LES FAMILLES DE SURFACES DE RÉVOLUTION QUI POSSÈDENT DES HARMONIQUES.

PAR

RENÉ LAGRANGE

à DIJON.

Les équations de Bessel, Legendre, Lamé apparaissent dans l'Analyse à l'occasion de la recherche des harmoniques relatifs aux surfaces de révolution élémentaires: cylindre, cône, sphère, quadrique, tore. A ma connaissance, une recherche systématique de toutes les familles de surfaces coaxiales de révolution possédant des harmoniques ne semble pas avoir été faite. C'est une pareille synthèse que je me propose dans ce travail, en établissant qu'aux familles citées s'ajoutent les surfaces obtenues par la rotation d'une *quartique bicirculaire possédant un axe de symétrie, autour de cet axe de symétrie*, autrement dit les cyclides de révolution.

Bien entendu, la plupart des résultats obtenus ici sont classiques, et ne sont reproduits que pour l'unité de l'exposé.

1. Considérons une famille à un paramètre de surfaces de révolution dont l'axe, commun, soit pris pour axe Oz. x, y, z désignant des coordonnées cartésiennes rectangulaires, soit

$$\theta(x, y, z) = C^{te} \tag{1}$$

l'équation de cette famille. Désignons par

$$\eta(x, y, z) = C^{te} \tag{2}$$

la famille des surfaces de révolution autour de Oz et orthogonales aux premières. Soit enfin

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi$$

la famille des plans méridiens. Les coordonnées cylindriques ϱ, φ, z d'un point courant (x, y, z) sont de la forme

$$\varrho = \varrho(\eta, \theta), \quad z = z(\eta, \theta), \quad \varphi = \varphi, \tag{3}$$

si l'on suppose que par chaque point de la région de l'espace considérée il passe une surface et une seule de chaque famille (1) et (2). La condition d'orthogonalité de ces deux familles s'écrit

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \eta}\frac{\partial \varrho}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0,$$

ce qui équivaut à l'existence d'une fonction $\lambda(\eta, \theta)$ telle que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \eta} &= \lambda \frac{\partial \varrho}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \varrho}{\partial \eta}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Rapporté aux 3 paramètres η, θ, φ, le ds^2 de l'espace prend la forme

$$ds^2 = \varrho^2 d\varphi^2 + d\varrho^2 + dz^2 = \varrho^2 d\varphi^2 + \left[\left(\frac{\partial \varrho}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2\right]\left(d\eta^2 + \frac{1}{\lambda^2} d\theta^2\right). \tag{5}$$

On sait d'autre part que l'équation de Laplace relative à l'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{1}{H_1^2} dh_1^2 + \frac{1}{H_2^2} dh_2^2 + \frac{1}{H_3^2} dh_3^2$$

est

$$\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{H_1}{H_2 H_3}\frac{\partial V}{\partial h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{H_2}{H_3 H_1}\frac{\partial V}{\partial h_2}\right) + \frac{\partial}{\partial h_3}\left(\frac{H_3}{H_1 H_2}\frac{\partial V}{\partial h_3}\right) = 0.$$

Avec

$$h_1 = \eta, \quad h_2 = \theta, \quad h_3 = \varphi,$$

$$H_1^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial \varrho}{\partial \eta}\right)^2 + \lambda^2\left(\frac{\partial \varrho}{\partial \theta}\right)^2}, \quad H_2 = \lambda H_1, \quad H_3 = \frac{1}{\varrho},$$

on a donc ici

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda \varrho \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\lambda \varrho H_1^2}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) = 0. \tag{6}$$

Le problème consiste à rechercher s'il existe des intégrales primitives de (6) de la forme $V = \Phi(\varphi) \times N(\eta) \times T(\theta)$, ou même, d'une manière plus générale, de la forme

$$V = f(\eta, \theta) \times \Phi(\varphi) \times N(\eta) \times T(\theta), \tag{7}$$

où $f(\eta, \theta)$ soit une fonction bien déterminée, et où les 3 autres facteurs dépendent chacun d'un ou de plusieurs paramètres. En posant tout d'abord

$$V = W(\eta, \theta) \times \Phi(\varphi), \tag{8}$$

(6) s'écrit

$$\Phi(\varphi)\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda \varrho \frac{\partial W}{\partial \theta}\right)\right] + \frac{W}{\lambda \varrho H_1^2}\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0,$$

c'est à dire

$$\frac{\lambda \varrho H_1^2}{W}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda \varrho \frac{\partial W}{\partial \theta}\right)\right] + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0. \tag{9}$$

(9) doit donc se décomposer en deux équations

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0, \tag{10}$$

où m désigne une constante complexe arbitraire, et

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda \varrho \frac{\partial W}{\partial \theta}\right) - \frac{m^2}{\lambda \varrho H_1^2} W = 0. \tag{11}$$

En posant

$$W = f(\eta, \theta) N(\eta) T(\theta), \tag{12}$$

afin d'identifier (8) avec (7), (11) donne ensuite

$$\begin{aligned}\frac{\varrho}{\lambda N}\left[\frac{d^2 N}{d\eta^2} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\log \frac{\varrho f^2}{\lambda}\right)\frac{dN}{d\eta}\right] + \frac{\varrho \lambda}{T}\left[\frac{d^2 T}{d\theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta}\log(\lambda \varrho f^2)\frac{dT}{d\theta}\right] \\ + \frac{1}{f}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda \varrho \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right] - \frac{m^2}{\lambda \varrho H_1^2} = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Il s'agit de rechercher s'il est possible de choisir le facteur $f(\eta, \theta)$ de manière que (13) se décompose en deux équations différentielles linéaires, du second ordre, l'une relative à la variable η et à la fonction inconnue $N(\eta)$, l'autre relative à θ et T. Il est tout d'abord nécessaire que $\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\log \frac{\varrho f^2}{\lambda}\right)$ soit indépendant de θ, et que $\frac{\partial}{\partial\theta}\log(\lambda\varrho f^2)$ soit indépendant de η. Il faut donc que chacune des deux fonctions $\frac{\varrho f^2}{\lambda}$ et $\lambda\varrho f^2$ soit le produit d'une fonction de η par une fonction de θ, ou, ce qui revient au même, que leur produit et leur quotient, donc ϱf^2 et λ, soient de cette forme.

D'autre part, si $\lambda = \frac{n(\eta)}{t(\theta)}$, le système (4) s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n(\eta)}\dfrac{\partial z}{\partial\eta} = \dfrac{1}{t(\theta)}\dfrac{\partial\varrho}{\partial\theta}, \\ \dfrac{1}{t(\theta)}\dfrac{\partial z}{\partial\theta} = -\dfrac{1}{n(\eta)}\dfrac{\partial\varrho}{\partial\eta}, \end{cases}$$

de sorte qu'il suffit de substituer à η, θ les variables $\int n(\eta)\,d\eta$ et $\int t(\theta)\,d\theta$ pour être ramené au cas où $\lambda = 1$. Par conséquent, nous pouvons nous borner, sans restreindre la généralité du résultat, à considérer les familles de surfaces de révolution (1) et (2) *telles que* $z(\eta, \theta)$ et $\varrho(\eta, \theta)$ *soient deux fonctions harmoniques conjuguées des variables* η, θ.

Dans ces conditions, nous savons que $f(\eta, \theta)$ doit être tel que $\log(\varrho f^2)$ soit de la forme

$$\log(\varrho f^2) = p_1(\eta) + q_1(\theta); \tag{14}$$

de sorte que (13) devient

$$\frac{1}{N}\left[\frac{d^2 N}{d\eta^2} + p'_1(\eta)\frac{dN}{d\eta}\right] + \frac{1}{T}\left[\frac{d^2 T}{d\theta^2} + q'_1(\theta)\frac{dT}{d\theta}\right] + \frac{1}{\varrho f}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\varrho\frac{\partial f}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\varrho\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\right] - \frac{m^2}{\varrho^2 H_1^2} = 0, \tag{15}$$

avec

$$\frac{1}{\varrho^2 H_1^2} = \frac{1}{\varrho^2}\left[\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varrho}{\partial\theta}\right)^2\right] = \frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho.$$

La condition (14) ne suffit pas; pour que l'équation (15) se décompose en deux équations différentielles, il faut encore, et ça suffit, que

$$\frac{1}{\varrho f}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\varrho\frac{\partial f}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\varrho\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\right] - \frac{m^2}{\varrho^2}\Delta_1\varrho \tag{16}$$

soit également la somme d'une fonction de η et d'une fonction de θ. Si l'on désire disposer d'un paramètre m variable, il faut que cette qualité de (16), qui est une fonction linéaire de m^2, subsiste quel que soit m, c'est à dire que l'on ait simultanément les formes

$$\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1 \varrho = g(\eta) + h(\theta), \tag{17}$$

et

$$\frac{1}{\varrho f}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\varrho \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\varrho \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right] = g_1(\eta) + h_1(\theta). \tag{18}$$

Il est remarquable que (18) est une conséquence de (14) et (17). En posant $p_1(\eta) = 2\int r(\eta)\,d\eta$, $q_1(\theta) = 2\int s(\theta)\,d\theta$, (14) donne en effet

$$f = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} e^{\int r(\eta)\,d\eta + \int s(\theta)\,d\theta}, \tag{19}$$

d'où résulte

$$\frac{1}{\varrho f}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\varrho \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\varrho \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right] = -\frac{1}{2\varrho}\Delta \varrho + \frac{1}{4\varrho^2}\Delta_1 \varrho + r' + r^2 + s' + s^2,$$

qui est bien de la forme (18), grâce à (17) et à l'harmonicité de ϱ.

