)} \frac{e^{2\pi i (n+\eta) \frac{j}{m_1 N}}}{v(m_1, j)} \right) \left(\int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{e^{-2\pi i (n+\eta) x}\, dx}{x^r} \right), \quad \alpha > 0,$$

aus der sich dann die obige Gestalt sofort gewinnen lässt. Diese zeigt ersichtlich die Struktur der *singulären Reihen aus der Hardy-Littlewoodschen additiven Zahlentheorie*; zu ihrer weiteren Vereinfachung ist die Kenntnis der $v(m_1, j)$

und ähnlich wie bei der Summation jener singulären Reihen eine ausführliche zahlentheoretische Untersuchung erforderlich (vgl. S. 170 N. 1 und (E), § 5).

Wenn man jetzt die Koeffizienten in der Entwicklung der Funktion $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma_0; R_\nu)$, $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \subset \Gamma(1)$, nach Potenzen von $e^{2\pi i \frac{\tau}{N}}$ berechnen will, so muss man sich von vornherein darüber klar sein, dass man für diese Koeffizienten günstigstenfalls eine unendliche Reihe der in (e) angegebenen Bauart zu erwarten hat. In der Tat ergibt sich eine solche unendliche Reihe; aber überraschenderweise treten in dieser Reihe zwei in der Zahlentheorie bzw. in der Analysis wohlbekannte Funktionen an die Stelle der in (e) wesentlichen Faktoren

$$\sum_{j \subset \mathfrak{R}(m_1)} \frac{e^{2\pi i (n+\eta) \frac{j}{m_1 N}}}{v(m_1, j)} \quad \text{bzw.} \quad \int\limits_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{-2\pi i (n+\eta) x}\, dx}{x^r}.$$

Von diesen beiden Funktionen wird die erstere, zahlentheoretische Funktion durch die verallgemeinerten Kloostermanschen Summen

$$\text{(f)} \qquad W_{m_1}(n; R_\nu) = \sum_{j \subset \mathfrak{R}(m_1)} \frac{e^{2\pi i \frac{(n+\eta) j}{m_1 N} + 2\pi i \frac{(\nu+\varkappa) h}{m_1 N'}}}{v(m_1, j)}$$

ersetzt, wo h in einer durch j eindeutig bestimmten Restklasse mod $m_1 N'$ liegt; dieser Ausdruck geht im Falle $\Gamma_0 = \Gamma(N)$, $r \equiv 0 \pmod 1$, $v(L) = 1$ für alle L aus $\Gamma(N)$ in eine der inzwischen von Kloosterman, Estermann, Walfisz und Salié untersuchten[1] Kloostermanschen Summen

$$\sum_{\substack{j \bmod m_1 N \\ (j, m_1) = 1, j \equiv a_2 (N)}} e^{2\pi i \frac{nj + \nu h}{m_1 N}}$$

über, in der h mit j durch die Bedingung

$$hj \equiv 1 + m_1 a_3 (m_1 N), \quad h \equiv a_0 (N)$$

zusammenhängt. Gleichzeitig wird aber auch das in (e) auftretende Integral

[1] H. D. Kloosterman, Asymptotische Formeln für die Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen, Hamb. Abh. V, p. 337; Th. Estermann, Vereinfachter Beweis eines Satzes von Kloosterman, Hamb. Abh. VII, p. 82; ferner A. Walfisz, Zur elementaren Zahlentheorie, Hamb. Abh. VII, p. 132; H. Salié, Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$, Math. Zeitschr. Band 34, p. 91.

$$\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{-2\pi i(n+\eta)x}\,dx}{x^r}, \quad \alpha > 0,$$

durch die Funktion

$$\text{(f')} \qquad \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{-2\pi i(n+\eta)x-2\pi i\frac{\nu+\varkappa}{NN'm_1^2}\cdot\frac{1}{x}}\,dx}{x^r}$$

ersetzt, welche im wesentlichen mit dem Wert der Besselschen Funktion

$$J_{r-1}\left(4\pi\sqrt{\frac{\nu+\varkappa}{NN'}}\frac{\sqrt{n+\eta}}{|m_1|}\right)$$

übereinstimmt. So ergibt sich für den Koeffizienten in der Entwicklung von $G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_\nu)$ insgesamt ein Ausdruck

$$\text{(g)} \qquad a_{n+\eta} = C(n+\eta)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\substack{m_1\subset\mathfrak{R}\\ m_1\neq 0}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n;\, R_\nu)}{|m_1|} J_{r-1}\left(4\pi\sqrt{\frac{\nu+\varkappa}{NN'}}\frac{\sqrt{n+\eta}}{|m_1|}\right),$$

in dem $n+\eta > 0$ angenommen wurde, und C eine gewisse Konstante bezeichnet. Es ist vielleicht von Interesse, dass die oben erwähnten Ersetzungen, welche zu den Ausdrücken (f) und (f') führen, in gewissem Sinne analog zueinander sind. In der verallgemeinerten Kloostermanschen Summe $W_{m_1}(n;\, R_\nu)$ gilt für die dort gegenüber (e) neuerscheinende Variable h stets $jh \equiv 1\,(m_1)$. Setzt man formal $jh = 1$, so erhält man als Produkt der im Exponenten auftretenden Summanden den Wert

$$-4\pi^2\frac{(n+\eta)(\nu+\varkappa)}{NN'm_1^2};$$

und dies ist genau derselbe Wert, den man erhält, wenn man die Summanden im Exponenten des Integranden von (f'), unter denen ganz analog wie bei den Kloostermanschen Summen das neue Glied mit $\frac{1}{x}$ gebildet ist, miteinander multipliziert. Man kann also sagen, dass die Ausdrücke $W_{m_1}(n;\, R_\nu)$ in demselben Sinne eine Verallgemeinerung der einfacheren Summen $\sum\limits_{j\subset\mathfrak{R}(m_1)} \frac{e^{2\pi i(n+\eta)\frac{j}{m_1 N}}}{v(m_1, j)}$ sind, wie das Besselsche Integral (f') eine Verallgemeinerung der reziproken Gammafunktion ist.

Die Grössenordnung der Koeffizienten $a_{n+\eta}$ fällt völlig verschieden aus, je nachdem $\nu+\varkappa<0$, $=0$ oder >0 ist, d. h. je nachdem die Form $G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_\nu)$ in der Spitze $\frac{-a_2}{a_1}$ (bei Annäherung von oben) exponentiell unendlich wird, wie eine Potenz unendlich wird oder exponentiell verschwindet. Im ersten Fall gilt, wenigstens für die n einer gewissen arithmetischen Progression, eine Abschätzung

$$\text{(h)} \qquad a_{n+\eta} = C_2(n+\eta)^{\frac{r}{2}-\frac{3}{4}} e^{c_4\sqrt{n+\eta}}\left(1+O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

mit konstanten $c_4>0$ und C_2, welche eine deutliche Beziehung zu der Hardy-Ramanujanschen Formel[1] für die Anzahl $p(n)$ der Partitionen der natürlichen Zahl n offenbart. In der Tat ist die Funktion, deren Entwicklungskoeffizienten diese Zahlen $p(n)$ sind, bei Benutzung einer geeigneten Variablen im wesentlichen mit $\Delta(\tau)^{-\frac{1}{24}}$ identisch, also mit einer Modulform der Dimension $+\frac{1}{2}$, welche im Innern der oberen Halbebene regulär ist und in sämtlichen parabolischen Spitzen exponentiell unendlich wird. Ähnliche Abschätzungen wie (h) ergeben sich auch für die Entwicklungskoeffizienten einer beliebigen Linearkombination der $G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_\nu)$, wenn nur für mindestens eine der dabei auftretenden Funktionen $\nu+\varkappa<0$ ist. Der Fall $\nu+\varkappa=0$ ist in (E) erledigt. Im Falle $\nu+\varkappa>0$ zeigt sich nun, dass man die sämtlichen Abschätzungen für die Koeffizienten der ganzen Spitzenformen, die bisher teilweise durch eine sehr komplizierte Modifikation der Hardy-Littlewoodschen Methode gewonnen wurden[2], mit Hilfe der Darstellung (g) in höchst einfacher Weise wiedererhalten kann. Zu diesem Zwecke bedarf es übrigens keineswegs der schärfsten Aussage über das asymptotische Verhalten der Besselfunktionen grossen Arguments; man kommt im Gegenteil durch Benutzung einer fast trivialen Tatsache genau so weit. Ich möchte hierzu ferner erwähnen, dass bei allen Abschätzungen, die in der vorliegenden Arbeit durchgeführt werden, eine Einteilung der Summation nach m_1 an einer Stelle von der Grössenordnung $\sqrt{n}$ vorgenommen wird. Dieser Teilpunkt stellt das *Rudiment der bekannten Farey-Zerschneidung* dar, wie sie in der Hardy-Littlewoodschen Methode der additiven Zahlentheorie verwendet wird. Die Abschätzung der beiden Teilsummen geschieht nach den primitivsten Methoden,

[1] G. H. Hardy and S. Ramanujan, Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London Math. Soc., ser. 2, vol. 17 (1918), pp. 75—115.

[2] Siehe S. 177 Fussnote 1.

wenn das Verhalten der Besselschen Integrale (f′) festgestellt ist, was mühelos vonstatten geht. In das Resultat geht, wie bereits bekannt, die Grössenordnung der Kloostermanschen Summen $W_{m_1}(n;\, R_\nu)$ in ihrer Abhängigkeit von m_1 ein.

Die zahlentheoretischen Anwendungen dieser Sätze sind aus der umfangreichen Literatur über die Modulformen, deren Koeffizienten eine arithmetische Bedeutung besitzen, zu entnehmen. Von ihnen ist im folgenden nicht weiter die Rede. Dagegen kann man den oben miterledigten Fall $r = 2$, $\Gamma_0 = \Gamma(N)$, $v(L) = 1$ heranziehen, um über die Entwicklungskoeffizienten der Integrale zweiter Gattung der $\Gamma(N)$, welche im Innern der oberen Halbebene regulär sind, sehr genaue Aussagen zu erhalten. Hier erst zeigt sich wegen der hohen Dimension 0 eine weitgehende Analogie zu den Hardy-Ramanujanschen Resultaten über die Partitionenanzahl $p(n)$. Es stellt sich nämlich heraus, dass der Entwicklungskoeffizient eines solchen Integrals zweiter Gattung durch ein lineares Aggregat von $O(\sqrt{n})$ Gliedern relativ einfacher Bauart bis auf einen Fehler von der Grössenordnung $O(n^{-\frac{1}{8}+\varepsilon})$ wiedergegeben wird. Dies Aggregat weist überdies analoge Wachstumsverhältnisse auf, wie das ihm entsprechende Hauptglied in der Formel für $p(n)$. Die Tatsache, dass der Fehler mit wachsendem n gegen 0 geht, gibt einen etwaigen ganzzahligen Koeffizienten zuletzt als nächstgelegene ganze Zahl zum Hauptglied. Da dies alles insbesondere auch für die Modulfunktionen N-ter Stufe gilt, welche im Innern der oberen Halbebene regulär sind, so erhält man z. B. eine meines Wissens noch unbekannte, in diesem Sinne endliche Darstellung für die Entwicklungskoeffizienten der absoluten Invariante $j(\tau)$.

Bei der *Untersuchung der summatorischen Funktion* der Entwicklungskoeffizienten beschränke ich mich unter im übrigen gleichen Voraussetzungen wie oben auf die ganzen Modulformen von den Dimensionen < -2. Es handelt sich darum, die in (E), § 3 mit Hilfe der Theorie der Eisensteinreihen bewiesenen Aussagen über diese summatorischen Funktionen zu verschärfen, wobei uns gegen früher die inzwischen gewonnenen Darstellungssätze für die ganzen Spitzenformen zur Verfügung stehen. Zum besseren Verständnis sei zunächst in Kürze an die Ergebnisse von (E), § 3 erinnert. Bezeichnet $s_{n+\eta}(A)$ die Summe

$$s_{n+\eta}(A) = \sum_{0<k+\eta\leqq n+\eta} e_{k+\eta}(A)$$

der Entwicklungskoeffizienten $e_{k+\eta}(A)$, $0 < k+\eta \leqq n+\eta$, der Funktion

$$E_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0),$$

so besteht für diese $s_{n+\eta}(A)$ eine asymptotische Entwicklung der Gestalt

(i) $$s_{n+\eta}(A) = \mathfrak{T}_0 \cdot \left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)^r + \sum_{1 \leq g < r-1} \mathfrak{T}_g(n+\eta;\, A) \cdot \left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)^{r-g} + \Phi_n,$$

wo

(j) $$\Phi_n = \left\{\begin{array}{ll} O(n \log n) & \text{für ganzes } r \\ O(n) & \text{für nicht-ganzes } r \end{array}\right\}.$$

Dabei sind die $\mathfrak{T}_g(n+\eta;\, A)$ eine Art singulärer Reihen, welche gleichmässig in n absolut konvergieren und beschränkt sind; das erste Glied tritt dann und nur dann auf, d. h. dann und nur dann ist $\mathfrak{T}_0 \neq 0$, wenn $\frac{-a_2}{a_1} \sim 0(\Gamma_0)$. Die summatorische Funktion $q_{n+\eta}$ der Koeffizienten einer beliebigen ganzen Modulform setzt sich nun, falls Γ_0 endlichen Index besitzt, additiv aus einer Linearkombination der obigen $s_{n+\eta}(A)$ und aus der summatorischen Funktion $t_{n+\eta}$ der Entwicklungskoeffizienten einer ganzen Spitzenform zusammen. Die leicht zu beweisende Abschätzung

