ÜBER DIE n-DIMENSIONALEN CARTANSCHEN RÄUME UND EINE NORMALFORM DER ZWEITEN VARIATION EINES $(n-1)$-FACHEN OBERFLÄCHENINTEGRALS.

VON

L. BERWALD

in PRAG.

Herrn Prof. Elie Cartan zu seinem 70. Geburtstag am 9. April 1939 gewidmet.

Einleitung.

In einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit den Koordinaten x^i sei

$$x^i = x^i(v^1, v^2, \dots v^{n-1}) \tag{α}$$

die Parameterdarstellung einer Hyperfläche und

$$\int\limits_{(n-1)} \psi\left(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial v^\alpha}\right) dv^1\, dv^2 \dots dv^{n-1} \tag{β}$$ [1]

ein $(n-1)$-faches, bei Parametertransformation invariantes Integral, erstreckt über ein Gebiet der Hyperfläche, wo $\psi > 0$ ist.[2] Das zu diesem Integral gehörige Variationsproblem sei regulär. Herr L. Koschmieder[3] hat 1927 die zweite Variation des Integrals (β), erstreckt über ein Gebiet einer Extremalhyperfläche, bei fester Berandung auf eine gegenüber Punkt- und Parametertransformationen invariante Normalform gebracht. In dieser tritt eine Invariante auf, die er U_0^* nennt. Andererseits hat Herr E. Cartan[4] auf ein solches Integral,

---

[1] Im Folgenden laufen *lateinische* Zeiger stets von 1 bis n, *griechische* von 1 bis $n-1$.

[2] Über die Funktionen $x^i(v^1, v^2, \dots v^{n-1})$ und $\psi\left(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial v^\alpha}\right)$ sind natürlich gewisse Regularitätsannahmen zu machen. Ferner werden nur Parametertransformationen mit positiver Funktionaldeterminante betrachtet. In der Theorie von Cartan wird endlich über den Integranden von (β) noch die Voraussetzung (III. 2), Nr. 2 gemacht.

[3] L. Koschmieder, [3], S. 482. (Die Nummern in eckiger Klammer bei Verfassernamen beziehen sich auf das Schriftenverzeichnis am Schlusse der Arbeit).

[4] E. Cartan, [3].

indem er es als $(n-1)$-dimensionale Oberfläche des Hyperflächenstückes auffasst, eine Geometrie aufgebaut, die sich dazu ebenso verhält, wie die Finslersche Geometrie zu einem einfachen Integral, wenn dieses als Länge eines Kurvenbogens angesehen wird. Allerdings ist die Cartansche Geometrie nur dann eindeutig bestimmt, wenn ein gewisser Tensor (H^{ij}, Nr. 7) den Rang n hat. Wir nennen in diesem Falle die mit der Cartanschen Geometrie begabte Mannigfaltigkeit einen *regulären Cartanschen Raum*.

In der vorliegenden Abhandlung soll nun folgende Frage beantwortet werden:

Wie hängt in einem regulären Cartanschen Raum die Invariante U_0^* von Koschmieder mit der Krümmung und Torsion des Raumes, sowie mit den Invarianten der Extremalhyperfläche zusammen?

Zur Beantwortung dieser Frage musste erstens die Theorie der Torsion und Krümmung eines regulären Cartanschen Raumes entwickelt, zweitens die Theorie der Hyperflächen in einem solchen Raum in allgemeinen Parametern[1] aufgestellt und endlich die Koschmiedersche Normalform der zweiten Variation mit Verwendung der Grössen, die in der Theorie von Cartan auftreten, abgeleitet werden. Dem entsprechend zerfällt die vorliegende Arbeit in drei Abschnitte.

Im ersten Abschnitt wird zunächst die Cartansche Theorie ab ovo entwickelt[2] (§ 1), in einer Form, die besonders übersichtlich und bequem sein dürfte. In § 2 wird nach einem kurzen Abschnitt über die kovariante Ableitung die Theorie der Torsion und Krümmung eines regulären Cartanschen Raumes auseinandergesetzt. Sie verläuft ganz analog wie die entsprechende Theorie für den Finslerschen Raum.[3] Endlich werden in § 3 die wichtigsten besonderen Klassen von regulären Cartanschen Räumen besprochen.

Der zweite Abschnitt, der die Theorie der Hyperflächen behandelt, zerfällt in zwei Paragraphen. In § 4 werden die Grundformen der Hyperfläche eingeführt, in § 5 die Grundgleichungen der Hyperflächentheorie aufgestellt und aus ihnen geometrische Folgerungen gezogen. Die Entwickelungen entsprechen hier im wesentlichen der von Herrn J. M. Wegener[4] aufgestellten Theorie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen.

---

[1] Für $n=3$ und die Flächendarstellung $x^3=0$ hat bereits Herr E. Cartan, [3], Abschnitt VIII. die Flächentheorie skizziert. Wir benötigen hier die Formeln für allgemeine Parameterdarstellung bei beliebigem n.

[2] E. Cartan, [3], Abschnitte I., II., III., V., VI. Vgl. dazu auch die allgemeineren Entwicklungen von J. A. Schouten und J. Haantjes, [1], Nr. 1, 2.

[3] E. Cartan, [4], Abschnitt XIII.

[4] J. M. Wegener, [1]. Vgl. auch E. Cartan, [4], Abschnitt XI.

Im dritten Abschnitt wird zunächst (§ 6) die erste Variation des Oberflächenintegrals auf eine invariante Gestalt gebracht und gezeigt, dass die Extremalhyperflächen des zugehörigen Variationsproblems bei fester $(n-2)$-dimensionaler Berandung mit den Minimalhyperflächen des Cartanschen Raumes identisch sind.[1] Sodann wird (§ 7) die zweite Variation des Oberflächenintegrals, erstreckt über eine Extremalhyperfläche bei fester $(n-2)$-dimensionaler Berandung auf eine Normalform gebracht, die sich als identisch mit der von Herrn Koschmieder eingeführten erweist. Damit ist die gestellte Frage beantwortet. Da die Rechnung, die zu dieser Normalform führt, sehr umständlich ist — was sich wohl kaum vermeiden lässt — habe ich ihren Gang in einem Anhang wenigstens soweit angedeutet, dass dem Leser die Überprüfung ermöglicht wird.

Erster Abschnitt: Torsion und Krümmung der regulären Cartanschen Räume.

§ 1. Die regulären Cartanschen Räume.

1. *Euklidisch zusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Hyperflächenelementen.* Unter einem Cartanschen Raum verstehen wir eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Geometrie auf dem Begriffe der Oberfläche eines $(n-1)$-dimensionalen Hyperflächenbereiches beruht. Wir entwickeln zunächst die Cartansche Theorie dieser Räume.[2] Das Raumelement der Cartanschen Theorie ist das (orientierte) Hyperflächenelement, d. i. die Figur, die aus einem Punkte und einer durch diesen Punkt hindurchgehenden (orientierten) Hyperebene besteht. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit hat, als Mannigfaltigkeit von Hyperflächenelementen betrachtet, $2n-1$ Dimensionen.

Zunächst werde mit Cartan der Begriff einer *euklidisch zusammenhängenden Mannigfaltigkeit von Hyperflächenelementen* definiert, indem Forderungen für die *Massbestimmung* und für die *Parallelübertragung von Vektoren* gestellt werden.

Von der *Massbestimmung* wird verlangt, dass sie in der unmittelbaren Umgebung jedes Hyperflächenelementes euklidisch ist. D. h.[3]

---

[1] E. Cartan, [3], S. 24, 26.

[2] Zu dem ganzen § 1 vgl. E. Cartan, [3]. Siehe auch J. A. Schouten und J. Haantjes, [1].

[3] Wir bezeichnen die auf die *Massbestimmung* bezüglichen Forderungen mit (I), die auf die *Parallelübertragung* bezüglichen mit (II), endlich die Forderungen, die sich auf die *Grundfunktion* (Nr. 2) des Cartanschen Raumes beziehen, mit (III), und fügen jedesmal noch eine arabische Ziffer hinzu.

(I. 1) *Das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes* (x) *und eines willkürlichen unendlich benachbarten Punktes* $(x + dx)$ *in Bezug auf ein Hyperflächenelement in* (x), *dessen Stellung beliebig ist*, *ist eine positiv-definite quadratische Differentialform* $g_{ik}\, dx^i\, dx^k$, *deren Koeffizienten* $g_{ik} = g_{ki}$ *nur vom Hyperflächenelement abhängen.*

Die Stellung eines Hyperflächenelementes im Punkte $(x) = (x^1, x^2, \ldots x^n)$ wird analytisch durch n nicht sämtlich verschwindende Parameter $u_1 : u_2 : \ldots : u_n$ gegeben, die in dem Sinne homogen sind, dass sie alle mit demselben willkürlichen positiven Faktor multipliziert werden dürfen. Die u_i sind die Koeffizienten der Gleichung

$$u_i\, dx^i = 0, \tag{1. 1}$$

welche ausdrückt, dass die Richtung $dx^1 : dx^2 : \ldots : dx^n$ im Punkte (x) in der Hyperebene des Hyperflächenelementes liegt. Bei Koordinatentransformation verhalten sich die u_i wie die Komponenten einer kovarianten Vektordichte vom Gewicht -1.

Die Forderung (I. 1) besagt, dass die g_{ik} Funktionen der x^i und u_i sind, die in den u_i positiv homogen von nullter Ordnung sind. Ausserdem mögen sie etwa in einem einfach zusammenhängenden Bereich der x^i und für alle Wertsysteme der u_i mit Ausnahme des Wertsystems $(0, 0, \ldots 0)$ als regulär analytisch vorausgesetzt werden. Wir bezeichnen den so definierten Bereich der (x, u) mit $\mathfrak{B}$.

Die Figur, die der Massbestimmung zugrundeliegt, ist somit die zweier unendlich benachbarten Punkte (x), $(x + dx)$ und eines Hyperflächenelementes (x, u). Diese Figur heisst ein *infinitesimaler Vektor* (dx) im Hyperflächenelement (x, u). Indem man sich die Stückchen von euklidischen Räumen, zu denen die Umgebungen der einzelnen Hyperflächenelemente der betrachteten Mannigfaltigkeit durch (I. 1) geworden sind, vervollständigt denkt, d. h. indem man jedem Hyperflächenelement (x, u) einen euklidischen Raum zuordnet, kann man auch zu *endlichen Vektoren und allgemein zu Grössen (Tensoren, Dichten u. s. w.) im Hyperflächenelement* (x, u) übergehen. *Die Komponenten von Grössen sind also im Folgenden stets* Funktionen des Hyperflächenelements, d. h. *Funktionen der* x^i *und* u_i, *die in den* u_i *positiv homogen von nullter Ordnung sind.* Das Hyperflächenelement heisst das *Stützelement* der Grösse.

Für endliche Vektoren formuliert besagt (I. 1), dass *das Quadrat der Länge eines Vektors* (X) im Hyperflächenelement (x, u) durch

$$\lambda^2 = g_{ik}(x, u)\, X^i X^k \tag{1. 2}$$

gegeben ist.

Wir bezeichnen im Folgenden die Determinante der g_{ik} mit g, das inverse System der g_{ik} mit g^{ik} und definieren, wie üblich, das Hinauf- und Herunterziehen der Zeiger mit Hilfe der g^{ik} und g_{ik}. Wir können dann von kontravarianten und kovarianten Komponenten eines Vektors sprechen u. s. f. Endlich treffen wir die naheliegende Festsetzung, dass die u_i die kovarianten Komponenten einer zum Hyperflächenelement (x, u) *senkrechten* Vektordichte sind. Der *Normaleneinheitsvektor* des Hyperflächenelementes hat dann die kovarianten bezw. kontravarianten Komponenten

$$(1.3) \qquad l_i = \frac{u_i}{\sqrt{g^{ik} u_i u_k}}, \qquad l^i = \frac{g^{ik} u_k}{\sqrt{g^{ik} u_i u_k}}.$$

Die Quadratwurzel soll dabei positiv gezogen werden.