On a d'ailleurs

$$\left\{\begin{aligned} g_1(\eta) &= \frac{1}{4} g(\eta) + r' + r^2, \\ h_1(\theta) &= \frac{1}{4} h(\theta) + s' + s^2. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Observons qu'on aurait pu se borner à établir la filiation précédente pour la fonction particulière $\bar{f} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}$ En effet,

$$W = f N T$$

s'écrit

$$W = \bar{f} \bar{N} \bar{T},$$

avec

$$\bar{N} = N e^{\frac{1}{2} p_1(\eta)}, \quad \bar{T} = T e^{\frac{1}{2} q_1(\theta)}.$$

La décomposition de (15), qui se produit pour $\bar{f}$, fournit deux équations différentielles en η, $\bar{N}$ et θ, $\bar{T}$ respectivement, donc en η, N et θ, T. Cette décomposition a donc également lieu pour la forme générale de f fournie par (14).

Nous avons ainsi démontré le

Théorème. *Les surfaces de révolution d'axe Oz et orthogonales, $\theta = C^{te}$ et $\eta = C^{te}$, pour lesquelles $\Delta V = 0$ admet des intégrales primitives de la forme*

$$V = f(\eta, \theta)\, N(\eta)\, T(\theta)\, \Phi_m(\varphi),$$

où m est un paramètre variable, f une fonction convenable, et N, T des intégrales d'équations différentielles linéaires, sont les surfaces pour lesquelles $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ est une fonction harmonique de η, θ telle que

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta \, \partial \theta}(\Delta_1 \log \varrho) = 0.$$

$z(\eta, \theta)$ est une fonction harmonique conjuguée de ϱ. $f(\eta, \theta)$ est le produit le plus général de $\frac{1}{\sqrt{\varrho}}$ par une fonction de η et une fonction de θ, et, si l'on pose (17) *et* (19), *les harmoniques primitifs sont de la forme*

$$V = f(\eta, \theta)\, N(\eta)\, T(\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (m\varphi),$$

où N et T sont les intégrales générales des deux équations

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 N}{d\eta^2} + 2\, r(\eta) \frac{dN}{d\eta} + \left[\left(\frac{1}{4} - m^2\right) g(\eta) + r'(\eta) + r^2(\eta)\right] N = 0, \\ &\frac{d^2 T}{d\theta^2} + 2\, s(\theta) \frac{dT}{d\theta} + \left[\left(\frac{1}{4} - m^2\right) h(\theta) + s'(\theta) + s^2(\theta)\right] T = 0. \end{aligned} \right.$$

En particulier, lorsque $f = 1$, on a $\frac{\Delta_1 \varrho}{\varrho^2} = 4(r^2 + s^2)$, donc $g(\eta) = 4r^2 + C$ et $h(\theta) = 4s^2 - C$, où C désigne une constante arbitraire. C'est ce qui peut se présenter toutes les fois que ϱ est lui-même le produit d'une fonction de η par une fonction de θ.

2. Avant de poursuivre, faisons une remarque essentielle. Soit ϱ une solution de notre problème, et z une fonction harmonique associée. D'une manière précise, les relations (4) où $\lambda = 1$ expriment que $z + i\varrho$ est une fonction analytique de la variable complexe

$$\alpha = \eta + i\theta;$$

z_0 désignant une constante réelle quelconque, posons

$$z - z_0 + i\varrho = u(\alpha).$$

La fonction analytique $\frac{1}{u(\alpha)}$ s'écrit

$$\frac{1}{u(\alpha)} = \frac{z - z_0 - i\varrho}{\varrho^2 + (z - z_0)^2},$$

donc

(22) $$\bar{\varrho} = \frac{-\varrho}{\varrho^2 + (z - z_0)^2}$$

est également une fonction harmonique de η, θ, une fonction associée étant

$$\bar{z} = \frac{z - z_0}{\varrho^2 + (z - z_0)^2}.$$

On vérifie tout de suite que $\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho$ est invariant pour cette transformation (22), qui correspond, à une symétrie et une translation évidentes près, d'ailleurs négligeables, à une inversion des surfaces $\eta = C^{te}$, $\theta = C^{te}$ par rapport au point $z = z_0$ de l'axe Oz. g et h peuvent être conservés. En outre, on a

$$\bar{\varrho}\bar{f}^2 = \frac{-\varrho\bar{f}^2}{\varrho^2 + (z - z_0)^2},$$

donc on peut conserver r et s, en prenant

(23) $$\bar{f} = f\sqrt{\varrho^2 + (z - z_0)^2}.$$

On a donc le

Théorème. *A toute solution du problème correspond la solution obtenue par une inversion de pôle fixe quelconque $z = z_0$ sur l'axe Oz. Les harmoniques des nouvelles surfaces se déduisent de ceux des anciennes en multipliant simplement ceux-ci par le facteur $\sqrt{\varrho^2 + (z - z_0)^2}$.*

Cette transformation des harmoniques n'est rien autre que la transformation de J. J. Thomson, mais il faut observer que nous énonçons ici un résultat supplémentaire, puisqu'il s'agit d'harmoniques de forme particulière, et que ce théorème nous apprend que cette forme se conserve dans cette transformation.

3. Il s'agit maintenant de rechercher les fonctions harmoniques $\varrho(\eta, \theta)$ telles que l'on ait

(24) $$\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\theta}\,\frac{\Delta_1\varrho}{\varrho^2} = 0.$$

Posons encore

$$z + i\varrho = u(\alpha), \qquad \alpha = \eta + i\theta.$$

$z - i\varrho$ est également fonction analytique de la variable $\beta = \eta - i\theta$, soit

$$z - i\varrho = v(\beta).$$

Par conséquent ϱ est de la forme

$$\varrho(\eta, \theta) = \frac{1}{2i}[u(\alpha) - v(\beta)], \tag{25}$$

où $u(\alpha)$, $v(\beta)$ sont deux fonctions analytiques de leurs arguments.[1] Une fonction harmonique étant analytique dans les plans de ses arguments η, θ, supposés complexes, α et β peuvent être assimilés à des variables complexes indépendantes, et (25) est encore la solution générale de l'équation $\frac{\partial^2 \varrho}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial \theta^2} = 0$. De même, le premier membre de (24) est une fonction analytique de η, θ qui doit s'annuler quand η, θ sont sur les axes réels de leurs plans; il doit donc être nul hors de ces axes. Avec les variables α, β, l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2$ s'écrit $4\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \beta}$, tandis que $\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \theta}$ devient $i\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right)$. On a donc, pour l'expression (25) de ϱ,

$$\frac{\Delta_1 \varrho}{\varrho^2} = -\frac{4u'(\alpha)v'(\beta)}{[u(\alpha) - v(\beta)]^2},$$

de sorte qu'après division par $\frac{-4iu'v'}{(u-v)^2}$, l'équation (24) s'écrit

$$K(\alpha, \beta) \equiv \frac{u'''}{u'} - \frac{v'''}{v'} - 6\frac{u'' + v''}{u - v} + 6\frac{u'^2 - v'^2}{(u - v)^2} = 0. \tag{26}$$

Nous sommes ainsi conduits à *déterminer les fonctions analytiques* $u(\alpha)$, $v(\beta)$ *des variables complexes indépendantes* α, β, *qui vérifient* (26), *et telles que* u, v *soient imaginaires conjugués quand* α, β *sont eux-mêmes imaginaires conjugués.*

Pour résoudre (26), donnons à β une valeur fixe, et considérons la fonction analytique de α

$$F(\alpha) = \frac{1}{u(\alpha) - v(\beta)} = \frac{1}{u(\alpha) - v}.$$

---

[1] Aucune de ces deux fonctions ne peut être une constante, sans quoi ϱ et z seraient constants quand η et θ varient.

Il vient

$$K(\alpha, \beta) \equiv \frac{u'''}{u'} - 6Fu'' + 6F^2u'^2 - 6F^2v'^2 - 6Fv'' - \frac{v'''}{v'} = 0,$$

avec

$$u' = -\frac{F'}{F^2}, \quad u'' = -\frac{F''}{F^2} + \frac{2F'^2}{F^3}, \quad \frac{u'''}{u'} = \frac{F'''}{F'} - 6\frac{F''}{F} + 6\frac{F'^2}{F^2};$$

par conséquent,

$$K(\alpha, \beta) \equiv \frac{F'''}{F'} - 6v'^2F^2 - 6v''F - \frac{v'''}{v'} = 0.$$

Multiplions par dF, et intégrons; il vient

$$F'' - 2v'^2F^3 - 3v''F^2 - \frac{v'''}{v'}F + b = 0,$$

où b désigne une constante. En multipliant par $2\,dF$, une nouvelle intégration donne

$$F'^2 - v'^2F^4 - 2v''F^3 - \frac{v'''}{v'}F^2 + 2bF - a = 0, \tag{27}$$

où a désigne une nouvelle constante. $F(\alpha)$ est ainsi défini par une intégrale elliptique. Il en est de même pour $\frac{1}{F(\alpha)}$, et, par suite, pour $u(\alpha)$. Ainsi, $u(\alpha)$, donc également $v(\beta)$, sont définies par deux équations différentielles à coefficients constants de la forme

$$\begin{cases} u'(\alpha)^2 = au^4 + 4bu^3 + 6cu^2 + 4du + e, \\ v'(\beta)^2 = a_1v^4 + 4b_1v^3 + 6c_1v^2 + 4d_1v + e_1. \end{cases} \tag{28}$$

Revenons maintenant à (26). On déduit de (28) que

$$u'' = 2au^3 + 6bu^2 + 6cu + 2d,$$

$$\frac{u'''}{u'} = 6(au^2 + 2bu + c),$$

et des formules analogues pour $v(\beta)$. Il vient alors

$$\frac{(u-v)^2}{6}K(\alpha, \beta) \equiv (a - a_1)u^2v^2 + 2(b - b_1)uv(u + v) + (c - c_1)(u^2 + 4uv + v^2)$$
$$+ 2(d - d_1)(u + v) + (e - e_1) = 0.$$

u et v étant variables et indépendantes entre elles, comme le sont α et β, cette identité exige que

$$(29) \qquad a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c, \quad d_1 = d, \quad e_1 = e.$$

Ce résultat s'obtient encore aisément en identifiant (27) et la première équation (28), compte tenu de la deuxième.

