# ZUR THEORIE DER SYSTEME GEWÖHNLICHER DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN. II.

Von

E. KAMKE

in Tübingen.

## Einleitung.

Ist die reelle Funktion $f(x, y)$ in dem Rechteck

$$\mathfrak{r}: \quad |x-\xi_0| \leqq a, \quad |y-\eta_0| \leqq b$$

stetig, so gibt es nach dem klassischen Existenzsatz von Peano durch jeden Punkt $P$ des Rechtecks *mindestens eine* Integralkurve der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad y' = f(x, y),$$

und Beispiele einfachster Art zeigen, dass durch einen Punkt sogar unendlich viele verschiedene Integralkurven gehen können. Ohne Hinzunahme weiterer Voraussetzungen über die Funktion $f(x, y)$ lässt sich über die Integralkurven noch folgendes aussagen:

I. Durch jeden Punkt $P$ gibt es eine maximale wie auch eine minimale Integralkurve, d. h. eine Integralkurve, unterhalb bzw. oberhalb der alle durch $P$ gehenden Integralkurven liegen; durch jeden zwischen maximaler und minimaler Kurve gelegenen Punkt geht mindestens eine Integralkurve, die in $P$ einmündet.[1]

II. Ist $K_0$ die durch den Punkt $P_0 = P_0(\xi_0, \eta_0)$ gehende maximale Integralkurve und liegen die Punkte $P$ oberhalb $K_0$, so streben die durch $P$ gehenden

[1] P. Montel [Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure (3) 24 (1907) 271]. Für den Fall eines beliebigen Gebiets vgl. auch E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 78.

8—31356. *Acta mathematica*. 58. Imprimé le 11 décembre 1931.

maximalen Integralkurven gegen $K_0$, wenn $P$ gegen $P_0$ strebt; eine entsprechende Tatsache besteht für die minimalen Integralkurven.[1]

III. Geht durch $P_0$ nur *eine* Integralkurve $K_0$, so streben die sämtlichen durch $P$ gehenden Integralkurven gegen $K_0$, wenn $P$ gegen $P_0$ strebt.[2]

IV. Wenn die Funktionen $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots$ ebenfalls in dem Rechteck $\mathfrak{r}$ stetig sind und gleichmässig gegen $f(x, y)$ konvergieren und wenn $y = \varphi_k(x)$ eine durch $P_0$ gehende Integralkurve der Differentialgleichung

$$y' = f_k(x, y)$$

ist, so konvergiert eine Teilfolge dieser Integralkurven $y = \varphi_k(x)$ gegen eine Integralkurve der Gleichung (A).[3]

V. Es seien $f(x, y)$ und $g(x, y)$ in $\mathfrak{r}$ stetig und $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ zwei durch den gleichen Punkt $P_0 = P_0(\xi_0, \eta_0)$ gehende Integralkurven der Gleichung (A) bzw. der Gleichung

$$\text{(B)} \qquad y' = g(x, y).$$

Ist ausserdem in $\mathfrak{r}$

$$\text{(C)} \qquad f(x, y) < g(x, y),$$

so gilt

$$\text{(D)} \qquad \varphi(x) \begin{cases} < \psi(x) & \text{für} \quad x > \xi_0, \\ > \psi(x) & \text{für} \quad x < \xi_0. \end{cases}$$

Ist in (C) die Gleichheit zugelassen, so ist auch in (D) die Gleichheit zuzulassen, und es hat $\psi(x)$ für $x > \xi_0$ die maximale und für $x < \xi_0$ die minimale Integralkurve von (B) zu bedeuten.[4]

In dieser Arbeit wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wieweit sich diese Sätze auf Systeme von Differentialgleichungen

---

[1] P. Montel [Bulletin des Sciences Mathématiques (2) 50 (1926) 207].

[2] Der Satz ist eine unmittelbare Folge des Satzes II. Vgl. P. Montel an dem zuletzt angeführten Ort S. 209. Für allgemeinere Gebiete und für den Fall, dass die Funktion $f$ noch von einem Parameter abhängt, vgl. auch E. Kamke [Acta mathematica 52 (1929) 334 ff.]; die vorher zitierte Arbeit von Herrn Montel ist mir leider erst nach Erscheinen meiner Arbeit bekannt geworden.

[3] P. Montel an dem in der vorigen Fussnote angeführten Ort.

[4] P. Montel am zuletzt angeführten Ort; S. 211 ff. Für allgemeinere Gebiete vgl. auch E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 82 und S. 91.

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'_n = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

übertragen lassen; dabei mögen die rechten Seiten etwa in einem $(n+1)$-dimensionalen Quader

$$|x - \xi_0| \leqq a, \quad |y_1 - \eta_{10}| \leqq b, \ldots, \quad |y_n - \eta_{n0}| \leqq b$$

stetig sein.

Für Satz IV macht diese Übertragung keine Schwierigkeiten und wird in § 1 sogar für ein beliebiges Gebiet und für Systeme (S) erfolgen, deren rechte Seiten noch von einem Parameter abhängen.

Für Satz III ist die Übertragung schon früher durch mich[1] erfolgt. In § 2 wird noch ein allgemeinerer Satz bewiesen werden, bei dem auf die eindeutige Bestimmtheit der Integralkurve $K_0$ verzichtet ist. Die früher von mir angegebene Übertragung des Satzes III auf Systeme (S) wird sich aus diesem allgemeinen Satz nochmals als unmittelbare Folge ergeben.

Das dem Satz I bei Systemen entsprechende Problem könnte man folgendermassen formulieren:

(E) Gibt es durch den Punkt $P_0 = P_0(\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0})$ eine Integralkurve $y_1 = \Phi_1(x), \ldots, y_n = \Phi_n(x)$ des Systems (S), so dass für jede durch den Punkt $P_0$ gehende Integralkurve $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$ des Systems (S) die Ungleichungen

$$\varphi_1(x) \leqq \Phi_1(x), \ldots, \quad \varphi_n(x) \leqq \Phi_n(x)$$

bestehen?

Eine maximale Integralkurve $y_1 = \Phi_1(x), \ldots, y_n = \Phi_n(x)$ in diesem Sinne gibt es jedoch bei Systemen von Differentialgleichungen im allgemeinen nicht. Das zeigt das Beispiel

$$y' = \frac{2y}{\sqrt[4]{y^2+z^2}} - z, \quad z' = \frac{2z}{\sqrt[4]{y^2+z^2}} + y,$$

wobei die rechts stehenden Brüche an der Stelle $y = z = 0$ den Wert 0 bedeuten sollen. Die Gesamtheit der durch den Punkt $x = y = z = 0$ gehenden Integralkurven ist für $x \geqq 0$ durch

[1] Journal für die reine und angewandte Mathematik 161 (1929) 198.

$$y = \begin{cases} 0, \\ (x-\alpha)^2 \cos(x-\beta), \end{cases} \qquad z = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \alpha, \\ (x-\alpha)^2 \sin(x-\beta) & \text{für} \quad x \geqq \alpha \end{cases}$$

gegeben, wobei $\alpha$ und $\beta$ beliebige Zahlen mit der Einschränkung $\alpha \geqq 0$ sein dürfen. Gäbe es hier eine maximale Integralkurve, so müsste sie $y = \operatorname{Max} y(x) = x^2$, $z = \operatorname{Max} z(x) = x^2$ sein, und diese Kurve ist keine Integralkurve des gegebenen Systems. Die Gesamtheit der durch $x = y = z = 0$ gehenden Integralkurven erfüllt hier übrigens gerade den Trichter $y^2 + z^2 \leqq x^4$ $(x \geqq 0)$.

Dagegen war über die von $P_0$ ausgehenden Integralkurven schon lange bekannt, dass für jede Ebene $x = \xi$, die diese Integralkurven sämtlich schneidet, die Menge der Schnittpunkte der Kurven mit dieser Ebene abgeschlossen ist[1], und Herr H. Kneser hat darüber hinaus gezeigt, dass die Menge der Schnittpunkte ein Kontinuum ist.[2]

Vor kurzem hat nun Herr Fukuhara eine weitere Eigenschaft der durch $P_0$ gehenden Integralkurven entdeckt, die man insofern als die Übertragung des Satzes I auf Systeme ansehen kann, als der Satz I sich für $n = 1$ als unmittelbare Folge dieser allgemeinen Eigenschaft ergibt. Bezeichnet man als den durch $P_0$ bestimmten *Integraltrichter* $\mathfrak{T}(P_0)$ die Menge aller Punkte, die auf den durch $P_0$ gehenden Integralkurven des Systems (S) liegen, so gibt es nach Herrn Fukuhara[3] durch jeden Randpunkt $P$ von $\mathfrak{T}(P_0)$ eine zu $\mathfrak{T}$ gehörige, d. h. durch $P_0$ gehende Integralkurve, die zwischen $P$ und $P_0$ ganz dem Rande von $\mathfrak{T}$ angehört. Herr Fukuhara benutzt bei seinem Beweis[4] ebenso wie Herr Nagumo[5] einen allgemeinen Fixpunktsatz über stetige Abbildungen. Ich werde demgegenüber den Satz im § 3 (Satz 5) mit wesentlich einfacheren Hilfsmitteln beweisen, und

---

[1] Satz 2 des § 2.

[2] Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse, 1923, S. 171—174. Andere Beweise haben gegeben M. Müller [Mathem. Zeitschrift 28 (1928) 349—355] und Fukuhara [Japanese Journal of Mathematics 5 (1929) 345—350].

[3] Proceedings of the Imperial Academy of Japan 4 (1928) 448 f.

[4] Japanese Journal of Mathematics 6 (1930) 269—280. Da Herr Fukuhara a. a. O. bereits eine (noch nicht publizierte) Vereinfachung seines Beweises durch Herrn Nagumo ankündigt, habe ich übrigens den Beweis nicht in allen Einzelheiten gelesen.