Die euklidischen Räume, die den einzelnen Hyperflächenelementen (x, u) der betrachteten Mannigfaltigkeit zugeordnet wurden, werden in Zusammenhang gebracht, indem man definiert, was unter der *Parallelübertragung* eines Vektors von einem Hyperflächenelement nach einem unendlich benachbarten zu verstehen ist:

(II. 1) *Es sei* (X) *ein willkürlicher Vektor im beliebigen Hyperflächenelement* (x, u) *und* $(x + dx,\ u + du)$ *ein beliebiges zu* (x, u) *unendlich benachbartes Hyperflächenelement. Dann heisst der Vektor* $(X + dX)$ *im Hyperflächenelement* $(x + dx,$ $u + du)$ *parallel zum Vektor* (X) *im Hyperflächenelement* (x, u), *wenn (bis auf infinitesimale Grössen höherer als erster Ordnung)*

$$(1.4) \qquad dX^i = -X^k (\Gamma_{k\,h}^{\,i}(x, u)\, dx^h + C_k^{\,ih}(x, u)\, du_h)$$

ist, wo die $\Gamma_{k\,h}^{\,i}$, $C_k^{\,ih}$ *gegebene Funktionen der* x^i, u_i *sind.*

Da der Vektor $(X + dX)$ nur von den beiden Hyperflächenelementen (x, u) und $(x + dx, u + du)$ abhängen soll, so muss er ungeändert bleiben wenn die u_i durch $\varrho(x, u)\, u_i$ ersetzt werden, wo $\varrho(x, u) > 0$ und in den u_i positiv homogen von der Ordnung Null ist. Indem man zunächst $\varrho =$ konst., und hierauf ϱ allgemein wählt, ergibt sich aus (1. 4):

1. Die $\Gamma_{k\,h}^{\,i}(x, u)$ sind von nullter, die $C_k^{\,ih}(x, u)$ von (-1)-ter Ordnung positiv homogen in den u_i;

2. Es ist

$$(1.5) \qquad C_k^{\,ih}(x, u)\, u_h = 0.$$

Nun wird verlangt, dass der durch die Parallelübertragung erzeugte Zusammenhang *euklidisch* sein soll, d. h.:

(II. 2) *Die Länge eines beliebigen Vektors in einem willkürlichen Hyperflächenelement wird durch Parallelübertragung nach einem beliebigen unendlich benachbarten Hyperflächenelement nicht geändert.*

Diese Forderung ergibt die Bedingungen

$$(1.6)\ (a)\quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} = \Gamma_{ikh} + \Gamma_{kih}, \qquad (b)\quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_h} = C_{ik}{}^h + C_{ki}{}^h,$$

die auch in die Gestalt

$$(1.7)\ (a)\quad \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^h} = -\Gamma^{ik}{}_h - \Gamma^{ki}{}_h, \qquad (b)\quad \frac{\partial g^{ik}}{\partial u_h} = -C^{ikh} - C^{kih}$$

gesetzt werden können. Hierin ist

$$(1.8)\quad \begin{cases} \Gamma_{ikh} = g_{jk}\,\Gamma_i{}^j{}_h, & \Gamma^{ik}{}_h = g^{ji}\,\Gamma_j{}^k{}_h, \\ C_{ik}{}^h = g_{jk}\,C_i{}^{jh}, & C^{ikh} = g^{ji}\,C_j{}^{kh}. \end{cases}$$

Eine Mannigfaltigkeit von Hyperflächenelementen, die den Forderungen (I. 1), (II. 1), (II. 2) genügt, heisst *euklidisch zusammenhängend.*

2. *Die $(n-1)$-dimensionale Oberfläche.* Es liege nun eine Funktion

$$(2.1)\quad L(x^1, x^2, \ldots x^n;\ u_1, u_2, \ldots u_n) = L(x, u)$$

vor, die in $\mathfrak{B}$ etwa regulär analytisch sei, ferner wesentlich *positiv:*

$$(2.2)\quad L(x, u) > 0,$$

endlich in den u_i positiv homogen von erster Ordnung:

$$(2.3)\quad L(x, \varrho u) = \varrho\, L(x, u), \qquad (\varrho > 0).$$

Bei Koordinatentransformation verhalte sich L wie ein Skalar. $L(x, u)$ heisse die *Grundfunktion.*

Wir fordern zunächst

(III. 1) *Das in einem Hyperflächenelement (x, u) gelegene Element der $(n-1)$-dimensionalen Oberfläche ist durch*

$$(2.4)\quad d\,O = \frac{L(x, u)}{u_n}\, d\,x^1\, d\,x^2 \ldots d\,x^{n-1}$$

gegeben.

Der Inhalt der Forderung (III. 1) lässt sich noch etwas anders fassen. Es sei

$$x^i = x^i(v^1, v^2, \dots v^{n-1}) \tag{2. 5}$$

eine reguläre Parameterdarstellung einer (etwa analytischen) Hyperfläche $\mathfrak{F}$, die Matrix

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial v^\alpha}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial v^1} & \dots\dots & \frac{\partial x^n}{\partial v^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^1}{\partial v^{n-1}} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial v^{n-1}} \end{pmatrix} \tag{2. 6}$$

habe also den Rang $n-1$. Die aus der Matrix (2. 6) durch Weglassen der k-ten Spalte gebildete Determinante werde mit $(-1)^{k+1} p_k$ bezeichnet. Bei bestimmter Wahl der Parameter v^α wird durch die angegebene Wahl der p_k in jedem Punkte eine positive Normalenrichtung der Hyperfläche ausgezeichnet, die Hyperfläche also orientiert. Wir lassen in der Hyperfläche nur (analytische) Parametertransformationen mit positiver Funktionaldeterminante zu, so dass diese Orientierung bei Parametertransformation erhalten bleibt. Ausserdem setzen wir voraus, dass sich die Parameter v^α durch eine solche Parametertransformation in die Koordinaten x^α überführen lassen. Dann besagt (III. 1), *dass die $(n-1)$-dimensionale Oberfläche eines Bereiches der orientierten Hyperfläche $\mathfrak{F}$ durch das über den Bereich erstreckte $(n-1)$-fache Integral*

$$O = \int_{(n-1)} L(x, p)\, d v^1\, d v^2 \dots d v^{n-1} \tag{2. 7}$$

gemessen wird.[1]

In der Tat geht das Element des Integrals (2. 7) für $v^\alpha = x^\alpha$ und $u_i = p_i$ in (2. 4) über.

Wir fordern ferner:

(III. 2) *Die quadratische Form*

$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (L^2)}{\partial u_i\, \partial u_k} Z^i Z^k$$

der Hilfsveränderlichen $Z^1, Z^2, \dots Z^n$ ist in $\mathfrak{B}$ positiv definit.

[1] J. Radon, [1] und G. Vivanti, [1] haben gezeigt, dass sich das Integral (β) der Einleitung bei den dort angegebenen Voraussetzungen stets in die Gestalt (2. 7) setzen lässt.

Diese Forderung ermöglicht es, in der Umgebung jedes Hyperflächenelementes eine euklidische Massbestimmung (I. 1) einzuführen, die nur von der Grundfunktion $L(x, u)$ abhängt.

3. *Weitere Forderungen.* Wir führen jetzt zunächst diese Massbestimmung ein, und stellen dann noch Forderungen auf, die bewirken, dass auch die Funktionen C^{ikh}, $\Gamma_{i\ h}^{\ k}$, die den euklidischen Zusammenhang festlegen, wenigstens unter gewissen noch anzugebenden Voraussetzungen durch die Grundfunktion $L(x, u)$ eindeutig bestimmt sind.

Da die

$$\mathfrak{a}^{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 (L^2)}{\partial u_i \partial u_k} \tag{3. 1}$$

sich bei Koordinatentransformation wie eine kontravariante Tensordichte zweiter Stufe vom Gewichte 2 verhalten, können wir ansetzen:

$$\mathfrak{a}^{ik} = g\, g^{ik} \tag{3. 2}$$

und finden dann, da det. $(g^{ik}) = \frac{1}{g}$, $\mathfrak{a} = \text{det. } (\mathfrak{a}^{ik}) > 0$ gilt,

$$g = \mathfrak{a}^{\frac{1}{n-1}}. \tag{3. 3}$$

Somit können wir fordern:

(I. 2). *Der Masstensor ist durch*

$$\boxed{g^{ik}(x, u) = \mathfrak{a}^{-\frac{1}{n-1}} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} L^2\right)}{\partial u_i \partial u_k}} \tag{3. 4}$$

gegeben, wo

$$\mathfrak{a} = \text{det. } \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 (L^2)}{\partial u_i \partial u_k}\right)$$

die Hessesche Determinante der Funktion $\frac{1}{2} L^2(x, u)$ *ist.*

Damit ist die Massbestimmung eindeutig festgelegt.[1] Zur Festlegung des euklidischen Zusammenhangs stellen wir folgende Forderungen auf:

[1] Diese Massbestimmung wurde von L. Koschmieder, [3], § 8, S. 473 ff. eingeführt. g tritt schon vorher bei Koschmieder, [1] (für $n = 3$), [2] (für beliebiges n) auf: vgl. auch Th. De Donder, [1].

(II. 3). *Die Funktionen* C^{ikh} *sind in den ersten beiden Zeigern symmetrisch*

$$C^{ikh} = C^{kih}. \tag{3. 5}$$

(II. 4). *Bei der Parallelübertragung von einem willkürlichen Hyperflächenelement* (x, u) *nach dem dazu parallelen in einem beliebigen unendlich benachbarten Punkte* $(x + dx)$ *gibt es infinitesimale Parallelogramme.*

Zu (II. 4) ist Folgendes zu bemerken: Wir werden in Nr. 6 sehen, dass man von der Parallelübertragung des Normaleneinheitsvektors eines Hyperflächenelements (x, u) nach einem beliebigen Nachbar*punkte* $(x + dx)$ reden kann. Das Element $(x + dx, u + du)$ im Punkte $(x + dx)$ heisst *parallel* zum Element (x, u), wenn sein Normaleneinheitsvektor aus dem des Elementes (x, u) durch Parallelübertragung nach dem Punkte $(x + dx)$ hervorgeht.

In den folgenden Nummern (Nr. 4, 5) entwickeln wir zunächst einige Folgerungen aus (I. 2), (II. 3).

4. *Der Normaleneinheitsvektor.* Aus der Forderung (I. 2) folgt wegen (3. 3)

$$g\, g^{ik} = L \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_k} + \frac{\partial L}{\partial u_i} \frac{\partial L}{\partial u_k} \tag{4. 1}$$

und hieraus wegen der Homogenitätseigenschaft von L weiter

$$g\, g^{ik} u_k = L \frac{\partial L}{\partial u_i}, \tag{4. 2}$$

$$g\, g^{ik} u_i u_k = L^2. \tag{4. 3}$$

Aus (1. 3) und (4. 3) erhält man für die kovarianten Komponenten des *Normaleneinheitsvektors des Hyperflächenelementes* (x, u)

$$\boxed{l_i = \frac{\sqrt{g}}{L} u_i,} \tag{4. 4}$$

und aus (4. 2), (4. 3) sodann für seine kontravarianten Komponenten

$$\boxed{l^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial u_i}.} \tag{4. 5}$$

Überschiebung mit dem Normaleneinheitsvektor wird im Folgenden stets durch eine Null bezeichnet, z. B.

$$T_{iko} = T_{ik}{}^r l_r = T_{ikr} l^r, \quad T^{iok} = T^{irk} l_r = T^i{}_r{}^k l^r.$$

Die Stellung der Null (oben oder unten) ist dabei ohne Bedeutung und wird nur durch die bessere Lesbarkeit bestimmt.

Wir leiten noch zwei Gleichungen ab, die im Folgenden benutzt werden. Differentiiert man (4. 2) nach u_j, so ergibt sich wegen (4. 1),

$$\frac{\partial g}{\partial u_j} g^{ik} u_k + g \frac{\partial g^{ik}}{\partial u_j} u_k = 0$$

oder

$$(4.\ 6) \qquad - L \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right) l^i + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{ik}}{\partial u_j} u_k = 0.$$

Endlich folgt durch Ableitung von (4. 1) nach u_j

$$(4.\ 7) \qquad \frac{\partial g}{\partial u_j} g^{ik} + g \frac{\partial g^{ik}}{\partial u_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 (L^2)}{\partial u_i \partial u_k \partial u_j}.$$

5. *Der Tensor* A^{ikh} *und der Vektor* A^i. Ist $f(x, u)$ irgend eine (einmal partiell ableitbare) Funktion der x^i, u_i, die in den u_i positiv homogen von der Ordnung p ist, so ist

$$(5.\ 1) \qquad \boxed{f\|^i = \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial f}{\partial u_i}}$$

in den u_i positiv homogen von der gleichen Ordnung und es gilt wegen (4. 4)

$$f\|^0 = p f.$$

Wenn Φ eine *Grösse*, also $p = 0$ ist, so ist

$$\Phi\|^i = \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$$

eine mit Φ gleichartige Grösse, die einen kontravarianten Zeiger mehr hat, und es ist

$$(5.\ 1^*) \qquad \Phi\|^0 = 0.$$

Die Forderung (II. 3) ergibt wegen (1. 6), b, (1. 7), b

$$(5.\ 2) \qquad C^{ikh} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{ik}}{\partial u_h}, \quad C_{ik}{}^h = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_h}.$$

Die C^{ikh} sind in den u_i positiv homogen von der Ordnung -1 und bilden daher keine Grösse; wohl aber sind

$$\boxed{A^{ikh} = \frac{L}{\sqrt{g}}\, C^{ikh} = -\frac{1}{2} g^{ik}\|^h,} \tag{5. 3}$$

bzw.

$$A_{ik}{}^h = \frac{L}{\sqrt{g}}\, C_{ik}{}^h = \frac{1}{2} g_{ik}\|^h \tag{5. 4}$$

die kontravarianten, bzw. gemischte Komponenten eines in den beiden ersten Zeigern symmetrischen Tensors ($A^{ikh} = A^{kih}$). Aus (5. 4) folgt:

Die Riemannschen Räume sind durch $A^{ikh} = 0$ gekennzeichnet.[1] Wegen (5. 1*) gilt die mit (1. 5) identische Gleichung

$$A^{iko} = 0, \tag{5. 5}$$

und wegen (4. 6)

$$A^{okh} = A^{koh} = l^k A^h, \quad A_{ok}{}^h = A_{ko}{}^h = l_k A^h, \tag{5. 6}$$

wo

$$\boxed{A^h = A^{ooh} = -L \frac{\partial}{\partial u_h}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right) = -\sqrt{g}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)\Big\|^h} \tag{5. 7}$$

ein Vektor ist. (4. 4) ergibt jetzt

$$A^o = 0. \tag{5. 8}$$

Aus (5. 7) entnimmt man:

Das Verschwinden des Vektors A^h kennzeichnet die Cartanschen Räume, in denen sich jedem n-dimensionalen Bereich das Integral

$$I = \int\limits_{(n)} \sqrt{g}\, d u^1 d u^2 \ldots d u^n$$

als Rauminhalt zuordnen lässt. In den Cartanschen Räumen mit $A^h \neq 0$ kann man dagegen nur von dem Rauminhalt eines Bereiches in Bezug auf ein Feld von Hyperflächen reden, das man vorher in dem Bereich ausgezeichnet hat.[2]

---

[1] Die an die Parallelübertragung gestellten Forderungen ergeben in diesem Falle die Parallelübertragung von Levi-Civita.