Enfin, supposons maintenant que $\alpha = \eta + i\theta$, $\beta = \eta - i\theta$, η, θ étant réels; u et v doivent prendre des valeurs imaginaires conjuguées, et de même u', v'. Par conséquent les seconds membres de (28) doivent être imaginaires conjugués en même temps que u et v; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les coefficients, égaux chacun à chacun d'après (29), soient réels. Nous avons ainsi démontré que *les fonctions $2i\varrho$ cherchées sont les différences de deux intégrales imaginaires conjuguées $u(\alpha)$, $v(\beta)$ d'équations de la forme*

$$(30) \qquad \begin{cases} u'(\alpha)^2 = P(u) \equiv a u^4 + 4 b u^3 + 6 c u^2 + 4 d u + e, \\ v'(\beta)^2 = P(v) \equiv a v^4 + 4 b v^3 + 6 c v^2 + 4 d v + e, \end{cases}$$

où a, b, c, d, e sont cinq constantes réelles arbitraires, non toutes nulles.

Il suffit de choisir les valeurs initiales α_0, $u(\alpha_0)$, $u'(\alpha_0)$ imaginaires conjuguées de β_0, $v(\beta_0)$, $v'(\beta_0)$ respectivement, pour que $u(\alpha)$, $v(\beta)$ soient constamment imaginaires conjuguées en même temps que α, β.

4. **Discussion.** Supposons tout d'abord que

$$a = b = c = d = 0, \qquad e \neq 0.$$

Il vient ici

$$u' = \sqrt{e}, \qquad v' = \varepsilon \sqrt{e},$$

où la condition de conjugaison exige que $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que e est positif ou négatif. Par conséquent,

$$u = \sqrt{e}\,\alpha + u_0, \qquad v = \varepsilon \sqrt{e}\,\beta + v_0,$$

u_0, v_0 désignant deux constantes imaginaires conjuguées. On en déduit enfin

$$\varrho = \frac{\sqrt{e}}{2i}(\alpha - \varepsilon\beta) + \frac{u_0 - v_0}{2i}.$$

ϱ n'est fonction que de θ ou de η. Un simple changement de notation permet de supposer qu'il s'agit de θ, ce qui conduit à faire $\varepsilon = +1$, et $e > 0$. On a ainsi

(31)
$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{e}\,\theta + \varrho_0, \\ z = \sqrt{e}\,\eta + z_0, \end{cases}$$

ϱ_0, z_0 désignant deux constantes réelles quelconques. Les surfaces de révolution $\theta = C^{te}$ et $\eta = C^{te}$ sont les *cylindres de révolution d'axe Oz et les plans $z = C^{te}$*. Il est indiqué de faire $e = 1$, $\varrho_0 = z_0 = 0$ ce qui ne restreint pas la généralité. Il vient alors

$$\varrho = \theta, \qquad z = \eta,$$

$$g(\eta) + h(\theta) = \frac{1}{\theta^2},$$

donc

(32)
$$g(\eta) = -C, \qquad h(\theta) = \frac{1}{\theta^2} + C,$$

C désignant une constante arbitraire. Quant à f, il est commode de le prendre égal à 1, ce qui donne, grâce à (19),

(33)
$$r(\eta) = 0, \qquad s(\theta) = \frac{1}{2\,\theta}.$$

En posant

(34)
$$\left(\frac{1}{4} - m^2\right) C = n^2,$$

où n est une constante complexe quelconque, les équations (21) correspondantes s'écrivent

(35)
$$\begin{cases} \dfrac{d^2 T}{d\theta^2} + \dfrac{1}{\theta}\,\dfrac{d T}{d\theta} + \left(n^2 - \dfrac{m^2}{\theta^2}\right) T = 0, \\ \dfrac{d^2 N}{d\eta^2} - n^2 N = 0. \end{cases}$$

La première de ces équations est l'équation de Bessel, d'où la forme

(36)
$$\begin{matrix} J_m \\ Y_m \end{matrix}(n\varrho) \times \begin{matrix} \mathrm{Ch} \\ \mathrm{Sh} \end{matrix}(nz) \times \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}(m\varphi)$$

des *harmoniques cylindriques*, où m et n sont deux paramètres complexes arbitraires.

5. Supposons maintenant

$$a = b = c = 0, \qquad\qquad d \neq 0.$$

Il vient[1]

[1] La lettre »d« aux premiers membres et aux numérateurs est le symbole de la différentiation.

$$d\alpha = \frac{du}{\sqrt{4du + e}}, \quad d\beta = \frac{dv}{\sqrt{4dv + e}},$$

dont l'intégration donne

$$u = d(\alpha - \alpha_0)^2 - \frac{e}{4d}, \quad v = d(\beta - \beta_0)^2 - \frac{e}{4d}.$$

α_0, β_0 sont deux constantes imaginaires conjuguées, qu'on peut annuler sans restriction. Il vient alors

$$u = d\left(\eta^2 - \theta^2 - \frac{e}{4d^2}\right) + 2 i d \eta \theta,$$

et par suite, à une translation près parallèle à Oz,

$$(37) \qquad \begin{cases} \varrho = 2 d \eta \theta, \\ z = d(\eta^2 - \theta^2). \end{cases}$$

Les surfaces $\eta = C^{te}$ et $\theta = C^{te}$ sont *deux familles de paraboloïdes de révolution d'axe Oz et de foyer $z = 0$.* D'autre part,

$$\frac{\Delta_1 \varrho}{\varrho^2} = \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\eta^2},$$

donc

$$(38) \qquad g(\eta) = \frac{1}{\eta^2} + C, \quad h(\theta) = \frac{1}{\theta^2} - C,$$

C étant une constante arbitraire. Avec $f = 1$, il vient en outre

$$r(\eta) = \frac{1}{2\eta}, \quad s(\theta) = \frac{1}{2\theta},$$

de sorte qu'en conservant la notation (34), les équations (21) s'écrivent ici

$$(39) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 N}{d\eta^2} + \dfrac{1}{\eta}\dfrac{dN}{d\eta} + \left(n^2 - \dfrac{m^2}{\eta^2}\right) N = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2 T}{d\theta^2} + \dfrac{1}{\theta}\dfrac{dT}{d\theta} + \left(-n^2 - \dfrac{m^2}{\theta^2}\right) T = 0. \end{cases}$$

Ce sont deux équations de Bessel, ce qui donne la forme connue des *harmoniques paraboliques*

$$\frac{J_m}{Y_m}(n\eta) \times \frac{J_m}{Y_m}(i\,n\,\theta) \times \frac{\cos}{\sin}(m\,\varphi). \tag{40}$$

6. Lorsque $a = b = 0$, $c \neq 0$, les équations (30) donnent

$$\alpha = \int \frac{du}{\sqrt{6cu^2 + 4du + e}} = \frac{1}{\sqrt{6c}} \int \frac{du}{\sqrt{\left(u + \frac{d}{3c}\right)^2 + \frac{3ce - 2d^2}{18c^2}}}. \tag{41}$$

Si $P(u)$ est le carré d'une forme linéaire, $3ce - 2d^2$ est nul, et (41) donne

$$u = \frac{-d}{3c} + e^{\sqrt{6c}(\alpha - \alpha_0)};$$

on a de même

$$v = -\frac{d}{3c} + e^{\varepsilon\sqrt{6c}(\beta - \beta_0)},$$

ε étant égal à $+1$ ou -1 suivant que c est positif ou négatif, et α_0, β_0 étant 2 constantes imaginaires conjuguées. En permutant au besoin les lettres η, θ, on peut supposer $c > 0$, $\varepsilon = +1$, puis $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. On peut même supposer $6c = 1$, ce qui donne

$$u = -2d + e^{\eta + i\theta}, \quad v = -2d + e^{\eta - i\theta},$$

et, par suite, à une translation près parallèle à Oz,

$$\begin{cases} \varrho = e^{\eta} \sin\theta, \\ z = e^{\eta}\cos\theta. \end{cases} \tag{42}$$

Les surfaces correspondant à ce cas sont *une famille de cônes de révolution d'axe Oz et de sommet commun, et les sphères orthogonales.*

D'autre part,

$$\frac{\Delta_1 \varrho}{\varrho^2} = \frac{1}{\sin^2\theta},$$

donc

$$g(\eta) = C, \quad h(\theta) = \frac{1}{\sin^2\theta} - C. \tag{43}$$

Suivant la valeur adoptée pour f, on obtient des équations différentielles de formes variées, mais qui peuvent rester classiques. Par exemple, $f = 1$ donne

$$r = \frac{1}{2}, \qquad s = \frac{1}{2}\cot\theta, \tag{44}$$

et par suite, en posant

$$\left(\frac{1}{4} - m^2\right) C + \frac{1}{4} = -n(n+1), \tag{45}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 N}{d\eta^2} + \dfrac{dN}{d\eta} - n(n+1) N = 0, \\ \dfrac{d^2 T}{d\theta^2} + \cot\theta \dfrac{dT}{d\theta} + \left[n(n+1) - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta} \right] T = 0. \end{cases} \tag{46}$$

La première équation admet les intégrales particulières $e^{n\eta}$, $e^{-(n+1)\eta}$; la seconde est une équation de Legendre d'argument $\cos\theta$. On obtient ainsi la famille des *harmoniques sphériques* classiques

$$\begin{matrix} e^{n\eta} \\ e^{-(n+1)\eta} \end{matrix} \times \begin{matrix} P_n^m \\ Q_n^m \end{matrix} (\cos\theta) \times \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (m\varphi). \tag{47}$$

Observons que e^{η} est la distance du point courant (ϱ, z, φ) au centre des sphères.