[5] Vgl. Fukuhara, a. a. O., S. 280, Fussnote. Der Beweis selber ist bisher noch nicht veröffentlicht.

Zusatz bei der Korrektur: Während des Drucks dieser Arbeit sind von den genannten Autoren zwei Beweise erschienen: Nagumo und Fukuhara [Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan (3) 12 (1930) 233—235]; Fukuhara [Proceedings of the Imperial Academy of Japan 6 (1930) 360—362]. Der letzte dieser Beweise hat grosse Ähnlichkeit mit dem, der in der vorliegenden Arbeit gegeben ist.

zwar gleich für ein beliebiges Gebiet; Herrn Fukuharas Beweis gilt dagegen nur für eine hinreichend kleine Umgebung von $P_0$, und es ist nicht ersichtlich, wie aus der Gültigkeit des Satzes »im kleinen» auf seine Gültigkeit »im grossen» geschlossen werden kann.

Als Übertragung des Satzes II auf Systeme von Differentialgleichungen kann nur eine triviale Folgerung aus dem Satz 3 des § 2 angegeben werden. Immerhin ist diese Folgerung so beschaffen, dass aus ihr für $n = 1$ der Satz II sofort folgt.

Eine irgendwie sinngemässe Übertragung des Satzes V auf Systeme scheint dagegen ohne Hinzunahme weiterer Voraussetzungen nicht möglich zu sein.

Da aber gerade Abschätzungssätze von der Art des Satzes V in vielen Fällen (z. B. auch für den Beweis von Eindeutigkeitssätzen) recht angenehm sind, kann man fragen, unter welchen einschränkenden Bedingungen für Systeme (S) Abschätzungssätze von der Art des Satzes V gelten und ein Maximalintegral im Sinne der Fragestellung (E) existiert. Damit beschäftigt sich der zweite Teil dieser Arbeit. Mit der ersten dieser beiden Fragestellungen beschäftigt sich auch Herr Fukuhara.[1] Seine Ergebnisse lassen sich bei Anwendung einer anderen Methode aber allgemeiner formulieren und man gelangt dabei auch zum Nachweis der Existenz eines eigentlichen Maximalintegrals, das Herr Fukuhara zwar gelegentlich[2] einführt, ohne dass jedoch seine Existenz meines Wissens bisher bewiesen war.

## I. Beliebige Systeme mit stetigen rechten Seiten.

### § 1. Ein Konvergenzsatz.

**Satz 1:** *Die Funktionen*

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*und*

$$f_{\nu k}(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots)$$

*seien in dem Gebiet*[3] $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(x, y_1, \ldots, y_n)$ *stetig, und in jeder beschränkten abgeschlossenen Teilmenge von* $\mathfrak{G}$ *sei gleichmässig*

[1] An dem auf S. 60 Fussnote 4 a. O., S. 280—288.

[2] A. a. O. S. 280, Zeile 11—12. Auch sonst ist die Lektüre der Arbeit durch mancherlei Unkorrektheiten erschwert.

[3] $\mathfrak{G}(x, y_1, \ldots, y_n)$ bezeichnet ein Gebiet des $x, y_1, \ldots, y_n$-Raumes.

$$f_{\nu k}(x, y_1, \ldots, y_n) \to f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \tag{1}$$

*für* $k \to \infty$ *und* $\nu = 1, \ldots, n$.

*Nach dem Existenzsatz von Peano gibt es dann durch einen beliebigen Punkt* $P_k = P_k(\xi_k, \eta_{1k}, \ldots, \eta_{nk})$ *von* $\mathfrak{G}$ *mindestens eine Integralkurve des Differentialgleichungssystems*

$$y'_\nu = f_{\nu k}(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n); \tag{2}$$

*eine solche Integralkurve wird irgendwie ausgewählt, nach beiden Seiten bis zum Rand von* $\mathfrak{G}$ *fortgesetzt*[1] *und mit*

$$K_k: \qquad y_\nu = \varphi_{\nu k}(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*bezeichnet.*

*Endlich mögen die Punkte* $P_k$ *für* $k \to \infty$ *gegen einen Punkt* $P = P(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ *von* $\mathfrak{G}$ *konvergieren und die sämtlichen durch* $P$ *gehenden Integralkurven des Differentialgleichungssystems*

$$y'_\nu = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{S}$$

*in dem Intervall* $a \leqq x \leqq b$ *existieren.*[2]

*Dann gibt es eine Teilfolge der* $K_k$ *derart, dass jede Kurve dieser Teilfolge für* $a \leqq x \leqq b$ *existiert und die Kurven in diesem Intervall gleichmässig gegen eine durch* $P$ *gehende Integralkurve des Systems* (S) *konvergieren.*

**Anmerkung:** Für $n = 1$ ist hierin der Satz IV der Einleitung als ein sehr spezieller Fall enthalten.

**Beweis:** A) Es sei der abgeschlossene Würfel

$$\mathfrak{W}: \ |x - \xi| \leqq \varrho, \ |y_1 - \eta_1| \leqq \varrho, \ \ldots, \ |y_n - \eta_n| \leqq \varrho$$

in $\mathfrak{G}$ gelegen,

$$|f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq M \text{ in } \mathfrak{W} \text{ für } \nu = 1, \ldots, n \tag{3}$$

und

[1] Für die Möglichkeit dieser Fortsetzung vgl. E. Kamke [Journal für die reine und angewandte Mathematik 161 (1929) 194 ff.].

[2] Da die Kurven sämtlich durch $P$ gehen, kann hierbei unbeschadet der Allgemeinheit $a < \xi < b$ angenommen werden.

$$\sigma = \frac{1}{3} \operatorname{Min}\left(\varrho, \frac{\varrho}{2M}\right). \tag{4}$$

Dann ist der Satz richtig für solche Zahlen $a$, $b$, welche die Ungleichungen

$$\xi - \sigma \leqq a < b \leqq \xi + \sigma \tag{5}$$

erfüllen.

Denn es gibt nach den Voraussetzungen ein $k_0$, so dass für $k > k_0$ in $\mathfrak{W}$

$$|f_{\nu k} - f_\nu| \leqq M \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

und

$$|\xi_k - \xi| \leqq \sigma, \quad |\eta_{1k} - \eta_1| \leqq \sigma, \ldots, \quad |\eta_{nk} - \eta_n| \leqq \sigma \tag{6}$$

gilt. Auf solche $k > k_0$ beschränken wir uns in diesem Abschnitt. Wegen (3) ist dann

$$|f_{\nu k}| \leqq 2M \quad \text{in } \mathfrak{W}, \tag{7}$$

und der Würfel

$$|x - \xi_k| \leqq 2\sigma, \quad |y_1 - \eta_{1k}| \leqq 2\sigma, \ldots, \quad |y_n - \eta_{nk}| \leqq 2\sigma$$

liegt in $\mathfrak{W}$. Für die Punkte dieses Würfels gilt somit erst recht die Abschätzung (7). Daher existiert jede durch $P_k$ gehende Integralkurve $K_k$ für

$$|x - \xi_k| \leqq \operatorname{Min}\left(\frac{2}{3}\varrho, \frac{\frac{2}{3}\varrho}{2M}\right) = 2\sigma,$$

also wegen (6) und (5) erst recht für $a \leqq x \leqq b$.

Da jedes $K_k$ ein Integral des Systems (2) ist, folgt durch Integration wegen (7) für $a \leqq x \leqq b$

$$|\varphi_{\nu k}(x) - \eta_{\nu k}| \leqq 2M(b - a), \quad \text{also } |\varphi_{\nu k}(x)| \leqq |\eta_\nu| + \sigma + 2M(b - a)$$

und für $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$

$$|\varphi_{\nu k}(x_2) - \varphi_{\nu k}(x_1)| \leqq 2M(x_2 - x_1),$$

d. h. die $\varphi_{\nu k}$ sind beschränkt und gleichgradig stetig. Daher gibt es eine Teilfolge $g_1, g_2, \ldots$ der natürlichen Zahlen, so dass für jedes $\nu = 1, \ldots, n$ die Folge der $\varphi_{\nu g_k}(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ gleichmässig gegen eine stetige Funktion $\varphi_\nu(x)$ konvergiert. Da ausserdem

$$\varphi_{\nu g_k}(x) = \eta_{\nu k} + \int_{\xi}^{x} f_{\nu k}(x, \varphi_{1 g_k}(x), \ldots, \varphi_{n g_k}(x))\, dx$$

ist, folgt hieraus nach bekannten Schlüssen, dass die Funktionen

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$$

für $a \leqq x \leqq b$ eine durch $P$ gehende Integralkurve des Systems (S) darstellen, und damit ist der eingangs formulierte Sonderfall des Satzes I bewiesen.

B) Nun sei $P$ ein beliebiger, aber weiterhin fest bleibender Punkt von $\mathfrak{G}$, für den die Allgemeingültigkeit des Satzes bewiesen werden soll. Es sei $\langle \alpha, \beta \rangle$ das grösste Teilintervall von $\langle a, b \rangle$ der Art, dass für jedes im Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ liegende und den Wert $\xi$ im Innern enthaltende Intervall $\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle$ die Behauptung richtig ist.