[2] Wegen anderer Eigenschaften, welche die Räume mit $A^h = 0$ den Riemannschen Räumen annähern, vgl. E. Cartan, [3], Abschnitt X., S. 29 f.; [4], Abschnitt XII., S. 29—32.

Wir leiten jetzt einige Identitäten ab, die den Tensor A^{ikh} und den Vektor A^h enthalten. Aus

$$g_{kh}\frac{\partial g^{kh}}{\partial u_i}=\frac{\partial \log g}{\partial u_i}$$

folgt

$$A_m^{mh}=A^h. \tag{5.9}$$

Weiter ergibt sich aus (4. 7) nach einfacher Rechnung

$$g^{ij}A^h-A^{ijh}=\frac{1}{4}\frac{L}{g\sqrt{g}}\frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i\,\partial u_j\,\partial u_h}, \tag{5.10}$$

und hieraus durch Überschiebung mit g_{ij} wegen (5. 9)

$$\frac{1}{4}\frac{L}{g\sqrt{g}}g_{ij}\frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i\,\partial u_j\,\partial u_h}=(n-1)\,A^h. \tag{5.11}$$

Überschiebung von (5. 10) mit g_{hj} ergibt bei Berücksichtigung von (5. 11)

$$A_h^{ih}=(2-n)\,A^i. \tag{5.12}$$

Aus (5. 10) folgt noch, dass der Tensor $A^{ijh}-g^{ij}A^h$ in allen Zeigern symmetrisch ist.

Schliesslich merken wir noch die mit (4. 5) identische Gleichung

$$L\|^i=L\,l^i, \tag{5.13}$$

sowie die Gleichungen

$$\left(\frac{L}{\sqrt{g}}\right)\Big\|^i=\frac{L}{\sqrt{g}}(l^i-A^i), \tag{5.14}$$

$$l_i\|^h=\delta_i^h-l_i(l^h-A^h), \tag{5.15}$$

$$l^i\|^h=g^{ih}-l^i(l^h+A^h) \tag{5.16}$$

an, von denen die erste aus (4. 5), (5. 7), die zweite aus (4. 4), (5. 14), die dritte aus (5. 15), (5. 3), (5. 6) folgt. In (5. 15) und weiterhin ist $\delta_i^h=1$ für $i=h$, $=0$ für $i\neq h$.

6. *Das absolute Differential des Normaleneinheitsvektors und die Winkelmetrik.* Wir gehen nun daran, die Forderung (II. 4) analytisch zu fassen.

Der Parallelübertragung (1. 4) eines beliebigen Vektors (X) entspricht das absolute Differential

$$D X^i = d X^i + \Gamma_{k\,h}^{\,i} X^k d x^h + C_k^{ih} X^k d u_h. \tag{6. 1}$$

Nun ist wegen (5. 4), (4. 4), (5. 5)

$$C_k^{ih} d u_h = A_k^{ih} d l_h, \tag{6. 2}$$

so dass (6. 1) auch in die Gestalt

$$D X^i = d X^i + \Gamma_{k\,h}^{\,i} X^k d x^h + A_k^{ih} X^k d l_h \tag{6. 3}$$

gesetzt werden kann. Die entsprechende Gleichung für die kovarianten Komponenten ist

$$D X_i = d X_i - \Gamma_{i\,h}^{\,k} X_k d x^h - A_i^{kh} X_k d l_h. \tag{6. 4}$$

Wir setzen nun

$$\boxed{D l^i = \omega^i (d) = \omega^i, \qquad D l_i = \omega_i (d) = \omega_i.} \tag{6. 5}$$

Dann folgt wegen (5. 6), (5. 5) aus (6. 4)

$$\omega_r (d) = d l_r - \Gamma_{r o h} d x^h - l_r A^h d l_h, \tag{6. 6}$$

$$A_k^{ir} d l_r = A_k^{ir} \omega_r (d) + A_k^{ir} \Gamma_{r o h} d x^h. \tag{6. 7}$$

Setzen wir also

$$\boxed{\Gamma_{k\,h}^{*i} = \Gamma_{k\,h}^{\,i} + A_k^{ir} \Gamma_{r o h},} \tag{6. 8}$$

so ergibt sich aus (6. 3), bezw. (6. 4)

$$\boxed{\begin{aligned} D X^i &= d X^i + X^k (\Gamma_{k\,h}^{*i} d x^h + A_k^{ih} \omega_h (d)), && (6.\ 9)\\ D X_i &= d X_i - X_k (\Gamma_{i\,h}^{*k} d x^h + A_i^{kh} \omega_h (d)). && (6.\ 10)\end{aligned}}$$

Für $X^i = l^i$ bezw. $X_i = l_i$ folgt hieraus wegen (5. 6)

$$(\delta_r^i - l^i A_r) \omega^r (d) = d l^i + \Gamma^{*oi}_{\ \ \ h} d x^h, \tag{6. 11}$$

$$(\delta_i^r + l_i A^r) \omega_r (d) = d l_i - \Gamma_{i o h}^{*} d x^h. \tag{6. 12}$$

Nun ist wegen (5. 8)

(6. 13) $$(\delta^p_i + l_i A^p)(\delta^j_p - l_p A^j) = (\delta^p_i - l_i A^p)(\delta^j_p + l_p A^j) = \delta^j_i.$$

Die Auflösung von (6. 11), (6. 12) lautet also

(6. 14) $$\boxed{\omega^i(d) = (\delta^i_r + l^i A_r)(d\,l^r + \Gamma^{*\,o\,r}_{\ \ h}\,d\,x^h),}$$

(6. 15) $$\boxed{\omega_i(d) = (\delta^r_i - l_i A^r)(d\,l_r - \Gamma^*_{r\,o\,h}\,d\,x^h).}$$

Aus $l^i l_i = 1$ folgt

(6. 16) $$\omega_0 = 0;$$

ferner gilt

(6. 17) $$A_i\,\omega^i = -\sqrt{g}\,D\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right),$$

wie in Nr. 8, § 2 gezeigt werden soll.

Wie schon in Nr. 3 angegeben wurde, kann man von der Parallelübertragung des Normaleneinheitsvektors eines Hyperflächenelementes (x, u) nach einem beliebigen Nachbar*punkte* $(x + d\,x)$ reden. Denn der Zuwachs $d\,l_r = \Gamma^*_{r\,o\,h}\,d\,x^h$, der aus der Bedingung $\omega_i(d) = 0$ für die Parallelübertragung des Normaleneinheitsvektors folgt, hängt nur von den $d\,x^i$, aber nicht von den $d\,u_i$ ab.

Die Forderung (II. 4) lässt sich nun so formulieren:

Unter der Nebenbedingung $\omega_i(d) = 0$ *gibt es infinitesimale Parallelogramme.*

Da nach (6. 9) die Parallelübertragung eines beliebigen Vektors (X) unter dieser Nebenbedingung durch

(6. 18) $$d\,X^i = -X^k\,\Gamma^{*\,i}_{k\,h}\,d\,x^h$$

gegeben ist, wird durch (II. 4) die Symmetrie

(6. 19) $$\boxed{\Gamma^{*\,i}_{k\,h} = \Gamma^{*\,i}_{h\,k}}$$

gefordert.

Ehe wir weitergehen, besprechen wir noch die *Winkelmetrik*. Nach E. Cartan[1] ist der Winkel $d\,\varphi$ zweier Hyperflächenelemente (x, u), $(x, u + d\,u)$ im gleichen Punkte (x) des Raumes durch

(6. 20) $$d\,\varphi^2 = \omega_r(d)\,\omega^r(d)$$

[1] E. Cartan, [3], Abschnitt IV.

mit der Nebenbedingung $dx^i = 0$ definiert. Den Winkel zweier Elemente (x, u), $(x + dx, u + du)$ in benachbarten Punkten erklären wir als den Winkel des nach $(x + dx)$ parallel übertragenen Elementes (x, u) mit dem Elemente $(x + dx, u + du)$.[1] Sein Quadrat ist durch (6. 20) ohne die Nebenbedingung $dx^i = 0$ gegeben.

Für die Differentialform (6. 20) (mit $dx^i = 0$) erhält man[2]

$$d\varphi^2 = \frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} du_i du_j. \tag{6. 21}$$

Einer von Herrn E. Cartan angestellten Rechnung[3] ist ferner zu entnehmen, dass diese quadratische Form den Krümmungstensor

$$r_{hijk} = \frac{1}{L^2}\left\{(L^{hj} L^{ik} - L^{hk} L^{ij}) - \frac{1}{4} \frac{g_{pm}}{g} (F^{hjp} F^{ikm} - F^{ijp} F^{hkm})\right\} \tag{6. 22}$$

hat, wo

$$L^{ik} = \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_k}, \quad F^{hjp} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 (L^2)}{\partial u_h \partial u_j \partial u_p} \tag{6. 23}$$

gesetzt wurde. Beachtet man $F^{hjp} = F^{phj}$ und ersetzt dieses nach (5. 10), so ergibt eine einfache Rechnung, bei der (4. 1), (4. 5) zu berücksichtigen ist

$$r_{hijk} = \frac{g^2}{L^4}\left\{\begin{vmatrix} g^{hj} - l^h l^j & g^{hk} - l^h l^k \\ g^{ij} - l^i l^j & g^{ik} - l^i l^k \end{vmatrix} + (A^{ij}_m A^{mhk} - A^{hj}_m A^{mik})\right\}, \tag{6. 24}$$

wo im ersten Gliede eine zweireihige Determinante steht. Wir kommen in Nr. 12 auf diesen Ausdruck zurück.

7. *Die regulären Cartanschen Räume.* Es ist noch zu untersuchen, ob, bezw. wann die $\Gamma^{*k}_{i\ h}$ durch die aufgestellten Forderungen eindeutig bestimmt sind.

Dazu gehen wir zu den

$$\Gamma^*_{ijh} = g_{jm} \Gamma^{*m}_{i\ h}$$

über. Dann folgt aus (6. 8) und (1. 6) a

---

[1] Die entsprechende Definition für den Finslerschen Raum bei O. Varga, Dissertation, veröffentlicht in L. Berwald, [1], S. 13, (vgl. Fussnote 2, S. 214).

[2] E. Cartan, [3], Abschnitt IV.

[3] E. Cartan, [3], Supplément, Nr. 9, S. 45 f.

$$\Gamma^*_{ijh} + \Gamma^*_{jih} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} + 2\, A_{ij}{}^p\, \Gamma_{poh}, \tag{7. 1}$$

und aus (6. 19)

$$\Gamma^*_{ijh} = \Gamma^*_{hji}. \tag{7. 2}$$

Aus (7. 1), (7. 2) ergibt sich durch dieselbe Rechnung wie im besonderen Falle ($A_{ij}{}^p = 0$) des Riemannschen Raumes

$$\Gamma^*_{ijh} = \gamma_{ijh} + A_{ij}{}^m\, \Gamma_{moh} + A_{jh}{}^m\, \Gamma_{moi} - A_{hi}{}^m\, \Gamma_{moj} \tag{7. 3}$$

mit

$$\gamma_{ijh} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j}\right). \tag{7. 4}$$

Wegen (6. 8), (5. 6) ist weiter

$$\Gamma_{ijh} = \Gamma^*_{ijh} - A_{ij}{}^m\, \Gamma_{moh} = \gamma_{ijh} + A_{jh}{}^m\, \Gamma_{moi} - A_{hi}{}^m\, \Gamma_{moj}, \tag{7. 5}$$

$$\Gamma_{ioh} = \gamma_{ioh} + l_h\, A^m\, \Gamma_{moi} - A_{hi}{}^m\, \Gamma_{moo} \tag{7. 6}$$

und

$$\Gamma_{ioo} = \gamma_{ioo} + A^m\, \Gamma_{moi} - l_i\, A^m\, \Gamma_{moo}$$

oder

$$(\delta_i^m + l_i\, A^m)\, \Gamma_{moo} = \gamma_{ioo} + A^m\, \Gamma_{moi}. \tag{7. 7}$$

Auflösung nach Γ_{hoo} ergibt wegen (6. 13)

$$\Gamma_{hoo} = \gamma_{hoo} - l_h\, A^i\, \gamma_{ioo} + (\delta_h^i - l_h\, A^i)\, A^m\, \Gamma_{moi}. \tag{7. 8}$$

Andererseits folgt aus (7. 6)

$$A^i\, \Gamma_{ioh} = A^i\, \gamma_{ioh} + l_h\, A^i\, A^m\, \Gamma_{moi} - A^i\, A_{hi}{}^m\, \Gamma_{moo}$$

oder

$$(\delta_h^i - l_h\, A^i)\, A^m\, \Gamma_{moi} = A^i\, \gamma_{ioh} - A^i\, A_{ih}{}^m\, \Gamma_{moo}. \tag{7. 9}$$

Setzt man dies in (7. 8) ein, so ergibt sich

$$(\delta_h^m + A^i\, A_{ih}{}^m)\, \Gamma_{moo} = \gamma_{hoo} - l_h\, A^m\, \gamma_{moo} + A^m\, \gamma_{moh}. \tag{7. 10}$$