7. Etudions maintenant le cas où $a = b = 0$, $c \neq 0$, $3ce - 2d^2 \neq 0$. (41) donne

$$u + \frac{d}{3c} = \frac{\sqrt{4d^2 - 6ce}}{6c} \operatorname{Ch} \sqrt{6c}(\alpha - \alpha_0);$$

on a de même

$$v + \frac{d}{3c} = \frac{\varepsilon\sqrt{4d^2 - 6ec}}{6c} \operatorname{Ch} \sqrt{6c}(\beta - \beta_0);$$

α_0 et β_0 doivent être deux constantes imaginaires conjuguées, et $\varepsilon = \pm 1$ suivant que $4d^2 - 6ce$ est positif ou négatif. On peut supposer que c est positif, en permutant au besoin les lettres η et θ, et ensuite que $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Etudions tout d'abord la solution relative à $4d^2 - 6ce > 0$. En posant

$$\frac{\sqrt{4d^2 - 6ce}}{6c} = \gamma,$$

et en remplaçant η, θ par $\dfrac{\eta}{\sqrt{6c}}$, $\dfrac{\theta}{\sqrt{6c}}$, il vient

$$u = -\frac{d}{3c} + \gamma \operatorname{Ch}(\eta + i\theta), \qquad v = -\frac{d}{3c} + \gamma \operatorname{Ch}(\eta - i\theta), \tag{48}$$

donc, à une translation près parallèle à Oz,

$$\left\{\begin{aligned} \varrho &= \gamma \operatorname{Sh} \eta \sin \theta, \\ z &= \gamma \operatorname{Ch} \eta \cos \theta. \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Les surfaces $\eta = C^{te}$ sont des *ellipsoïdes allongés homofocaux, d'axe de révolution* Oz, *et* $\theta = C^{te}$ *les hyperboloïdes orthogonaux, à deux nappes,* les foyers étant les points $z = \pm \gamma$ sur Oz. D'autre part, il vient

$$\frac{1}{\varrho^2} \Delta_1 \varrho = \frac{1}{\operatorname{Sh}^2 \eta} + \frac{1}{\sin^2 \theta},$$

d'où résulte

$$g(\eta) = \frac{1}{\operatorname{Sh}^2 \eta} + C, \quad h(\theta) = \frac{1}{\sin^2 \theta} - C, \qquad C = C^{te}. \tag{50}$$

Avec $f = 1$, on a

$$r = \frac{1}{2} \coth \eta, \quad s = \frac{1}{2} \cot \theta, \tag{51}$$

de sorte qu'avec la notation (45), les équations différentielles (21) associées sont

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 N}{d \eta^2} + \coth \eta \frac{d N}{d \eta} - \left[n(n+1) + \frac{m^2}{\operatorname{Sh}^2 \eta}\right] N = 0, \\ &\frac{d^2 T}{d \theta^2} + \cot \theta \frac{d T}{d \theta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}\right] T = 0; \end{aligned}\right. \tag{52}$$

ce sont des équations de Legendre d'arguments $\operatorname{Ch} \eta$ et $\cos \theta$ respectivement. On a bien ainsi les *harmoniques des ellipsoïdes allongés*

$$\begin{matrix} P_n^m \\ Q_n^m \end{matrix} (\operatorname{Ch} \eta) \times \begin{matrix} P_n^m \\ Q_n^m \end{matrix} (\cos \theta) \times \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (m \varphi).$$

8. Soit maintenant $2d^2 - 3ce < 0$. Posons

$$\frac{\sqrt{4d^2 - 6ce}}{6c} = i\gamma,$$

γ désignant toujours une constante réelle. L'expression (48) de u est remplacée par

$$u = -\frac{d}{3c} + i\gamma \operatorname{Ch}(\eta + i\theta), \tag{53}$$

donc, à une translation près parallèle à Oz,

$$(54)\qquad \begin{cases} \varrho = \gamma \operatorname{Ch} \eta \cos \theta, \\ z = -\gamma \operatorname{Sh} \eta \sin \theta. \end{cases}$$

Les surfaces $\eta = C^{te}$ sont *des ellipsoïdes aplatis, homofocaux, d'axe de révolution* Oz, *et* $\theta = C^{te}$ *les hyperboloïdes orthogonaux, à une nappe.* On voit tout de suite que

$$\frac{1}{\varrho^2} \Delta_1 \varrho = \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 \eta},$$

donc

$$(55)\qquad g(\eta) = -\frac{1}{\operatorname{Ch}^2 \eta} + C, \quad h(\theta) = \frac{1}{\cos^2 \theta} - C.$$

La valeur $f = 1$ donne d'autre part

$$(56)\qquad r = \frac{1}{2} \operatorname{th} \eta, \quad s = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta,$$

de sorte qu'avec la même transformation (45), les équations associées sont

$$(57)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 N}{d\eta^2} + \operatorname{th} \eta \dfrac{dN}{d\eta} - \left[n(n+1) - \dfrac{m^2}{\operatorname{Ch}^2 \eta} \right] N = 0, \\ \dfrac{d^2 T}{d\theta^2} - \operatorname{tg} \theta \dfrac{dT}{d\theta} + \left[n(n+1) - \dfrac{m^2}{\cos^2 \theta} \right] T = 0. \end{cases}$$

Ce sont deux équations de Legendre d'arguments respectifs $i \operatorname{Sh} \eta$ et $\sin \theta$, et l'on obtient les *harmoniques des ellipsoïdes aplatis*

$$\begin{matrix} P_n^m \\ Q_n^m \end{matrix} (i \operatorname{Sh} \eta) \times \begin{matrix} P_n^m \\ Q_n^m \end{matrix} (\sin \theta) \times \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (m\varphi).$$

9. Nous arrivons maintenant au cas où $P(u)$ est du troisième degré en u, c'est à dire que $a = 0$, $b \neq 0$. En posant

$$(58)\qquad u = -\frac{c}{2b} + \frac{1}{b} p,$$

la première équation (30) devient l'équation suivante en α, p,

$$(59)\qquad \left(\frac{dp}{d\alpha}\right)^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3,$$

où

$$g_2 = 3c^2 - 4bd, \quad g_3 = 2bcd - b^2 e - c^3$$

sont essentiellement réels. Il résulte de là que, si $g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$, p est la fonction elliptique de Weierstrass $\wp(\alpha - \alpha_0;\ g_2,\ g_3)$ d'invariants réels g_2, g_3. Si $g_2^3 - 27 g_3^2 = 0$, des calculs élémentaires montrent que

$$p = \frac{3 g_3}{g_2} + \frac{9 g_3}{2 g_2} \cot^2 \sqrt{\frac{9 g_3}{2 g_2}} (\alpha - \alpha_0). \tag{60}$$

Dans le cas général,

$$u = -\frac{c}{2b} + \frac{1}{b} \wp(\alpha - \alpha_0;\ g_2,\ g_3),$$

$$v = -\frac{c}{2b} + \frac{1}{b} \wp(\beta - \beta_0;\ g_2,\ g_3);$$

les pôles de u et v devant être imaginaires conjugués, α_0, β_0 doivent être eux-mêmes imaginaires conjugués, et l'on peut même les annuler. Cela suffit d'ailleurs, de sorte qu'en négligeant une translation parallèle à Oz,

$$\left\{ \begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{2ib} [\wp(\alpha;\ g_2,\ g_3) - \wp(\beta;\ g_2,\ g_3)], \\ z &= \frac{1}{2b} [\wp(\alpha;\ g_2,\ g_3) + \wp(\beta;\ g_2,\ g_3)], \end{aligned} \right. \tag{61}$$

avec $\alpha = \eta + i\theta$, $\beta = \eta - i\theta$. Observons que, dans la formule d'addition

$$\wp(\eta \pm i\theta) = \frac{1}{4} \left[\frac{\wp'\eta \mp \wp'(i\theta)}{\wp\eta - \wp(i\theta)} \right]^2 - \wp\eta - \wp(i\theta),$$

la réalité des invariants g_2, g_3 entraîne celle de $\wp\eta$, $\wp'\eta$, $\wp(i\theta)$, tandis que $\wp'(i\theta)$ est imaginaire pur; et l'on a

$$\left\{ \begin{aligned} \varrho &= -\frac{1}{2ib} \frac{\wp'\eta\, \wp'(i\theta)}{[\wp\eta - \wp(i\theta)]^2}, \\ z &= \frac{1}{4b} \left\{ \frac{\wp'^2\eta + \wp'^2(i\theta)}{[\wp\eta - \wp(i\theta)]^2} - 4\wp\eta - 4\wp(i\theta) \right\}, \end{aligned} \right. \tag{62}$$

où b est un paramètre d'homothétie. En posant $\lambda = \wp\eta$, $\mu = \wp(i\theta)$, on voit tout de suite que

$$(63)\quad \begin{cases} \varrho^2 = -\dfrac{1}{4b^2}\dfrac{(4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3)(4\mu^3 - g_2\mu - g_3)}{(\lambda-\mu)^4}, \\ z = \dfrac{1}{4b}\dfrac{4\lambda\mu(\lambda+\mu) - g_2(\lambda+\mu) - 2g_3}{(\lambda-\mu)^2} \end{cases}$$