Da $\alpha < \xi < \beta$ ist, gibt es eine natürliche Zahl $g$, so dass

$$\alpha + \frac{1}{g+1} < \xi < \beta - \frac{1}{g+1}$$

ist. Da das Intervall $\langle \alpha + \frac{1}{g+1}, \beta - \frac{1}{g+1} \rangle$ im Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ liegt, gibt es nach der obigen Definition von $\langle \alpha, \beta \rangle$ in der Folge der Kurven $K_k$ eine Teilfolge von Kurven $K_k^{(1)}$, die für

$$\alpha + \frac{1}{g+1} \leqq x \leqq \beta - \frac{1}{g+1}$$

sämtlich existieren und gleichmässig gegen eine Integralkurve $L_1$ von (S) konvergieren. Nach demselben Schlusse gibt es in der Folge der $K_k^{(1)}$ eine Teilfolge von Kurven $K_k^{(2)}$, die sämtlich für

$$\alpha + \frac{1}{g+2} \leqq x \leqq \beta - \frac{1}{g+2}$$

existieren und gleichmässig gegen eine Integralkurve $L_2$ des Systems (S) konvergieren; u. s. f. Jede Kurve $L_\mu$ ist ein Stück der Kurve $L_{\mu+1}$ und existiert im Intervall

$$\alpha + \frac{1}{g+\mu} \leqq x \leqq \beta - \frac{1}{g+\mu}.$$

Die Gesamtheit der $L_\mu$ bestimmt daher eine durch $P$ gehende und für $\alpha < x < \beta$ existierende Integralkurve $l$ des Systems (S).

Da nach der Voraussetzung die Gesamtheit der durch $P$ gehenden Integralkurven von (S) im Intervall $a \leqq x \leqq b$ existiert, ist auch $l$ ein Stück einer für $a \leqq x \leqq b$ existierenden Integralkurve von (S). Das durch $\alpha \leqq x \leqq \beta$ bestimmte Stück einer solchen Integralkurve heisse $L$. Die Endpunkte von $L$ mit den Abszissen $\alpha, \beta$ mögen $A, B$ heissen. Da die Punkte $A, B$ als Punkte einer Integralkurve in $\mathfrak{G}$ liegen, gibt es für sie als Mittelpunkte achsenparallele, abgeschlossene und ganz in $\mathfrak{G}$ gelegene Würfel $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2$ mit der gleichen Kantenlänge, die mit $4\varrho$ bezeichnet wird. Da die $f_\nu$ stetig sind, gibt es weiter eine Konstante $M > 0$, so dass für die Punkte beider Würfel

$$|f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq M \tag{8}$$

gilt.

Nun werde endlich $\mu$ so gross gewählt, dass die Endpunkte $A_\mu, B_\mu$ von $L_\mu$, welche die Abszissen

$$\alpha_\mu = \alpha + \frac{1}{g+\mu}, \quad \beta_\mu = \beta - \frac{1}{g+\mu}$$

haben, in die $\frac{1}{2}\sigma$-Umgebung von $A$ bzw. $B$ fallen; dabei soll $\sigma$ wieder durch (4) bestimmt sein. Dieses $\mu$ bleibt nunmehr fest. Zu dem $\mu$ gibt es, wie vorher gezeigt, in der Folge der $K_k$ eine Teilfolge von Kurven $K_k^{(\mu)}$, die für $\alpha_\mu \leqq x \leqq \beta_\mu$ gleichmässig gegen eine durch $P$ gehende Integralkurve $L_\mu$ von (S) konvergiert. Da der achsenparallele Würfel mit dem Mittelpunkt $A_\mu$ und der Kantenlänge $2\varrho$ dem Würfel $\mathfrak{W}_1$ angehört und daher in ihm die Abschätzung (8) gilt, gibt es nach dem Teil A) des Beweises (angewendet auf den Punkt $A_\mu$ statt $P$) in der Folge der $K_k^{(\mu)}$ eine Teilfolge von Kurven $K_k^*$, die auch noch für $\alpha_\mu - \sigma \leqq x \leqq \alpha_\mu$ existieren und gleichmässig gegen eine Integralkurve von (S) konvergieren. Nach demselben Schluss gibt es in der Folge der $K_k^*$ eine Teilfolge von Kurven $K_k^{**}$, die für $\beta_\mu \leqq x \leqq \beta_\mu + \sigma$ existieren und gegen eine Integralkurve $K$ von (S) konvergieren. Diese Folge der $K_k^{**}$ konvergiert als Teilfolge der vorhergehenden Folgen auch im Intervall $\langle \alpha_\mu - \sigma, \beta_\mu + \sigma \rangle$, also, da nach der Bestimmung von $\mu$

$$0 < \alpha_\mu - \alpha < \frac{1}{2}\sigma, \quad 0 < \beta - \beta_\mu < \frac{1}{2}\sigma$$

ist, erst recht im Intervall $\alpha - \frac{1}{2}\sigma \leqq x \leqq \beta + \frac{1}{2}\sigma$ gleichmässig gegen die durch $P$ gehende Integralkurve $K$ von (S).

Das Intervall $\langle\alpha, \beta\rangle$ ist somit ein Intervall $\langle\bar{\alpha}, \bar{\beta}\rangle$ von der am Anfang von B) beschriebenen Art. Endlich fällt das Intervall $\langle a, b\rangle$ mit dem Teilintervall $\langle\alpha, \beta\rangle$ zusammen; denn, wenn $\alpha$ oder $\beta$ im Innern von $\langle a, b\rangle$ läge, könnte das Intervall $\langle\alpha, \beta\rangle$ nach dem eben Bewiesenen entgegen seiner Definition noch vergrössert werden. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

## § 2. Folgerungen für die Integraltrichter.

Von dem durch $P$ bestimmten Integraltrichter $\mathfrak{T}(P)$ des Systems (S) wollen wir sagen, dass er für $a < x < b$ bzw. $a \leqq x \leqq b$ existiere, wenn *jede* durch $P$ gehende Integralkurve von (S) für das Intervall existiert. Unter dem durch das Intervall $\langle a, b\rangle$ bestimmten *Abschnitt des Trichters* $\mathfrak{T}(P)$ soll die Menge der Punkte $x, y_1, \ldots, y_n$ von $\mathfrak{T}(P)$ verstanden werden, für deren Abszissen $a \leqq x \leqq b$ gilt. Ebenso wird, wenn der *Rand* $\mathfrak{R}(P)$ die Menge der zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Randpunkte von $\mathfrak{T}(P)$ bedeutet, unter dem durch $\langle a, b\rangle$ bestimmten *Abschnitt des Randes* $\mathfrak{R}(P)$ die Menge der Punkte von $\mathfrak{R}(P)$ mit $a \leqq x \leqq b$ verstanden.

**Satz 2:** *Sind die rechten Seiten des Systems* (S) *in dem Gebiet* $\mathfrak{G}$ *stetig und existiert der durch einen Punkt P von* $\mathfrak{G}$ *gehende Integraltrichter* $\mathfrak{T}(P)$ *für* $a \leqq x \leqq b$, *so ist der durch* $\langle a, b\rangle$ *bestimmte Abschnitt des Trichters* $\mathfrak{T}(P)$ *wie auch seines Randes* $\mathfrak{R}(P)$ *eine beschränkte abgeschlossene Menge, insbesondere gehört also der Randabschnitt zum Trichterabschnitt.*[1]

**Beweis:** Wäre der durch $\langle a, b\rangle$ bestimmte Abschnitt von $\mathfrak{T}(P)$ nicht beschränkt, so gäbe es durch $P$ eine Folge von Integralkurven $K_1, K_2, \ldots$ derart, dass für jede dieser Kurven

$$K_k: \qquad y_1 = \varphi_{1k}(x), \ldots, y_n = \varphi_{nk}(x)$$

an mindestens einer Stelle $x_k$ des Intervalls $\langle a, b\rangle$

$$|\varphi_{1k}(x_k)| + \cdots + |\varphi_{nk}(x_k)| > k$$

wäre. Nach Satz 1 konvergiert eine Teilfolge der $K_k$ gegen eine Integralkurve

[1] Der Satz ist meines Wissens bisher nur für eine hinreichend kleine Umgebung von $P$ bewiesen.

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$$

von (S), und an dem zu $\langle a, b\rangle$ gehörigen Häufungspunkt der $x_k$ hätte dann

$$|\varphi_1(x)| + \cdots + |\varphi_n(x)|$$

keinen endlichen Wert, d. h. diese Kurve würde nicht im ganzen Intervall $\langle a, b\rangle$ existieren.

Nun sei $Q_1, Q_2, \ldots$ eine gegen den Punkt $Q$ konvergierende Folge verschiedener Punkte auf dem durch $\langle a, b\rangle$ bestimmten Abschnitt von $\mathfrak{T}(P)$. Durch jedes $Q_k$ gibt es eine zu $\mathfrak{T}$ gehörige Integralkurve $K_k$ von (S). Nach Satz 1 konvergiert eine Teilfolge dieser $K_k$ gegen eine Integralkurve $K$ von (S), die natürlich durch $P$ und $Q$ geht; also gehört $Q$ zu dem durch $\langle a, b\rangle$ bestimmten Abschnitt von $\mathfrak{T}$. Der durch $\langle a, b\rangle$ bestimmte Abschnitt des Randes gehört somit zu dem durch das gleiche Intervall bestimmten Abschnitt von $\mathfrak{T}$, und daher ist mit der Beschränktheit des Abschnitts von $\mathfrak{T}$ zugleich die Beschränktheit des Abschnitts von $\mathfrak{R}(P)$ bewiesen. Liegen die Punkte $Q_k$ insbesondere auf dem Abschnitt des Randes, so liegt $Q$ also jedenfalls auf dem Abschnitt von $\mathfrak{T}$, und da beliebig nahe an jedem $Q_k$ Punkte liegen, die nicht zu $\mathfrak{T}$ gehören, gilt das gleiche für $Q$, d. h. $Q$ ist ein Randpunkt.