Diese Gleichungen sind dann und nur dann eindeutig nach Γ_{moo} auflösbar, wenn der Tensor

$$H_h^m = \delta_h^m + A^i A_{ih}{}^m \tag{7. 11}$$

oder, was dasselbe ist, der symmetrische Tensor

$$\boxed{H^{ij} = g^{ij} + A_k A^{kij} = g^{ij} + A^i A^j - \frac{1}{4} \frac{L}{g\sqrt{g}} A_k \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}} \tag{7. 12}$$

den Rang n hat. Ist das der Fall, so heisst nach E. Cartan der Raum *regulär*. *Die regulären Cartanschen Räume sind also dadurch gekennzeichnet, dass in ihnen durch die aufgestellten Forderungen eine Parallelübertragung eindeutig bestimmt ist.* Im Folgenden beschränken wir uns durchwegs auf die *regulären* Cartanschen Räume.[1]

Wir geben jetzt noch die expliziten Ausdrücke für die $\Gamma_{i\ h}^{*k}$ an. Dazu bezeichnen wir das zu H_h^p inverse System mit K_k^q, so dass

$$\boxed{H_p^m K_m^q = H_m^q K_p^m = \delta_p^q} \tag{7. 13}$$

ist. Da nach (7. 11)

$$H_{oh} = H_{ho} = l_h, \quad H^{op} = H^{po} = l^p, \quad H^{oo} = 1 \tag{7. 14}$$

gilt, so ist auch

$$K_{ok} = K_{ko} = l_k, \quad K^{oq} = K^{qo} = l^q, \quad K^{oo} = 1. \tag{7. 15}$$

Indem man jetzt aus (7. 10) Γ_{qoo}, sodann aus (7. 7) $A^p \Gamma_{poi}$, weiter aus (7. 6) Γ_{ioh} berechnet, ergibt sich Γ_{ijh}^* und hieraus schliesslich

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma_{i\ h}^{*k} = \gamma_{i\ h}^{\ k} &+ A_i^{km}(\gamma_{moh} - l_h \gamma_{moo}) + A_h^{km}(\gamma_{moi} - l_i \gamma_{moo}) \\ &- A_{hi}{}^m(\gamma_{mo}{}^k - l^k \gamma_{moo}) + (A_i^{km} l_h + A_h^{km} l_i - A_{hi}{}^m l^k \\ &- A_i^{kp} A_{ph}{}^m - A_h^{kp} A_{pi}{}^m + A_{hi}{}^p A_p^{km}) K_m^r (\gamma_{roo} + A^s \gamma_{sor}), \end{aligned}} \tag{7. 16}$$

wobei

$$\gamma_{i\ h}^{\ k} = g^{mk} \gamma_{imh}, \quad \gamma_{mo}{}^k = g^{pk} \gamma_{mop}$$

ist.

---

[1] Die vorstehende Rechnung ist nur ein besonderer Fall einer von E. Cartan, [3], S. 37—40 durchgeführten.

§ 2. Kovariante Ableitung. Torsion und Krümmung des Raumes.

8. *Die kovariante Ableitung.* Ist Φ irgend eine Grösse, $D\Phi$ ihr absolutes Differential unter der Nebenbedingung $\omega_i(d) = 0$, so setzen wir

$$D\Phi = \Phi|_h \, d x^h. \tag{8. 1}$$

$\Phi|_h$ heisst die *kovariante Ableitung* von Φ. Sie ist eine Grösse derselben Art wie Φ mit einem kovarianten Zeiger mehr.

Zur Berechnung der kovarianten Ableitung drücken wir zunächst das gewöhnliche Differential df einer Funktion $f(x, u)$, die in den u_i positiv homogen von *nullter* Ordnung ist, durch die dx^h und ω_h aus. Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial u_m} u_m = 0$$

und (4. 4), (5. 1), (6. 11) ist

$$\frac{\partial f}{\partial u_m} d u_m = \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial f}{\partial u_m} d l_m = f\|^m \Gamma^*_{m o h} \, d x^h + f\|^h \omega_h(d), \tag{8. 2}$$

also

$$\boxed{df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^h} + f\|^m \Gamma^*_{m o h}\right) d x^h + f\|^h \omega_h(d).} \tag{8. 3}$$

Aus (6. 9), (6. 10), (8. 1), (8. 3) ergibt sich bei Beachtung der Nebenbedingung $\omega_i(d) = 0$

$$X^i|_h = \frac{\partial X^i}{\partial x^h} + X^i\|^m \Gamma^*_{m o h} + X^m \Gamma^{*\,i}_{m\,h}, \tag{8. 4}$$

$$X_i|_h = \frac{\partial X_i}{\partial x^h} + X_i\|^m \Gamma^*_{m o h} - X_m \Gamma^{*\,m}_{i\,h}. \tag{8. 5}$$

Entsprechend für Dichten. Der einzige Unterschied gegenüber dem besonderen Fall des Riemannschen Raumes besteht in dem Zusatzglied $+ \cdots \|^m \Gamma^*_{m o h}$.

Die kovariante Ableitung ist für die einfachsten Grössen Null. Es gilt[1]

---

[1] Wir geben jedesmal auch die ausführliche Gestalt der kovarianten Ableitung an, weil wir davon im Anhang Gebrauch machen. Man erhält sie, indem man für die Ableitungen ... $\|^m$ die Werte aus Nr. 5 einsetzt. Zu beachten ist, dass $\frac{1}{\sqrt{g}}$, $\sqrt{g}$ Dichten von den Gewichten $-1, 1$ sind.

$$(8.\ 6)\qquad l_i|_h = \frac{\partial l_i}{\partial x^h} + l_i(A^m \Gamma^*_{moh} - \Gamma^*_{ooh}) = 0,$$

$$(8.\ 7)\qquad l^i|_h = \frac{\partial l^i}{\partial x^h} - l^i(A^m \Gamma^*_{moh} + \Gamma^*_{ooh}) + \Gamma^{*io}{}_h + \Gamma^{*oi}{}_h = 0,$$

wie aus (6. 11), (6. 12) unmittelbar zu entnehmen ist. Ferner ergibt sich aus (II. 2), Nr. 1:

$$(8.\ 8)\qquad g_{ik}|_h = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} + 2\,A_{ik}{}^m\, \Gamma^*_{moh} - \Gamma^*_{ikh} - \Gamma^*_{kih} = 0,$$

$$(8.\ 9)\qquad g^{ik}|_h = \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^h} - 2\,A^{ikm}\, \Gamma^*_{moh} + \Gamma^{*ki}{}_h + \Gamma^{*ik}{}_h = 0.$$

Aus (8. 8) folgt z. B.

$$T^i|_h = g^{ik}\, T_k|_h$$

u. s. w., ferner

$$(8.\ 10)\qquad \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)\Big|_h = \frac{\partial}{\partial x^h}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right) - \frac{1}{\sqrt{g}}(A^m \Gamma^*_{moh} - \Gamma^{*m}_{mh}) = 0,$$

$$(8.\ 11)\qquad (\sqrt{g})|_h = \frac{\partial}{\partial x^h}(\sqrt{g}) + \sqrt{g}\,(A^m \Gamma^*_{moh} - \Gamma^{*m}_{mh}) = 0.$$

Aus (8. 3), (5. 7), (8. 10) ergibt sich leicht (6. 17):

$$(8.\ 12)\qquad D\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right) = d\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma^{*m}_{mh}\, d\,x^h = \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)\Big|_h d\,x^h + \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)\Big\|^h \omega_h = -\frac{1}{\sqrt{g}} A^h\, \omega_h.$$

Durch kovariante Ableitung von (4. 4) ergibt sich endlich wegen (8. 6), (8. 11),

$$(8.\ 13)\qquad \frac{\partial L}{\partial x^h} + L\,(\Gamma^*_{ooh} - \Gamma^{*m}_{mh}) = 0.$$

9. *Alternierende Differentialformen.* Bei der Entwicklung der Krümmungstheorie der regulären Cartanschen Räume benutzen wir die Cartansche ω Symbolik. Zunächst stellen wir das wenige zusammen, was hier davon benötigt wird.[1]

Es seien $\omega(d)$, $\pi(d)$, $\varrho(d)$ drei Pfaffsche Formen, δ, d, $\mathfrak{d}$ drei vertauschbare Differentiationssymbole. Wir definieren dann

$$(9.\ 1)\qquad \begin{cases} \omega'(d, \delta) = d\,\omega(\delta) - \delta\,\omega(d) \\ \omega''(d, \delta, \mathfrak{d}) = \mathfrak{d}\,\omega'(d, \delta) + d\,\omega'(\delta, \mathfrak{d}) + \delta\,\omega'(\mathfrak{d}, d) \end{cases}$$

[1] Wegen einer allgemeinen Begründung sei etwa verwiesen auf E. Cartan, [1], E. Kähler, [1].

und schreiben für diese Ausdrücke auch kurz ω' bezw. ω''. ω' wird als »äussere» Ableitung von ω, ω'' als solche von ω' aufgefasst. ω' ist Null, wenn ω ein vollständiges Differential ist:

$$(df)' = 0. \tag{9. 2}$$

ω'' *ist stets Null*, wie man durch Ausrechnung leicht bestätigt.

Ferner definieren wir

$$[\omega\,\pi] = -[\pi\,\omega] = \omega(d)\,\pi(\delta) - \omega(\delta)\,\pi(d), \tag{9. 3}$$

$$[\omega\,\pi\,\varrho] = \begin{vmatrix} \omega(d) & \omega(\delta) & \omega(\mathfrak{d}) \\ \pi(d) & \pi(\delta) & \pi(\mathfrak{d}) \\ \varrho(d) & \varrho(\delta) & \varrho(\mathfrak{d}) \end{vmatrix}, \tag{9. 4}$$

wo rechts eine dreireihige Determinante steht. Ist $\Omega = [\pi\,\varrho]$ oder ausführlich

$$\Omega(d,\,\delta) = \pi(d)\,\varrho(\delta) - \pi(\delta)\,\varrho(d) \tag{9. 5}$$

u. s. w., so setzen wir

$$[\omega\,\Omega] = [\omega\,\pi\,\varrho]. \tag{9. 6}$$

Es ist also

$$[\omega\,\Omega] = \omega(d)\,\Omega(\delta,\,\mathfrak{d}) + \omega(\delta)\,\Omega(\mathfrak{d},\,d) + \omega(\mathfrak{d})\,\Omega(d,\,\delta). \tag{9. 7}$$

Ferner verwenden wir folgende Rechenregeln:

$$[\omega\,\pi]' = [\omega'\,\pi] - [\omega\,\pi'], \tag{9. 8}$$

$$(A\,\omega)' = A\,\omega' + [dA\,\omega]. \tag{9. 9}$$

In (9. 9) bedeutet A eine Funktion der Veränderlichen allein (und nicht ihrer Differentiale).

10. *Die Torsion.* Das absolute Differential (6. 9) eines willkürlichen Vektors (X) lässt sich in der Form

$$D\,X^i = d\,X^i + X^k\,\omega_k^i(d) \tag{10. 1}$$

schreiben, wo

$$\omega_k^i(d) = \Gamma_{kh}^{*i}\,d\,x^h + A_k^{ih}\,\omega_h(d). \tag{10. 2}$$

Ist $(\varDelta X)$ das absolute Differential von (X), das dem mit d vertauschbaren Zuwachs δ entspricht:

$$\Delta X^i = \delta X^i + X^k \omega_k^i(\delta), \tag{10. 3}$$

so ist die *Torsion* des Raumes definiert durch

$$(\Delta D - D\Delta) x^i = \Omega^i, \tag{10. 4}$$

wo $D x^i = d x^i$, $\Delta x^i = \delta x^i$, da x^i ein Skalar ist.

Man sieht unmittelbar, dass

$$\Omega^i = [d x^m \omega_m^i] = A_h^{ik} [d x^h \omega_k] \tag{10. 5}$$

ist. *Der Tensor* A^{hik} *ist also der Torsionstensor des Raumes.* Die regulären Cartanschen Räume ohne Torsion sind daher (Nr. 5) mit den Riemannschen Räumen identisch.

11. *Die Krümmung.* Die *Krümmung* des Raumes ist definiert durch

$$(\Delta D - D\Delta) X^i = \Omega_r^i X^r. \tag{11. 1}$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$\Omega_r^i = [\omega_r^m \omega_m^i] - (\omega_r^i)'. \tag{11. 2}$$

Die Formen $\Omega_r^i(d, \delta)$ enthalten Glieder von drei verschiedenen Arten, entsprechend der Zerlegung

$$\Omega_r^i = \frac{1}{2} R_{r\,hk}^{\;i} [d x^h d x^k] + P_{r\,h}^{\;i\,k} [d x^h \omega_k] + \frac{1}{2} S_r^{\;ihk} [\omega_h \omega_k]. \tag{11. 3}$$

Da zwischen den ω_h nach (6. 16) die Relation $l^h \omega_h = 0$ besteht, ist die Zerlegung (11. 3) zunächst nicht eindeutig. Sie wird es, wenn wir die Forderungen

$$P_{r\,ho}^{\;i} = 0, \qquad S_r^{\;iho} = 0 \tag{11. 4}$$

hinzufügen. Die auf diese Weise eindeutig bestimmten Tensoren $R_{r\,hk}^{\;i}$, $P_{r\,h}^{\;i\,k}$, $S_r^{\;ihk}$ heissen die *Krümmungstensoren* des Raumes.