et, par conséquent, que les courbes méridiennes $\eta = C^{te}$, $\theta = C^{te}$ sont deux familles de quartiques. Leur étude se fait d'ailleurs aisément sur (62). ϱ et z ne peuvent devenir infinis que pour $\lambda = \mu$, donc pour $\eta = \pm i\theta$, à une période près. S'il s'agit d'une courbe de paramètre θ, on voit que lorsque η tend vers $i\varepsilon\theta$ $(\varepsilon = \pm 1)$,

$$\varrho \sim \frac{-\varepsilon}{2ib}\frac{\wp'(i\theta)^2}{[\wp\eta - \wp(i\theta)]^2},$$

$$z \sim \frac{1}{2b}\frac{\wp'(i\theta)^2}{[\wp\eta - \wp(i\theta)]^2},$$

donc $\varrho \sim i\varepsilon z$. Ces quartiques sont circulaires. Coupons une courbe (62) par une droite isotrope du plan de ϱ, z

$$(64)\qquad z - \zeta + \varepsilon i\varrho = 0;$$

les points de rencontre sont déterminés par l'équation

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'\eta - \varepsilon\wp'(i\theta)}{\wp\eta - \wp(i\theta)}\right]^2 - \wp\eta - \wp(i\theta) = b\zeta,$$

c'est à dire

$$(65)\qquad \wp(\eta + \varepsilon i\theta) = b\zeta.$$

ζ étant donné, posons

$$b\zeta = \wp(\gamma);$$

la solution de (65) est

$$(66)\qquad \eta + \varepsilon i\theta = \pm\gamma + \text{période},$$

ce qui donne, pour chaque direction asymptotique, deux points de rencontre à distance finie, quel que soit ζ. Il s'agit donc d'une quartique bicirculaire. La sécante (64) devient une asymptote pourvu que (66) fournisse un point à l'infini, c'est à dire une solution de la forme $\eta = \pm i\theta$. $\eta = -\varepsilon i\theta$ correspondrait à une valeur infinie de ζ; les asymptotes correspondent donc aux valeurs $\eta = \varepsilon i\theta$, c'est à dire à

$$\pm\gamma = 2\varepsilon i\theta + \text{période},$$

donc

$$\zeta = \frac{1}{b} \wp(2 i \theta). \tag{67}$$

Il existe ainsi une seule asymptote double pour chaque direction cyclique, (67) étant le point de rencontre des deux asymptotes. Les courbes $\theta = C^{te}$ sont des quartiques bicirculaires admettant des rebroussements aux points cycliques, autrement dit des Cartésiennes. Il est bien connu qu'une telle quartique a un axe de symétrie et 9 foyers, 3 à 3 en ligne droite. D'ailleurs, pour que l'équation (66) ait une racine double en η, à une période près, il faut et il suffit que $-\varepsilon i \theta + \gamma$ et $-\varepsilon i \theta - \gamma$ diffèrent d'une période, c'est à dire que γ soit une demi-période. Avec les notations habituelles des fonctions elliptiques, les valeurs correspondantes de $b\zeta$ sont e_1, e_2, e_3; il y a bien trois foyers sur Oz, dont un seul ou tous les trois sont réels. L'équation aux cotes de ces trois foyers est ainsi[1]

$$4\zeta^3 - \frac{g_2}{b^2}\zeta - \frac{g_3}{b^3} = 0. \tag{68}$$

Les courbes $\theta = C^{te}$ constituent une famille de Cartésiennes homofocales, d'axe Oz, et $\eta = C^{te}$ sont également des Cartésiennes homofocales, ayant les mêmes foyers que les premières. Le point de rencontre des asymptotes d'une courbe $\eta = C^{te}$ a la cote

$$\zeta = \frac{1}{b} \wp(2\eta). \tag{67'}$$

Pour former l'équation cartésienne de ces ovales, observons que l'équation générale d'une Cartésienne d'axe focal oz, et dont les asymptotes se coupent en $\varrho = 0$, $z = \frac{1}{b}\wp(2 i \theta)$, est de la forme

$$\left[\varrho^2 + z^2 - \frac{2}{b}\wp(2 i \theta) z + A\right]^2 - 2Bz + C = 0; \tag{69}$$

l'identification de (68) avec l'équation aux foyers de (69) donne

[1] Avec la variable initiale $z + i\varrho = u$, l'équation de ces foyers est $P(u) = 0$; en effet, $z(\eta, \theta) + i\varrho(\eta, \theta) - u = 0$ est l'équation des points de rencontre de $\theta = C^{te}$ avec la droite isotrope $z + i\varrho - u = 0$. Il y a une racine double pourvu que $\frac{\partial z}{\partial \eta} + i\frac{\partial \varrho}{\partial \eta} = 0$, c'est à dire $\frac{d\,u(\alpha)}{d\alpha} = 0$, donc $P(u) = 0$.

$$A = \frac{g_2 - 8\wp(2i\theta)^2}{4b^2}$$

$$B = \frac{4\wp(2i\theta)^3 - g_2\wp(2i\theta) - g_3}{b^3} = \frac{\wp'(2i\theta)^2}{b^3},$$

$$\frac{C}{B} = -\frac{1}{b}\wp(2i\theta);$$

on obtient ainsi l'équation générale

$$\left(\varrho^2 + z^2 - 2\zeta z + \frac{g_2}{4b^2} - 2\zeta^2\right)^2 - \left(4\zeta^3 - \frac{g_2}{b^2}\zeta - \frac{g_3}{b^3}\right)(2z + \zeta) = 0, \tag{70}$$

où $\zeta = \frac{1}{b}\wp(2i\theta)$ ou $\frac{1}{b}\wp(2\eta)$ peut être pris comme paramètre variable des courbes $\theta = C^{te}$ et $\eta = C^{te}$. La Cartésienne la plus générale admettant l'axe Oz, et dont le barycentre des trois foyers situés sur Oz est l'origine, dépend de trois constantes arbitraires; par conséquent, les surfaces obtenues ici sont *les cyclides de révolution dont la méridienne est la Cartésienne la plus générale d'axe Oz; chaque famille étant constituée par des ovales homofocales.* (70) est du second degré en ζ, de sorte que, par chaque point du plan (z, ϱ), il passe effectivement deux Cartésiennes de la famille, orthogonales entre elles.

Ces résultats valent pour le cas particulier où $g_2^3 = 27 g_3^2$, car la formule d'addition de la fonction de Weierstrass s'applique à la fonction (60), qu'il suffit de substituer dans les formules (61). Deux des trois foyers situés sur Oz sont confondus, ce qui se traduit, dans (70), par l'annulation du discriminant du facteur de $2z + \zeta$. On a des Cartésiennes à point double, c'est à dire des limaçons de Pascal ou des cardioïdes.

Revenons à la recherche des harmoniques. Nous avons

$$\Delta_1\varrho = |u'(\alpha)|^2 = u'(\alpha)v'(\beta) = \frac{\wp'\alpha\,\wp'\beta}{b^2}, \tag{71}$$

donc, en vertu de (61),

$$\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho = -4\frac{\wp'\alpha\,\wp'\beta}{(\wp\alpha - \wp\beta)^2};$$

grâce à la formule d'addition, ceci s'écrit encore

$$\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho = 4[\wp(\alpha+\beta) - \wp(\alpha-\beta)] = 4[\wp(2\eta) - \wp(2i\theta)]. \tag{72}$$

Par conséquent,

$$g(\eta) = 4\wp(2\eta) + C, \quad h(\theta) = -4\wp(2i\theta) - C, \quad C = C^{te}. \tag{73}$$

D'autre part, $r(\eta)$ et $s(\theta)$ sont nuls si l'on choisit pour f la valeur $\frac{1}{\sqrt{\varrho}}$. En posant

$$\left(\frac{1}{4} - m^2\right) C = -4k,$$

les équations (21) s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 N}{d(2\eta)^2} - \left[\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\wp(2\eta) + k\right] N = 0, \\ &\frac{d^2 T}{d(2i\theta)^2} - \left[\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\wp(2i\theta) + k\right] T = 0. \end{aligned}\right. \tag{74}$$

Ce sont les deux mêmes équations de Lamé, d'indices $m - \frac{1}{2}$ et k, et d'arguments respectifs 2η, $2i\theta$. En désignant par $E^k_{m-\frac{1}{2}}(2\eta;\, g_2,\, g_3)$ une intégrale de première espèce de la première équation (74), et par $F^k_{m-\frac{1}{2}}(2\eta;\, g_2,\, g_3)$ une intégrale de deuxième espèce, on voit que les harmoniques associés aux cyclides (70) sont de la forme

$$\frac{\wp\eta - \wp(i\theta)}{\sqrt{\wp'\eta\,\wp'(i\theta)}} \times \frac{E^k_{m-\frac{1}{2}}}{F^k_{m-\frac{1}{2}}}(2\eta) \times \frac{E^k_{m-\frac{1}{2}}}{F^k_{m-\frac{1}{2}}}(2i\theta) \times \frac{\cos}{\sin}(m\varphi). \tag{75}$$