**Satz 3:** *Die Funktionen*

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*seien für jedes $\mu$ des Intervalls $\mu_0 \leqq \mu < \mu_1$ in dem Gebiet $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(x, y_1, \ldots, y_n)$ stetig, und für jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{G}$ sei gleichmässig*

$$\lim_{\mu \to \mu_0} f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_0).$$

*Der durch einen beliebigen Punkt $P = P(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ von $\mathfrak{G}$ bestimmte Integraltrichter des Gleichungssystems*

$$(1) \qquad y'_\nu = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*werde mit $\mathfrak{T}_\mu(P)$ bezeichnet. Der durch $P_0 = P_0(\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0})$ für $\mu = \mu_0$ gehende Trichter $\mathfrak{T}_0$ des Systems (1) existiere für $a \leqq x \leqq b$. Dann existieren für alle hinreichend nahe an $\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}, \mu_0$ gelegenen Wertesysteme $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu$ die sämtlichen $\mathfrak{T}_\mu(P)$ in dem Intervall $\langle a, b\rangle$, und ihre durch $\langle a, b\rangle$ bestimmten Abschnitte konvergieren für $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu \to \xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}, \mu_0$ gegen den durch*

*$\langle a, b\rangle$ bestimmten Abschnitt von $\mathfrak{T}_0$ in dem Sinne, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass die sämtlichen durch $\langle a, b\rangle$ bestimmten Abschnitte von $\mathfrak{T}_\mu(P)$ für*

$$|\xi - \xi_0| < \delta,\quad |\eta_1 - \eta_{10}| < \delta, \ldots, \quad |\eta_n - \eta_{n0}| < \delta,\quad 0 \leqq \mu - \mu_0 < \delta$$

*der $\varepsilon$-Umgebung des Abschnitts von $\mathfrak{T}_0$ angehören.*

**Anmerkung**: Hierin ist für $n = 1$ der Satz III der Einleitung sowie dessen früher durch mich erfolgte Übertragung auf Systeme als Sonderfall enthalten.

**Beweis**: Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und eine gegen $\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}, \mu_0$ konvergierende Folge von Wertesystemen $\xi_k, \eta_{1k}, \ldots, \eta_{nk}, \mu_k$ und für jedes $k$ mindestens eine von $\xi_k, \eta_{1k}, \ldots, \eta_{nk}$ ausgehende Integralkurve $K_k$ des Systems (1) mit $\mu = \mu_k$, die entweder nicht für das ganze Intervall $a \leqq x \leqq b$ existiert oder nicht der $\varepsilon$-Umgebung von $\mathfrak{T}_0$ angehört. Das widerspräche aber dem Satz 1, nach dem eine Teilfolge der $K_k$ für $a \leqq x \leqq b$ gleichmässig gegen eine zu $\mathfrak{T}_0$ gehörige Integralkurve konvergiert, insbesondere also für alle hinreichend grossen $k$ ganz in der $\varepsilon$-Umgebung von $\mathfrak{T}_0$ liegt.

Aus dem Satz 3 folgt unmittelbar der

**Zusatz**: *Liegt jeder der Punkte $P$ ausserhalb $\mathfrak{T}_0$ und ist $\mathfrak{M}_\mu(P)$ für den durch $\langle a, b\rangle$ bestimmten Abschnitt von $\mathfrak{T}_\mu(P)$ eine Teilmenge, die keinen inneren Punkt von $\mathfrak{T}_0$ enthält, so konvergieren die $\mathfrak{M}_\mu(P)$ gegen den durch $\langle a, b\rangle$ bestimmten Abschnitt des Randes von $\mathfrak{T}_0$.*

**Anmerkung**: So trivial diese Folgerung aus dem Satz 3 auch ist, ergibt sich aus ihr doch der Satz II der Einleitung, wenigstens in dem von Herrn Montel a. a. O. bewiesenen Umfange.[1] Denn existieren für die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

die von $P_0$ ausgehenden Integralkurven sämtlich für $a \leqq x \leqq b$ [2] und ist $P$ ein Punkt oberhalb der durch $P_0$ gehenden maximalen Integralkurve $K_0$, so gelangt die durch $P$ gehende maximale Integralkurve $K$ nicht in das Innere von $\mathfrak{T}_0$, da $K$ sonst mit $K_0$ einen Punkt gemeinsam hätte und da man in einem solchen

---

[1] Dazu muss allerdings auch noch die Existenz des Maximalintegrals bekannt sein, die sich bei unserer Beweisanordnung erst als Folge des allgemeinen Satzes 5 von § 3 ergibt.

[2] Diese Voraussetzung ist in dem von Herrn Montel betrachteten Gebiet erfüllt.

Punkt von $K$ auf ein höher gelegenes Stück von $K_0$ übersteigen könnte, also $K$ nicht maximale Integralkurve wäre. Die maximalen Integralkurven $K$ bilden also eine Menge $\mathfrak{M}(P)$ von der im Zusatz beschriebenen Art, konvergieren also gegen den Rand des Trichters $\mathfrak{T}_0$, können also, da jedes $K$ oberhalb $K_0$ liegt, nur gegen den oberen Rand $K_0$ streben.

## § 3. Die Sätze von H. Kneser und Fukuhara.

Die gemeinsame Voraussetzung der Sätze dieses Paragrafen ist die folgende:

($\mathrm{V}_1$) *Die Funktionen*

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*seien in* $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(x, y_1, \ldots, y_n)$ *stetig;* $P_0 = P_0(\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0})$ *sei ein Punkt von* $\mathfrak{G}$, *und der Integraltrichter* $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}_0(P_0)$ *des Systems* (S) *existiere in dem den Punkt* $\xi_0$ *enthaltenden Intervall* $a_0 < x < b_0$.

Zunächst beweisen wir die folgende Ergänzung zu dem Satz von Herrn H. Kneser:

**Satz 4:** *Unter den Voraussetzungen* ($\mathrm{V}_1$) *ist für jedes* $a_0 < c < b_0$ *die Menge* $\mathfrak{C}(c)$ *der Schnittpunkte des Trichters* $\mathfrak{T}_0$ *mit der Ebene* $x = c$ *ein Kontinuum oder enthält nur einen Punkt.*

**Anmerkung**: Die bisher vorliegenden Beweise[1] des Kneserschen Satzes ergeben die Richtigkeit nur für den Fall, dass $\mathfrak{G}$ ein Quader

$$\mathfrak{Q}\colon\ |x - \xi_0| \leqq \alpha,\ |y_1 - \eta_{10}| \leqq \beta,\ \ldots,\ |y_n - \eta_{n0}| \leqq \beta$$

ist und $c$ die Ungleichung

$$|c - \xi_0| \leqq \gamma$$

erfüllt, wobei

$$\gamma = \mathrm{Min}\left(\alpha, \frac{\beta}{M}\right) \tag{1}$$

und $M$ eine obere Schranke für die $|f_\nu|$ in dem Quader $\mathfrak{Q}$ ist. Von der Richtigkeit des Satzes in diesem Sonderfall machen wir im folgenden Gebrauch.

[1] Vgl. Fussnote 2 auf S. 60.

**Beweis:** Aus Satz 2 folgt, dass jedes $\mathfrak{C}(c)$ eine beschränkte abgeschlossene Menge ist. Es ist also nur noch zu zeigen, dass kein $\mathfrak{C}(c)$ sich als Summe von zwei nicht-leeren Mengen darstellen lässt, die einen positiven Abstand voneinander haben. Für diesen Nachweis beschränken wir uns zunächst auf die $c$ des Intervalls $\xi_0 < c < b_0$.

Nach der Anmerkung ist die Behauptung jedenfalls für ein gewisses $b > \xi_0$ und alle $c$ des Intervalls $\xi_0 < c < b$ richtig. Wir zeigen zunächst, dass immer dann, wenn $b < b_0$ ist, die Behauptung auch noch für $c = b$ zutrifft. Denn andernfalls liesse sich $\mathfrak{C}(b)$ als Summe von zwei nicht-leeren Mengen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ darstellen, die einen Abstand $\Delta > 0$ voneinander haben. Da der durch $\langle \xi_0, b \rangle$ bestimmte Abschnitt von $\mathfrak{T}_0$ beschränkt und abgeschlossen ist, gäbe es ein $\delta > 0$, so dass alle $\mathfrak{C}(c)$ mit

$$\operatorname{Max}(\xi_0, b - \delta) < c < b$$

der $\frac{1}{3}\Delta$-Umgebung von $\mathfrak{C}(b) = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ angehören. Da $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ beide nicht-leer sind, und da beliebig nahe an jedem Punkt von $\mathfrak{C}(b)$ Punkte von $\mathfrak{C}(c)$ mit $c < b$ liegen, gäbe es hiernach entgegen unserer Voraussetzung ein $c$ des Intervalls $\xi_0 < c < b$, so dass $\mathfrak{C}(c)$ in zwei nicht-leere Mengen zerlegt werden könnte, deren Abstand voneinander mindestens $\frac{1}{3}\Delta$ wäre.