12. *Berechnung der Krümmungstensoren. Der Tensor* S^{rihk} *und die Winkelmetrik.* Zur Ausführung der Zerlegung (11. 3) hat man die rechte Seite von (11. 2) zu berechnen. Man findet zunächst

$$(12.1)\quad [\omega_r^m\,\omega_m^i] = \frac{1}{2}(\Gamma^{*m}_{r\;h}\,\Gamma^{*i}_{m\,k} - \Gamma^{*m}_{r\;k}\,\Gamma^{*i}_{m\,h})[d\,x^h\,d\,x^k] + (\Gamma^{*m}_{r\;h}\,A^{ik}_m - \Gamma^{*i}_{m\,h}\,A^{mk}_r)[d\,x^h\,\omega_k]$$
$$+ \frac{1}{2}(A^{mh}_r\,A^{ik}_m - A^{mk}_r\,A^{ih}_m)[\omega_h\,\omega_k],$$

$$(12.2)\qquad (\omega_r^i)' = [d\,\Gamma^{*i}_{r\,h}\,d\,x^h] + [d\,A^{ik}_r\,\omega_k] + A^{ip}_r\,\omega_p'.$$

Für ω_p' ergibt sich bei Verwendung von (6. 15) und (6. 12)

$$(12.3)\quad \omega_p' = [A^h\,\omega_h\;(\delta^k_p + l_p\,A^k)\,\omega_k] - [\Gamma^*_{p\,o\,h}\,d\,x^h\;A^k\,\omega_k] - l_p[d\,A^m\;(\delta^k_m + l_m\,A^k)\,\omega_k]$$
$$- [d\,\Gamma^*_{m\,o\,h}\,(\delta^m_p - l_p\,A^m)\,d\,x^h],$$

so dass

$$(12.4)\qquad A^{ip}_r\,\omega_p' = \frac{1}{2}(A^{ik}_r\,A^h - A^{ih}_r\,A^k)[\omega_h\,\omega_k] - A^k\,A^{ip}_r\,\Gamma^*_{p\,o\,h}[d\,x^h\,\omega_k]$$
$$- A^{im}_r[d\,\Gamma^*_{m\,o\,h}\,d\,x^h]$$

wird. Man hat nun (12. 4) in (12. 2) und sodann (12. 1), (12. 2) in (11. 2) einzuführen und die Differentiale

$$(12.5)\qquad d\,\Gamma^{*i}_{r\,h},\quad d\,A^{ik}_r,\quad d\,\Gamma^*_{m\,o\,h}$$

nach (8. 3) zu ersetzen. Bei der Berechnung von $P_{r\,h}^{\;i\;k}$ ist (5. 15) und (11. 4) zu beachten, bei der Berechnung von $S_r^{\;ist}$ (11. 4) sowie die aus (5. 3) leicht abzuleitende Gleichung

$$(12.6)\qquad A^{ih\,|k}_r + A^{ih}_r\,A^k = 2\,A_{rm}^{\;\;\;k}\,A^{mih} + A^{ih}_r\,l^k - \frac{1}{2}\,\frac{L^2}{g}\,g_{mr}\,\frac{\partial^2 g^{mi}}{\partial u_h\,\partial u_k}.$$

Um den Ausdruck, den die angedeutete Rechnung für $R_{r\,h\,k}^{\;i}$ ergibt, möglichst übersichtlich zu schreiben, setzen wir

$$(12.7)\quad \overline{R}_{r\,h\,k}^{\;i} = \left(\frac{\partial\,\Gamma^{*i}_{r\,h}}{\partial\,x^k} + \Gamma^{*i}_{r\,h}{}^{|m}\,\Gamma^*_{m\,o\,k} + \Gamma^{*m}_{r\;h}\,\Gamma^{*i}_{m\,k}\right) - \left(\frac{\partial\,\Gamma^{*i}_{r\,k}}{\partial\,x^h} + \Gamma^{*i}_{r\,k}{}^{|m}\,\Gamma^*_{m\,o\,h} + \Gamma^{*m}_{r\;k}\,\Gamma^{*i}_{m\,h}\right).$$

Dann ergibt eine einfache Rechnung mit Hilfe von (5. 4), (8. 8) bezw. (8. 6):

$$(12.8)\qquad \overline{R}_{rjhk} = \left(\frac{\partial\,\Gamma^*_{rjh}}{\partial\,x^k} + \Gamma^*_{rjh}{}^{|m}\,\Gamma^*_{m\,o\,k} - \Gamma^{*m}_{r\;h}\,\Gamma^*_{jmk}\right)$$
$$- \left(\frac{\partial\,\Gamma^*_{rjk}}{\partial\,x^h} + \Gamma^*_{rjk}{}^{|m}\,\Gamma^*_{m\,o\,h} - \Gamma^{*m}_{r\;k}\,\Gamma^*_{jmh}\right),$$

$$(12.9)\qquad \overline{R}_{rohk} = \left(\frac{\partial \Gamma^*_{roh}}{\partial x^k} + \Gamma^*_{roh}{}^{m}\,\Gamma^*_{mok}\right) - \left(\frac{\partial \Gamma^*_{rok}}{\partial x^h} + \Gamma^*_{rok}{}^{m}\,\Gamma^*_{moh}\right).$$

Die Komponenten des *Krümmungtensors* $R_{r}{}^{i}{}_{hk}$ sind dann

$$(12.10)\qquad R_{r}{}^{i}{}_{hk} = \overline{R}_{r}{}^{i}{}_{hk} - A_r^{im}\,\overline{R}_{mohk},$$

$$(12.11)\qquad R_{rjhk} = \overline{\overline{R}}_{rjhk} - A_{rj}{}^{m}\,\overline{\overline{R}}_{mohk}.$$

Es wird also

$$(12.12)\qquad R_{rohk} = (\delta^m_r - l_r A^m)\,\overline{R}_{mohk}.$$

Für den *Krümmungstensor* $P_{r}{}^{i}{}_{h}{}^{k}$ erhält man

$$(12.13)\qquad P_{r}{}^{i}{}_{h}{}^{k} = \Gamma^{*i}_{rh}{}^{k} - A_r^{ik}\big|_h - A_r^{ip}\,l_q\,\Gamma^{*q}_{p\,h}{}^{k}.$$

Durch Herunterziehen des Zeigers i entstehen Ausdrücke für die $P_{rjh}{}^{k}$, die wir nicht anschreiben, weil wir sie später (Nr. 17) durch einfachere ersetzen werden.

Für den *Krümmungstensor* $S_r{}^{ihk}$ kommt

$$(12.14)\qquad S_r{}^{ihk} = A^{mih}A_{mr}{}^{k} - A^{mik}A_{mr}{}^{h},$$

so dass

$$(12.15)\qquad S^{oihk} = 0$$

ist. Der Krümmungstensor S^{rihk} ist von Bedeutung für die Winkelmetrik in einem Punkte (Nr. 6). Aus (6. 24) und (12. 14) ergibt sich nämlich für das Riemannsche Krümmungsmass dieser Winkelmetrik der Ausdruck

$$(12.16)\qquad r = 1 + \frac{S^{hijk}p^{hi}p^{jk}}{\begin{vmatrix} g^{hj} - l^h l^j & g^{hk} - l^h l^k \\ g^{ij} - l^i l^j & g^{ik} - l^i l^k \end{vmatrix} p^{hi}p^{jk}},$$

wo $p^{hi} = d x^h \delta x^i - d x^i \delta x^h$ die Koordinaten eines zweidimensionalen Flächenelementes sind. Da S^{hijk} auch in den beiden ersten Zeigern schiefsymmetrisch ist (Nr. 14), folgt aus (12. 16) der Satz:

Das Verschwinden des Krümmungstensors S^{rihk} ist notwendig und hinreichend dafür, dass die Winkelmetrik in einem Punkte das Riemannsche Krümmungsmass Eins hat, wie im euklidischen Raum.[1]

[1] Der entsprechende Satz für den Finslerschen Raum bei E. Cartan, [4], Nr. 36, S. 34 f.

13. *Ableitung der Torsion und der Krümmungstensoren durch Parallelübertragung.* Die Torsion und die einzelnen Summanden in der Zerlegung (11. 3) kann man auf mehr geometrischem Wege erhalten, indem man die Betrachtungen, die Herr E. Cartan für die entsprechenden Grössen des Finslerschen Raumes gegeben hat[1], auf den vorliegenden Fall überträgt. Wir geben dafür im Folgenden eine andere Ableitung, die den Begriff der Parallelübertragung benutzt.[2] Diese Ableitung ergibt übrigens einen zweiten Weg zur Berechnung der Krümmungstensoren.

Wir gehen aus von drei Hyperflächenelementen

$$E_0\colon (x,\, l), \qquad E_1\colon (x + d\,x,\, l + d\,l), \qquad E_2\colon (x + \delta\,x,\, l + \delta\,l),$$

wo $d\,x^i$, $d\,l_i$, $\delta\,x^i$, $\delta\,l_i$ infinitesimale Zuwüchse gleicher Ordnung bedeuten. Die Parallelübertragung, die den Zuwüchsen d, bezw. δ (Nr. 10) entspricht, werde mit $\bar{d}$, bezw. $\bar{\delta}$ bezeichnet.[3] Dann erhalten wir durch Parallelübertragung des Vektors $(d\,x)$ von E_0 nach E_2 und des Vektors $(\delta\,x)$ von E_0 nach E_1 im allgemeinen kein infinitesimales Parallelogramm, sondern es ist

$$(\bar{\delta}\,d - \bar{d}\,\delta)\,x^i = \Omega^i = A_h^{ik}\left[d\,x^h\,\omega_k\right].$$

Um zu den Krümmungstensoren zu gelangen, schränken wir die Willkürlichkeit der Zuwüchse dx^i, dl_i, δx^i, δl_i erstens durch die Forderung $(\bar{\delta}\,d - \bar{d}\,\delta)\,x^i = 0$ oder

$$A_h^{ik}\left[d\,x^h\,\omega_k\right] = 0 \tag{13. 1}$$

ein. Dann ergibt sich durch Parallelübertragung des Vektors $(d\,x)$ von E_0 nach E_2 und des Vektors $(\delta\,x)$ von E_0 nach E_1 ein infinitesimales Parallelogramm $(x,\, x + d\,x,\, x + \delta\,x,\, y)$ mit dem vierten Eckpunkt

---

[1] E. Cartan, [4], Nr. 35, S. 33 f.

[2] Die Ableitung der Torsion ist dem Gedanken nach bekannt. Herr O. Varga hat in seiner Dissertation, von der nur ein kurzer Auszug ([1]) veröffentlicht ist, ähnliche Überlegungen, wie die des Textes für die Krümmungstensoren des Finslerschen Raumes angestellt.

[3] Es ist also

$$\bar{d}\,X^i = -\,X^k\,\omega_k^i\,(d),$$

und für einen Skalar f nach (8. 3)

$$\bar{d}\,f = d\,f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^h} + f\,\|^m\,\Gamma^*_{m\,o\,h}\right) d\,x^h + f\,\|^h\,\omega_h\,(d).$$

Entsprechend für $\bar{\delta}$.

$$(13.\ 2)\qquad y^i = x^i + d\,x^i + \delta\,x^i + \bar{\delta}\,d\,x^i = x^i + \delta\,x^i + d\,x^i + \bar{d}\,\delta\,x^i\,.$$

Durch Parallelübertragung der Elemente E_1 und E_2 nach dem Punkte (y) erhalten wir bezüglich die Elemente

$$E_3^{(1)}:\quad (y, l + d\,l + \bar{\delta}\,l + \bar{\delta}\,d\,l)\,,$$
$$E_3^{(2)}:\quad (y, l + \delta\,l + \bar{d}\,l + \bar{d}\,\delta\,l)\,.$$

Da nach (6. 12)

$$d\,l_m - \bar{d}\,l_m = (\delta_m^r + l_m A^r)\,\omega_r(d),\ \ \delta\,l_m - \bar{\delta}\,l_m = (\delta_m^r + l_m A^r)\,\omega_r(\delta)$$

ist, hat die Differenz

$$\nabla\,l_m = (l_m + \delta\,l_m + \bar{d}\,l_m + \bar{d}\,\delta\,l_m) - (l_m + d\,l_m + \bar{\delta}\,l_m + \bar{\delta}\,d\,l_m)$$

den Wert

$$(13.\ 3)\qquad \nabla\,l_m = (\delta_m^r + l_m A^r)\,(\omega_r(\delta) - \omega_r(d)) + (\bar{d}\,\delta - \bar{\delta}\,d)\,l_m\,.$$

Wir fordern nun zweitens, dass

$$(13.\ 4)\qquad A_r^{im}\,(\omega_m(\delta) - \omega_m(d)) = 0$$

sein soll. Dann wird wegen (5. 5)

$$(13.\ 5)\qquad A_r^{im}\,\nabla\,l_m = A_r^{im}\,(\bar{d}\,\delta - \bar{\delta}\,d)\,l_m\,.$$

Wenn wir nun den beliebigen Vektor (X) parallel von E_0 über E_1 nach $E_3^{(1)}$ übertragen, so erhalten wir im Element $E_3^{(1)}$ den Vektor

$$(13.\ 6)\qquad \bar{Y}^i = X^i + \bar{d}\,X^i + \bar{\delta}\,X^i + \bar{\delta}\,\bar{d}\,X^i\,.$$