10. Ces équations peuvent être remplacées par des équations de Legendre lorsque $g_3^2 - 27g_3^2 = 0$. Faisons toujours $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, et changeons les notations de η, θ, de façon que $\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}(\eta + i\theta)$ devienne $\frac{\theta - i\eta}{2}$. On est ainsi ramené au cas où $\frac{g_3}{g_2} = -\frac{1}{18}$, c'est à dire $g_2 = \frac{1}{12}$, $g_3 = -\frac{1}{6^3}$. Au lieu d'utiliser la formule d'addition de la fonction de Weierstrass, formons directement

$$\cot\frac{\theta - i\eta}{2} = \frac{\sin\theta + i\,\mathrm{Sh}\,\eta}{\mathrm{Ch}\,\eta - \cos\theta};$$

il vient alors, grâce à (58) et (60),

$$z + i\varrho = u = -\frac{c}{2b} - \frac{1}{6b} - \frac{1}{4b}\frac{\sin^2\theta - \mathrm{Sh}^2\eta + 2i\sin\theta\,\mathrm{Sh}\,\eta}{(\mathrm{Ch}\,\eta - \cos\theta)^2},$$

de sorte qu'à une translation près parallèle à Oz,

$$(76)\qquad \begin{cases} \varrho = -\dfrac{1}{4b}\dfrac{2\sin\theta\,\mathrm{Sh}\,\eta}{(\mathrm{Ch}\,\eta - \cos\theta)^2}, \\[2ex] z = \dfrac{1}{4b}\dfrac{\mathrm{Sh}^2\eta - \sin^2\theta}{(\mathrm{Ch}\,\eta - \cos\theta)^3}. \end{cases}$$

(72) devient ici

$$\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho = \coth^2\eta + \cot^2\theta = \frac{1}{\mathrm{Sh}^2\eta} + \frac{1}{\sin^2\theta},$$

d'où

$$(77)\qquad g(\eta) = \frac{1}{\mathrm{Sh}^2\eta} + C, \quad h(\theta) = \frac{1}{\sin^2\theta} - C, \quad C = C^{\mathrm{te}}.$$

Faisons enfin $f = \mathrm{Ch}\,\eta - \cos\theta$; il vient

$$\varrho f^2 = -\frac{1}{2b}\sin\theta\,\mathrm{Sh}\,\eta,$$

donc

$$(78)\qquad r(\eta) = \frac{1}{2}\coth\eta, \quad s(\theta) = \frac{1}{2}\cot\theta.$$

On retrouve ainsi les mêmes expressions qu'au paragraphe 7, donc les équations (52) de Legendre. *Les cyclides dont le méridienne est une Cartésienne ayant un foyer réel double admettent donc les harmoniques*

$$(79)\qquad (\mathrm{Ch}\,\eta - \cos\theta) \times \begin{matrix} P_n^m \\ Q_n^m \end{matrix}(\mathrm{Ch}\,\eta) \times \begin{matrix} P_n^m \\ Q_n^m \end{matrix}(\cos\theta) \times \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}(m\varphi).$$

Ce résultat se rattache à la remarque faite au § 2, car une Cartésienne à point double est l'inverse d'une conique par rapport à un foyer; le cas des coniques ayant un foyer réel sur Oz est bien celui traité au § 7, le rapport

$$\frac{\bar{f}}{f} = \sqrt{\varrho^2 + (z - z_0)^2}$$

fourni par la formule (23), où l'on fait $z_0 = \gamma$, étant justement égal à $\mathrm{Ch}\,\eta - \cos\theta$.

11. Il ne nous reste plus qu'à étudier le cas général où

$$P(u) \equiv a u^4 + 4 b u^3 + 6 c u^2 + 4 d u + e \qquad a \neq 0$$

est effectivement du 4^e degré. La raisonnement fait en note, au § 9, montre que les courbes $\theta = C^{te}$ et $\eta = C^{te}$ définies par

$$z + i\varrho = u(\eta + i\theta),$$

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 = P(u), \tag{80}$$

ont quatre foyers réels dont les affixes sont les racines de $P(u) = 0$. Les coefficients de cette équation étant réels, Oz est axe de symétrie de leur configuration. Il y a douze autres foyers, imaginaires. Parmi les seize foyers, quatre sont sur θz, réels ou imaginaires. Bien entendu, ces nombres sont relatifs à des foyers simples, c'est à dire au cas où les 4 racines de $P(u) = 0$ sont distinctes. Ces courbes dépendent de 5 paramètres essentiels, car α peut être multiplié par une constante réelle arbitraire.

On sait ramener la résolution de (80) à celle de l'équation traitée au paragraphe 9, grâce à une transformation homographique de u. Reproduisons ce calcul classique, dont certains éléments vont nous être utiles.

u_0 désignant une racine de $P(u) = 0$, le changement d'inconnue

$$u = u_0 + \frac{1}{U} \tag{81}$$

transforme (80) en

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)^2 = P'(u_0)\,U^3 + \frac{1}{2}P''(u_0)\,U^2 + \frac{1}{6}P'''(u_0)\,U + \frac{1}{24}P^{IV}(u_0). \tag{82}$$

(81) est une transformation anallagmatique résultant d'une translation de u, représentée par $-u_0$, suivie d'une inversion de pôle $u = 0$, et d'une symétrie par rapport à Oz. Si $P'(u_0) = 0$, u_0 étant réel, la translation est parallèle à Oz, et les courbes définies par (80) résultent de celles étudiées dans les paragraphes antérieurs au N° 9, par une inversion dont le pôle est sur Oz. Les surfaces en question sont alors les tores, à points multiples réels, et les sphères orthogonales, ainsi que les cyclides inverses d'une quadrique de révolution par rapport à un point de son axe. Les harmoniques correspondants sont déterminés aisément à l'aide de la formule (23).

D'une manière plus générale, (81) équivaut à une inversion dont le pôle est sur Oz toutes les fois que u_0 est réel. Si $P'(u_0) \neq 0$, les méridiennes correspondantes sont les quartiques inverses d'une Cartésienne par rapport à un point de son axe de symétrie; on peut encore dire que ce sont des quartiques bicirculaires à axe de symétrie ayant un foyer réel sur cet axe.

Ne réclame une étude particulière que le cas où $P(u) = 0$ n'a aucune racine réelle, de sorte que les quatre racines sont simples, ou constituent deux racines doubles imaginaires conjuguées. Traitons d'abord ce dernier cas, où $P(u)$ est le carré d'un trinôme[1] $A u^2 + 2 B u + C$, à discriminant $A C - B^2 > 0$. Soit

$$\frac{du}{d\alpha} = A u^2 + 2 B u + C. \tag{83}$$

La condition de conjugaison exige alors que

$$\frac{dv}{d\beta} = A v^2 + 2 B v + C.$$

L'intégration de (83) donne tout de suite

$$u = -\frac{B}{A} + \frac{\sqrt{A C - B^2}}{A} \operatorname{tg} \sqrt{A C - B^2} (\alpha - \alpha_0);$$

on a de même

$$v = -\frac{B}{A} + \frac{\sqrt{A C - B^2}}{A} \operatorname{tg} \sqrt{A C - B^2} (\beta - \beta_0).$$

Comme dans les paragraphes précédents, on peut faire $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, et remplacer $\sqrt{A C - B^2}(\eta + i\theta)$ par $\frac{\theta - i\eta}{2}$. Enfin, en posant

$$\frac{\sqrt{A C - B^2}}{A} = \gamma,$$

on est conduit aux expressions

$$u = -\frac{B}{A} + \gamma \operatorname{tg} \frac{\theta - i\eta}{2}, \qquad v = -\frac{B}{A} + \gamma \operatorname{tg} \frac{\theta + i\eta}{2}, \tag{84}$$

donc, à une translation près parallèle à Oz, à

$$\begin{cases} \varrho = \dfrac{-\gamma \operatorname{Sh} \eta}{\operatorname{Ch} \eta + \cos \theta}, \\[2ex] z = \dfrac{\gamma \sin \theta}{\operatorname{Ch} \eta + \cos \theta}. \end{cases} \tag{85}$$

[1] On peut toujours supposer que A, B, C sont réels en changeant au besoin α en $i\alpha$, c'est à dire η et θ en θ et $-\eta$ respectivement.

Les surfaces $\theta = C^{te}$ constituent *les tores à point multiples imaginaires communs*, d'équation

$$\varrho^2 + z^2 + 2\gamma z \cot\theta - \gamma^2 = 0,$$

et les surfaces $\eta = C^{te}$ *le faisceau des sphères orthogonales*

$$\varrho^2 + z^2 + 2\gamma\varrho \coth\eta + \gamma^2 = 0.$$

D'autre part, (85) donne

$$\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho = \frac{1}{\mathrm{Sh}^2\eta},$$

donc

$$g(\eta) = \frac{1}{\mathrm{Sh}^2\eta} + C, \qquad h(\theta) = -C, \qquad C = C^{te}. \tag{86}$$

La valeur $f = \sqrt{\mathrm{Ch}\,\eta + \cos\theta}$ conduit d'ailleurs aux valeurs

$$r = \frac{1}{2}\coth\eta, \quad s = 0, \tag{87}$$

et, par suite, en conservant la notation (45), aux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2N}{d\eta^2} + \coth\eta\frac{dN}{d\eta} - \left[n(n+1) + \frac{m^2}{\mathrm{Sh}^2\eta}\right]N = 0,\\ &\frac{d^2T}{d\theta^2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 T = 0. \end{aligned}\right. \tag{88}$$

On retrouve bien les *harmoniques des tores sans point multiple réel* sous la forme connue

$$\sqrt{\mathrm{Ch}\,\eta + \cos\theta} \times \frac{P_n^m}{Q_n^m}(\mathrm{Ch}\,\eta) \times \frac{\cos}{\sin}\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \times \frac{\cos}{\sin}(m\varphi). \tag{89}$$