(k) $$t_{n+\eta} = O\left(n^{\frac{r}{2}} \log n\right)$$

liefert zwar unter Benutzung von (i) eine asymptotische Entwicklung der $q_{n+\eta}$ nach absteigenden Potenzen von $n+\eta+\frac{1}{2}$; es wird dabei aber die Darstellung (i) gar nicht voll ausgenutzt. Von der asymptotischen Entwicklung des Aggregats der $s_{n+\eta}(A)$ bleiben ersichtlich nur die Glieder stehen, in denen die Potenzen $\left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)^{r-g}$, $r-g > \frac{r}{2}$ auftreten; der Rest, eine Linearkombination der Ausdrücke

$$\sum_{\frac{r}{2} \leq g < r-1} \mathfrak{T}_g(n+\eta;\, A) \cdot \left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)^{r-g} + \Phi_n$$

wird von $t_{n+\eta}$ verschlungen, sodass das Fehlerglied insgesamt die Grössenordnung $O\left(n^{\frac{r}{2}} \log n\right)$ erhält. Nun besteht wenig Aussicht, dass man diese Abschätzung (k) unter den zugrunde liegenden allgemeinen Voraussetzungen in der Hinsicht verschärfen kann, dass dabei der Exponent von n erniedrigt wird. Man wird im Gegenteil annehmen müssen, dass die in (E), § 3 so gewonnene asymptotische Entwicklung der $q_{n+\eta}$ im wesentlichen schon die genaueste ihrer Art ist. Wenn man aber andererseits für die $t_{n+\eta}$ anstelle einer Abschätzung ebenfalls eine asymptotische Entwicklung in Kauf nehmen will, so lässt sich auf diese Weise tatsächlich eine erhebliche Verschärfung erzielen. Im § 4 der vorliegenden Arbeit beweise ich eine asymptotische Entwicklung nach fallenden Potenzen von $n + \eta + \frac{1}{2}$ für die summatorische Funktion $p_{n+\eta}$ der Koeffizienten der Formen

$$G_{-r}(\tau;\ v;\ A,\ \Gamma_0;\ R_\nu)$$

mit $\nu + \varkappa > 0$. Obgleich diese neue Entwicklung eine nicht ganz so einfache Struktur erkennen lässt, wie die Entwicklung (i), kann man in einem gewissen Sinne doch sagen, dass sie mit einem Glied der Grössenordnung $\left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \log\left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)$ beginnt, und dass dabei die Exponenten von $\left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)$ von einem Glied zum nächsten um $\frac{1}{2}$ fallen, wobei übrigens der Faktor $\log\left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)$ in den auf dieses erste folgenden Gliedern fehlt. Die Entwicklung lässt sich solange in absteigender Richtung fortsetzen, als die Exponenten von $\left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)$ die Zahl 1 noch übertreffen. Der Fehler genügt auch hier wieder der Abschätzung (j).

Bei all diesen Überlegungen bleiben die Fälle

$$\Gamma_0 = \Gamma(N),\ r = 2,\ v(L) = 1 \quad \text{für } L \subset \Gamma(N)$$

ausser Betracht. In diesen Fällen besitzen Haupt- und Fehlerglied die gleiche Grössenordnung $n \log n$, und es wäre denkbar, dass sich die beiden Glieder teilweise kompensieren. Ich habe längere Zeit auch vermutet, dass eine Abschätzung

$$p_n = O(n^{1-\vartheta}) \tag{l}$$

mit einem höchstens von N abhängigen $\vartheta > 0$ zutrifft. Indessen machen es verschiedene Überlegungen wahrscheinlich, dass eine Abschätzung (l) allgemein nicht richtig ist, d. h. dass sie nicht für alle ganzen Spitzenformen (-2)-ter Dimension einer gegebenen Stufe N zutrifft.

Die Möglichkeit, diese ganzen Entwicklungen auf beliebige Grenzkreisgruppen zu verallgemeinern, ist gegeben, sobald man die dabei auftretenden Konvergenzschwierigkeiten überwinden kann. Rein formal erhält man natürlich dieselben Darstellungen für die Koeffizienten und deren summatorische Funktionen, wie in der vorliegenden Arbeit, aber einen exakten Sinn kann ich diesen Darstellungen nur in den Fällen $r > 4$ beilegen. Immerhin dürfte eine Übertragung der vollständigen Theorie auf jede Grenzkreisgruppe möglich sein, deren Substitutionskoeffizienten ein hinreichend genau bekanntes Bildungsgesetz befolgen.

Jedenfalls lassen sich mit den Methoden dieser Arbeit die Entwicklungskoeffizienten einer ganz allgemeinen Klasse von analytischen Funktionen allein aus deren Funktionalbeziehungen und Regularitätseigenschaften berechnen.

§ 1.

Es bezeichne $\Gamma = \Gamma(1)$ die volle homogene Modulgruppe, Γ_0 eine Untergruppe von $\Gamma(1)$, welche selbst Grenzkreisgruppe ist[1]; über den Index von Γ_0 innerhalb $\Gamma(1)$ wird vorläufig nichts vorausgesetzt. Ist $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ eine Matrix aus $\Gamma(1)$, derart dass $A^{-1}\infty$ parabolischer Fixpunkt von Γ_0 ist, N' die kleinste natürliche Zahl[2] derart, dass $A^{-1}U^{N'}A \subset \Gamma_0$ mit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so bilden wir ein volles Repräsentantensystem $\mathfrak{S}(A;\ \Gamma_0) = \mathfrak{S}(A)$ von Matrizen M aus $A\Gamma_0$, deren zweite Zeilen $\underline{M} = m_1,\ m_2$ sämtlich voneinander verschieden sind, indem wir die Nebengruppe $A\Gamma_0$ in Klassen von Elementen aufteilen, die sich untereinander nur um einen vorderen Faktor $U^{\lambda N'}$, λ ganz rational, unterscheiden. Ist ferner N die kleinste natürliche Zahl[2] derart, dass $U^N \subset \Gamma_0$, so fasse man alle Repräsentanten M aus $\mathfrak{S}(A;\Gamma_0)$, welche je innerhalb ihrer Klasse so gewählt werden können, dass sie sich um einen hinteren Faktor $U^{\lambda N}$ unterscheiden, abermals zu einer Klasse zusammen. Man erhält damit eine Aufteilung des auf diese Weise abgeänderten Systems $\mathfrak{S}(A;\ \Gamma_0)$ in unendlich viele Klassen der letzteren Art; bezeichnet $\mathfrak{V}(A;\ \Gamma_0)$ ein Repräsentantensystem von Matrizen V dieser Klassen, so lässt sich jedes M aus $A\Gamma_0$ im wesentlichen eindeutig in der Form

$$M = U^{\lambda' N'} V U^{\lambda N}, \qquad V \subset \mathfrak{V}(A;\ \Gamma_0), \qquad \lambda,\ \lambda' \text{ ganz rational}$$

darstellen. Hier durchläuft V das System $\mathfrak{V}(A;\ \Gamma_0)$ und λ, λ' durchlaufen unabhängig voneinander alle ganzen rationalen Zahlen, mit der einzigen Ausnahme, dass im Falle $m_1 = 0$ nur die Summe $\lambda + \lambda'$ die ganzen rationalen Zahlen je einfach durchläuft; in diesem Falle ist also bei eindeutiger Darstellung λ durch λ' eindeutig bestimmt und umgekehrt. Setzt man $V = \begin{pmatrix} h & k \\ m_1 & j \end{pmatrix}$, so bedeutet $V \subset \mathfrak{V}(A;\ \Gamma_0)$

---

[1] Dass diese Voraussetzung im Falle eines unendlichen Index nicht entbehrlich ist, lehrt eine Untersuchung von G. Bol, Über einige Substitutionsgruppen der komplexen Ebene, Nieuw Archief voor Wiskunde, XVII, 1931, p. 56.

[2] Wenn $-A^{-1}U^{N'}A \subset \Gamma_0$, dagegen $A^{-1}U^{N'}A$ nicht, so erweitere man die Gruppe Γ_0 durch Adjunktion des Elementes $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; entsprechendes bei U^N.

erstens, dass $m_1 \subset \mathfrak{K}(A;\,\Gamma_0) = \mathfrak{K}(A)$, wo $\mathfrak{K}(A;\,\Gamma_0)$ das System aller verschiedenen linken unteren Elemente m_1 der Matrizen M aus $A\Gamma_0$ angibt; zweitens ist durch die obige Konstruktion für jedes m_1 aus $\mathfrak{K}(A)$ ein gewisses System $\mathfrak{R}(m_1)$ von zu m_1 teilerfremden Resten mod $|m_1|\,N$ bestimmt dergestalt, dass die V aus $\mathfrak{V}(A;\,\Gamma_0)$ umkehrbar eindeutig auf die Paare m_1, j mit $m_1 \subset \mathfrak{K}(A)$, $j \subset \mathfrak{R}(m_1)$ bezogen sind. Insbesondere ist die erste Zeile h, k einer Matrix V aus $\mathfrak{V}(A;\,\Gamma_0)$ durch Vorgabe der Zahlen m_1 aus $\mathfrak{K}(A)$ und j aus $\mathfrak{R}(m_1)$ eindeutig fixiert. Aus diesem Grunde soll bei den folgenden Summationen die Bedingung für h nicht besonders angegeben werden. Die offensichtliche Symmetrie der oben angegebenen Konstruktion gestattet ferner, die Matrix V aus $\mathfrak{V}(A;\,\Gamma_0)$ durch Angabe von m_1 und h festzulegen. Man erhält für jedes m_1 ein System $\mathfrak{R}'(m_1)$ von zu m_1 teilerfremden Resten mod $|m_1|\,N'$, das die h der V aus $\mathfrak{V}(A;\,\Gamma_0)$ bei festen m_1 genau einfach durchlaufen. Daher ist die Matrix V aus $\mathfrak{V}(A;\,\Gamma_0)$ durch Vorgabe der Zahlen $m_1 \subset \mathfrak{K}(A)$ und $h \subset \mathfrak{R}'(m_1)$ eindeutig bestimmt.

Nunmehr sei $r > 2$, $v = v(L)$ ein Multiplikatorsystem von der Dimension $-r$ für die L aus Γ_0, mit der Eigenschaft, dass stets $|v(L)| = 1$ ist;

τ eine komplexe Variable mit positivem Imaginärteil $\mathfrak{Im}\,\tau > 0$,

$$\eta = \varkappa(\infty;\,v),\quad \varkappa = \varkappa\left(\frac{-a_2}{a_1};\,v\right),$$

$$R_\nu(x) = x^\nu,\ \nu \text{ ganz rational und } \neq 0, \text{ falls } \varkappa = 0 \text{ ist},$$

$$v(m_1, j) = v(V) \text{ für } V \subset \mathfrak{V}(A;\,\Gamma_0),$$

$$\sigma_{m_1} = e^{\pi i r \frac{1-\operatorname{sgn} m_1}{2}} \text{ für } m_1 \neq 0,$$

$$e_0 = \begin{Bmatrix} 2, \text{ falls } -I \subset \Gamma_0 \\ 1 \text{ sonst} \end{Bmatrix},$$

$$\delta = \begin{Bmatrix} 1, \text{ falls eine Matrix } \pm U^\xi \subset A\Gamma_0,\ \xi \text{ ganz rational} \\ 0 \text{ sonst} \end{Bmatrix}.$$

Für die Modulform

$$G_{-r}(\tau;\,v;\,A,\,\Gamma_0;\,R_\nu) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A;\,\Gamma_0)} \frac{e^{2\pi i(\nu+\varkappa)\frac{M\tau}{N'}}}{v(M)(m_1\tau + m_2)^r}$$

findet man zunächst die Darstellung

$$(1)\qquad \frac{e_0\,\delta\,e^{2\pi i(\nu+\varkappa)\frac{\tau+\xi}{N}}}{v(\pm U^\xi)(\pm 1)^r} + N^{-r} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A) \\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1}}{|m_1|^r} \sum_{j \subset \mathfrak{R}(m_1)} \frac{e^{2\pi i \frac{(\nu+\varkappa)h}{m_1 N'}}}{v(m_1, j)} f\left(\frac{\tau}{N} + \frac{j}{m_1 N}\right),$$

wo

$$f(\omega) = \sum_{g=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left\{-2\pi i\eta g - \frac{2\pi i(\nu+\varkappa)}{NN'm_1^2(\omega+g)}\right\}}{(\omega+g)^r}, \quad (\exp z = e^z).$$

Diese Funktion $f(\omega)$ gestattet nun für $r > 1$ eine Fourierentwicklung

$$f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{n+\eta}(\omega) \tag{2}$$

mit

$$A_{n+\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left\{-2\pi i(n+\eta)x - \frac{2\pi i(\nu+\varkappa)}{NN'm_1^2(\omega+x)}\right\}}{(\omega+x)^r}\, dx$$

$$= e^{2\pi i(n+\eta)\omega} \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \frac{\exp\left\{-2\pi i(n+\eta)x - \frac{2\pi i(\nu+\varkappa)}{NN'm_1^2 x}\right\}}{x^r}\, dx, \quad \alpha > 0.$$

Im folgenden sollen diese Fourierkoeffizienten, d. h. die Integrale $\int\limits_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}$ auf der rechten Seite der letzten Gleichung unter der Voraussetzung $r > 1$ eingehender untersucht werden. Wir setzen zu diesem Zwecke

$$K_r(\mu_1, \mu_2) = \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \frac{e^{-2\pi i\mu_1 x - 2\pi i\frac{\mu_2}{x}}}{x^r}\, dx,$$

wo ein für allemal

$$\alpha > 0, \quad \mu_1 = n + \eta, \quad \mu_2 = \frac{\nu+\varkappa}{NN'm_1^2},$$

und bemerken zunächst, dass

$$K_r(\mu_1, \mu_2) = 0 \text{ für } n + \eta \leqq 0.$$

Ferner ergibt sich für $n + \eta > 0$ und beliebiges $\varrho > 0$

$$K_r(\varrho\mu_1, \mu_2) = \varrho^{r-1} K_r(\mu_1, \varrho\mu_2).$$

Wenn also

$$\varrho = \sqrt{\left|\frac{\mu_1}{\mu_2}\right|} = \sqrt{\frac{NN'}{|\nu+\varkappa|}}\,|m_1|\sqrt{n+\eta}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\varrho} = \sqrt{|\mu_1\mu_2|} = \sqrt{\frac{|\nu+\varkappa|}{NN'}}\,\frac{\sqrt{n+\eta}}{|m_1|}$$

gesetzt wird, so ist jetzt

$$K_r(\mu_1, \mu_2) = \varrho^{r-1} K_r(\mu, \mu \operatorname{sgn}(\nu+\varkappa)),$$

und eine einfache Betrachtung zeigt, dass

$$(3)\qquad \begin{aligned} K_r(\mu, \mu) &= 2\pi e^{-\frac{\pi i r}{2}} J_{r-1}(4\pi\mu), \\ K_r(\mu, -\mu) &= -2\pi i J_{r-1}(-4\pi i\mu). \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $J_\lambda(z)$ die Besselsche Funktion[1]

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} e^{\frac{z}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} x^{-\lambda-1}\,dx,$$

wo $\Re z > 0$ und das Integral über eine Schleife $\mathfrak{C}$ zu erstrecken ist, die die negative reelle Achse in positivem Sinne umläuft.