Weiter zeigen wir (immer unter der Annahme $b < b_0$), dass die Behauptung auch noch für alle $c$ eines gewissen Intervalls $\xi_0 < c < b + \gamma$ $(\gamma > 0)$ richtig ist. Da $\mathfrak{C}(b)$ eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{G}$ ist, gibt es nämlich Zahlen $\alpha$, $\beta$, so dass jeder Quader

$$\mathfrak{Q}: \ |x - b| \leqq \alpha, \ |y_1 - \eta_1| \leqq \beta, \ldots, \ |y_n - \eta_n| \leqq \beta,$$

dessen Mittelpunkt $b, \eta_1, \ldots, \eta_n$ zu $\mathfrak{C}(b)$ gehört, in $\mathfrak{G}$ liegt und auch noch die Summe aller dieser Quader $\mathfrak{Q}$ einer beschränkten abgeschlossenen Teilmenge $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ angehört. Als stetige Funktionen haben die $|f_\nu|$ in $\mathfrak{H}$ eine obere Schranke $M > 0$, und jeder von einem Punkt $P$ von $\mathfrak{C}(b)$ ausgehende Trichter $\mathfrak{T}(P)$ existiert für $b \leqq x < b + \gamma$, wobei $\gamma$ durch (1) bestimmt ist. Ist $\mathfrak{C}_P(c)$ der Schnitt eines solchen Trichters $\mathfrak{T}(P)$ mit der Ebene $x = c$, so ist für $b \leqq c < b + \gamma$ offenbar

$$\mathfrak{C}(c) = \sum_{P \varepsilon \mathfrak{C}(b)} \mathfrak{C}_P(c).$$

Angenommen, für ein $c$ des Intervalls $b < c < b + \gamma$ zerfiele $\mathfrak{C}(c)$ in nichtleere Mengen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$, die einen positiven Abstand voneinander haben. Gehört ein Punkt von $\mathfrak{C}_P(c)$ zu $\mathfrak{C}_1$, so gehören, da der spezielle Knesersche Satz der Anmerkung hier anwendbar ist, alle Punkte von $\mathfrak{C}_P(c)$ zu $\mathfrak{C}_1$; das gleiche gilt für $\mathfrak{C}_2$. Wir teilen nun die Punkte $P$ von $\mathfrak{C}(b)$ in zwei Klassen I, II ein, je nachdem die Menge $\mathfrak{C}_P(c)$ zu $\mathfrak{C}_1$ oder $\mathfrak{C}_2$ gehört. Da $\mathfrak{C}(b)$ ein Kontinuum ist, haben beide Klassen einen gemeinsamen Randpunkt $R$; wir wollen etwa annehmen, dass er zur Klasse I gehört. Beliebig nahe an $R$ liegen dann Punkte $S$ der Klasse II. Da nach Satz 3 die durch $\langle b, c\rangle$ bestimmten Abschnitte der Trichter $\mathfrak{T}(S)$ gegen $\mathfrak{T}(R)$ konvergieren, wenn $S$ gegen $R$ strebt, lägen also insbesondere beliebig nahe an den zu $\mathfrak{C}_1$ gehörigen Punkten von $\mathfrak{C}_R(c)$ Punkte der zu $\mathfrak{C}_2$ gehörigen Mengen $\mathfrak{C}_S(c)$, womit der gewünschte Widerspruch erreicht ist.

Aus diesen Tatsachen folgt nun die Richtigkeit des Satzes für alle $c$ des Intervalls $\xi_0 \leqq c < b_0$. Denn wäre der Satz nicht für jedes dieser $c$ richtig, so gäbe es eine untere Grenze $b$ der $c \geqq \xi_0$ für die $\mathfrak{C}(c)$ kein Kontinuum ist. Wie schon bemerkt, ist $b > \xi_0$. Nach dem Vorhergehenden könnte $b$ aber entgegen seiner Definition noch vergrössert werden.

Für die $c$ des Intervalls $a_0 < c < \xi_0$ ergibt sich die Richtigkeit offenbar in entsprechender Weise.

Wir gehen nun zum Satz von Fukuhara über:

**Satz 5:** *Unter den Voraussetzungen* ($\mathrm{V}_1$) *gibt es durch jeden Punkt* $P = P(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, *der auf dem Rand des Integraltrichters* $\mathfrak{T}_0$ *liegt und eine Abszisse* $a_0 < \xi < b_0$ *hat, mindestens eine Integralkurve des Systems* (S), *die auch durch* $P_0$ *geht und zwischen* $P_0$ *und* $P$ *ganz dem Rand von* $\mathfrak{T}_0$ *angehört.*

Dem Beweis wird vorausgeschickt der

**Hilfssatz 1:** *Unter den Voraussetzungen des Satzes sei* $P$ *ein Punkt auf dem Rand von* $\mathfrak{T}_0$ *und* $\xi_0 < \xi < b_0$. *Der Integraltrichter* $\mathfrak{T}(P)$ *existiere für ein* $\xi_0 \leqq \xi_1 < \xi$ *im Intervall* $\xi_1 \leqq x \leqq \xi$. *Dann gibt es eine durch* $P_0$ *und* $P$ *gehende Integralkurve von* (S), *die einen Punkt mit der Abszisse* $x = \xi_1$ *auf dem Rand von* $\mathfrak{T}_0$ *hat.*

**Beweis des Hilfssatzes:** Die Ebene $x = \xi_1$ schneidet nach Satz 4 sowohl aus $\mathfrak{T}_0$ wie aus $\mathfrak{T}(P)$ ein Kontinuum $\mathfrak{C}_0$ bzw. $\mathfrak{C}$ aus.[1] Da $P$ ein Randpunkt von $\mathfrak{T}_0$ ist, gibt es eine Folge von Punkten $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$, die nicht zu $\mathfrak{T}_0$ gehören

[1] Satz 4 ist anwendbar, da, wie leicht einzusehen ist, das abgeschlossene Existenzintervall $\langle \xi_1, \xi\rangle$ eines Trichters $\mathfrak{T}(P)$ stets noch nach beiden Seiten vergrössert werden kann.

und gegen $P$ streben; ihre Abszissen seien $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots$. Für alle hinreichend grossen $k$ existieren nach Satz 3 alle Integraltrichter $\mathfrak{T}(\bar{P}_k)$ von (S) für $\xi_1 \leqq x \leqq \xi$ und ist $\xi_1 < \bar{\xi}_k < b_0$. Wir beschränken uns nun auf diese $k$. Dann hat kein Trichter $\mathfrak{T}(\bar{P}_k)$ für $\xi_1 \leqq x \leqq \bar{\xi}_k$ einen Punkt mit $\mathfrak{T}_0$ gemeinsam. Denn sonst könnte man zu dem gemeinsamen Punkt von $P_0$ aus auf einer von $P_0$ ausgehenden Integralkurve gelangen und diese dann bis $\bar{P}_k$ durch eine zu $\mathfrak{T}(\bar{P}_k)$ gehörige Integralkurve fortsetzen; diese Integralkurve enthielte also $P_0$ und $\bar{P}_k$, und $\bar{P}_k$ müsste daher entgegen unserer Festsetzung zu $\mathfrak{T}_0$ gehören.

Zu jedem Punkt $\bar{P}_k$ wählen wir eine durch ihn gehende Integralkurve $K_k$ von (S). Nach Satz 1 konvergiert eine Teilfolge der $K_k$ für $\xi_1 \leqq x \leqq \xi$ gegen eine durch $P$ gehende Integralkurve $K$ von (S). Diese Kurve $K$ liefert nach ihrer Konstruktion für $x = \xi_1$ keinen inneren Punkt von $\mathfrak{C}_0$.

$\mathfrak{C}$ hat daher mindestens einen Punkt, der äusserer Punkt oder Randpunkt von $\mathfrak{C}_0$ ist. Ausserdem haben $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ einen Punkt gemeinsam, da es eine $P_0$ und $P$ enthaltende Integralkurve gibt. Da $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}$ Kontinua sind, folgt hieraus, dass $\mathfrak{C}$ einen Randpunkt $Q$ von $\mathfrak{C}_0$ enthält. Man erhält nun eine Integralkurve der gewünschten Art, wenn man eine von $P_0$ nach $Q$ führende Integralkurve des Trichters $\mathfrak{T}_0$ durch eine von $Q$ nach $P$ führende Integralkurve des Trichters $\mathfrak{T}(P)$ fortsetzt.

**Zusatz:** Der Hilfssatz gilt auch, wenn man die Intervalle

$$\xi_0 < \xi < b_0, \quad \xi_0 \leqq \xi_1 < \xi, \quad \xi_1 < x \leqq \xi \quad \text{durch} \quad a_0 < \xi < \xi_0, \quad \xi < \xi_1 \leqq \xi_0, \quad \xi \leqq x < \xi_1$$

ersetzt.

**Beweis des Satzes 5:** Es sei $P$ mit $a_0 < \xi < b_0$ fest gegeben. Es darf $\xi \neq \xi_0$ angenommen werden. Da der Beweis für $\xi < \xi_0$ ganz entsprechend verläuft, beschränken wir uns auf den Fall $\xi > \xi_0$.

Da nach Satz 2 der durch $\langle \xi_0, \xi \rangle$ bestimmte Abschnitt des Trichters $\mathfrak{T}_0$ eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{G}$ ist, gibt es Zahlen $\alpha, \beta$, so dass alle Quader

$$|x - \bar{\xi}| \leqq \alpha, \quad |y_1 - \bar{\eta}_1| \leqq \beta, \ldots, \quad |y_n - \bar{\eta}_n| \leqq \beta,$$

deren Mittelpunkte $\bar{P} = \bar{P}(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$ zu dem Abschnitt gehören, einer beschränkten abgeschlossenen Teilmenge $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ angehören. Daher existiert der Trichter $\mathfrak{T}(\bar{P})$ für $|x - \bar{\xi}| \leqq \gamma$, wenn

$$\gamma = \operatorname{Min}\left(\alpha, \frac{\beta}{M}\right)$$

und $M$ eine obere Schranke der $|f_\nu|$ in $\mathfrak{H}$ ist.

Nach dem Hilfssatz gibt es dann eine von $P_0$ nach $P$ führende Integralkurve, die einen Punkt $P_1$ mit der Abszisse

$$\xi_1 = \operatorname{Max}(\xi - \gamma, \xi_0)$$

mit dem Rand von $\mathfrak{T}_0$ gemein hat. Nun kann der Hilfssatz auf $P_1$ statt $P$ angewendet werden und liefert dann die Existenz einer von $P_0$ über $P_1$ nach $P$ führenden Integralkurve, die einen Punkt $P_2$ mit der Abszisse

$$\xi_2 = \operatorname{Max}(\xi_1 - \gamma, \xi_0)$$

mit dem Rand von $\mathfrak{T}_0$ gemein hat. Die Fortsetzung des Verfahrens sichert die Existenz einer von $P_0$ nach $P$ führenden Integralkurve, die so viele Punkte mit dem Rand von $\mathfrak{T}_0$ gemein hat, dass die Abszissendifferenz zweier aufeinanderfolgender Punkte höchstens $\gamma$ ist.