12. Il ne nous reste plus qu'à étudier le cas général où $P'(u_0) \neq 0$, et nous pourrons même écarter de la discussion l'hypothèse que u_0 est réel. Poursuivant la transformation de l'équation (82), posons

$$U = -\frac{P''(u_0)}{6P'(u_0)} + \frac{4}{P'(u_0)}p; \tag{90}$$

on retrouve l'équation (59), avec

$$g_2 = \frac{P''(u_0)^2 - 2\,P'(u_0)\,P'''(u_0)}{48},$$

$$g_3 = \frac{P''(u_0)^3 - 9\,P'(u_0)^2\,P^{\mathrm{IV}}(u_0)}{6 \cdot 24^2} - g_2\,\frac{P''(u_0)}{24}.$$

Ces coefficients, qui ne dépendent pas de la racine u_0 choisie, sont les invariants de la forme $v^4 P\left(\frac{u}{v}\right)$ relativement au groupe linéaire normal, soit

$$\left\{\begin{array}{l} g_2 = a\,e + 3\,c^2 - 4\,b\,d, \\ g_3 = a\,c\,e + 2\,b\,c\,d - a\,d^2 - b^2\,e - c^3. \end{array}\right. \tag{91}$$

Ils sont réels. Les zéros de $P(u)$ sont transformés en l'infini (homologue de u_0) et en les trois racines de $4\,p^3 - g_2\,p - g_3 = 0$. Ces trois racines sont distinctes en même temps que celles de $P(u) = 0$. L'une d'entre elles, soit e_1, est sûrement réelle. Ces remarques faites, posons

$$z' + i\,\varrho' = \wp(\eta + i\,\theta;\ g_2,\ g_3). \tag{92}$$

Nous savons que le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} z' = z'(\eta,\ \theta), \\ \varrho' = \varrho'(\eta,\ \theta), \end{array}\right. \tag{93}$$

défini par (92), représente deux familles orthogonales de Cartésiennes homofocales, d'axe Oz, qui sont les courbes $\theta = C^{\mathrm{te}}$, $\eta = C^{\mathrm{te}}$. Or, on passe de $z + i\,\varrho$ à $z' + i\,\varrho'$ par la transformation anallagmatique

$$z + i\,\varrho = u_0 + \frac{\frac{1}{4}\,P'(u_0)}{z' + i\,\varrho' - \frac{1}{24}\,P''(u_0)}. \tag{94}$$

Nous avons ainsi démontré que les courbes $\theta = C^{\mathrm{te}}$, $\eta = C^{\mathrm{te}}$ représentées par la solution correspondante

$$\left\{\begin{array}{l} z = z(\eta,\ \theta), \\ \varrho = \varrho(\eta,\ \theta) \end{array}\right. \tag{95}$$

de l'équation (80) sont *deux familles de quartiques bicirculaires homofocales d'axe de symétrie* Oz. Cette dernière propriété résulte de ce que la configuration des foyers admet cet axe de symétrie, comme nous l'avons fait observer au début du paragraphe 11. Ce sont d'ailleurs les quartiques les plus générales de cette nature puisqu'elles dépendent de cinq paramètres essentiels.[1]

Nous savons a priori que ces familles de surfaces possèdent des harmoniques, mais il nous faut connaître ϱ et surtout $\frac{\Delta_1 \varrho}{\varrho^2}$ pour déterminer le facteur fixe $f(\eta, \theta)$ et les équations (21). Malgré la complication du second membre de (94), il est remarquable que $\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1 \varrho$ s'exprime très simplement en fonction de a, b, c, d, e, et même à l'aide des invariants g_2, g_3 seuls. Pour le voir, posons

$$(96) \qquad \begin{cases} u_0 = z_0 + i\,\varrho_0, \\ \frac{1}{4} P'(u_0) = A + i\,B, \\ \frac{1}{24} P''(u_0) = z_0' + i\,\varrho_0', \end{cases}$$

et déterminons ces éléments, autant que possible, par la condition (24), que nous savons être remplie. (94) s'écrit alors

$$(97) \qquad z - z_0 + i(\varrho - \varrho_0) = \frac{A + i\,B}{z' - z_0' + i(\varrho' - \varrho_0')},$$

et nous savons a priori que le point (z_0', ϱ_0') est sur un cercle directeur réel de la Cartésienne $(\varrho_0' \neq 0)$, ou sur l'axe Oz lui-même $(\varrho_0' = 0)$, puisqu'il est le pôle d'une inversion qui transforme cette Cartésienne en une quartique à axe de symétrie. Il résulte de (97) que

$$\frac{d\,u}{d\,\alpha} = - \frac{(A + i\,B)\frac{d\wp}{d\,\alpha}}{[z' - z_0' + i(\varrho' - \varrho_0')]^2},$$

donc

$$(98) \qquad \Delta_1 \varrho = \left|\frac{d\,u}{d\,\alpha}\right|^2 = \frac{(A^2 + B^2)\left|\frac{d\wp}{d\,\alpha}\right|^2}{[(z' - z_0')^2 + (\varrho' - \varrho_0')^2]^2} = (A^2 + B^2)\frac{\Delta_1 \varrho'}{[(z' - z_0')^2 + (\varrho' - \varrho_0')^2]^2}.$$

D'autre part, (97) donne

[1] D'ailleurs, comme les Cartésiennes dont elles sont les transformées anallagmatiques, les quartiques homofocales définies par la donnée de $P(u)$ forment une famille dépendant d'un paramètre, dont deux éléments passent par chaque point du plan.

$$\varrho = \varrho_0 + \frac{B(z' - z_0') - A(\varrho' - \varrho_0')}{(z' - z_0')^2 + (\varrho' - \varrho_0')^2},$$

c'est à dire

$$\varrho = \frac{\varrho_0(z'^2 + \varrho'^2) - 2mz' + 2n\varrho' + l}{(z' - z_0')^2 + (\varrho' - \varrho_0')^2}, \tag{99}$$

où m, n, l représentent les constantes

$$m = \varrho_0 z_0' - \frac{B}{2}, \quad n = -\left(\varrho_0\varrho_0' + \frac{A}{2}\right), \quad l = \varrho_0(z_0'^2 + \varrho_0'^2) + A\varrho_0' - Bz_0'. \tag{100}$$

(98) et (99) fournissent donc l'expression

$$\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho = (A^2 + B^2)\frac{\Delta_1\varrho'}{[\varrho_0(z'^2 + \varrho'^2) - 2mz' + 2n\varrho' + l]^2}.$$

A l'aide des variables $\alpha = \eta + i\theta$, $\beta = \eta - i\theta$, ϱ' et z' ont les valeurs (61), et $\Delta_1\varrho'$ est donné par (71), avec $b = 1$. Il vient donc

$$\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho = (A^2 + B^2)\frac{\wp'\alpha\,\wp'\beta}{[\varrho_0\wp\alpha\,\wp\beta - (m + in)\wp\alpha - (m - in)\wp\beta + l]^2}, \tag{101}$$

et l'on doit exprimer que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\frac{\Delta_1\varrho}{\varrho^2} = 0. \tag{102}$$

On a tout d'abord

$$\frac{1}{A^2 + B^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\frac{\Delta_1\varrho}{\varrho^2} = \frac{\wp'''\alpha\,\wp'\beta}{[\quad]^2} - \frac{6\wp''\alpha\,\wp'\alpha\,\wp'\beta(\varrho_0\wp\beta - m - in)}{[\quad]^3} +$$
$$+ \frac{6\wp'^3\alpha\,\wp'\beta(\varrho_0\wp\beta - m - in)^2}{[\quad]^4},$$

où le crochet en blanc est le crochet au second membre de (101). La dérivée analogue par rapport à β s'en déduit en permutant α et β, et en changeant i en $-i$. Compte tenu des expressions

$$\begin{cases} \wp''\alpha = 6\wp^2\alpha - \dfrac{g_2}{2}, \\ \wp'''\alpha = 12\wp\alpha\,\wp'\alpha, \end{cases}$$

l'équation (102) s'écrit, après division par $6\wp'\alpha\,\wp'\beta[\quad]^{-4}$,

$$(103) \qquad 2(\wp\alpha - \wp\beta)[\quad]^2 - \{\wp''\alpha(\varrho_0\wp\beta - m - in) - \wp''\beta(\varrho_0\wp\alpha - m + in)\}[\quad] \\ + \wp'^2\alpha(\varrho_0\wp\beta - m - in)^2 - \wp'^2\beta(\varrho_0\wp\alpha - m + in)^2 = 0.$$

Le premier membre est un polynôme entier en $\lambda = \wp\alpha$, $\mu = \wp\beta$, qui doit être identiquement nul. Pour $\mu = \lambda$, il se réduit à

$$2in\wp''\alpha(\varrho_0\wp^2\alpha - 2m\wp\alpha + l) - 4in\wp'^2\alpha(\varrho_0\wp\alpha - m),$$

dont le terme en λ de degré maximum est $-4in\varrho_0\lambda^4$. Une première condition est donc $\varrho_0 n = 0$ et nous savons que nous pouvons nous borner à l'examen du cas où

$$(104) \qquad n = 0, \quad \varrho_0 \neq 0.$$

Dans ces conditions, chacun des groupements de termes au premier membre de (103) est divisible par $\lambda - \mu$, et la division faite fournit l'identité

$$2[\varrho_0\lambda\mu - m(\lambda + \mu) + l]^2 - \left[6\varrho_0\lambda\mu - 6m(\lambda + \mu) + \frac{1}{2}\varrho_0 g_2\right][\varrho_0\lambda\mu - m(\lambda + \mu) + l] + \\ + 4\varrho_0^2\lambda^2\mu^2 - 8\varrho_0 m\lambda\mu(\lambda + \mu) + 4m^2(\lambda + \mu)^2 + (\varrho_0^2 g_2 - 4m^2)\lambda\mu + \\ + \varrho_0^2 g_3(\lambda + \mu) - g_2 m^2 - 2\varrho_0 g_3 m \equiv 0,$$

qui, toutes réductions effectuées, s'écrit

$$\left(\frac{1}{2}\varrho_0^2 g_2 - 2\varrho_0 l - 4m^2\right)\lambda\mu + \left(\varrho_0^2 g_3 + \frac{1}{2}\varrho_0 g_2 m + 2lm\right)(\lambda + \mu) + \\ + 2l\left(l - \frac{1}{4}\varrho_0 g_2\right) - 2\varrho_0 g_3 m - g_2 m^2 \equiv 0.$$