Bei den folgenden O-Abschätzungen denken wir uns die Gruppe Γ_0, die reelle Zahl r, das Multiplikatorsystem v, die Matrix A und die ganze Zahl ν fest gegeben, sodass also die dabei auftretenden Konstanten von N, N', r, η, $\varkappa$, ν abhängen können; die Abschätzungen sollen aber gleichmässig in m_1 und n gelten. Übrigens sind alle Aussagen über die Integrale $K_r(\mu_1, \mu_2)$ bereits für $r > 1$ zutreffend. Zunächst hat man[2]

$$(4)\qquad K_r(\mu_1, \mu_2) = O(\mu_1^{r-1}) = O(n^{r-1})$$

für $\mu \leqq c_1$, d. h. für $|m_1| \geqq c_2\sqrt{n+\eta}$, $c_2 > 0$.

Von den Konstanten c_1 und c_2 ist jede durch die andere eindeutig bestimmt. Eine der beiden kann willkürlich vorgeschrieben werden. Eine Abschätzung von $K_r(\mu_1, \mu_2)$ für grosse μ erhält man auf dem Umwege über die Darstellung (3) aus der Theorie der Besselfunktionen. Es ist nämlich[3] für $\mu > c_1$, d. h. $0 < |m_1| < c_2\sqrt{n+\eta}$

---

[1] Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, Band I, Julius Springer, Berlin 1924, Kap. VII, § 2, s. insb. p. 391.

[2] l. c. S. 186, N. 1. p. 393 ff., vgl. auch die entsprechenden Betrachtungen in § 2 und § 4 dieser Arbeit.

[3] Vgl. z. B. G. N. Watson, Theory of Bessel functions, Cambridge 1922, p. 198.

$$K_r(\mu, \mu) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right),$$

(5)

$$K_r(\mu, -\mu) = b_r \frac{e^{4\pi\mu}}{\sqrt{\mu}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right),$$

wo b_r eine nur von r abhängige Konstante bezeichnet. Übrigens kommt man bei fast allen Überlegungen dieser Arbeit mit der schwächeren Abschätzung

(6) $$K_r(\mu, \mu) = O(1) \text{ für } \mu > c_1$$

aus; ein Beweis dieser Abschätzung liegt auf der Hand, wenn man für das K_r-Integral den folgenden Integrationsweg wählt. Die negative reelle Achse von $-\infty$ bis -1, dann der obere Einheitshalbkreis, im Sinne wachsenden Realteils durchlaufen, dann die positive reelle Achse von $+1$ nach $+\infty$. In der Tat ist der Zähler des Integranden für $x = e^{i\varphi}$ gleich $e^{-4\pi i\mu \cos\varphi}$, hat also auf dem genannten Integrationsweg den Betrag 1.

Aus (4) und (6) ergibt sich nun, falls $\nu + \varkappa > 0$

(7) $$K_r(\mu_1, \mu_2) = O((n + \eta)^{r-1})$$

gleichmässig für alle $m_1 \neq 0$ und alle n mit $n + \eta > 0$. Ebenso folgt aus (4) und (5), dass im Falle $\nu + \varkappa < 0$ unter denselben Bedingungen

(8) $$K_r(\mu_1, \mu_2) = O((n + \eta)^{r-1} e^{c_3\sqrt{n+\eta}})$$

zutrifft; c_3 ist eine positive Konstante.

Wenn man jetzt die rechte Seite der Gleichung

$$f\left(\frac{\tau}{N} + \frac{j}{m_1 N}\right) = \sum_{n+\eta>0} K_r(\mu_1, \mu_2) e^{2\pi i(n+\eta)\left(\frac{\tau}{N} + \frac{j}{m_1 N}\right)}$$

anstelle der Funktion $f\left(\frac{\tau}{N} + \frac{j}{m_1 N}\right)$ in die Darstellung (1) einträgt, so zeigen die eben gewonnenen Abschätzungen (7) und (8), dass man die beiden Summationen nach n und m_1 miteinander vertauschen darf. So kommt

$$G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma_0; R_\nu) = \frac{e_0 \delta\, e^{2\pi i \frac{\tau+\xi}{N}(\nu+\varkappa)}}{v(\pm U^\xi)(\pm 1)^r} +$$
$$+ N^{-r} \sum_{n+\eta>0} \left\{ \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A) \\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n; R_\nu)}{|m_1|^r} K_r\left(n + \eta, \frac{\nu + \varkappa}{N N' m_1^2}\right)\right\} e^{2\pi i \frac{\tau}{N}(n+\eta)}.$$

Mit $W_{m_1}(n;\, R_\nu)$ sind dabei die verallgemeinerten Kloostermanschen Summen

$$W_{m_1}(n;\, R_\nu) = W_{m_1}^{(r)}(n;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_\nu) =$$
$$= \sum_{j \subset \mathfrak{R}(m_1)} \frac{\exp\left\{2\pi i (n+\eta)\frac{j}{m_1 N} + 2\pi i(\nu+\varkappa)\frac{h}{m_1 N'}\right\}}{v(m_1,\, j)}$$

bezeichnet. Als weitere Abkürzung führen wir hier den Fourierkoeffizienten $a_{n+\eta}$ der Funktion

$$G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_\nu) - \frac{e_0 \delta\, e^{2\pi i \frac{\tau+\xi}{N}(\nu+\varkappa)}}{v(\pm U^\xi)(\pm 1)^r} = \sum_{n+\eta>0} a_{n+\eta} e^{2\pi i \frac{\tau}{N}(n+\eta)}$$

ein. Es wird also

$$(9)\quad a_{n+\eta} = a_{n+\eta}^{(r)}(v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_\nu) = N^{-r} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A)\\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n;\, R_\nu)}{|m_1|^r} K_r\left(n+\eta,\, \frac{\nu+\varkappa}{NN'm_1^2}\right),$$

und man erhält daraus die endgültige Darstellung

$$a_{n+\eta} = C_{+1}(n+\eta)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A)\\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n;\, R_\nu)}{|m_1|} J_{r-1}\left(4\pi \sqrt{\frac{\nu+\varkappa}{NN'}}\frac{\sqrt{n+\eta}}{|m_1|}\right),$$

$$(10)\qquad C_{+1} = 2\pi e^{\frac{-\pi i r}{2}} \frac{N^{\frac{-r-1}{2}} N'^{\frac{r-1}{2}}}{(\nu+\varkappa)^{\frac{r-1}{2}}},$$

falls $\nu + \varkappa > 0$, sowie

$$a_{n+\eta} = C_{-1}(n+\eta)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A)\\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n;\, R_\nu)}{|m_1|} J_{r-1}\left(-4\pi i \sqrt{\frac{|\nu+\varkappa|}{NN'}} \cdot \frac{\sqrt{n+\eta}}{|m_1|}\right),$$

$$(11)\qquad C_{-1} = -2\pi i \frac{N^{\frac{-r-1}{2}} N'^{\frac{r-1}{2}}}{|\nu+\varkappa|^{\frac{r-1}{2}}}, \quad (\nu+\varkappa<0).$$

Man sieht übrigens, dass die Formel (10) allgemein für $\nu + \varkappa \neq 0$ richtig ist, wenn man im Falle $\nu + \varkappa < 0$ unter $\sqrt{\nu+\varkappa} = (\nu+\varkappa)^{\frac{1}{2}}$ den Wurzelwert $-i|\nu+\varkappa|^{\frac{1}{2}}$ versteht und entsprechend $(\nu+\varkappa)^{\frac{r-1}{2}}$ durch $e^{-\pi i \frac{r-1}{2}}|\nu+\varkappa|^{\frac{r-1}{2}}$ ersetzt. Wir schreiben dann C für C_{+1} oder C_{-1}, je nachdem $\nu+\varkappa>0$ oder <0 ist.

§ 2.

Die in § 1 auseinandergesetzte Methode lässt sich auch auf die besonders wichtigen Fälle $r = 2$, $v(L) = 1$ anwenden; allerdings stützt sie sich hier auf nicht-triviale Abschätzungen der Kloostermanschen Summen, die bisher nur bei Kongruenzgruppen untersucht worden sind. Es bezeichne daher $\Gamma(N)$ die Hauptkongruenzuntergruppe N-ter Stufe; wir setzen $r = 2$, $\Gamma_0 = \Gamma(N)$ und $v(L) = 1$ für alle L aus $\Gamma(N)$ voraus und haben nun die Funktionen

$$G_{-2}(0;\, \tau;\, A,\, N;\, R_\nu), \quad \nu \neq 0,$$

aus (J) in eine Reihe nach Potenzen von $e^{2\pi i \frac{\tau}{N}}$ zu entwickeln. Wir bedienen uns dabei der Darstellung

$$G_{-2}(0;\, \tau;\, A,\, N;\, R_\nu) = H_1(0;\, \tau) + H_2(0;\, \tau) + H_3(0;\, \tau),$$

in der

$$H_1(0;\, \tau) = e_0 \delta e^{2\pi i \frac{\tau + \xi}{N} \nu},$$

$$H_2(0;\, \tau) = \frac{-4\pi^2}{N^2} \sum_{n=1}^{\infty} n D_n(0;\, R_\nu) e^{2\pi i \frac{\tau}{N} n},$$

$$H_3(0;\, \tau) = \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{S}(A) \\ m_1 \neq 0}} \frac{e^{2\pi i \frac{M\tau}{N} \nu} - e^{2\pi i \frac{m_0 \nu}{m_1 N}}}{(m_1 \tau + m_2)^2}$$

mit

$$D_n(s;\, R_\nu) = \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1 (N) \\ m_1 \neq 0}} \frac{W_{m_1}(n;\, R_\nu)}{|m_1|^{2+s}}, \tag{12}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Von den Kloostermanschen Summen

$$W_{m_1}(n;\, R_\nu) = \sum_{\substack{j \bmod m_1 N \\ j \equiv a_2 (N),\ (j,\, m_1) = 1}} e^{2\pi i \frac{jn + h\nu}{m_1 N}}$$

weiss man, dass

$$W_{m_1}(n;\, R_\nu) e^{2\pi i \frac{n \nu_2}{N}} = O\left(|m_1|^{\frac{3}{4} + \varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

für ein gewisses ν_2[1]; also ist stets

$$W_{m_1}(n; R_\nu) = O(|m_1|^{\frac{3}{4}+\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$, gleichmässig in n und m_1 (nicht in ν), und daher die Reihe (12) in allen Fällen für $\sigma > -\frac{1}{4}$ absolut konvergent.