Führt man dieses Verfahren mit $\frac{\gamma}{k}$ statt $\gamma$ für $k = 1, 2, \ldots$ durch, so erhält man eine Folge von Integralkurven $K_k$, die von $P_0$ nach $P$ führen und bei der jedes $K_k$ so viele Punkte mit dem Rand von $\mathfrak{T}_0$ gemeinsam hat, dass die Abszissendifferenz zweier aufeinander folgender Punkte höchstens $\frac{\gamma}{k}$ ist.

Nach Satz 1 konvergiert eine Teilfolge der $K_k$ für $\xi_0 \leqq x \leqq \xi$ gegen eine Integralkurve von (S). Diese führt dann durch $P_0$ und $P$ und hat aus Stetigkeitsgründen für jede Abszisse $x$ in den Grenzen $\xi_1 \leqq x \leqq \xi$ einen auf dem Rand von $\mathfrak{T}_0$ liegenden Punkt, d. h. sie liegt für $\xi_1 \leqq x \leqq \xi$ ganz auf dem Rand von $\mathfrak{T}_0$.

Zusatz bei der Korrektur: Die Frage, ob es unter den Voraussetzungen des Satzes 5 stets eine durch $P$ und $P_0$ gehende Integralkurve gibt, die sogar für das ganze Intervall $a_0 < x < b_0$ dem Rand des Trichters angehört, ist zu verneinen. Vgl. Nagumo und Fukuhara [Proceedings of the Physico-Mathematical Society (3) 12 (1930) 235—238].

## II. Systeme mit stetigen monotonen rechten Seiten.

### § 4. Ein Abschätzungssatz.

**Satz 6:** *In den Punkten einer Menge* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x, y_1, \ldots, y_n)$, *der die beiden Punkte*

$$P = P(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \text{ und } \bar{P} = \bar{P}(\xi, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$$

*mit*

$$\eta_\nu \leqq \bar{\eta}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

*angehören, seien die Funktionen*

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n), \quad g_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*definiert. Für jedes* $\nu$ *und* $x \geqq \xi$ *sei*

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) < g_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \tag{2}$$

*und ausserdem für jede der Zahlen* $\nu = 1, \ldots, n$ *eine der Funktionen* $f_\nu$, $g_\nu$ *monoton wachsend inbezug auf jede der Variabeln* $y_\varkappa$ *mit* $\varkappa \neq \nu$.[1] *Endlich seien*

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x) \text{ und } y_1 = \bar{\varphi}_1(x), \ldots, y_n = \bar{\varphi}_n(x)$$

*zwei durch* $P$ *bzw.* $\bar{P}$ *gehende und für* $\xi \leqq x < \xi + a$ *existierende Integralkurven des Systems* (S) *bzw. des Systems*

$$y'_\nu = g_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

*Dann gilt für* $\xi < x < \xi + a$

$$\varphi_\nu(x) < \bar{\varphi}_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

**Beweis:** Bedeutet $E$ für ein $\alpha \geqq 0$ die Eigenschaft, dass

$$\varphi_\nu(\xi) \leqq \bar{\varphi}_\nu(\xi) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

und, falls $\alpha > 0$ ist, auch noch

$$\varphi_\nu(x) < \bar{\varphi}_\nu(x) \text{ für } \xi < x < \xi + \alpha \text{ und } \nu = 1, \ldots, n$$

---

[1] Für $n = 1$ legt diese Bedingung den Funktionen $f, g$ keine Einschränkung auf. — Die Monotonie darf eine uneigentliche sein.

gilt, so trifft die Eigenschaft $E$ wegen (1) jedenfalls für ein $0 \leqq \alpha < a$ zu, nämlich für $\alpha = 0$. Es sei nun $\beta$ die obere Grenze der $\alpha < a$, für die $E$ zutrifft. Es ist zu zeigen, dass $\beta = a$ ist.

Wäre dieses nicht der Fall, so wäre $\beta < a$ und wegen der Stetigkeit der $\varphi_\nu$, $\bar{\varphi}_\nu$ für mindestens ein $\nu = \mu$

$$(3) \qquad \varphi_\mu(\beta) = \bar{\varphi}_\mu(\beta) \quad \text{und sonst} \quad \varphi_\nu(\beta) \leqq \bar{\varphi}_\nu(\beta).$$

Wegen der Voraussetzung über die Monotonie der Funktion $f_\mu$ bzw. $g_\mu$ wäre dann

$$f_\mu(\beta, \varphi_1(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta)) \leqq f_\mu(\beta, \bar{\varphi}_1(\beta), \ldots, \bar{\varphi}_n(\beta))$$

bzw.

$$g_\mu(\beta, \varphi_1(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta)) \leqq g_\mu(\beta, \bar{\varphi}_1(\beta), \ldots, \bar{\varphi}_n(\beta)),$$

also wegen (2) in jedem Falle

$$f_\mu(\beta, \varphi_1(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta)) < g_\mu(\beta, \bar{\varphi}_1(\beta), \ldots, \bar{\varphi}_n(\beta)),$$

und daher bei Berücksichtigung der Differentialgleichungen, denen die Funktionen $\varphi_\nu$, $\bar{\varphi}_\nu$ genügen:

$$\varphi'_\mu(\beta) < \bar{\varphi}'_\mu(\beta),$$

also wegen des ersten Teils von (3)

$$\varphi_\mu(\beta - h) > \bar{\varphi}_\mu(\beta - h)$$

für alle hinreichend kleinen positiven $h$. Das widerspräche aber der Definition von $\beta$.

**Zusatz:** Der Satz bleibt richtig, wenn man die Intervalle $\xi$, $\xi + a$ durch $\xi - a$, $\xi$ ersetzt und zugleich statt (2) die Ungleichungen

$$(2\,\text{a}) \qquad f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) > g_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$$

für jedes $\nu$ und $x \leqq \xi$ und statt der monotonen Zunahme die monotone Abnahme fordert.[1]

[1] In dem Satz 1 nebst Zusatz ist für $n = 1$ der erste Teil des Satzes V der Einleitung enthalten.

## § 5. Die Existenz von Maximal- und Minimalintegral.

Eine durch einen Punkt $P = P(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ gehende Integralkurve

$$y_1 = \psi_1(x), \ldots, y_n = \psi_n(x)$$

eines Systems (S) soll eine *maximale* oder *minimale Integralkurve* durch $P$ heissen, wenn für jede durch $P$ gehende Integralkurve

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$$

von (S) die $n$ Ungleichungen

$$\varphi_\nu(x) \leqq \psi_\nu(x) \quad \text{bzw.} \quad \varphi_\nu(x) \geqq \psi_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gelten, soweit *beide* Integralkurven existieren.

Weiter wollen wir sagen, ein Funktionensystem $f_1, \ldots, f_n$ erfülle die Voraussetzung $(V_2)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$(V_2)$ *$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(x, y_1, \ldots, y_n)$ ist ein Gebiet, $P = P(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ ein Punkt von $\mathfrak{G}$. Jedes $f_\nu$ ist in $\mathfrak{G}$ stetig und eine monoton wachsende Funktion jeder Variabeln $y_\varkappa$ mit $\varkappa \neq \nu$ in dem durch $x \geqq \xi$ bestimmten Teilbereich von $\mathfrak{G}$, dagegen eine monoton abnehmende Funktion in dem durch $x \leqq \xi$ bestimmten Teilbereich.*

**Hilfssatz 2:** *Unter der Voraussetzung $(V_2)$ möge es ein $\varepsilon_0 > 0$, ein $\xi$ enthaltendes Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ und eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ geben, so dass für jedes $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ eine durch $P$ gehende Integralkurve*

$$K_\varepsilon: \quad y_1 = \varphi_1(x, \varepsilon), \ldots, y_n = \varphi_n(x, \varepsilon)$$

*des Systems*

(1) $$y'_\nu = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ existiert und die durch dieses Intervall bestimmten Stücke der $K_\varepsilon$ sämtlich in $\mathfrak{H}$ liegen. Dann existieren die Grenzwerte*

(2) $$\psi_\nu(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\nu(x, \varepsilon) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*gleichmässig für $\alpha \leqq x \leqq \beta$, und*

$$y_1 = \psi_1(x), \ldots, y_n = \psi_n(x) \tag{3}$$

*ist eine durch $P$ gehende Integralkurve des Systems* (S), *und zwar eine maximale für $x \geqq \xi$, eine minimale für $x \leqq \xi$.*

**Beweis:** Die Funktionen $|f_\nu|$ besitzen in $\mathfrak{H}$ eine obere Schranke $M$. Da die $\varphi_\nu(x, \varepsilon)$ dem System (1) genügen, ist

$$\varphi_\nu(x, \varepsilon) = \eta_\nu + \int_\xi^x f_\nu(x, \varphi_1(x, \varepsilon), \ldots, \varphi_n(x, \varepsilon))\, dx + \varepsilon(x - \xi), \tag{4}$$

also für $\alpha \leqq x \leqq \beta$

$$|\varphi_\nu(x, \varepsilon)| \leqq |\eta_\nu| + (\beta - \alpha)(M + \varepsilon_0)$$

und für $\alpha \leqq x_1 < x_2 \leqq \beta$

$$|\varphi_\nu(x_2, \varepsilon) - \varphi_\nu(x_1, \varepsilon)| \leqq (x_2 - x_1)(M + \varepsilon_0),$$

d. h. die $K_\varepsilon$ sind für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ beschränkt und gleichgradig stetig. Daher existieren für eine gegen Null strebende Folge von Zahlen $\varepsilon$ die Grenzwerte (2) gleichmässig in $\langle \alpha, \beta \rangle$. Da nach Satz 6 für $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$

$$\varphi_\nu(x, \varepsilon_1) \begin{cases} < \varphi_\nu(x, \varepsilon_2) & \text{für} \quad x > \xi, \\ > \varphi_\nu(x, \varepsilon_2) & \text{für} \quad x < \xi \end{cases}$$

ist, gilt (2) auch gleichmässig in $\langle \alpha, \beta \rangle$, wenn $\varepsilon$ kontinuierlich gegen Null strebt.