Le système des trois conditions ainsi obtenues

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\varrho_0^2 g_2 - 2\varrho_0 l - 4m^2 = 0, \\ \varrho_0^2 g_3 + \frac{1}{2}\varrho_0 g_2 m + 2lm = 0. \\ 2l\left(l - \frac{1}{4}\varrho_0 g_2\right) - 2\varrho_0 g_3 m - g_2 m^2 = 0, \end{cases}$$

équivaut aux deux équations

$$(105)\qquad \begin{cases} l = \dfrac{1}{4}\varrho_0 g_2 - 2\dfrac{m^2}{\varrho_0}, \\[2mm] 4\left(\dfrac{m}{\varrho_0}\right)^3 - g_2\dfrac{m}{\varrho_0} - g_3 = 0. \end{cases}$$

En désignant par e_1 l'une des racines réelles de $4p^3 - g_2 p - g_3 = 0$, ou l'unique racine réelle, les conditions cherchées pour que (102) ait lieu sont, si $\varrho_0 \neq 0$,

$$(106)\qquad n = 0, \quad m = \varrho_0 e_1, \quad l = -2\varrho_0\left(e_1^2 - \frac{g_2}{8}\right).$$

Ces valeurs, portées dans (100), donnent ensuite

$$(107)\qquad A = -2\varrho_0\varrho_0', \qquad B = 2\varrho_0(z_0' - e_1),$$

et

$$\varrho_0'^2 + z_0'^2 - 2e_1 z_0' - 2e_1^2 + \frac{g_2}{4} = 0,$$

c'est à dire

$$(108)\qquad \varrho_0'^2 + (z_0' - e_1)^2 = 3e_1^2 - \frac{g_2}{4} = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3).$$

Cette équation confirme une remarque faite plus haut, le cercle directeur en question ayant pour centre le point e_1. Ce cercle passe par les deux foyers réels de la Cartésienne d'affixes e_2, e_3, si ces deux racines sont imaginaires conjuguées; et ces deux foyers sont inverses par rapport à ce cercle si e_2 et e_3 sont réels. Dans ce dernier cas, e_1 doit être une des racines extrêmes du trio, pour des raisons de réalité.

Réciproquement, la Cartésienne étant donnée, g_2, g_3, e_1, e_2, e_3 sont déterminés dès qu'on fait $b = 1$ dans l'équation (70). z_0' peut être choisi arbitrairement, ϱ_0' est déterminé à l'aide de (108), puis (107) définit A et B si l'on se donne ϱ_0. z_0 est arbitraire a priori, puisqu'il représente une translation parallèle à Oz. La quartique est ainsi définie à l'aide des cinq paramètres g_2, g_3, z_0', ϱ_0, z_0, qui peuvent être substituées à ceux mis en évidence par l'intégration de (80).

Revenons à l'expression (101) de $\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho$. Compte tenu de (106), (107), (108) il vient

$$\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho = \frac{4(e_1-e_2)(e_1-e_3)\wp'\alpha\,\wp'\beta}{[(\wp\alpha-e_1)(\wp\beta-e_1)-(e_1-e_2)(e_1-e_3)]^2}; \tag{109}$$

les identités connues

$$[\wp(x+y)-e_1][\wp(x-y)-e_1]-(e_1-e_2)(e_1-e_3) =$$

$$= \frac{[(\wp x-e_1)^2-(e_1-e_2)(e_1-e_3)][(\wp y-e_1)^2-(e_1-e_2)(e_1-e_3)]}{(\wp x-\wp y)^2},$$

$$\wp\,2x - e_1 = \left[\frac{(\wp x-e_1)^2-(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp' x}\right]^2,$$

transforment (109) en

$$\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho = \frac{4(e_1-e_2)(e_1-e_3)\wp'\alpha\,\wp'\beta\,[\wp\eta-\wp(i\theta)]^4}{\wp'^2\eta\,\wp'(i\theta)^2[\wp(2\eta)-e_1][\wp(2i\theta)-e_1]}. \tag{110}$$

Enfin, l'identité

$$\wp(x+y)-\wp(x-y) = -\frac{\wp' x\,\wp' y}{(\wp x-\wp y)^2}$$

transforme (110) en

$$\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho = \frac{4(e_1-e_2)(e_1-e_3)\wp' a\,\wp'\beta}{(\wp\alpha-\wp\beta)^2[\wp(2\eta)-e_1][\wp(2i\theta)-e_1]} =$$

$$= -\frac{4(e_1-e_2)(e_1-e_3)[\wp(2\eta)-\wp(2i\theta)]}{[\wp(2\eta)-e_1][\wp(2i\theta)-e_1]},$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho = 4(e_1-e_2)(e_1-e_3)\left\{\frac{1}{\wp(2\eta)-e_1}-\frac{1}{\wp(2i\theta)-e_1}\right\}, \tag{111}$$

qui est bien de la forme $g(\eta)+h(\theta)$.

Remarquons que l'on aurait pu déduire (111) de (109) en utilisant cette forme, connue a priori, de $\frac{1}{\varrho^2}\Delta_1\varrho$. Pour $\theta=0$, (109) s'écrit en effet

$$g(\eta)+h(0) = \frac{4(e_1-e_2)(e_1-e_3)\wp'^2\eta}{[(\wp\eta-e_1)^2-(e_1-e_2)(e_1-e_3)]^2} = \frac{4(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp(2\eta)-e_1},$$

et, de même, $\eta=0$ donne

$$g(0) + h(\theta) = -\frac{4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(2i\theta) - e_1},$$

avec

$$g(0) + h(0) = 0.$$

En résumé, on a

$$(112) \qquad \begin{cases} g(\eta) = \dfrac{4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(2\eta) - e_1} + C, \\[2ex] h(\theta) = -\dfrac{4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(2i\theta) - e_1} - C, \end{cases}$$

où C désigne une constante arbitraire.

Il ne reste plus qu'à prendre $f = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}$, pour former les deux équations différentielles (21) associées. r et s sont nuls, ce qui donne enfin, après division par ± 4, les deux équations semblables

$$(113) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 N}{d(2\eta)^2} + \left\{ \dfrac{\left(\frac{1}{4} - m^2\right)(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(2\eta) - e_1} + \left(\frac{1}{4} - m^2\right)\dfrac{C}{4} \right\} N = 0, \\[3ex] \dfrac{d^2 T}{d(2i\theta)^2} + \left\{ \dfrac{\left(\frac{1}{4} - m^2\right)(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(2i\theta) - e_1} + \left(\frac{1}{4} - m^2\right)\dfrac{C}{4} \right\} T = 0. \end{cases}$$

L'expression (99) de ϱ se réduit ici à

$$(114) \qquad \varrho = \varrho_0 \frac{(\wp\alpha - e_1)(\wp\beta - e_1) - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{(\wp\alpha - z_0' - i\varrho_0')(\wp\beta - z_0' + i\varrho_0')}$$

$$= \varrho_0 \frac{[(\wp\eta - e_1)^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)][(\wp(i\theta) - e_1)^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)]}{[\wp\eta - \wp(i\theta)]^2 \left[\wp\alpha - \frac{1}{24}P''(u_0)\right]\left[\wp\beta - \frac{1}{24}\overline{P''(u_0)}\right]},$$

mais est bien compliquée quand on l'explicite en fonction de $\wp\eta$ et $\wp(i\theta)$.

Les équations (113) sont du type

$$(115) \qquad \frac{d^2 \varDelta}{dx^2} - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\left\{ \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\wp x - e_1} + k \right\} \varDelta = 0.$$

En posant $\wp x = \xi$, on obtient la forme algébrique

$$(116) \qquad 4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)\frac{d^2 A}{d\xi^2} + 2\left(3\xi^2 - \frac{g_2}{4}\right)\frac{dA}{d\xi} - \\ - \left\{\frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\xi - e_1} + k\right\}(e - e_2)(e_1 - e_3)A = 0,$$

qui est une forme d'équation de Lamé généralisée. Ses points critiques sont $\xi = e_1, e_2, e_3, \infty$. Ils sont réguliers, et l'on voit tout de suite que les exposants caractéristiques sont $0, \frac{1}{2}$ pour les points e_2, e_3, $\frac{1}{4} \pm \frac{m}{2}$ pour e_1, et $0, -\frac{1}{2}$ pour $\xi = \infty$. En désignant par $\mathscr{E}^k_{m-\frac{1}{2}}(x)$ et $\mathscr{F}^k_{m-\frac{1}{2}}(x)$ deux intégrales distinctes de (115), les *harmoniques des cyclides de révolution générales* sont de la forme

$$(117) \qquad \frac{1}{\sqrt{\varrho(\eta, \theta)}} \times \begin{matrix}\mathscr{E}^k_{m-\frac{1}{2}} \\ \mathscr{F}^k_{m-\frac{1}{2}}\end{matrix}(2\eta) \times \begin{matrix}\mathscr{E}^k_{m-\frac{1}{2}} \\ \mathscr{F}^k_{m-\frac{1}{2}}\end{matrix}(2i\theta) \times \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(m\varphi),$$

où ϱ a l'expression (114).