Nun betrachten wir $H_3(0; \tau)$ und erhalten zunächst

$$(13) \qquad H_3(0; \tau) = N^{-2} \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1 (N) \\ m_1 \neq 0}} \frac{1}{m_1^2} \sum_{j \subset \Re(m_1)} e^{2\pi i \frac{h\nu}{m_1 N}} f^*\left(\frac{\tau}{N} + \frac{j}{m_1 N}\right),$$

wo

$$f^*(\omega) = \sum_{g=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left\{\frac{-2\pi i \nu}{N^2 m_1^2 (\omega + g)}\right\} - 1}{(\omega + g)^2}.$$

Für dieses $f^*(\omega)$ ergibt sich weiter

$$f^*(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} K_2^*(\mu_1, \mu_2) e^{2\pi i n \omega}$$

mit

$$K_2^*(\mu_1, \mu_2) = \int_{-\infty + i\alpha}^{+\infty + i\alpha} e^{-2\pi i \mu_1 x}\left(e^{-2\pi i \frac{\mu_2}{x}} - 1\right) \frac{dx}{x^2},$$

$$\alpha > 0, \quad \mu_1 = n, \quad \mu_2 = \frac{\nu}{N^2 m_1^2}.$$

Ersetzt man hier den Ausdruck $e^{-2\pi i \frac{\mu_2}{x}}$ durch die Exponentialreihe und vertauscht die Summation mit der Integration, so findet man eine Abschätzung

$$K_2^*(\mu_1, \mu_2) = O\left(\mu_1^2 |\mu_2| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|4\pi^2 \mu_1 \mu_2|^{m-1}}{m!(m+1)!}\right),$$

$$K_2^*(\mu_1, \mu_2) = O\left(\frac{n^2}{m_1^2}\right)$$

---

[1] Vgl. (J), § 1, p. 216 ff.

für $\mu \leqq c_1$, d. h. $|m_1| \geqq c_2 \sqrt{n}$. Eine Abschätzung in den Fällen $\mu > c_1$ folgt aus der Darstellung

$$K_2^*(\mu_1, \mu_2) = K_2(\mu_1, \mu_2) + 4\pi^2 n$$

und den Formeln (7) und (8):

$$K_2^*(\mu_1, \mu_2) = O(n) + O\left(\frac{n^2}{m_1^2}\right), \quad \nu > 0,$$

$$K_2^*(\mu_1, \mu_2) = O(n e^{c_3 \sqrt{n}}) = O\left(\frac{n^2}{m_1^2} e^{c_3 \sqrt{n}}\right), \quad \nu < 0,$$

für $\mu > c_1$, d. h. $0 < |m_1| < c_2 \sqrt{n}$. Auf Grund dieser Ungleichungen kann man in der Darstellung (13) nach Einführung der Fourierreihe für $f^*\left(\frac{\tau}{N} + \frac{j}{m_1 N}\right)$ die beiden Summationen vertauschen; man erhält

$$H_3(0; \tau) = N^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1(N) \\ m_1 \neq 0}} \frac{W_{m_1}(n; R_\nu)}{m_1^2} K_2^*\left(n, \frac{\nu}{N^2 m_1^2}\right) \right\} e^{2\pi i \frac{\tau}{N} n}$$

und daraus

$$G_{-2}(0; \tau; A, N; R_\nu) - e_0 \delta e^{2\pi i \frac{\tau + \xi}{N} \nu} = H_2(0; \tau) + H_3(0; \tau) =$$

$$= N^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1(N) \\ m_1 \neq 0}} \frac{W_{m_1}(n; R_\nu)}{m_1^2} K_2\left(n, \frac{\nu}{N^2 m_1^2}\right) \right\} e^{2\pi i \frac{\tau}{N} n}.$$

Der n-te Fourierkoeffizient a_n dieser Funktion lässt sich demnach in der Gestalt

$$a_n = a_n(A, N; R_\nu) = N^{-2} \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1(N) \\ m_1 \neq 0}} \frac{W_{m_1}(n; R_\nu)}{m_1^2} K_2\left(n, \frac{\nu}{N^2 m_1^2}\right)$$

schreiben. Genau wie in § 1 ergeben sich die Formeln

$$(14) \qquad a_n = \frac{-2\pi}{N\sqrt{\nu}} \cdot n^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1(N) \\ m_1 \neq 0}} \frac{W_{m_1}(n; R_\nu)}{|m_1|} J_1\left(4\pi \frac{\sqrt{\nu}}{N} \cdot \frac{\sqrt{n}}{|m_1|}\right)$$

für $\nu > 0$ und

$$a_n = \frac{-2\pi i}{N\sqrt{|\nu|}} \cdot n^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1(N) \\ m_1 \neq 0}} \frac{W_{m_1}(n; R_\nu)}{|m_1|} J_1\left(-4\pi i \frac{\sqrt{|\nu|}}{N} \cdot \frac{\sqrt{n}}{|m_1|}\right)$$

für $\nu < 0$. Wenn man im Falle $\nu < 0$ unter $\sqrt{\nu}$ die negativ-imaginäre Wurzel $-i\sqrt{|\nu|}$ versteht, so gilt die Formel (14) allgemein für $\nu \neq 0$. Damit ist gezeigt, dass unter der Voraussetzung

$$\Gamma_0 = \Gamma(N), \; r = 2, \; v(L) = 1 \text{ für alle } L \text{ aus } \Gamma(N)$$

genau die entsprechenden Darstellungen bestehen, wie sie in § 1 abgeleitet wurden.

§ 3.

Bei den nun folgenden Abschätzungen der Fourierkoeffizienten $a_{n+\eta}$ spielen die Kloostermanschen Summen eine wichtige Rolle. Im allgemeinen ist für diese die triviale Abschätzung

$$|W_{m_1}^{(r)}(n; v; A, \Gamma_0; R_\nu)| \leqq |m_1| N$$

die schärfste, die man kennt. In den oben erwähnten speziellen Fällen dagegen sind nicht-triviale Abschätzungen bewiesen worden, d. h. Abschätzungen von der Form

$$W_{m_1}^{(r)}(n; v; A, \Gamma_0; R_\nu) = O(|m_1|^\lambda) \tag{15}$$

mit einem festen $\lambda < 1$, welche gleichmässig in n und m_1 gelten. Wir wollen für das folgende eine Abschätzung (15) mit $\lambda \leqq 1$ voraussetzen, um die Fälle $r > 2$ und $r = 2$ gemeinsam behandeln zu können.

Zunächst zerlegen wir die Summe auf der rechten Seite der Gleichung (9) in zwei Bestandteile derart, dass

$$a_{n+\eta} = a'_{n+\eta} + a''_{n+\eta},$$

$$a'_{n+\eta} = N^{-r} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A) \\ 0 < |m_1| < c_2\sqrt{n+\eta}}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n; R_\nu)}{|m_1|^r} K_r\left(n+\eta, \frac{\nu+\varkappa}{NN'm_1^2}\right),$$

$$a''_{n+\eta} = N^{-r} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A) \\ |m_1| \geqq c_2\sqrt{n+\eta}}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n; R_\nu)}{|m_1|^r} K_r\left(n+\eta, \frac{\nu+\varkappa}{NN'm_1^2}\right).$$

Aus (4) folgt nun, wenn $n \to \infty$,

$$a''_{n+\eta} = O\left(n^{r-1} \sum_{m \geq c_2\sqrt{n+\eta}} \frac{1}{m^{r-\lambda}}\right) = O\left(n^{r-1}\, n^{-\frac{1}{2}(r-\lambda-1)}\right)$$

$$= O\left(n^{\frac{r-1+\lambda}{2}}\right).$$

Für das erste Glied $a'_{n+\eta}$ erhält man in den beiden Fällen $\nu+\varkappa>0$ und $\nu+\varkappa<0$ völlig verschiedene Grössenordnungen. Ist $\nu+\varkappa>0$, so zeigt (6), dass

$$K_r(\mu, \mu) = O(\varrho^{r-1}) = O\left((n+\eta)^{\frac{r-1}{2}} |m_1|^{r-1}\right).$$

Daher gilt für $n \to \infty$

$$a'_{n+\eta} = O\left(n^{\frac{r-1}{2}} \sum_{1 \leq m < c_2\sqrt{n+\eta}} \frac{1}{m^{1-\lambda}}\right) = O\left(n^{\frac{r-1}{2}} \cdot n^{\frac{\lambda}{2}}\right)$$

$$= O\left(n^{\frac{r-1+\lambda}{2}}\right),$$

falls $\lambda > 0$, also ingesamt

(16) $$a_{n+\eta} = O\left(n^{\frac{r-1+\lambda}{2}}\right)$$

für $\nu+\varkappa>0$, $\lambda>0$, $n \to \infty$.

Verwendet man an dieser Stelle die schärfere Ungleichung (5) anstelle von (6), so sieht man, dass für $\lambda>0$ kein schärferes Resultat herauskommt. Nur in dem sehr unwahrscheinlichen Fall, dass die Kloostermanschen Summen eine Abschätzung $O(|m_1|^{\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon>0$ gestatten, könnte man durch Benutzung von (5) unter Umständen eine geringfügige Verbesserung der Abschätzung erreichen, etwa von der Art, dass der Exponent einer Logarithmuspotenz erniedrigt wird.

Wenn man dagegen die Grössenordnung von $a'_{n+\eta}$ für $\nu+\varkappa<0$ ermitteln will, so muss man die Aussage (5) über die Besselfunktionen negativ-imaginären Arguments heranziehen. Danach hat das einzelne Glied in der Summe

$$a'_{n+\eta} = C(n+\eta)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{R}(A) \\ 0<|m_1|<c_2\sqrt{n+\eta}}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n;\, R_\nu)}{|m_1|} J_{r-1}\left(-4\pi i \sqrt{\frac{|\nu+\varkappa|}{NN'}} \frac{\sqrt{n+\eta}}{|m_1|}\right)$$

die Grössenordnung

$$(n+\eta)^{\frac{r-1}{2}-\frac{1}{4}} e^{c_4\sqrt{n+\eta}}, \quad c_4>0,$$

vorausgesetzt natürlich, dass die Kloostermansche Summe $W_{m_1}(n; R_\nu)$ für das betreffende Glied nicht verschwindet; es lässt sich aber auch leicht zeigen, dass die ganze Summe und damit $a_{n+\eta}$, wenigstens für die n in einer gewissen arithmetischen Progression, diese Grössenordnung besitzt. Um dies einzusehen, ordnen wir den vollständigen Ausdruck

$$a_{n+\eta} = C(n+\eta)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A) \\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n; R_\nu)}{|m_1|} J_{r-1}\left(-4\pi i \sqrt{\frac{|\nu+\varkappa|}{NN'}} \frac{\sqrt{n+\eta}}{|m_1|}\right)$$

nach wachsenden $|m_1|$, indem wir folgende Festsetzung treffen: Es bezeichne m eine natürliche Zahl. Wenn

1) weder m noch $-m$ in $\mathfrak{K}(A)$ liegt, so sei

$$X_m = X_m(n; A; R_\nu) = 0.$$

2) Wenn $m \subset \mathfrak{K}(A)$, nicht aber $-m$, so sei

$$X_m = X_m(n; A; R_\nu) = \sigma_m W_m^{(r)}(n; v; A, \Gamma_0; R_\nu).$$

3) Wenn $-m \subset \mathfrak{K}(A)$, nicht aber m, so sei

$$X_m = X_m(n; A; R_\nu) = \sigma_{-m} W_{-m}^{(r)}(n; v; A, \Gamma_0; R_\nu).$$

4) Wenn sowohl m als auch $-m$ in $\mathfrak{K}(A)$ liegt, so sei

$$X_m = X_m(n; A; R_\nu) = \sigma_m W_m^{(r)}(n; v; A, \Gamma_0; R_\nu) + \sigma_{-m} W_{-m}^{(r)}(n; v; A, \Gamma_0; R_\nu).$$

Aus diesen Festsetzungen folgt

$$(17) \qquad a_{n+\eta} = C(n+\eta)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_m(n; A; R_\nu)}{m} J_{r-1}\left(-4\pi i \sqrt{\frac{|\nu+\varkappa|}{NN'}} \frac{\sqrt{n+\eta}}{m}\right).$$

Wären nun sämtliche Grössen $X_m = X_m(n; A; R_\nu) = 0$ für alle natürlichen m und alle $n \geqq 0$ mit $n+\eta > 0$, so würde sich die Funktion $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma_0; R_\nu)$ und entsprechend $G_{-2}(0; \tau; A, N; R_\nu)$ auf einen Ausdruck der Form $C' e^{2\pi i(\nu+\varkappa)\frac{\tau}{N}}$ mit konstantem C' reduzieren, was mit der Invarianzeigenschaft dieser Funktionen offenbar nur verträglich ist, wenn C' verschwindet. Dies aber würde der Tatsache widersprechen, dass die in Rede stehenden Funktionen in einer Spitze einen Pol haben. Es gibt also ein kleinstes $n > 0$, sodass $X_m(n; A, R_\nu) \neq 0$ für gewisse natürliche m. Wir fixieren dieses minimale $n = n_0 > 0$ und dazu dasjenige $m = m_0$, für welches

$$X_m(n_0; A; R_\nu) = 0, \quad \text{wenn } 1 \leqq m < m_0, \quad X_{m_0}(n_0; A; R_\nu) \neq 0.$$

Nun folgt aus der Definition der verallgemeinerten Kloostermanschen Summen unmittelbar, dass

$$X_m(n_1; A; R_\nu) = X_m(n_2; A; R_\nu), \text{ falls } n_1 \equiv n_2 (m N),$$

und hieraus ergibt sich

$$X_m(n; A; R_\nu) = 0 \quad \text{für} \quad n \equiv n_0 (m_0!\, N), \quad 1 \leqq m < m_0,$$
$$X_{m_0}(n; A; R_\nu) \neq 0 \quad \text{für} \quad n \equiv n_0 (m_0!\, N).$$

In den $n \equiv n_0(m_0!\, N)$ ist die gesuchte arithmetische Progression gefunden. Der mit einem solchen n gebildete Ausdruck $a_{n+\eta}$ genügt einer Abschätzung

$$\begin{aligned} a_{n+\eta} &= C(n+\eta)^{\frac{r-1}{2}} \frac{X_{m_0}(n_0; A, R_\nu)}{m_0} \cdot \\ (18) \qquad &\cdot b_r \cdot \sqrt[4]{\frac{NN'}{|\nu+\varkappa|}} \frac{\sqrt{m_0}}{\sqrt[4]{n+\eta}} e^{\frac{4\pi}{m_0}\sqrt{\frac{|\nu+\varkappa|}{NN'}}\sqrt{n+\eta}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n+\eta}}\right)\right) \\ &= C_2 (n+\eta)^{\frac{r}{2}-\frac{3}{4}} e^{c_4\sqrt{n+\eta}} \left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right), \quad C_2 \neq 0, \quad c_4 > 0, \end{aligned}$$

wenn $\nu + \varkappa < 0$, $n \equiv n_0(m_0!\, N)$, $n \to \infty$. Andererseits ist

$$(19) \quad a_{n+\eta} = C(n+\eta)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A) \\ 0 < |m_1| < c_2\sqrt{n+\eta}}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n; R_\nu)}{|m_1|} J_{r-1}\left(-4\pi i \sqrt{\frac{|\nu+\varkappa|}{NN'}} \frac{\sqrt{n+\eta}}{|m_1|}\right) + \\ + O\left(n^{\frac{r-1+\lambda}{2}}\right)$$

für $\nu + \varkappa < 0$, beliebiges $c_2 > 0$, $n \to \infty$.