Aus (4) folgt weiter für $\varepsilon \to 0$:

$$\psi_\nu(x) = \eta_\nu + \int_\xi^x f_\nu(x, \psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))\, dx,$$

d. h. die Funktionen (3) stellen in der Tat eine für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ existierende und durch $P$ gehende Integralkurve von (S) dar. Da nach Satz 6 für jede durch $P$ gehende Integralkurve

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$$

von (S), soweit diese in $\langle \alpha, \beta \rangle$ existiert, die Ungleichungen

$$\varphi_\nu(x) \begin{cases} < \varphi_\nu(x, \varepsilon) & \text{für} \quad x > \xi, \\ > \varphi_\nu(x, \varepsilon) & \text{für} \quad x < \xi \end{cases}$$

gelten, folgt aus (2)

$$\varphi_\nu(x) \leqq \psi_\nu(x) \text{ für } x \geqq \xi \quad \text{und} \quad \varphi_\nu(x) \geqq \psi_\nu(x) \text{ für } x \leqq \xi,$$

und damit ist auch der Rest des Satzes bewiesen

**Zusatz:** *Der Hilfssatz bleibt richtig, wenn man $\varepsilon$ in* (1) *durch* $-\varepsilon$ *ersetzt und zugleich die Worte »maximal» und »minimal» vertauscht.*

**Satz 7:** *Unter der Voraussetzung* ($V_2$) *gibt es durch $P$ genau eine maximale und genau eine minimale Integralkurve von* (S). *Beide Kurven kommen nach beiden Seiten dem Rand von $\mathfrak{G}$ beliebig nahe.*

**Beweis:** Dass es höchstens je eine dieser Kurven geben kann, ist klar.

Für den Existenzbeweis wird um $P$ ein in $\mathfrak{G}$ gelegener Quader

$$|x-\xi| \leqq a, \quad |y_1-\eta_1| \leqq b, \ldots, |y_n-\eta_n| \leqq b$$

abgegrenzt. In diesem haben die $|f_\nu|$ eine obere Schranke $M$. Wird $\varepsilon_0 = M$ gesetzt, so ist der Hilfssatz nebst Zusatz anwendbar und ergibt die Existenz einer maximalen und einer minimalen Integralkurve durch $P$, die mindestens in dem Intervall

$$|x-\xi| \leqq \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{2M}\right)$$

existiert.

Wir beschäftigen uns nun vorerst allein mit der maximalen Integralkurve weiter. Da eine solche sicher in einem offenen, den Wert $\xi$ enthaltenden Intervall existiert, gibt es auch ein grösstes Intervall dieser Art, es heisse $(A, B)$. Es ist nun zu zeigen, dass die für $A < x < B$ existierende maximale Integralkurve

$$y_1 = \psi_1(x), \ldots, y_n = \psi_n(x) \tag{5 a}$$

für $x \to A + 0$ und für $x \to B - 0$ dem Rand von $\mathfrak{G}$ beliebig nahe kommt.

Angenommen, das sei für $x \to B - 0$ nicht der Fall. Dann existieren die Grenzwerte

$$\bar{\eta}_\nu = \lim_{x \to B} \psi_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

und die Kurve (5 a) genügt, wenn $\psi_\nu(B) = \bar{\eta}_\nu$ gesetzt wird, in dem ganzen Intervall $\xi \leqq x \leqq B$ dem System (S) und ist in diesem Intervall eine maximale Integralkurve durch $P$.

Um $\bar{P} = \bar{P}(B, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$ lässt sich wieder ein zu $\mathfrak{G}$ gehöriger Quader

$$|x - B| \leqq \bar{a}, \quad |y_1 - \bar{\eta}_1| \leqq \bar{b}, \ldots, \quad |y_n - \bar{\eta}_n| \leqq \bar{b}$$

abgrenzen; in ihm sei $\bar{M}$ eine obere Schranke für die $|f_\nu|$; ferner sei

$$\bar{B} = B + \text{Min}\left(\bar{a}, \frac{\bar{b}}{2\bar{M}}\right).$$

Dann ist der Hilfssatz 2 mit $\varepsilon_0 = \bar{M}$ wiederum anwendbar und ergibt die Existenz einer maximalen Integralkurve

$$y_1 = \psi_1(x), \ldots, y_n = \psi_n(x) \tag{5 b}$$

durch $\bar{P}$ für das Intervall $B \leqq x \leqq \bar{B}$. Die beiden für $\xi \leqq x \leqq B$ bzw. $B \leqq x \leqq \bar{B}$ definierten Kurvenstücke (5) bilden zusammen jedenfalls eine durch $P$ gehende Integralkurve. Von dieser soll gezeigt werden, dass das durch $B \leqq x \leqq \bar{B}$ bestimmte Stück auch bezüglich der von $P$ ausgehenden Kurven die Maximaleigenschaft besitzt.

Ist

$$y_1 = \varphi_1(x, \varepsilon), \ldots, y_n = \varphi_n(x, \varepsilon)$$

für $0 < \varepsilon < \bar{M}$ eine durch $\bar{P}$ gehende Integralkurve des Systems

$$y'_\nu = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

so existiert sie sicher für $B \leqq x \leqq \bar{B}$. Gelangt irgend eine von $P$ ausgehende Integralkurve

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$$

von (S) nach rechts über die Ebene $x = B$ hinaus, so folgt aus dem Satz 6, soweit diese Integralkurve noch in dem Intervall $B \leqq x \leqq \bar{B}$ existiert,

$$\varphi_\nu(x) \leqq \varphi_\nu(x, \varepsilon) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

also nach dem Hilfssatz 2

$$\varphi_\nu(x) \leqq \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\nu(x, \varepsilon) = \psi_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

d. h. die Kurve (5) ist für alle von $P$ ausgehenden Kurven im Intervall $\xi \leqq x \leqq \bar{B}$ eine maximale Integralkurve. Das ist aber wegen $\bar{B} > B$ ein Widerspruch gegen die Definition des Intervalls $(A, B)$, als des grössten Intervalls, in dem die maximale Integralkurve existiert. Damit ist gezeigt, dass die maximale Integralkurve für $x \to B - 0$ dem Rand von $\mathfrak{G}$ beliebig nahe kommt.

Ähnlich kann man zeigen, dass sie diese Eigenschaft auch für $x \to A + 0$ besitzt. Man kann es jedoch auch einsehen, in dem man durch $\bar{x} = -x$ eine neue Variable einführt und den schon bewiesenen Teil des Satzes auf das so entstehende System anwendet.

Endlich ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung für die Minimalkurve, indem man sie durch Einführung von $\bar{y} = -y$ auf den Fall der Maximalkurve zurückführt.

## § 6. Weitere Sätze über Maximal- und Minimalintegrale.

Nachdem die Existenz von Maximal- und Minimalintegral bewiesen ist, kann der Hilfssatz 2 zu folgendem Existenzsatz ausgebaut werden.

**Satz 8:** *Unter der Voraussetzung* $(V_2)$ *gibt es nach Satz 7 durch* $P$ *eine maximale und eine minimale Integralkurve von* (S). *Es sei*

$$K: \quad y_1 = \psi_1(x), \ldots, y_n = \psi_n(x)$$

*für* $x \geqq \xi$ *die maximale und für* $x \leqq \xi$ *die minimale Integralkurve durch* $P$; *diese Kurve existiere für* $a_0 < x < b_0$ $(a_0 < \xi < b_0)$. *Für* $\varepsilon > 0$ *sei*

$$K_\varepsilon: \quad y_1 = \varphi_1(x, \varepsilon), \ldots, y_n = \varphi_n(x, \varepsilon)$$

*eine durch* $P$ *gehende Integralkurve des Systems*

$$(1) \qquad y'_\nu = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

*Ist* $a_0 < a < b < b_0$, *so existieren alle* $K_\varepsilon$ *für alle hinreichend kleinen* $\varepsilon > 0$ *in* $\langle a, b \rangle$, *und in diesem Intervall existieren die folgenden Grenzwerte gleichmässig und haben die Werte*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\nu(x, \varepsilon) = \psi_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

**Beweis:** Man darf $a < \xi < b$ annehmen. Es gibt einen beschränkten abgeschlossenen Teilbereich $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, der $K$ für $a \leqq x \leqq b$ im Innern enthält. Wegen des Hilfssatzes 2 ist hier allein noch nachzuweisen, dass die $K_\varepsilon$ für alle hinreichend kleinen positiven $\varepsilon$ in $\mathfrak{H}$ liegen.

Dieses trifft sicher zu, wenn $\langle a, b\rangle$ hinreichend klein ist. Ist irgend ein $\langle a, b\rangle$ gegeben, so gibt es daher ein grösstes den Wert $\xi$ enthaltendes Teilintervall $\langle A, B\rangle$ von $\langle a, b\rangle$ mit der Eigenschaft, dass in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $(A, B)$ alle $K_\varepsilon$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ existieren und in $\mathfrak{H}$ liegen und daher der Satz für dieses abgeschlossene Teilintervall gilt.