Übertragen wir diesen Vektor weiter parallel von $E_3^{(1)}$ nach $E_3^{(2)}$, so ergibt sich im Element $E_3^{(2)}$ der Vektor

$$(13.\ 7)\qquad Y^i = \bar{Y}^i - Y^r A_r^{im}\,\nabla\,l_m\,.$$

Andererseits ergibt direkte Übertragung des Vektors (X) von E_0 über E_2 nach $E_3^{(2)}$ den Vektor

$$(13.\ 8)\qquad Z^i = X^i + \bar{\delta}\,X^i + \bar{d}\,X^i + \bar{d}\,\bar{\delta}\,X^i\,.$$

Für die Differenz $Z^i - Y^i$ erhalten wir also

$$\boxed{Z^i - Y^i = (\bar{d}\,\bar{\delta} - \bar{\delta}\,\bar{d})\,X^i + X^r A_r^{im}(\bar{d}\,\delta - \bar{\delta}\,d)\,l_m\,.} \tag{13. 9}$$

In der vorstehenden Rechnung sind Glieder von höherer Ordnung als die angeschriebenen vernachlässigt.

a.) Wir wählen nun erstens als Elemente E_1, E_2 jene, die aus $E_0\,(x, l)$ durch Parallelübertragung nach den Punkten $(x + d\,x)$, bezw. $(x + \delta\,x)$ hervorgehen. Es soll also $d\,l_i = \bar{d}\,l_i$, $\delta\,l_i = \bar{\delta}\,l_i$ oder

$$\omega_i(d) = \omega_i(\delta) = 0 \tag{13. 10}$$

sein. (13. 1) und (13. 4) sind dann von selbst erfüllt. Eine Rechnung, die ähnlich verläuft, wie die entsprechende für den Riemannschen Raum, ergibt in diesem Falle

$$\boxed{Z^i - Y^i = \frac{1}{2} R_{r\,h\,k}^{\;i}\,[d\,x^h\,d\,x^k]\,X^r.} \tag{13. 11}$$

b.) Zweitens wählen wir als Element E_1 das Element, das aus $E_0\,(x, l)$ durch Parallelübertragung nach dem Punkte $(x + d\,x)$ hervorgeht, als Element E_2 ein Element $(x, l + \delta\,l)$ im gleichen Punkte wie E_0. Dabei soll noch (13. 4) gelten. Es sollen also im vorliegenden Falle die Bedingungen

$$\delta\,x^i = 0, \qquad \omega_i(d) = 0, \qquad A_r^{im}\,\omega_m(\delta) = 0 \tag{13. 12}$$

erfüllt sein. (13. 1) ist dann von selbst erfüllt. Die Rechnung ergibt jetzt

$$\boxed{Z^i - Y^i = P_{r\,h}^{\;i\,k}\,[d\,x^h\,\omega_k]\,X^r.} \tag{13. 13}$$

c.) Endlich wählen wir als E_1, E_2 zwei Elemente im gleichen Punkte wie E_0, derart dass (13. 4) gilt. Es sollen also jetzt die Bedingungen

$$d\,x^i = \delta\,x^i = 0, \qquad A_r^{im}(\omega_m(\delta) - \omega_m(d)) = 0 \tag{13. 14}$$

gelten, so dass wieder (13. 1) von selbst erfüllt ist. In diesem Falle erhält man

$$\boxed{Z^i - Y^i = \frac{1}{2} S_r^{\;ihk}\,[\omega_h\,\omega_k]\,X^r\,.} \tag{13. 15}$$

14. *Die schiefe Symmetrie der Krümmungstensoren.* Die Gleichungen

$$D g_{ik} = 0 \tag{14. 1}$$

drücken den euklidischen Charakter der Übertragung (Nr. 1) aus. Schreibt man sie noch für ein zweites System von Differentialen an ($\Delta g_{ik} = 0$) und bildet für die g_{ik} die Gleichung, die bei den kovarianten Komponenten eines Tensors zweiter Stufe der Gleichung (11. 1) entspricht, so ergibt sich also Null:

$$(D\Delta - \Delta D) g_{ik} = \Omega_{ik} + \Omega_{ki} = 0, \qquad (\Omega_{ik} = g_{kr}\,\Omega_i^r). \tag{14. 2}$$

Da in (11. 3) durch geeignete Wahl der $d x^h$, δx^k zwei beliebige der drei »äusseren Produkte» $[d x^h\, d x^k]$, $[d x^h\, \omega_k]$, $[\omega_h\, \omega_k]$ zum Verschwinden gebracht werden können, während das dritte von Null verschieden bleibt[1], so folgt durch Einsetzen aus (11. 3) in die letzte Gleichung die *schiefe Symmetrie der drei Krümmungstensoren in den beiden ersten Zeigern:*

$$R_{ijhk} + R_{jihk} = 0, \qquad P_{ijh}{}^{k} + P_{jih}{}^{k} = 0, \qquad S_{ij}{}^{hk} + S_{ji}{}^{hk} = 0. \tag{14. 3}$$

Durch Überschiebung mit g^{ij} folgt hieraus weiter

$$R_r{}^r{}_{hk} = 0, \qquad P_r{}^r{}_h{}^k = 0, \qquad S_r{}^{rhk} = 0. \tag{14. 4}$$

15. *Folgerungen aus der schiefen Symmetrie der $P_{ijh}{}^k$.* Aus der schiefen Symmetrie der $P_{ijh}{}^k$ folgen einige wichtige Identitäten. Setzt man die aus (12. 13) folgenden Werte von $P_{ijh}{}^k$, $P_{jih}{}^k$ in die mittlere Gleichung (14. 3) ein, so ergibt sich nach Veränderung einiger Zeiger

$$\boxed{A_{rs}{}^h|_m = \frac{1}{2}\left(g_{pr}\,\Gamma^{*p}_{s\ m}\|^h + g_{ps}\,\Gamma^{*p}_{r\ m}\|^h\right) - A_{rs}{}^p\, l_g\, \Gamma^{*g}_{p\ m}\|^h.} \tag{15. 1}$$

Überschiebung mit l^r gibt wegen (5. 6), (8. 7)

$$l_s A^h|_m = \frac{1}{2}\left(l_p\,\Gamma^{*p}_{s\ m}\|^h + l^r g_{ps}\,\Gamma^{*p}_{r\ m}\|^h\right) - l_s A^p\, l_g\, \Gamma^{*g}_{p\ m}\|^h, \tag{15. 2}$$

und Überschiebung von (15. 2) mit l^s

$$A^h|_m = l_p\, l^g\, \Gamma^{*p}_{g\ m}\|^h - A^p\, l_g\, \Gamma^{*g}_{p\ m}\|^h. \tag{15. 3}$$

[1] Vgl. Nr. 13.

Anderseits gibt Überschiebung von (15. 1) mit g^{rs} wegen (5. 9)

$$(15.4)\qquad \boxed{A^h\big|_m = \Gamma^{*\,r}_{r\,m}\big\|^h - A^p\, l_g\, \Gamma^{*\,g}_{p\,m}\big\|^h .}$$

Vergleich der rechten Seiten in (15. 3), (15. 4) liefert

$$(15.5)\qquad \boxed{l_p\, l^g\, \Gamma^{*\,p}_{g\,m}\big\|^h = \Gamma^{*\,r}_{r\,m}\big\|^h ,}$$

und Einführung von (15. 4) in (15. 2)

$$(15.6)\qquad l_p\, \Gamma^{*\,p}_{s\,m}\big\|^h = 2\, l_s\, \Gamma^{*\,r}_{r\,m}\big\|^h - g_{sp}\, l^r\, \Gamma^{*\,p}_{r\,m}\big\|^h .$$

Überschiebt man weiter (15. 1) mit l^m und formt mittels (15. 5), (15. 6) um, so erhält man

$$(15.7)\qquad \boxed{A_{rs}{}^h\big|_o = l_r\, \Gamma^{*\,m}_{m\,s}\big\|^h + l_s\, \Gamma^{*\,m}_{m\,r}\big\|^h - l_m\, \Gamma^{*\,m}_{r\,s}\big\|^h - A_{rs}{}^p\, \Gamma^{*\,m}_{m\,p}\big\|^h .}$$

Endlich folgt aus (15. 4), (15. 5)

$$(15.8)\qquad \boxed{A^h\big|_o = (l^p - A^p)\, \Gamma^{*\,m}_{m\,p}\big\|^h .}$$

16. *Der Zusammenhang der $\Gamma^{*\,j}_{i\,k}\big\|^h$ mit den A^{ihj} und $A^{ihj}\big|_k$.* Wir zeigen jetzt, *dass sich die $\Gamma^{*\,j}_{i\,k}\big\|^h$ durch den Tensor A^{ihj} und seine kovarianten Ableitungen ausdrücken lassen.* Dazu gehen wir von (15. 1) aus. Führt man darin die Γ^*_{irm} (Nr. 7) ein und beachtet (5. 4), so ergibt sich

$$(16.1)\quad \frac{1}{2}\left(\Gamma^*_{rsm}\big\|^h + \Gamma^*_{srm}\big\|^h\right) = A_{rs}{}^h\big|_m + A_{pr}{}^h\, \Gamma^{*\,p}_{s\,m} + A_{ps}{}^h\, \Gamma^{*\,p}_{r\,m} + A_{rs}{}^p\, l_g\, \Gamma^{*\,g}_{p\,m}\big\|^h .$$

Die linke Seite von (16. 1) werde mit (rsm,h) bezeichnet. Dann erhält man durch Bildung von $(rsm,h) + (smr,h) - (mrs,h)$

$$(16.2)\quad \Gamma^*_{rsm}\big\|^h = A_{rs}{}^h\big|_m + A_{sm}{}^h\big|_r - A_{rm}{}^h\big|_s + 2\, A_{ps}{}^h\, \Gamma^{*\,p}_{r\,m} + A_{rs}{}^p\, l_g\, \Gamma^{*\,g}_{p\,m}\big\|^h + A_{sm}{}^p\, l_g\, \Gamma^{*\,g}_{p\,r}\big\|^h - \\ - A_{rm}{}^p\, l_g\, \Gamma^{*\,g}_{p\,s}\big\|^h ,$$

und hieraus nach leichter Umformung

$$(16.\ 3)\qquad \Gamma^{*j}_{i\ k}\|^h = A_i^{jh}|_k + A_k^{jh}|_i - A_{ik}{}^h|_p g^{pj} + A_i^{jp} l_g \Gamma^{*g}_{p\ k}\|^h + A_k^{jp} l_g \Gamma^{*g}_{p\ i}\|^h - $$
$$- A_{ik}{}^p l_g \Gamma^{*g}_{p\ s}\|^h g^{sj}.$$

Setzt man hierin für $l_g \Gamma^{*g}_{p\ k}\|^h$ den Wert ein, der aus (15. 7) folgt, und ebenso für $l_g \Gamma^{*g}_{p\ i}\|^h$, $l_g \Gamma^{*g}_{p\ s}\|^h$, so ergibt sich

$$(16.\ 4)\qquad \Gamma^{*j}_{i\ k}\|^h = A_i^{jh}|_k + A_k^{jh}|_i - A_{ik}{}^h|_p g^{pj} - A_i^{jm} A_{mk}{}^h|_o - A_k^{jm} A_{mi}{}^h|_o + A_{ik}{}^m A_m^{jh}|_o +$$
$$+ \Gamma^{*r}_{r\ p}\|^h (l_k A_i^{jp} + l_i A_k^{jp} - l^j A_{ik}{}^p - A_i^{jm} A_{mk}{}^p - A_k^{jm} A_{mi}{}^p + A_{ik}{}^m A_m^{jp}).$$

Man verjünge nun (16. 4) nach i und j und beachte (5. 6), (5. 9), sowie

$$(16.\ 5)\qquad \delta_k^p + A^m A_{mk}{}^p - l_k A^p = H_k^r(\delta_r^p - l_r A^p),$$

wo H_k^r durch (7. 11) erklärt ist. Dann erhält man

$$(16.\ 6)\qquad \Gamma^{*r}_{r\ p}\|^h (\delta_s^p - l_s A^p) H_k^s = A^h|_k - A^m A_{mk}{}^h|_o.$$

Die Auflösung von (16. 6) lautet wegen (7. 13)

$$(16.\ 7)\qquad \boxed{\Gamma^{*r}_{r\ p}\|^h = (\delta_p^m + l_p A^m) K_m^k (A^h|_k - A^r A_{rk}{}^h|_o).}$$

Setzt man diesen Wert in (16. 4) ein, so ergibt sich schliesslich

$$(16.\ 8)\qquad \boxed{\begin{aligned}&\Gamma^{*j}_{i\ k}\|^h = A_i^{jh}|_k + A_k^{jh}|_i - A_{ik}{}^h|_m g^{mj} - A_i^{jm} A_{mk}{}^h|_o - A_k^{jm} A_{mi}{}^h|_o + A_{ik}{}^m A_m^{jh}|_o +\\ &\quad + K_s^g (A^h|_g - A^r A_{rg}{}^h|_o)(l_k A_i^{js} + l_i A_k^{js} - l^j A_{ik}{}^s - A_i^{jm} A_{mk}{}^s - A_k^{jm} A_{mi}{}^s +\\ &\quad + A_{ik}{}^m A_m^{js}).\end{aligned}}$$

Aus (16. 8) ist zu ersehen, *dass* $\Gamma^{*j}_{i\ k}\|^h$ *ein Tensor ist.* Ein weiterer Schluss aus (16. 8) wird in Nr. 19 gezogen.