Mit denselben Schlüssen lässt sich beweisen, dass auch die Fourierkoeffizienten einer Linearkombination aus endlich vielen der $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma_0; R_\nu)$, $\nu + \varkappa < 0$, bzw. $G_{-2}(0; \tau; A, N; R_\nu)$, $\nu < 0$, einer Abschätzung (18) genügen. Man betrachte eine solche Linearkombination, deren Elemente G_{-r} bzw. G_{-2} sich nur in der Wahl von A und ν unterscheiden, also einen Ausdruck

$$\Delta(\tau)=\sum_{i=1}^{l} P_i G_{-r}(\tau;\ v;\ A_i,\ \Gamma_0;\ R_{\nu_i}),\quad \nu_i+\varkappa_i<0$$

bzw.

$$\Delta(\tau)=\sum_{i=1}^{l} P_i G_{-2}(0;\ \tau;\ A_i,\ N;\ R_{\nu_i}),\quad \nu_i<0$$

mit konstanten P_i. Bei allen diesen Funktionen G_{-r} bzw. G_{-2} stimmen die Werte N und η für die verschiedenen i miteinander überein; jedoch können die bei der i-ten Funktion auftretenden Zahlen N'_i, $\varkappa_i$, ν_i für verschiedene i verschieden ausfallen. Aus (17) erhält man zunächst durch Bildung der Linearkombination auf beiden Seiten der Gleichung eine Entwicklung für den Fourierkoeffizienten $a^*_{n+\eta}$ von $\Delta(\tau)$, $n+\eta>0$. Diese Entwicklung ordnet man nicht nach wachsenden m, sondern so, dass alle Glieder mit gleichen $\sqrt{\frac{|\nu_i+\varkappa_i|}{NN'_i}}\cdot\frac{1}{m}$ zusammengefasst werden. Bedeuten

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_g,\ \ldots;\ \lambda_g>\lambda_{g+1},$$

die verschiedenen unter den positiven Zahlen

$$\sqrt{\frac{|\nu_i+\varkappa_i|}{NN'_i}}\cdot\frac{1}{m},\quad 1\leqq i\leqq l,\ m=1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

so ergibt sich eine Darstellung der Form

$$a^*_{n+\eta}=(n+\eta)^{\frac{r-1}{2}}\sum_{g=1}^{\infty} Y_g(n) J_{r-1}(-4\pi i\lambda_g\sqrt{n+\eta}),$$

wo $Y_g(n)$ sich aus endlich vielen, nämlich höchstens l der $\frac{X_m(n;\ A_i;\ R_{\nu_i})}{m}$ in einer von n unabhängigen Weise linear kombiniert; die dabei verwendeten m sollen mit $m_1(g)$, $m_2(g)$, $\ldots$, $m_k(g)$ bezeichnet werden, $(k\leqq l)$. Nunmehr schliesst man wie oben, dass zunächst $Y_g(n)$ nicht identisch in g und n verschwinden kann, wenn $\Delta(\tau)$ nicht identisch verschwindet. (Übrigens muss die Funktion $\Delta(\tau)$ wirklich mindestens einen Pol in einer Spitze aufweisen, wenn sie nicht identisch verschwindet.) Dann wählt man das minimale $n=n_0\geqq 0$ $(n+\eta>0)$ mit einem dazu gehörigen natürlichen $g=g_0$, sodass

$$Y_g(n_0)=0 \text{ für } 1\leqq g<g_0,\quad Y_{g_0}(n_0)\neq 0.$$

Aus $Y_g(n_1) = Y_g(n_2)$, wenn $n_1 \equiv n_2 (m_1(g) \cdot m_2(g) \ldots m_k(g) \cdot N)$, erschliesst man die Existenz einer natürlichen Zahl K mit der Eigenschaft

$$Y_g(n) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq g < g_0, \; n \equiv n_0(KN)$$

$$Y_{g_0}(n) \neq 0 \quad \text{für} \quad n \equiv n_0(KN).$$

Jetzt folgt

$$a^*_{n+\eta} = C_3 (n+\eta)^{\frac{r}{2} - \frac{3}{4}} e^{c_5 \sqrt{n+\eta}} \left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right), \quad C_3 \neq 0, \; c_5 > 0 \tag{20}$$

für $n \equiv n_0(KN)$, $n \to \infty$.

Zusammenfassend hat sich also ergeben:

Satz 1.

Es sei Γ_0 eine beliebige Untergruppe der Modulgruppe $\Gamma(1)$, von endlichem oder unendlichem Index; Γ_0 sei jedoch selbst Grenzkreisgruppe. Ferner sei $r \geqq 2$ und $v(L)$ ein Multiplikatorsystem von der Dimension $-r$ für die L aus Γ_0, derart, dass $|v(L)| = 1$ für $L \subset \Gamma_0$. Wenn $r = 2$ ist, werde einschränkend vorausgesetzt, dass $\Gamma_0 = \Gamma(N)$, $v(L) = 1$ für alle L aus $\Gamma(N)$. Um die Entwicklungskoeffizienten der Funktionen

$$G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma_0; R_\nu) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A; \Gamma_0)} \frac{e^{2\pi i \frac{M\tau}{N'}(\nu+\varkappa)}}{v(M)(m_1\tau + m_2)^r}, \quad r > 2$$

und

$$G_{-2}(0; \tau; A, N; R_\nu) = \text{Wert der analytischen Funktion}$$

$$G_{-2}(s; \tau; A, N; R_\nu) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A; \Gamma(N))} \frac{e^{2\pi i \frac{M\tau}{N}\nu}}{(m_1\tau + m_2)^2 |m_1\tau + m_2|^s}$$

von s im Punkte $s = 0$ nach Potenzen von $e^{2\pi i \frac{\tau}{N}}$ zu erhalten, spalten wir von diesen Ausdrücken das Glied mit $m_1 = 0$ ab, falls ein solches existiert. Die Fourierentwicklung der genannten Funktionen gewinnt dann die Gestalt

$$\frac{e_0 \delta e^{2\pi i \frac{\tau+\xi}{N}(\nu+\varkappa)}}{v(\pm U^\xi)(\pm 1)^r} + \sum_{n+\eta>0} a_{n+\eta} e^{2\pi i \frac{\tau}{N}(n+\eta)},$$

wo für $\nu + \varkappa \neq 0$

$$a_{n+\eta} = C(n+\eta)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{R}(A) \\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n; R_\nu)}{|m_1|} J_{r-1}\left(4\pi \sqrt{\frac{\nu+\varkappa}{NN'}} \frac{\sqrt{n+\eta}}{|m_1|}\right). \tag{21}$$

Hier bezeichnet C eine gewisse Konstante [Gleichung (10), (11)], $W_{m_1}(n;\, R_\nu)$ eine der verallgemeinerten Kloostermanschen Summen

$$W_{m_1}(n;\, R_\nu) = W_{m_1}^{(r)}(n;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_\nu) = \sum_{j \subset \Re(m_1)} \frac{e^{2\pi i \frac{j(n+\eta)}{m_1 N} + 2\pi i \frac{h(\nu+\varkappa)}{m_1 N'}}}{\cdot\, v(m_1, j)}$$

und $J_{r-1}(z)$ die Besselsche Funktion des Index $r-1$. Für $\nu + \varkappa < 0$ ist $\sqrt{\nu + \varkappa}$ als $-i\sqrt{|\nu + \varkappa|}$ definiert; die übrigen hier auftretenden Symbole sind zu Beginn des § 1 erklärt. Zur genaueren Untersuchung dieser $a_{n+\eta}$ werde

$$W_{m_1}^{(r)}(n;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_\nu) = O(|m_1|^\lambda)$$

mit einem festen positiven $\lambda \leqq 1$ für festes Γ_0, r, v, A, ν und gleichmässig für wachsendes $|m_1|$, n vorausgesetzt. Dann gilt für $n \to \infty$

$$a_{n+\eta} = O\left(n^{\frac{r-1+\lambda}{2}}\right), \text{ falls } \nu + \varkappa > 0;$$

ferner, falls $\nu + \varkappa < 0$,

$$a_{n+\eta} = C(n+\eta)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \subset \Re(A) \\ 0 < |m_1| < c_2\sqrt{n+\eta}}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n;\, R_\nu)}{|m_1|} \cdot$$

$$\cdot\, J_{r-1}\left(-4\pi i \sqrt{\frac{|\nu + \varkappa|}{N N'}}\, \frac{\sqrt{n+\eta}}{|m_1|}\right) + O\left(n^{\frac{r-1+\lambda}{2}}\right)$$

für $n \to \infty$ und jedes beliebige aber feste $c_2 > 0$; darüber hinaus besteht, wenigstens wenn n innerhalb einer gewissen arithmetischen Progression ins Unendliche läuft, eine Abschätzung

$$a_{n+\eta} = C_2(n+\eta)^{\frac{r}{2} - \frac{3}{4}} e^{c_4\sqrt{n+\eta}}\left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right), \quad (\nu + \varkappa < 0);$$

$C_2 \neq 0$ und $c_4 > 0$ sind Konstanten. Bezeichnet $\varDelta(\tau)$ eine beliebige (nicht identisch verschwindende) Linearkombination von endlich vielen der Funktionen

$$G_{-r}(\tau;\, v;\, A_i,\, \Gamma_0;\, R_{\nu_i}) \text{ bzw. } G_{-2}(0;\, \tau;\, A_i,\, N;\, R_{\nu_i}),\quad \nu_i + \varkappa_i < 0,\quad 1 \leqq i \leqq l,$$

und $a^*_{n+\eta}$ den Fourierkoeffizienten mit der Nummer $n + \eta > 0$ von $\varDelta(\tau)$, so gilt auch für diesen eine Abschätzung

$$a^*_{n+\eta} = C_3(n+\eta)^{\frac{r}{2} - \frac{3}{4}} e^{c_5\sqrt{n+\eta}}\left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right) \quad .$$

mit konstanten $C_3 \neq 0$, $c_5 > 0$, falls n innerhalb einer gewissen arithmetischen Progression ins Unendliche läuft. —

Diese Tatsachen gewinnen eine besondere Bedeutung für die Untergruppen Γ_0 von endlichem Index innerhalb $\Gamma(1)$, weil man weiss, dass sich in diesem Falle jede Modulform, welche im Innern der oberen Halbebene regulär ist, aus den $G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma_0; R_\nu)$ bzw. $G_{-2}(0; \tau; A, N; R_\nu)$, ν ganz rational, linear zusammensetzen lässt.[1] Übrigens benötigt man hierzu von denjenigen dieser Funktionen, deren $\nu + \varkappa > 0$ ist, nur eine beschränkte Anzahl. Es gilt also mit den Bezeichnungen von Satz 1:

Satz 2.

Ist Γ_0 von endlichem Index innerhalb $\Gamma(1)$, $f(\tau)$ eine zu Γ_0 und dem Multiplikatorsystem v gehörige Modulform der Dimension $-r$, so lassen sich die Koeffizienten $c_{n+\eta}$, $n+\eta > 0$, der nach Potenzen von $e^{2\pi i \frac{\tau}{N}}$ fortschreitenden Reihe für $f(\tau)$ aus endlich vielen der Ausdrücke (21) für die $a_{n+\eta}$ und aus den Entwicklungskoeffizienten

$$(22) \qquad e_{n+\eta}(A) = \frac{(2\pi)^r e^{-\frac{\pi i r}{2}}}{N^r \Gamma(r)} (n+\eta)^{r-1} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A) \\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1}}{|m_1|^r} \sum_{j \subset \mathfrak{R}(m_1)} \frac{e^{2\pi i \frac{j(n+\eta)}{m_1 N}}}{v(m_1, j)}$$

der Eisensteinreihen

$$G_{-r}(\tau; v; A, \Gamma_0; 1), \ \varkappa = 0, \ (r > 2),$$

in einer von n unabhängigen Weise linear zusammensetzen. Im Falle $r = 2$ treten gewisse Teilersummen, die Entwicklungskoeffizienten der $\wp$-Teilwerte an die Stelle der $e_{n+\eta}(A)$.[2] Von den Ausdrücken (21) mit $\nu + \varkappa > 0$ und den $e_{n+\eta}(A)$, bzw. diesen Teilersummen benötigt man nur eine beschränkte Anzahl. Verschwindet $f(\tau)$ in allen Spitzen, so lässt sich $c_{n+\eta}$ als Linearkombination einer festen Anzahl der $a_{n+\eta} = a_{n+\eta}(A)$ mit $\nu + \varkappa > 0$ schreiben, und es gilt

$$c_{n+\eta} = O\left(n^{\frac{r-1+\lambda}{2}}\right), \quad n \to \infty.$$

Ist dagegen $f(\tau)$ in allen Spitzen regulär, ohne in allen Spitzen zu verschwinden, so tritt zu einer Linearkombination der $a_{n+\eta}$, $\nu + \varkappa > 0$, von der genannten

---

[1] (F), Satz I und II.

[2] l. c., S. 170, N. 1. Satz 5, p. 209.