Es sei $M$ eine obere Schranke der $|f_\nu|$ in $\mathfrak{H}$. Um den Punkt $Q = Q(B, \psi_1(B), \ldots, \psi_n(B))$ lässt sich, da er innerer Punkt von $\mathfrak{H}$ ist, ein in $\mathfrak{H}$ gelegener Quader

$$|x - B| \leqq s, \quad |y_1 - \psi_1(B)| \leqq t, \ldots, \quad |y_n - \psi_n(B)| \leqq t$$

so abgrenzen, dass

$$s < B - \xi \quad \text{und} \quad 6Ms < t$$

ist. Dann ist $\langle \xi, B - s\rangle$ ein Intervall, für das die Behauptung richtig ist. D. h. es gibt ein $0 < \varepsilon_0 < M$, so dass für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ insbesondere

$$(2) \qquad |\varphi_\nu(B - s, \varepsilon) - \psi_\nu(B - s)| < Ms$$

ist. Da $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ und $|f_\nu| \leqq M$ in $\mathfrak{H}$ ist, folgt aus den Differentialgleichungen, denen die $\psi_\nu$ und $\varphi_\nu$ genügen,

$$(3) \qquad |\psi_\nu(B) - \psi_\nu(B - s)| \leqq Ms$$

und, soweit die Kurven $K_\varepsilon$ für $|x - B| \leqq s$ in $\mathfrak{H}$ verlaufen,

$$(4) \qquad |\varphi_\nu(x, \varepsilon) - \varphi_\nu(B - s, \varepsilon)| \leqq 4Ms.$$

Aus (2), (3) und (4) folgt schliesslich, soweit die $K_\varepsilon$ für $|x - B| \leqq s$ in $\mathfrak{H}$ liegen,

$$|\varphi_\nu(x, \varepsilon) - \psi_\nu(B)| < 6Ms < t,$$

d. h. kein $K_\varepsilon$ trifft eine der Ebenen $y_\nu = \psi_\nu(B) \pm t$, jedes $K_\varepsilon$ verläuft also bei $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ für $\xi \leqq x \leqq B + s$ ganz in $\mathfrak{H}$.

Entsprechend lässt sich zeigen, dass auch in einem Intervall $A - r \leqq x \leqq \xi$ alle $K_\varepsilon$ für alle hinreichend kleinen positiven $\varepsilon$ existieren und in $\mathfrak{H}$ verlaufen. Daraus folgt, dass diese Tatsachen auch für das Intervall $\langle A, B\rangle$ zutreffen und dass $\langle A, B\rangle = \langle a, b\rangle$ ist, da sonst das Intervall $(A, B)$ entgegen seiner Definition noch vergrössert werden könnte.

**Zusatz**: *Der Satz bleibt richtig, wenn man in* (1) $\varepsilon$ *durch* $-\varepsilon$ *ersetzt und zugleich die Worte »maximale» und »minimale» vertauscht.*

Wird in den Ungleichungen (2) des Satzes 6 (§ 4) die Gleichheit zugelassen, so lässt sich folgendes aussagen:

**Satz 9**: a) *Dem Gebiet* $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(x, y_1, \ldots, y_n)$ *mögen die beiden Punkte* $P = P(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ *und* $\bar{P} = \bar{P}(\xi, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$ *mit*

$$\eta_\nu \leqq \bar{\eta}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*angehören, und es mögen in* $\mathfrak{G}$ *die Funktionen*

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n), \quad g_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*definiert sein und für* $x \geqq \xi$ *die Ungleichungen*

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \leqq g_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$$

*erfüllen.*

b) *Ausserdem sei jede Funktion* $g_\nu$ *in* $\mathfrak{G}$ *stetig und für* $x \geqq \xi$ *eine monoton wachsende Funktion jeder Variabeln* $y_\varkappa$ *mit* $\varkappa \neq \nu$.

c) *Endlich sei*

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x) \tag{5}$$

*für* $\xi \leqq x < \xi + a$ *eine durch* $P$ *gehende Integralkurve des Systems*

$$y'_\nu = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{S}$$

*und*

$$y_1 = \psi_1(x), \ldots, y_n = \psi_n(x) \tag{6}$$

*für* $\xi \leqq x < \xi + a$ *die durch* $\bar{P}$ *gehende maximale Integralkurve des Systems*

$$y'_\nu = g_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

*Dann ist für* $\xi \leqq x < \xi + a$

$$\varphi_\nu(x) \leqq \psi_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

**Beweis**: Es sei $\xi < x_1 < \xi + a$. Dann existieren nach Satz 8 im Intervall $\xi \leqq x \leqq x_1$ alle durch $\bar{P}$ gehenden Integralkurven

$$y_\nu = \psi_\nu(x, \varepsilon) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

des Systems

$$y'_\nu = g_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$, und es ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\nu(x_1, \varepsilon) = \psi_\nu(x_1).$$

Nach Satz 2 ist weiter

$$\varphi_\nu(x_1) < \psi_\nu(x_1, \varepsilon).$$

Aus diesen beiden Relationen folgt die Behauptung.

**Zusatz 1:** *Der Satz bleibt richtig, wenn die Voraussetzung* b) *für die* $f_\nu$ *statt für die* $g_\nu$ *gilt und zugleich* (5) *die durch* $P$ *gehende minimale Integralkurve von* (S) *bedeutet;* (6) *darf dann eine beliebige Integralkurve von* (7) *sein. — Für den Bereich* $x \leqq \xi$ *lassen sich entsprechende Tatsachen ableiten, indem man diesen Fall durch Einführung einer neuen Variabeln* $\bar{x} = -x$ *auf den vorher behandelten zurückführt.*

Ein volles Analogon zu dem Satz II der Einleitung kann für Systeme hier nicht aufgestellt werden. Immerhin lässt sich aus den vorhergehenden Sätzen noch der folgende ableiten.

**Satz 10:** $P_0 = P_0(\xi, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0})$ *und* $P = P(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ *seien zwei Punkte des Gebiets* $\mathfrak{G}$ *mit*

$$(8) \qquad \eta_\nu \geqq \eta_{\nu 0} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

*Die Funktionen* $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$ *mögen die Voraussetzungen* $(V_2)$ *erfüllen.*

$$K_P: \quad y_\nu = \psi_\nu(x, P) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

*sei die durch* $P$ *gehende maximale Integralkurve des Systems* (S). *Existiert* $K = K_{P_0}$ *für* $\xi - a \leqq x \leqq \xi + b$, *so existieren alle* $K_P$ *für alle hinreichend nahe an* $P_0$ *gelegenen* $P$ *in dem gleichen Intervall, und in diesem Intervall gilt gleichmässig*

$$(9) \qquad \lim_{P \to P_0} \psi_\nu(x, P) = \psi_\nu(x, P_0) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

**Beweis:** Setzt man

$$(10) \qquad \varphi_\nu(x) = \psi_\nu(x, P) + \eta_{\nu 0} - \eta_\nu,$$

so geht die Kurve

$$y_\nu = \varphi_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

durch den Punkt $P_0$ und genügt den Differentialgleichungen

$$y'_\nu = f_\nu(x, y_1 + \eta_1 - \eta_{10}, \ldots, y_n + \eta_n - \eta_{n0}) \quad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Zu dem durch $\xi \leqq x \leqq \xi + b$ bestimmten Stück von $K$ gibt es ein $\Delta > 0$, so dass für jeden Punkt $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$ dieses Kurvenstücks auch die Punkte $x_0, y_1, \ldots, y_n$ mit

$$|y_\nu - y_{\nu 0}| \leqq \Delta \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

zu $\mathfrak{G}$ gehören. Diese Punkte bilden eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$. Wegen der Stetigkeit der $f_\nu$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass für alle

$$0 \leqq \eta_\nu - \eta_{\nu 0} < \delta \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

in $\mathfrak{H}$ für $\nu = 1, \ldots, n$

$$f_\nu(x, y_1 + \eta_1 - \eta_{10}, \ldots, y_n + \eta_n - \eta_{n0}) < f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon \tag{13}$$

gilt.

Ist

$$y_\nu = \Phi_\nu(x, \varepsilon) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

eine durch $P_0$ gehende Integralkurve des Systems

$$y'_\nu = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

so gibt es nach Satz 8[1] ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass (14) für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ im Intervall $\xi \leqq x \leqq \xi + a$ existiert; ausserdem gilt gleichmässig in diesem Intervall

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Phi_\nu(x, \varepsilon) = \psi_\nu(x, P_0) \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Ferner gilt, soweit die Kurve (11) für $\xi \leqq x \leqq \xi + b$ existiert, wegen (12) und (13) nach Satz 6

$$\varphi_\nu(x) \leqq \Phi_\nu(x, \varepsilon) \tag{16}$$

[1] Wenn die maximale Integralkurve $K$ für $\xi \leqq x \leqq \xi + a$ existiert, kann ihr Existenzintervall, wie aus Satz 7 folgt, nach rechts erweitert werden, und daher ist Satz 8 anwendbar.

und nach Satz 9 wegen (8)

$$\psi_\nu(x, P) \geqq \psi_\nu(x, P_0),$$

d. h. wegen (10)

$$\varphi_\nu(x) \geqq \psi_\nu(x, P_0) + \eta_{\nu 0} - \eta_\nu. \tag{17}$$

Aus (16) und (17) folgt, soweit die Kurve (11) in $\xi \leqq x \leqq \xi + b$ existiert,

$$\psi_\nu(x, P_0) + \eta_{\nu 0} - \eta_\nu \leqq \varphi_\nu(x) \leqq \Phi_\nu(x, \varepsilon). \tag{18}$$

Wird nun endlich, was wegen (15) möglich ist, $\varepsilon_0$ so gewählt, dass für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$|\Phi_\nu(x, \varepsilon) - \psi_\nu(x, P_0)| < \Delta$$

ist, und das dazu gehörige $\delta = \delta(\varepsilon_0)$ so gewählt, dass es kleiner als $\Delta$ ist, so folgt aus (18)

$$|\varphi_\nu(x) - \psi_\nu(x, P_0)| < \Delta,$$

d. h. die Kurve (11) kommt für $\xi \leqq x \leqq \xi + b$ nicht aus $\mathfrak{H}$ heraus, existiert also in diesem ganzen Intervall, und aus (18) folgen nun wegen (15) die Relationen (9), ebenfalls zunächst nur für $\xi \leqq x \leqq \xi + b$. Für das noch fehlende Intervallstück $\xi - a \leqq x \leqq \xi$ lässt sich aber der Beweis in ganz entsprechender Weise führen.

Tübingen, 1. 11. 1930.