17. *Weiteres über den Krümmungstensor* $P_{rjh}{}^k$. Aus (12. 13) und (15. 1) erhält man für die Komponenten $P_{rjh}{}^k$ des zweiten Krümmungstensors

$$(17.\ 1)\qquad P_{rjh}{}^k = \frac{1}{2}(g_{jp} \Gamma^{*p}_{r\ h}\|^k - g_{rp} \Gamma^{*p}_{j\ h}\|^k).$$

Der Tensor $P_{rjh}{}^k$ ist also auch zyklisch symmetrisch[1]:

[1] Von den beiden anderen Krümmungstensoren ist R_{rjhk} nicht zyklisch symmetrisch in j, h, k, wohl aber S_{rjhk}. Für R_{rjhk} vgl. (18. 3), für S_{rjhk} (12. 14) und (5. 10).

$$P_{rjh}{}^{k} + P_{jhr}{}^{k} + P_{hrj}{}^{k} = 0. \tag{17.2}$$

Drückt man in (17. 1) die $\Gamma^{*}{}_{r}{}^{p}{}_{h}\|^{k}$, $\Gamma^{*}{}_{j}{}^{p}{}_{h}\|^{k}$ vermöge (16. 8) durch den Torsionstensor und seine kovarianten Ableitungen aus, so ergibt sich

$$P_{rjh}{}^{k} = A_{jh}{}^{k}|_{r} - A_{rh}{}^{k}|_{j} + A_{rhm} A_{j}^{mk}|_{o} - A_{jhm} A_{r}^{mk}|_{o} + K_{s}^{g}(A^{k}|_{g} - A^{p} A_{pg}{}^{k}|_{o}) \cdot \cdot (l_{r} A_{jh}{}^{s} - l_{j} A_{rh}{}^{s} + A_{rhm} A_{j}^{ms} - A_{jhm} A_{r}^{ms}). \tag{17.3}$$

Für $P_{o}{}^{i}{}_{h}{}^{k}$ folgt aus (12. 13) und (15. 4)

$$P_{o}{}^{i}{}_{h}{}^{k} = l^{r} \Gamma^{*}{}_{r}{}^{i}{}_{h}\|^{k} - l^{i} \Gamma^{*}{}_{r}{}^{r}{}_{h}\|^{k}, \tag{17.4}$$

und hieraus für $P_{ojh}{}^{k}$ mittels (15. 5)

$$P_{ojh}{}^{k} = l^{r} (g_{pj} - l_{p} l_{j}) \Gamma^{*}{}_{r}{}^{p}{}_{h}\|^{k}. \tag{17.5}$$

Aus (17. 3) ergibt sich

$$P_{ojh}{}^{k} = A_{jh}{}^{k}|_{o} - l_{h} A^{k}|_{j} + l_{h} A^{m} A_{jm}{}^{k}|_{o} + K_{s}^{g}(A^{k}|_{g} - A^{r} A_{rg}{}^{k}|_{o}) \cdot \cdot (A_{jh}{}^{s} - l_{h} l_{j} A^{s} + l_{h} A^{m} A_{jm}{}^{s}) \tag{17.6}$$

und

$$P_{ojo}{}^{k} = l_{j} A^{k}|_{o} - A^{k}|_{j} + A^{m} A_{jm}{}^{k}|_{o} + K_{s}^{g}(A^{k}|_{g} - A^{r} A_{rg}{}^{k}|_{o}) A^{m} A_{jm}{}^{s}. \tag{17.7}$$

18. *Die Bianchischen Identitäten.* Durch Bildung der äusseren Ableitung von Ω^{i} und Ω_{i}^{r} erhält man aus (10. 5) bezw. (11. 2) die »*Bianchischen Identitäten*»[1]

$$(\Omega^{i})' - [d x^{r} \Omega_{r}^{i}] + [\omega_{r}^{i} \Omega^{r}] = 0, \tag{18.1}$$

$$\Omega_{ij}{}' - [\omega_{j}^{r} \Omega_{ir}] + [\omega_{i}^{r} \Omega_{jr}] = 0, \tag{18.2}$$

wo Ω_{ij} in (14. 2) erklärt ist.

Aus (18. 1) ergibt sich nur eine neue Relation, u. z. zwischen den Komponenten des ersten Krümmungstensors und des Torsionstensors

$$\boxed{R_{ihkl} + R_{iklh} + R_{ilhk} + A_{ih}{}^{m} R_{omkl} + A_{ik}{}^{m} R_{omlh} + A_{il}{}^{m} R_{omhk} = 0.} \tag{18.3}$$

Aus ihr folgt eine Reihe weiterer

[1] Vgl. E. Cartan, [2], Chap. VIII, S. 204 ff.

$$R_{ijkh} - R_{khij} = A_{ik}{}^m R_{omjh} - A_{ih}{}^m R_{omjk} - A_{jk}{}^m R_{omih} + A_{jh}{}^m R_{omik}, \tag{18. 4}$$

$$(\delta_h^m + l_h A^m) R_{omkl} + (\delta_k^m + l_k A^m) R_{omlh} + (\delta_l^m + l_l A^m) R_{omhk} = 0, \tag{18. 5}$$

$$R_{ijoh} - R_{ohij} = A^m (l_i R_{omjh} - l_j R_{omih}) + A_{ih}{}^m R_{omoj} - A_{jh}{}^m R_{omoi}, \tag{18. 6}$$

$$R_{ojoh} - R_{ohoj} = A^m (R_{omjh} + l_h R_{omoj} - l_j R_{omoh}). \tag{18. 7}$$

(18. 4) wird erhalten, indem man in der Summe

$$R_{ihkl} - R_{hikl} - R_{klih} + R_{lkih}$$

jedes einzelne Glied aus (18. 3) ersetzt und die schiefe Symmetrie der R_{ihkl} in den beiden ersten und den beiden letzten Zeigern beachtet. Die Herleitung von (18. 5)—(18. 7) ist klar.

(18. 2) führt zu folgenden Identitäten

$$R_{ijhk}\,|_l + P_{ijh}{}^r R_{orkl} + \text{zykl.} = 0, \tag{18. 8}$$

$$S_{ij}{}^{hk}\|^l + S_{jr}{}^{hk} A_i^{rl} - S_{ir}{}^{hk} A_j^{rl} + 2\, S_{ij}{}^{hk} (A^l - l^l) + \text{zykl.} = 0, \tag{18. 9}$$

$$\begin{aligned} R_{ijhp}\|^g + R_{jrhp} A_i^{rg} - R_{irhp} A_j^{rg} - S_{ij}{}^{rg} R_{orhp} + P_{ijp}{}^g|_h - P_{ijh}{}^g|_p + \\ + l_m (P_{ijp}{}^r \Gamma^{*\,m}_{r\;\;h}\|^g - P_{ijh}{}^r \Gamma^{*\,m}_{r\;\;p}\|^g) = 0, \end{aligned} \tag{18. 10}$$

$$\begin{aligned} P_{ijh}{}^p\|^g - P_{ijh}{}^g\|^p - P_{irh}{}^p A_j^{rg} + P_{jrh}{}^p A_i^{rg} + P_{irh}{}^g A_j^{rp} - P_{jrh}{}^g A_i^{rp} + \\ + P_{ijh}{}^p (A^g - l^g) - P_{ijh}{}^g (A^p - l^p) + S_{ij}{}^{pg}|_h + l_m (S_{ij}{}^{rg} \Gamma^{*\,m}_{r\;\;h}\|^p - \\ - S_{ij}{}^{rp} \Gamma^{*\,m}_{r\;\;h}\|^g) = 0. \end{aligned} \tag{18. 11}$$

In den beiden ersten bedeutet + zykl. diejenigen Glieder, die aus dem angeschriebenen durch zyklische Vertauschung der Zeiger h, k, l entstehen.

Wie im Finslerschen Raum[1] erhält man auch hier das vollständige System der invariant mit dem Raum verbundenen Tensoren, indem man von den Tensoren l_i, g_{ij}, A_{ijk}, R_{ijkh} ausgeht und auf sie die Operationen der Multiplikation und der kovarianten Ableitung ausübt.

§ 3. Besondere reguläre Cartansche Räume.

19. *Riemannsche und affin zusammenhängende Räume.* Die Riemannschen Räume waren durch

[1] E. Cartan, [4], Nr. 39, S. 37.

$$A^{ihk} = 0 \tag{19. 1}$$

gekennzeichnet (Nr. 5). Aus (16. 8) folgt, dass die Gleichungen

$$A^{ihk}|_j = 0 \tag{19. 2}$$

die *affin zusammenhängenden Räume* kennzeichnen, d. h. jene, in denen die $\Gamma^{*\,k}_{i\ h}$ nur vom Orte abhängen. In einem affin zusammenhängenden Raum ist die Parallelübertragung eines Vektors längs eines gegebenen Weges vom ursprünglichen Stützelement unabhängig, falls nur dieses Element parallel mitgeführt wird.

20. *Räume mit absolutem Parallelismus von Hyperflächenelementen.* Die Gleichungen

$$R_{oihk} = 0 \tag{20. 1}$$

kennzeichnen diejenigen *Räume, in denen die Parallelübertragung von Hyperflächenelementen integrabel ist, also ein absoluter Parallelismus von Hyperflächenelementen existiert.*

Man kann das etwa aus (13. 9) ersehen, indem man den Normaleneinheitsvektor (l) des Elementes E_0 als Vektor (X) nimmt und die Elemente E_1, E_2 wie in Nr. 13 a.) wählt. Werden die entsprechenden Vektoren (Y), (Z) mit (Y^*), (Z^*) bezeichnet, so ergibt sich wegen $d\,l_i = \bar{d}\,l_i$, $\delta\,l_i = \bar{\delta}\,l_i$ und (5. 6)

$$Z^{*i} - Y^{*i} = (\bar{d}\,\bar{\delta} - \bar{\delta}\,\bar{d})\,l^i + l^i A^m (\bar{d}\,\bar{\delta} - \bar{\delta}\,\bar{d})\,l_m = (\delta^i_m + l^i A_m)(\bar{d}\,\bar{\delta} - \bar{\delta}\,\bar{d})\,l^m . \tag{20. 2}$$

Anderseits folgt aus (13. 11)

$$Z^{*i} - Y^{*i} = \frac{1}{2} R_{o\ hk}^{\ i}[d\,x^h\,d\,x^k] . \tag{20. 3}$$

Die Gleichung (20. 1) ist also gleichbedeutend mit

$$(\bar{d}\,\bar{\delta} - \bar{\delta}\,\bar{d})\,l^m = 0 . \tag{20. 4}$$

Die in Nr. 13 mit $E_3^{(1)}$, $E_3^{(2)}$ bezeichneten Elemente fallen daher zusammen, w. z. b. w.[1]

21. *Räume, in denen die Parallelübertragung von Vektoren bei paralleler Mitführung des Stützelementes integrabel ist.* Die Gleichungen

[1] Ein anderer Beweis verläuft analog zu E. Cartan, [4], Nr. 42, S. 38.

$$R_{ijhk} = 0 \tag{21. 1}$$

kennzeichnen diejenigen *Räume, in denen die Parallelübertragung von Vektoren bei paralleler Mitführung des Stützelementes integrabel ist.* D. h.: Wenn man einen Vektor mit seinem Stützelement von einem Punkte zu einem andern parallel überträgt, so erhält man im zweiten Punkte stets dasselbe Stützelement und denselben Vektor.

Beweis: Aus (21. 1) folgt (20. 1). Daher ist die Parallelübertragung von Hyperflächenelementen integrabel. Bei derselben Wahl der Elemente E_1, E_2 wie in Nr. 13 a.) gilt also (20. 4). Aus (13. 11) und (21. 1) folgt $Z^i - Y^i = 0$ und daher aus (20. 4) und (13. 9)

$$(\bar{d}\,\bar{\delta} - \bar{\delta}\,\bar{d})\,X^i = 0\,, \tag{21. 2}$$

w. z. b. w.[1]

22. *Das Gegenstück zu den Minkowskischen Räumen.* Wenn gleichzeitig

$$A^{ihk}|_j = 0\,, \qquad R_{ijhk} = 0 \tag{22. 1}$$

ist, so sind zunächst nach Nr. 19 die $\Gamma^{*\,i}_{k\ j}$ Ortsfunktionen, also die $\Gamma^{*\,i}_{k\ j}\|^m = 0$. Ferner folgt aus der zweiten Gleichung (22. 1) $R_{rohk} = 0$, also nach (12. 12) $\overline{R}_{mohk} = 0$, und wegen (12. 10) $\overline{R}_{r\ hk}^{\ i} = 0$. Dieser Tensor ist aber wegen $\Gamma^{*\,i}_{k\ j}\|^m = 0$ der Krümmungstensor des affinen Zusammenhanges $\Gamma^{*\,i}_{kj}(x)$, und da er Null ist, so können die $\Gamma^{*\,i}_{kj}$ durch Koordinatentransformation alle zugleich auf Null transformiert werden. Wenn die x^i solche Koordinaten sind, in denen

$$\Gamma^{*\,i}_{k\ j} = 0 \tag{22. 2}$$

gilt, so reduziert sich (8. 13) auf

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = 0\,. \tag{22. 3}$$

Die Grundfunktion L hängt also nur von den u_i ab. Diese Räume sind somit das *Gegenstück zu den Minkowskischen Räumen.*

[1] Ein anderer Beweis verläuft analog zu E. Cartan, [4], Nr. 43, S. 39.

Zweiter Abschnitt: Theorie der Hyperflächen in regulären Cartanschen Räumen.[1]

§ 4. Die Grundformen der Hyperfläche.