Art eine solche der endlich vielen $e_{n+\eta}(A)$ bzw. der diesen im Falle $r=2$ entsprechenden Teilersummen hinzu, und es besteht also eine Abschätzung

$$c_{n+\eta} = e^*_{n+\eta} + O\left(n^{\frac{r-1+\lambda}{2}}\right), \quad n \to \infty,$$

wo $e^*_{n+\eta}$ diese letzterwähnte Linearkombination bedeutet. Ist schliesslich $f(\tau)$ nicht in allen Spitzen regulär, so gehen die $a_{n+\eta}(A)$ mit $\nu + \varkappa < 0$ in den Ausdruck für $c_{n+\eta}$ ein, und man erhält zunächst für die n einer gewissen arithmetischen Progression

$$c_{n+\eta} = C_3 (n+\eta)^{\frac{r}{2}-\frac{3}{4}} e^{c_5\sqrt{n+\eta}}\left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right), \quad n \to \infty,$$

wo $C_3 \neq 0$ und $c_5 > 0$ gewisse Konstanten bezeichnen. Eine genauere Darstellung entsteht in diesem Falle, wenn man diejenige Linearkombination $\mathcal{A}(\tau)$ der

$$G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_\nu),\ \nu + \varkappa < 0, \text{ bzw. } G_{-2}(0;\, \tau;\, A,\, N;\, R_\nu),\ \nu < 0,$$

aufsucht, für die $f(\tau) - \mathcal{A}(\tau)$ eine ganze Modulform ist. Diesem $\mathcal{A}(\tau)$ entspricht eine in gleicher Weise gebildete Linearkombination $a^*_{n+\eta}$ der

$$a'_{n+\eta}(A) = C(n+\eta)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{R}(A) \\ 0 < |m_1| < c_2\sqrt{n+\eta}}} \frac{\sigma_{m_1} W_{m_1}(n;\, R_\nu)}{|m_1|} \cdot J_{r-1}\left(-4\pi i \sqrt{\frac{|\nu+\varkappa|}{NN'}\,\frac{\sqrt{n+\eta}}{|m_1|}}\right), \quad \nu + \varkappa < 0,$$

derart dass

$$c_{n+\eta} = a^*_{n+\eta} + e^*_{n+\eta} + O\left(n^{\frac{r-1+\lambda}{2}}\right), \quad r \to \infty. -$$

Die Tatsache, dass sich jede algebraische Funktion eines algebraischen Gebildes aus Integralen erster und zweiter Gattung linear zusammensetzen lässt, führt nun mit Hilfe von Satz 2 auch zu Darstellungen der Fourierkoeffizienten der Modulfunktionen N-ter Stufe, welche im Innern der oberen Halbebene regulär sind. Wir formulieren den aus diesem Zusammenhang entspringenden Sachverhalt gleich für die im Inneren der oberen Halbebene regulären allgemeinen Integrale zweiter Gattung der $\Gamma(N)$.

Satz 3.

Es bezeichne $\varphi(\tau)$ eine Modulfunktion oder ein allgemeines Integral zweiter Gattung der Stufe N; $\varphi(\tau)$ sei jedoch im Innern der oberen Halbebene regulär. Die Entwicklungskoeffizienten a_n, $n > 0$, der Funktion $\varphi(\tau)$ lassen sich in derselben Weise aus den Reihen

$$\frac{i}{\sqrt{\nu}} n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1 (N) \\ m_1 \neq 0}} \frac{W_{m_1}(n;\, R_\nu)}{|m_1|} J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{\nu}}{N} \cdot \frac{\sqrt{n}}{|m_1|}\right), \quad \nu \neq 0$$

linear kombinieren, wie sich die Form $\varphi'(\tau)$ von (-2)-ter Dimension aus den Funktionen $G_{-2}(0;\, \tau;\, A,\, N;\, R_\nu)$ linear kombiniert. Man benötigt also insbesondere nur beschränkt viele solcher Ausdrücke mit $\nu > 0$, deren Beitrag nach Satz 1 die Grössenordnung $O\left(n^{-\frac{1}{8}+\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$, aufweist. Bildet man hier diejenige Linearkombination $\varDelta(\tau)$ der $G_{-2}(0;\, \tau;\, A,\, N;\, R_\nu)$ mit $\nu < 0$, für welche $\varphi'(\tau) - \varDelta(\tau)$ eine ganze Form ist (die dann übrigens von selbst in allen Spitzen verschwindet), so entspricht diesem $\varDelta(\tau)$ eine in gleicher Weise gebildete Linearkombination a_n^* aus endlich vielen der Ausdrücke

$$\frac{-1}{\sqrt{|\nu|}} n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m_1 \equiv a_1 (N) \\ 0 < |m_1| < c_2 \sqrt{n}}} \frac{W_{m_1}(n;\, R_\nu)}{|m_1|} J_1\left(\frac{-4\pi i \sqrt{|\nu|}}{N} \frac{\sqrt{n}}{|m_1|}\right), \quad \nu < 0,$$

derart dass

$$a_n = a_n^* + O\left(n^{-\frac{1}{8}+\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Überdies ist für die n einer gewissen arithmetischen Progression

$$a_n = C_4 n^{-\frac{3}{4}} e^{c_5 \sqrt{n}} \left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right), \quad n \to \infty,$$

mit konstanten $C_4 \neq 0$ und $c_5 > 0$. —

Damit ist insbesondere gezeigt, dass die *Entwicklungskoeffizienten* a_n *eines im Innern der oberen Halbebene regulären Integrals zweiter Gattung* $\varphi(\tau)$ *der Stufe* N *durch Angabe der Hauptteile von* $\varphi(\tau)$ *in den Spitzen bis auf einen Fehler von der Grössenordnung* $O\left(n^{-\frac{1}{8}+\varepsilon}\right)$ *eindeutig bestimmt* sind. Der Näherungsausdruck a_n^* besteht aus jeweils endlich vielen, nämlich $O(\sqrt{n})$ Gliedern relativ einfacher Bauart. Befindet sich unter den a_n eine Teilfolge a_{n_i}, $i = 1, 2, \ldots$, ganzer rationaler Zahlen, so ist α_{n_i} zuletzt mit der zu $\alpha^*_{n_i}$ nächstgelegenen ganzen Zahl identisch. Diese Voraussetzung ist für die Folge aller Entwicklungskoeffizienten der absoluten Invariante $j(\tau)$ im wesentlichen erfüllt, indem $12^3 j(\tau)$ lauter ganzzahlige Entwicklungskoeffizienten besitzt. Man hat hier

$$j(\tau) = \frac{1}{12^3} e^{-2\pi i \tau} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi i n \tau},$$

wo $12^3 \alpha_n$ ganz rational ist. Andererseits zeigt eine einfache Betrachtung, dass

$$12^3 j'(\tau) = -\pi i\, G_{-2}(0;\, \tau;\, I,\, 1;\, R_{-1}),$$

woraus für $n \geqq 1$

$$\alpha_n = \frac{\pi i}{12^3} n^{-\frac{1}{2}} \sum_{m_1 \neq 0} \frac{W_{m_1}}{|m_1|} J_1\left(-4\pi i \frac{\sqrt{n}}{|m_1|}\right) \tag{23}$$

folgt. Dabei bezeichnet W_{m_1} den Ausdruck

$$W_{m_1} = \sum_{\substack{j \bmod m_1 \\ (j,\, m_1)=1}}{}' e^{2\pi i \frac{jn-h}{m_1}}, \quad hj \equiv 1\,(m_1).$$

Für alle n oberhalb einer gewissen festen Schranke gilt also

$$\alpha_n = \frac{1}{12^3} \gamma_n,$$

wo γ_n die zu

$$\pi i n^{-\frac{1}{2}} \sum_{0<|m_1|<c_2\sqrt{n}} \frac{W_{m_1}}{|m_1|} J_1\left(-4\pi i \frac{\sqrt{n}}{|m_1|}\right)$$

nächstgelegene ganze Zahl angibt. Über die Grössenordnung der α_n bei wachsendem n weiss man nach dem Vorangehenden, dass

$$\alpha_n = C_2 n^{-\frac{3}{4}} e^{c_4\sqrt{n}} \left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right) \tag{24}$$

mit konstanten $C_2 \neq 0$, $c_4 > 0$, wenn n die Zahlen einer gewissen arithmetischen Progession durchläuft.

§ 4.

Bei der nun folgenden Untersuchung über die summatorische Funktion $p_{n+\eta}$ der $a_{k+\eta}$, $0 < k + \eta \leqq n + \eta$, können wir uns insofern kurz fassen, als ein Teil der Rechnung bereits in (E), § 3 für das entsprechende Problem im Falle der Eisensteinreihen durchgeführt worden ist. Bezeichnet $f(\tau)$ die Funktion

$$f(\tau) = G_{-r}(\tau;\, v;\, A,\, \Gamma_0;\, R_\nu) - e_0\,\delta\,\frac{e^{2\pi i \frac{\tau+\xi}{N}(\nu+\varkappa)}}{v(\pm U^\xi)(\pm 1)^r} = \sum_{k+\eta>0} a_{k+\eta}\, e^{2\pi i \frac{\tau}{N}(k+\eta)},$$

wo $\nu + \varkappa > 0$, $r > 2$ vorausgesetzt wird, so betrachten wir die Ausdrücke

$$p_{n+\eta} = \sum_{0<k+\eta\leqq n+\eta} a_{k+\eta} = \int\limits_{i\alpha}^{N+i\alpha} \frac{f(\tau)\, e^{-2\pi i(n+\eta)\frac{\tau}{N}}\,\frac{d\tau}{N}}{1 - e^{2\pi i \frac{\tau}{N}}}$$

und erhalten für diese mit der oben erwähnten Methode die Darstellung

$$(25)\quad \begin{aligned} p_{n+\eta} = {} & \frac{-1}{2\pi i N^r}\, e_0\,\delta'\,\frac{\sigma_{\pm 1}\, e^{2\pi i \frac{\nu+\varkappa}{N'} h_0}}{v(\pm 1,\, 0)}\, K_{r+1}\left(n + \eta + \frac{1}{2},\, \frac{\nu+\varkappa}{NN'}\right) + \\ & + \frac{1}{2\pi i N^r} \sum_{g=0}^{k-1} \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{R}(A) \\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1} Z_{m_1}^{(g)}(n;\, R_\nu)}{|m_1|^r}\, K_{r-g}\left(n + \eta + \frac{1}{2},\, \frac{\nu+\varkappa}{NN'\, m_1^2}\right) + \Phi_{n+\eta}. \end{aligned}$$

Zur Erklärung der hier verwendeten Zeichen bedienen wir uns des Symbols

$$\sum_{m=0}^{\infty}{}^{*} (-1)^m \varphi(m) = \varphi(0) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\varphi(m) + \varphi(-m))$$

in allen Fällen, in denen die rechte Seite einen Sinn hat. Das Gegenteil, dass die rechte Seite keinen Sinn hat, wird im folgenden nur so zustande kommen, dass der Ausdruck $\varphi(0)$ sinnlos ist. In diesem Falle sei

$$\sum_{m=0}^{\infty}{}^{*} (-1)^m \varphi(m) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\varphi(m) + \varphi(-m)).$$

Nun werde das Restsystem $\mathfrak{R}(m_1)$ so gewählt, dass

$$0 \leqq j \leqq |m_1| N - 1,$$

wenn $j \subset \Re(m_1)$, $|m_1| \geqq 1$. Wir erklären

$$\delta' = \begin{cases} 1, \text{ wenn eine Matrix } \begin{pmatrix} \pm h_0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \subset A\,\Gamma_0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases},$$

$$k = \begin{cases} r - 2 \text{ für ganzes } r \\ [r] - 1 \text{ sonst} \end{cases}, \quad (k \geqq 1,\ r - k > 1),$$

$$s_{g+1}(z) = \sum_{m=0}^{\infty}{}^{*} (-1)^m \frac{1}{(z+m)^{g+1}}, \quad g \geqq 0$$

$$Z_{m_1}^{(g)}(n;\, R_\nu) = Z_{m_1}^{(r,\,g)}(n;\, v;\, A, \Gamma_0;\, R_\nu)$$

$$= \sum_{j \subset \Re(m_1)} \frac{\exp 2\pi i \left\{ \left(n + \eta + \frac{1}{2}\right) \frac{j}{m_1 N} + (\nu + \varkappa) \frac{h}{m_1 N'} \right\}}{v(m_1, j)}\, s_{g+1}\left(\frac{j}{m_1 N}\right),$$

(26)

$$\Phi_{n+\eta} = \frac{-1}{2\pi i N^r} \sum_{\substack{m_1 \subset \Re(A) \\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1}}{|m_1|^r} \sum_{j \subset \Re(m_1)} \frac{\exp 2\pi i \left\{ \left(n + \eta + \frac{1}{2}\right) \frac{j}{m_1 N} + (\nu + \varkappa) \frac{h}{m_1 N'} \right\}}{v(m_1, j)} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty}{}^{*} (-1)^m \frac{1}{\left(m + \frac{j}{m_1 N}\right)^k} H_{r-k}\left(n + \eta + \frac{1}{2},\ \frac{\nu + \varkappa}{N N' m_1^2};\ m + \frac{j}{m_1 N}\right),$$

$$H_{r-k}(\mu_1, \mu_2;\, \gamma) = \int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{e^{-2\pi i \mu_1 x - 2\pi i \frac{\mu_2}{x}}\, dx}{x^{r-k}(x - \gamma)},$$

$$\mu_1 = n + \eta + \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{\nu + \varkappa}{N N' m_1^2}, \quad \gamma = m + \frac{j}{m_1 N} \neq 0, \quad \alpha > 0.$$

Wir setzen dementsprechend

$$\varrho = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{N N'}{\nu + \varkappa}}\, |m_1| \sqrt{n + \eta + \frac{1}{2}},$$

$$\mu = \sqrt{\mu_1 \mu_2} = \sqrt{\frac{\nu + \varkappa}{N N'}}\, \frac{\sqrt{n + \eta + \frac{1}{2}}}{|m_1|}$$

und erschliessen aus (25) durch eine kleine Rechnung

$$
\begin{aligned}
p_{n+\eta} = {} & B_{-1}\, e_0\, \delta' \frac{\sigma_{\pm 1}\, e^{2\pi i \frac{\nu+\varkappa}{N'} h_0}}{v(\pm 1, 0)} \left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} J_r \left(4\pi \sqrt{\frac{\nu+\varkappa}{NN'}} \sqrt{n + \eta + \frac{1}{2}}\right) - \\
(27) \qquad & - \sum_{g=0}^{k-1} B_g \left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)^{\frac{r-g-1}{2}} \mathfrak{M}_g^{(r)}(n;\ R_\nu) + \Phi_{n+\eta}
\end{aligned}
$$

mit

$$
B_g = B_g^{(r)}(v;\ \Gamma_0;\ \nu) = \frac{N^{\frac{-r-g-1}{2}}\, N'^{\frac{r-g-1}{2}}}{(\nu+\varkappa)^{\frac{r-g-1}{2}}}\, e^{-\pi i \frac{r-g-1}{2}}
$$

für $g \geqq -1$ und

$$
\begin{aligned}
& \mathfrak{M}_g^{(r)}(n;\ R_\nu) = \mathfrak{M}_g^{(r)}(n;\ v;\ A,\ \Gamma_0;\ R_\nu) = \\
(28) \qquad & = \sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A) \\ m_1 \neq 0}} \frac{\sigma_{m_1} Z_{m_1}^{(g)}(n;\ R_\nu)}{|m_1|^{g+1}} J_{r-g-1} \left(4\pi \sqrt{\frac{\nu+\varkappa}{NN'}} \frac{\sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}}{|m_1|}\right).
\end{aligned}
$$

Über die Wachstumseigenschaften des ersten Gliedes in der Entwicklung (27) erhält man eine sehr genaue Aussage, wenn man die asymptotische Entwicklung für $J_r\left(c_0 \sqrt{n + \eta + \frac{1}{2}}\right)$, $c_0 = 4\pi \sqrt{\frac{\nu+\varkappa}{NN'}}$, heranzieht.[1] Diese hat die Gestalt

$$
J_r\left(c_0 \sqrt{n + \eta + \frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi c_0}} \left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} S_n + O\left(n^{-\frac{1}{4}-\frac{r}{2}}\right), \quad n \to \infty,
$$

wo in den Bezeichnungen des Watsonschen Buches

$$
\begin{aligned}
S_n = {} & \cos\left(c_0 \sqrt{n + \eta + \frac{1}{2}} - \frac{\pi}{2} r - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{0 \leqq m \leqq \frac{r}{2}} \frac{(-1)^m (r,\ 2m)}{(2c_0)^{2m}} \frac{1}{\left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)^m} \\
& - \sin\left(c_0 \sqrt{n + \eta + \frac{1}{2}} - \frac{\pi}{2} r - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{0 \leqq m \leqq \frac{r}{2}} \frac{(-1)^m (r,\ 2m+1)}{(2c_0)^{2m+1}} \frac{1}{\left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}}},
\end{aligned}
$$

---

[1] Siehe S. 186 Fussnote 3.

gibt also für das erste Glied

$$B_{-1}\, e_0\, \delta'\, \frac{\sigma_{+1}\, e^{2\pi i \frac{\nu+\varkappa}{N'} h_0}}{v(\pm 1, 0)} \left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} J_r\left(4\pi \sqrt{\frac{\nu+\varkappa}{NN'}} \sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}\right)$$

eine nach absteigenden Potenzen von $\left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)$ geordnete endliche Summe, die mit einem Ausdruck

$$\text{Const. } \cos\left(c_0 \sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{2} r - \frac{\pi}{4}\right) \left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}$$

beginnt, in der die Exponenten von $\left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)$ immer um $\frac{1}{2}$ fallen, und die mit einem Fehler der Grössenordnung $O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)$ endigt. Die genaueren Wachstumseigenschaften dieses ersten Gliedes in der Darstellung (27) liest man aus der obigen Formel ab.

Die übrigen Terme auf der rechten Seite der Gleichung (27) sind nicht entfernt einer derartig genauen Analyse fähig, wie jenes erste Glied es ist. Wir müssen uns im folgenden damit benügen, sie nach oben abzuschätzen. Zu diesem Zwecke stelle man zunächst fest, dass

$$Z_{m_1}^{(0)}(n;\, R_\nu) = O\left(|m_1| \log |m_1|\right) \text{ für } |m_1| \geqq 2$$

$$Z_{m_1}^{(g)}(n;\, R_\nu) = O\left(|m_1|^{g+1}\right) \text{ für } g > 0 \text{ und für } m_1 = \pm 1,\, g = 0.$$

Ferner entnimmt man aus (4), § 1 die Abschätzung

$$K_{r-g}(\mu_1, \mu_2) = O\left(\mu_1^{\,r-g-1}\right) = O\left(n^{r-g-1}\right),\quad n \to \infty,$$

für $\mu \leqq c_1$, d. h. für $|m_1| \geqq c_2 \sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}$. In den Fällen $|m_1| < c_2 \sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}$ kommen wir mit

$$J_{r-g-1}(4\pi\mu) = O(1)$$

aus. Nun ergibt sich nach den Schlüssen von § 3, wenn $n \to \infty$,

$$\sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}\, A) \\ |m_1| \geqq c_2 \sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}}} \frac{\sigma_{m_1}\, Z_{m_1}^{(g)}(n;\, R_\nu)}{|m_1|^r}\, K_{r-g}\left(n+\eta+\frac{1}{2},\, \frac{\nu+\varkappa}{NN'\, m_1^2}\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} O\left(n^{\frac{r}{2}} \log n\right) & \text{für } g = 0 \\ O\left(n^{\frac{r-g}{2}}\right) & \text{für } g > 0 \end{array} \right\}$$

und

$$\sum_{\substack{\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{R}(A) \\ 0 < |\mathfrak{m}_1| < c_2 \sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}}} \frac{\sigma_{\mathfrak{m}_1} Z^{(g)}_{\mathfrak{m}_1}(n;\, R_\nu)}{|\mathfrak{m}_1|^{g+1}} J_{r-g-1}\left(4\pi \sqrt{\frac{\nu+\varkappa}{NN'}} \frac{\sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}}{|\mathfrak{m}_1|}\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} O\left(\sum\limits_{0<m<c_2\sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}} \log m\right) = O\left(n^{\frac{1}{2}} \log n\right) & \text{für } g = 0 \\ O\left(\sum\limits_{0<m<c_2\sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}} 1\right) = O\left(n^{\frac{1}{2}}\right) & \text{für } g > 0 \end{array} \right\}.$$

Damit ist bewiesen, dass

$$\mathfrak{M}^{(r)}_g(n;\, R_\nu) = \left\{ \begin{array}{ll} O\left(n^{\frac{1}{2}} \log n\right) & \text{für } g = 0, \\ O\left(n^{\frac{1}{2}}\right) & \text{für } g > 0, \end{array} \right\} n \to \infty. \tag{29}$$

Man sieht überdies, dass die Benutzung der schärferen Abschätzung

$$J_{r-g-1}(4\pi\mu) = O\left(\mu^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{für } \mu \geqq c_1$$

oder gar der asymptotischen Entwicklung von $J_{r-g-1}(4\pi\mu)$ nach fallenden Potenzen von μ kein besseres Resultat liefert.

Es erübrigt demnach, die Grössenordnung des Fehlergliedes $\Phi_{n+\eta}$ zu untersuchen. Wir werden beweisen, dass

$$\Phi_{n+\eta} = \left\{ \begin{array}{ll} O(n \log n) & \text{für ganzes } r \\ O(n) & \text{für nicht-ganzes } r \end{array} \right\}. \tag{30}$$

Das bedeutet, dass die Grössenordnung von $\Phi_{n+\eta}$ noch unterhalb der eben hergeleiteten Schranke für die Grössenordnung des letzten, vermutlich niedrigsten Gliedes in der $\sum\limits_{g=0}^{k-1}$ gelegen ist; denn für dieses Glied ist $g = k - 1$, also

$$\left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)^{\frac{r-k}{2}}\mathfrak{M}_{k-1}^{(r)}(n;\,R_\nu)=O\left(n^{\frac{r-k+1}{2}}\right)$$

für $k>1$, d. h. $r>3$; und

$$\left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)^{\frac{r-k}{2}}\mathfrak{M}_{k-1}^{(r)}(n;\,R_\nu)=O\left(n^{\frac{r}{2}}\log n\right)$$

für $k=1$, d. h. $2<r\leqq 3$. Der Exponent von n in dem O-Term ist jedenfalls $\frac{3}{2}$ für ganzes r und $1+\frac{r-[r]}{2}$ für nicht-ganzes r, mithin stets grösser als 1.

Wir setzen nun für das folgende zur Abkürzung

$$s=r-k=\left\{\begin{matrix} 2 & \text{für ganzes } r \\ 1+r-[r] & \text{für nicht-ganzes } r\end{matrix}\right\},$$

$$E_s\left(\mu_1,\,\mu_2;\,\frac{j}{m_1 N}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}{}^{*}\frac{(-1)^m}{\left(m+\frac{j}{m_1 N}\right)^k}H_s\left(\mu_1,\,\mu_2;\,m+\frac{j}{m_1 N}\right)$$

und haben zunächst das Integral

$$H_s(\mu_1,\,\mu_2;\,\gamma)=\int\limits_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}\frac{e^{-2\pi i\mu_1 x-2\pi i\frac{\mu_2}{x}}\,dx}{x^s(x-\gamma)},\quad \gamma=\pm m+\frac{j}{m_1 N},$$

zu untersuchen. Wir denken uns die komplexe x-Ebene längs der negativ-imaginären Achse aufgeschnitten und bezeichnen mit S_β bzw. S'_β einen Weg in der aufgeschnittenen Ebene, welcher aus einem Kreise um den Nullpunkt und den beiden Schnittufern von dem tiefsten Punkt des Kreises an abwärts besteht. S'_β sei so gewählt, dass die reelle Zahl β im Innern des Kreises von S'_β liegt; dagegen liege β ausserhalb des Kreises von S_β. Beide Wege seien mit dem positiven Umlaufssinn versehen. Es wird zunächst

$$H_s(\mu_1,\,\mu_2;\,\gamma)=-\int\limits_{S'_\gamma}\frac{e^{-2\pi i\mu_1 x-2\pi i\frac{\mu_2}{x}}\,dx}{x^s(x-\gamma)}=$$

$$=-\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-2\pi i\mu_2)^p}{p!}\int\limits_{S'_\gamma}\frac{e^{-2\pi i\mu_1 x}\,dx}{x^{p+s}(x-\gamma)}=-\mu_1^s\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-2\pi i\mu_1\mu_2)^p}{p!}\int\limits_{S'_{\mu_1\gamma}}\frac{e^{-2\pi i x}\,dx}{x^{p+s}(x-\mu_1\gamma)}\,.$$

Jetzt setzen wir $\mu \leqq c_1$ und $\mu_1|\gamma| \leqq 2$ voraus und wählen 3 als Radius des Kreises von $S'_{\mu_1\gamma}$. Dann kommt

$$H_s(\mu_1, \mu_2; \gamma) = O\left(\mu_1^s \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2\pi}{3}\mu_1\mu_2\right)^p}{p!}\right) = O(\mu_1^s).$$

Wenn $\mu \leqq c_1$ und $\mu_1|\gamma| > 2$, so erhalten wir

$$H_s(\mu_1, \mu_2; \gamma) = -2\pi i \frac{e^{-2\pi i\mu_1\gamma - 2\pi i\frac{\mu_2}{\gamma}}}{\gamma^s} - \int\limits_{S_\gamma} \frac{e^{-2\pi i\mu_1 x - 2\pi i\frac{\mu_2}{x}}dx}{x^s(x-\gamma)}.$$

Als Radius des Kreises von $S_{\mu_1\gamma}$ wählen wir nun die Einheit. Dann gilt auf $S_{\mu_1\gamma}$

$$|x - \mu_1\gamma| \geqq \frac{1}{2}\mu_1|\gamma|$$

und hieraus folgt

$$H_s(\mu_1, \mu_2; \gamma) = O\left(\frac{1}{|\gamma|^s}\right) + O\left(\frac{\mu_1^{s-1}}{|\gamma|}\right) = O\left(\frac{\mu_1^{s-1}}{|\gamma|}\right).$$

Schliesslich sei $\mu > c_1$. Wir schreiben

$$H_s(\mu_1, \mu_2; \gamma) = \varrho^s H_s(\mu, \mu; \varrho\gamma)$$

mit

$$\varrho = \sqrt{\frac{NN'}{\nu + \varkappa}}|m_1|\sqrt{n + \eta + \frac{1}{2}}, \quad \gamma = \pm m + \frac{j}{m_1 N} + 0.$$

Da $|\gamma| \geqq \frac{1}{|m_1|N}$, so hat man $\varrho|\gamma| \geqq \sqrt{\frac{N'}{N(\nu+\varkappa)}}\sqrt{n + \eta + \frac{1}{2}}$; also ist für hinreichend grosses n die Ungleichung $\varrho|\gamma| > 2$ immer erfüllt. In der Darstellung

$$H_s(\mu, \mu; \varrho\gamma) = -2\pi i \frac{e^{-2\pi i\mu\varrho\gamma - 2\pi i\frac{\mu}{\varrho\gamma}}}{(\varrho\gamma)^s} - \int\limits_{S_{\varrho\gamma}} \frac{e^{-2\pi i\mu x - 2\pi i\frac{\mu}{x}}dx}{x^s(x-\varrho\gamma)}$$

wählen wir 1 als Radius des Kreises von $S_{\varrho\gamma}$. Dann gilt auf $S_{\varrho\gamma}$

$$|x - \varrho\gamma| \geqq \frac{1}{2}\varrho|\gamma|, \quad \left|e^{-2\pi i\mu x - 2\pi i\frac{\mu}{x}}\right| \leqq 1,$$

mithin ergibt sich die Abschätzung

$$H_s(\mu, \mu; \varrho\gamma) = O\left(\frac{1}{\varrho|\gamma|}\right), \text{ d. h. } H_s(\mu_1, \mu_2; \gamma) = O\left(\frac{\varrho^{s-1}}{|\gamma|}\right).$$

Zusammenfassend erkennen wir also

$$\begin{aligned}
&H_s(\mu_1, \mu_2; \gamma) = O(\mu_1^s) \text{ für } \mu \leqq c_1,\ \mu_1|\gamma| \leqq 2, \\
(31)\qquad &H_s(\mu_1, \mu_2; \gamma) = O\left(\frac{\mu_1^{s-1}}{|\gamma|}\right) \text{ für } \mu \leqq c_1,\ \mu_1|\gamma| > 2, \\
&H_s(\mu_1, \mu_2; \gamma) = O\left(\frac{\varrho^{s-1}}{|\gamma|}\right) \text{ für } \mu > c_1.
\end{aligned}$$

Man sieht nun, dass die Bedingung $\mu_1|\gamma| > 2$ für fast alle $\gamma = m' + \frac{j}{m_1 N}$, m' ganz rational, erfüllt ist, nämlich für alle γ, für die $m' \neq 0$ und $m' \neq -\operatorname{sgn} m_1$, wenn nur n hinreichend gross genommen wird. Für $m' = 0$ bedeutet $\mu_1|\gamma| \leqq 2$, dass

$$j \leqq \frac{2|m_1|N}{n + \eta + \frac{1}{2}}.$$

Wenn also

$$c_2\sqrt{n + \eta + \frac{1}{2}} \leqq |m_1| < \frac{n + \eta + \frac{1}{2}}{2N},$$

so ist stets $\mu_1|\gamma| > 2$, und daher

$$\begin{aligned}
E_s\left(\mu_1, \mu_2; \frac{j}{m_1 N}\right) &= O(\mu_1^{s-1}) + O\left(\mu_1^{s-1}|m_1|^{k+1}\left(\frac{1}{j^{k+1}} + \frac{1}{j'^{k+1}}\right)\right) \\
&= O\left(\mu_1^{s-1}|m_1|^{k+1}\left(\frac{1}{j^{k+1}} + \frac{1}{j'^{k+1}}\right)\right),
\end{aligned}$$

wo $j' = |m_1|N - j$ gesetzt wurde. Hieraus folgt, dass der entsprechende Teil der $\Phi_{n+\eta}$-Summe, nämlich

$$\sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A) \\ c_2\sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}} \leqq |m_1| < \frac{n+\eta+\frac{1}{2}}{2N}}} \frac{\sigma_{m_1}}{|m_1|^r} \sum_{j \subset \mathfrak{R}(m_1)} \frac{\exp 2\pi i\left\{\left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)\frac{j}{m_1 N} + (\nu + \varkappa)\frac{h}{m_1 N'}\right\}}{v(m_1, j)} \cdot E_s\left(\mu_1, \mu_2; \frac{j}{m_1 N}\right)$$

$$= O\left(n^{s-1} \sum_{c_2\sqrt{n} < m < n} \frac{1}{m^{s-1}}\right)$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} O(n \log n) & \text{für ganzes } r \\ O(n) & \text{für nicht-ganzes } r \end{array}\right\}.$$

Die Abschätzung des Teils der $\Phi_{n+\eta}$-Summe mit $|m_1| \geqq \dfrac{n+\eta+\frac{1}{2}}{2N}$ erfordert eine Einteilung der endlichen Summe über j, indem es sehr wesentlich darauf ankommt, ob $\mu_1|\gamma| \leqq 2$ ist oder nicht. Zunächst gilt für $m \neq 0, -\operatorname{sgn} m_1$

$$\frac{(-1)^m}{\left(m+\dfrac{j}{m_1 N}\right)^k} H_s\left(\mu_1, \mu_2; m+\frac{j}{m_1 N}\right) = O\left(\frac{\mu_1^{s-1}}{|m|^{k+1}}\right)$$

gleichmässig in j, m und den übrigen Variablen. Daher ist

$$\sum_{m=0}^{\infty}{}^{*\prime} \frac{(-1)^m}{\left(m+\dfrac{j}{m_1 N}\right)^k} H_s\left(\mu_1, \mu_2; m+\frac{j}{m_1 N}\right) = O(\mu_1^{s-1}) \tag{32}$$

mit der Bedeutung, dass allgemein

$$\sum_{m=0}^{\infty}{}^{*\prime} (-1)^m \varphi(m) = -\varphi(0) - (-1)^{\operatorname{sgn} m_1} \varphi(-\operatorname{sgn} m_1) + \sum_{m=0}^{\infty}{}^{*} (-1)^m \varphi(m)$$

$$\text{bzw.} = \quad -(-1)^{\operatorname{sgn} m_1} \varphi(-\operatorname{sgn} m_1) + \sum_{m=0}^{\infty}{}^{*} (-1)^m \varphi(m)$$

je nachdem $\varphi(0)$ einen Sinn hat oder nicht. Wenn aber etwa $m = 0$, so erhalten wir

$$\left(\frac{m_1 N}{j}\right)^k H_s\left(\mu_1, \mu_2; \frac{j}{m_1 N}\right) = O\left(\mu_1^s |m_1|^k \frac{1}{j^k}\right),$$

falls $\mu_1|\gamma| \leqq 2$, d. h. $j \leqq \dfrac{2|m_1|N}{n+\eta+\frac{1}{2}}$, und

$$\left(\frac{m_1 N}{j}\right)^k H_s\left(\mu_1, \mu_2; \frac{j}{m_1 N}\right) = O\left(\mu_1^{s-1} |m_1|^{k+1} \frac{1}{j^{k+1}}\right),$$

falls $j > \frac{2|m_1| N}{n+\eta+\frac{1}{2}}$. Entsprechendes gilt für das Glied mit $m = -\operatorname{sgn} m_1$, nur tritt dort $-j'$ an die Stelle von j. Ersichtlich kann man jetzt den Beitrag der $\sum\limits_{m=0}^{\infty}{}^{*\prime}$ gegenüber desjenigen der beiden letzteren Fehlerglieder vernachlässigen; so entsteht die Abschätzung

$$\sum_{j \subset \Re(m_1)} \frac{\exp 2\pi i \left\{\left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)\frac{j}{m_1 N} + (\nu+\varkappa)\frac{h}{m_1 N'}\right\}}{v(m_1, j)} E_s\left(\mu_1, \mu_2; \frac{j}{m_1 N}\right)$$

$$= O\left(\mu_1^s |m_1|^k \sum_{1 \leqq j \leqq \vartheta} \frac{1}{j^k}\right) + O\left(\mu_1^{s-1} |m_1|^{k+1} \sum_{\vartheta \leqq j \leqq |m_1| N-1} \frac{1}{j^{k+1}}\right)$$

mit $\vartheta = \frac{2|m_1| N}{n+\eta+\frac{1}{2}}$. Dieser Ausdruck ist nun weiter

$$= O(\mu_1^s |m_1|^k \log \vartheta) + O(\mu_1^s |m_1|^k) + O(\mu_1^{r-1} |m_1|)$$

$$= O\left(\mu_1^s |m_1|^k \log \frac{2N|m_1|}{\mu_1}\right) + O(\mu_1^s |m_1|^k),$$

sodass, wenn $\frac{\mu_1}{2N} = t$ gesetzt wird,

$$\sum_{\substack{m_1 \subset \Re(A) \\ |m_1| \geqq t}} \frac{\sigma_{m_1}}{|m_1|^r} \sum_{j \subset \Re(m_1)} \frac{\exp 2\pi i \left\{\left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)\frac{j}{m_1 N} + (\nu+\varkappa)\frac{h}{m_1 N'}\right\}}{v(m_1, j)} \cdot$$

$$\cdot E_s\left(\mu_1, \mu_2; \frac{j}{m_1 N}\right)$$

$$= O\left(n^s \sum_{m > t} \frac{\log \frac{m}{t}}{m^s}\right) + O\left(n^s \sum_{m \geqq t} \frac{1}{m^s}\right)$$

$$= O(n), \quad n \to \infty.$$

Schliesslich ergibt sich für $\mu > c_1$, d. h. $|m_1| < c_2 \sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}$

$$H_s(\mu_1, \mu_2; \gamma) = O\left(\frac{\varrho^{s-1}}{|\gamma|}\right) = O\left(\mu_1^{\frac{s-1}{2}} |m_1|^{s-1} \frac{1}{|\gamma|}\right),$$

$$E_s\left(\mu_1, \mu_2; \frac{j}{m_1 N}\right) = O\left(\mu_1^{\frac{s-1}{2}} |m_1|^{s-1+k+1} \left(\frac{1}{j^{k+1}} + \frac{1}{j'^{k+1}}\right)\right),$$

mithin

$$\sum_{\substack{m_1 \subset \mathfrak{K}(A) \\ 0 < |m_1| < c_2 \sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}}} \frac{\sigma_{m_1}}{|m_1|^r} \sum_{j \subset \mathfrak{R}(m_1)} \frac{\exp 2\pi i \left\{\left(n + \eta + \frac{1}{2}\right) \frac{j}{m_1 N} + (\nu + \varkappa) \frac{h}{m_1 N'}\right\}}{v(m_1, j)} \cdot E_s\left(\mu_1, \mu_2; \frac{j}{m_1 N}\right)$$

$$= O\left(\mu_1^{\frac{s-1}{2}} \sum_{0 < m < c_2 \sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}} 1\right) = O\left(n^{\frac{s}{2}}\right) = O(n), \quad n \to \infty.$$

Damit ist die Abschätzung (30) und insgesamt folgender Satz bewiesen:

Satz 4:

Bezeichnet $p_{n+\eta}$ die summatorische Funktion

$$p_{n+\eta} = p_{n+\eta}(A) = p_{n+\eta}^{(r)}(v; A, \Gamma_0; R_\nu) = \sum_{0 < k+\eta \leqq n+\eta} a_{k+\eta}^{(r)}(v; A, \Gamma_0; R_\nu)$$

der $a_{k+\eta} = a_{k+\eta}^{(r)}(v; A, \Gamma_0; R_\nu)$ aus Satz 1 mit $r > 2$, $\nu + \varkappa > 0$, so gilt eine asymptotische Entwicklung

$$p_{n+\eta} = B_{-1} e_0 \delta' \frac{\sigma_{\pm 1} e^{2\pi i \frac{\nu+\varkappa}{N'} h_0}}{v(\pm 1, 0)} \left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} J_r\left(4\pi \sqrt{\frac{\nu+\varkappa}{NN'}} \sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}\right)$$

$$- \sum_{g=0}^{k-1} B_g \left(n + \eta + \frac{1}{2}\right)^{\frac{r-g-1}{2}} \mathfrak{M}_g^{(r)}(n; R_\nu) + \Phi_{n+\eta}$$

von folgenden Eigenschaften. Es ist

$$k = \begin{cases} r - 2 \text{ für ganzes } r \\ [r] - 1 \text{ für nicht-ganzes } r \end{cases}.$$

Die Grössen B_{-1}, B_0, $B_1, \ldots, B_{k-1}$ bezeichnen gewisse Konstanten. Das erste Glied genügt einer Abschätzung, wonach es durch einen Ausdruck

$$\text{Const.}\ \cos\left(c_0\sqrt{n+\eta+\frac{1}{2}}-\frac{\pi}{2}r-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}+O\left(n^{\frac{r}{2}-\frac{3}{4}}\right)$$

mit $c_0 = 4\pi\sqrt{\frac{\nu+\varkappa}{NN'}}$ wiedergegeben wird. Es besteht sogar genauer für dieses erste Glied ebenfalls eine asymptotische Entwicklung nach absteigenden Potenzen von $\left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)$, wie man aus dem Text ersieht. Im übrigen ist

$$\mathfrak{M}_0^{(r)}(n;\,R_\nu) = O\left(n^{\frac{1}{2}}\log n\right)$$

$$\mathfrak{M}_g^{(r)}(n;\,R_\nu) = O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\ \text{für}\ 0 < g \leqq k-1,$$

sodass die oberen Schranken der Glieder in der $\sum\limits_{g=0}^{k-1}$ mit der Grössenordnung $O\left(n^{\frac{r}{2}}\log n\right)$ beginnen und hiernach mit den Grössenordnungen $O\left(n^{\frac{r-g}{2}}\right)$, $0 < g \leqq k-1$, fortfahren, wobei also der Exponent von n immer um $\frac{1}{2}$ fällt. Das letzte Glied besitzt eine Schranke der Ordnung $O\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$ bzw. $O\left(n^{1+\frac{r-[r]}{2}}\right)$, jenachdem $r > 3$ ganz ist oder nicht. In den Fällen $2 < r \leqq 3$ ist $k = 1$, also enthält die Summe $\sum\limits_{g=0}^{k-1}$ überhaupt nur ein Glied. Der Fehler $\Phi_{n+\eta}$ genügt der Abschätzung

$$\Phi_{n+\eta} = \begin{Bmatrix} O(n\log n) & \text{für ganzes } r \\ O(n) & \text{für nicht-ganzes } r \end{Bmatrix}.$$

Die expliziten Darstellungen der $\mathfrak{M}_g^{(r)}(n;\,R_\nu)$ durch unendliche Reihen sowie die Bedeutung der übrigen Symbole entnimmt man den Gleichungen (26) und (28). Hat die Gruppe Γ_0 endlichen Index, so lässt sich die summatorische Funktion der Fourierkoeffizienten einer beliebigen ganzen Spitzenform von der Dimension $-r < -2$ aus endlich vielen der $p_{n+\eta}(A)$ linear kombinieren. Dabei müssen r, Γ_0, v und es kann A festgehalten werden; geschieht dies, so ist die Anzahl der zur Bildung der Linearkombination erforderlichen $p_{n+\eta}(A)$ beschränkt. Aus dem vorstehenden Sachverhalt und den Ergebnissen von (E), § 3 folgt die Existenz einer asymptotischen Entwicklung nach absteigenden Potenzen von $\left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)$ für die summatorische Funktion der Fourierkoeffizienten einer beliebigen ganzen Form von einer Dimension < -2. Der dabei insgesamt auftretende Fehler genügt der gleichen Abschätzung wie oben $\Phi_{n+\eta}$.

Hamburg, 8. September 1931.