23. *Die erste Grundform. Zerlegung von Grössen nach der Hyperfläche und senkrecht dazu.* Im n-dimensionalen regulären Cartanschen Raume sei (2. 5) die Parameterdarstellung einer Hyperfläche, über die wir die in Nr. 2 angegebenen Voraussetzungen machen. Die p_i seien gleichfalls wie in Nr. 2 erklärt. Da die p_i nur ein bestimmt gewähltes System der u_i längs der Hyperfläche darstellen, so bleiben alle Formeln des ersten Abschnittes giltig, wenn man darin für die u_i die p_i einsetzt. Insbesondere hat der Normaleneinheitsvektor der Hyperfläche die Komponenten

$$(23.\ 1)\qquad l_i = \frac{\sqrt{g}}{L}\, p_i\,, \qquad l^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial L}{\partial p_i}\,, \qquad (L = L(x, p))\,.$$

Wir setzen weiter

$$(23.\ 2)\qquad \frac{\partial x^i}{\partial v^\varrho} = x^i_\varrho\,.$$

Dann ist

$$(23.\ 3)\qquad x^i_\varrho\, l_i = 0\,, \qquad x^i_\varrho\, d\, v^\varrho = d\, x^i\,.$$

Die Metrik des Raumes induziert vermöge

$$(23.\ 4)\qquad g_{ik}\, d\, x^i\, d\, x^k = g_{\varrho\sigma}\, d\, v^\varrho\, d\, v^\sigma\,, \qquad g_{\varrho\sigma} = g_{ik}\, x^i_\varrho\, x^k_\sigma$$

in der Hyperfläche eine Massbestimmung mit dem Masstensor $g_{\varrho\sigma} = g_{\sigma\varrho}$. $g_{\varrho\sigma}$ heisst *der erste Grundtensor*, die quadratische Form (23. 4) *die erste Grundform* der Hyperfläche. Sie bedeutet (Nr. 1) das Quadrat der Entfernung des Punktes $(x + d\, x)$ der Hyperfläche vom Punkte (x) derselben in Bezug auf das Hyperflächenelement im Punkte (x).

Da die Matrix (x^i_ϱ) den Rang $n-1$ hat (Nr. 2), ist die Determinante

$$(23.\ 5)\qquad \bar{g} = \det.(g_{\varrho\sigma})$$

---

[1] Zu diesem Abschnitt vgl. E. Cartan, [3], Abschnitt VIII ($n = 3$) und J. M. Wegener, [1], wo die entsprechende Theorie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen in ähnlicher Weise entwickelt wird.

gewiss von Null verschieden. Es existieren also auch die kontravarianten Komponenten $g^{\varrho\sigma}$ und das Hinauf- und Herunterziehen griechischer Zeiger kann mittels der $g^{\varrho\sigma}$, $g_{\varrho\sigma}$ erklärt werden. Aus der geometrischen Bedeutung des Integrals (2. 7) für die Hyperfläche folgt übrigens

$$\boxed{\bar{g} = L^2(x, p).} \tag{23. 6}$$[1]

Wir setzen nun weiter

$$x_i^\varrho = g_{ik} g^{\varrho\sigma} x_\sigma^k. \tag{23. 7}$$

Dann gilt wegen (23. 4)

$$\boxed{x_i^\varrho x_\sigma^i = \delta_\sigma^\varrho,} \tag{23. 8}$$

($\delta_\sigma^\varrho = 1$ für $\varrho = \sigma$, $= 0$ für $\varrho \neq \sigma$), ferner

$$g_{\varrho\mu} x_k^\mu = g_{ik} x_\varrho^i, \quad g^{\varrho\mu} x_\varrho^i = g^{ik} x_k^\mu, \quad g^{\varrho\sigma} = g^{ik} x_i^\varrho x_k^\sigma, \tag{23. 9}$$

und endlich wegen (23. 3)

$$x_i^\varrho l^i = 0, \quad x_i^\varrho d x^i = d v^\varrho. \tag{23. 10}$$

[1] Rechnerisch leitet man (23. 6) etwa so her: Nach (4. 1), (4. 5) ist längs der Hyperfläche

$$\frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_k} = \frac{g}{L}(g^{ik} - l^i l^k),$$

also wegen (23. 9), (23. 10)

$$g^{\varrho\sigma} = \frac{L}{g} \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_k} x_i^\varrho x_k^\sigma = \frac{L}{g} L^{\varrho\sigma}$$

und daher

$$\frac{1}{g} = \left(\frac{L}{g}\right)^{n-1} \det. (L^{\varrho\sigma}). \tag{*}$$

det. $(L^{\varrho\sigma})$ ist (vgl. L. Koschmieder, [3], S. 471 f.) die durch

$$\text{adj.} \frac{\partial^2 L}{\partial p_h \partial p_k} = L_1 p_h p_k$$

erklärte Funktion L_1, die in unmittelbar verständlicher Schreibweise durch

$$L_1 L^2 = - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_k} & \dfrac{\partial L}{\partial p_k} \\ \dfrac{\partial L}{\partial p_i} & 0 \end{vmatrix}$$

dargestellt werden kann, wo rechts eine $(n+1)$-reihige Determinante steht. Für diese folgt aus (4. 5), (4. 1) der Wert $\left(\frac{g}{L}\right)^{n-1}$. Also ist $L_1 = \det. (L^{\varrho\sigma}) = \frac{g^{n-1}}{L^{n+1}}$. Durch Einsetzen in (*) ergibt sich (23. 6).

Ein beliebiger Tensor, der in einem willkürlichen Element (x, p) der Hyperfläche definiert ist, lässt sich nach den x^i_ϱ, x^ϱ_i, l^i, l_i zerlegen. Z. B.

$$\boxed{T_i^{\ k} = T_\varrho^{\ \sigma} x^\varrho_i x^k_\sigma + T_{\varrho o} x^\varrho_i l^k + T^{o\sigma} l_i x^k_\sigma + T_{oo} l_i l^k,} \tag{23. 11}$$

wo wegen (23. 3), (23. 8)

$$T_\varrho^{\ \sigma} = T_p^{\ q} x^p_\varrho x^\sigma_q, \quad T_{\varrho o} = T_{po} x^p_\varrho, \quad T^{o\sigma} = T^{oq} x^\sigma_q. \tag{23. 12}$$

Die $T_i^{\ k}$ heissen die *Raumkomponenten*, die $T_\varrho^{\ \sigma}$ die *Hyperflächenkomponenten* des Tensors $(T_i^{\ k})$. Ist $T_{io} = T^{ok} = 0$, also auch $T_{oo} = 0$, so heisst $(T_i^{\ k})$ ein *Hyperflächentensor*. Entsprechendes gilt für eine beliebige Grösse.

Wir verwenden auch zweierlei Zeiger, z. B.

$$T_r^{\ \sigma} = T_r^{\ p} x^\sigma_p, \qquad T_\varrho^{\ s} = T_p^{\ s} x^p_\varrho. \tag{23. 13}$$

Ist eine Grösse in gewissen lateinischen Zeigern symmetrisch, bezw. schiefsymmetrisch, so auch in den entsprechenden griechischen Zeigern; z. B. ist $A^{\varrho\sigma h} = A^{\sigma\varrho h}$.

Der Tensor $g_{ik} - l_i l_k$ ist offenbar ein Hyperflächentensor mit den Hyperflächenkomponenten $g_{\varrho\sigma}$, wie aus (23. 3), (23. 4) folgt. Also ist

$$g_{\varrho\sigma} x^\varrho_i x^\sigma_k = g_{ik} - l_i l_k. \tag{23. 14}$$

Durch Überschiebung mit g^{ih} folgt aus (23. 14) mittels (23. 9)

$$\boxed{x^h_\varrho x^\varrho_k = \delta^h_k - l_k l^h,} \tag{23. 15}$$

und hieraus ebenso

$$g^{\varrho\sigma} x^h_\varrho x^j_\sigma = g^{hj} - l^h l^j. \tag{23. 16}$$

Aus (23. 15) ergibt sich für eine beliebige Grösse $\Phi_{h\ldots}^{\ k\cdot\cdot}$

$$\Phi_{\varrho\ldots}^{\ \varrho\cdot\cdot} = x^h_\varrho x^\varrho_k \Phi_{h\ldots}^{\ k\cdot\cdot} = (\delta^h_k - l_k l^h) \Phi_{h\ldots}^{\ k\cdot\cdot}$$

d. h. die Zerlegung

$$\boxed{\Phi_{h\ldots}^{\ h\cdot\cdot} = \Phi_{o\ldots}^{\ o\cdot\cdot} + \Phi_{\varrho\ldots}^{\ \varrho\cdot\cdot}} \tag{23. 17}$$

Auch bei den $\Gamma^{*h}_{i\ k}$ (aber nicht bei den Γ^h_{ik} aus § 1!) soll Überschiebung mit den x^i_ϱ, x^σ_j durch den entsprechenden griechischen Zeiger bezeichnet werden, z. B.

(23. 18) $$\Gamma^{*\sigma}_{\varrho\ k} = \Gamma^{*h}_{i\ k}\, x^i_\varrho\, x^\sigma_h, \quad \Gamma^*_{\varrho o \tau} = \Gamma^{*h}_{i\ k}\, x^i_\varrho\, l_h\, x^k_\tau, \quad \Gamma^{*o\varrho o} = \Gamma^{*h}_{i\ k}\, l^i\, x^\varrho_h\, l^k.$$

Dann gelten auch hier die Zerlegungen (23. 11) und (23. 17), z. B.[1]

(23. 19) $$\begin{cases} \Gamma^{*oho} = \Gamma^{*o\varrho o}\, x^h_\varrho + \Gamma^*_{ooo}\, l^h, \\ \Gamma^{*\varrho}_{\varrho\ k} = \Gamma^{*\varrho}_{k\ \varrho} = \Gamma^{*r}_{r\ k} - \Gamma^*_{ook}, \\ \Gamma^{*i}_{\varrho h}\, \Gamma^{*\varrho}_{j\ k} = \Gamma^{*i}_{rh}\, \Gamma^{*r}_{j\ k} - \Gamma^{*oi}_{\quad h}\, \Gamma^*_{jok}. \end{cases}$$

Schliesslich merken wir noch zwei Identitäten für den Tensor A^{ikh} an. Wegen (23. 10) und (5. 6) ist

(23. 20) $$A^{\varrho o h} = A^{o \varrho h} = 0,$$

und wegen (5. 7), (5. 9)

(23. 21) $$A^{\varrho h}_{\varrho} = 0.$$

24. *Die zweite und dritte Grundform der Hyperfläche.* Die *zweite Grundform* der Hyperfläche wird wie im Riemannschen Raum durch

(24. 1) $$a_{\varrho\tau}\, d v^\varrho\, d v^\tau = l_i\, D^2 x^i = -\,\omega_i(d)\, d x^i$$

erklärt, wo $D^2 x^i = D(d x^i)$ ist. Die Gleichheit der beiden Ausdrücke rechts folgt aus $l_i\, d x^i = 0$ durch Bildung des absoluten Differentials. Da $\omega_i(d)$ wegen (6. 16) ein Hyperflächenvektor ist, so gilt

(24. 2) $$\omega_i(d) = \omega_\varrho(d)\, x^\varrho_i, \quad \omega^i(d) = \omega^\varrho(d)\, x^i_\varrho,$$

und daher mit Rücksicht auf (23. 10)

(24. 3) $$a_{\varrho\tau}\, d v^\varrho\, d v^\tau = -\,\omega_\varrho(d)\, d v^\varrho.$$

Also ist

(24. 4) $$\omega_\varrho(d) = -\,a_{\varrho\tau}\, d v^\tau.$$

Durch Einsetzen der Werte für $D^2 x^i$ und $\omega_i(d)$ aus (6. 9), (6. 12) in (24. 1) erhält man für den *zweiten Grundtensor* $a_{\varrho\tau}$ der Hyperfläche

(24. 5) $$a_{\varrho\tau} = a_{\tau\varrho} = l_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial v^\varrho\, \partial v^\tau} + \Gamma^*_{\varrho o \tau} = -\frac{\partial x^i}{\partial v^\varrho} \frac{\partial l_i}{\partial v^\tau} + \Gamma^*_{\varrho o \tau}.$$

[1] Man beachte das in Nr. 4 über die Stellung der Null Gesagte.

Die *dritte Grundform* der Hyperfläche ist definiert als das Quadrat des Winkels zweier Elemente der Hyperfläche, die benachbarten Parameterwerten v^ϱ und $v^\varrho + d\,v^\varrho$ entsprechen. Aus (24. 2) und (6. 20) folgt für sie der Ausdruck

(24. 6) $$d\,\varphi^2 = \omega_\varrho(d)\,\omega^\varrho(d) = a_{\varrho\sigma}\,a^\varrho_\tau\,d\,v^\sigma\,d\,v^\tau.$$

§ 5. Die Grundformeln der Hyperflächentheorie.

25. *Die Ableitungsgleichungen.* Die Ableitungsgleichungen der Hyperfläche erhält man durch Zerlegung der Vektoren

$$D\,x^i_\varrho = d\,x^i_\varrho + \omega^i_k(d)\,x^k_\varrho, \quad D\,l^i = \omega^i(d)$$

in Hyperflächen- und Normalkomponenten. Aus (23. 3) und (24. 4) folgt

(25. 1) $$l_i\,d\,x^i_\varrho = -\,\omega_i(d)\,x^i_\varrho = -\,\omega_\varrho(d) = a_{\varrho\sigma}\,d\,v^\sigma.$$

Wir setzen ferner

(25. 2) $$\pi^\sigma_\varrho(d) = x^\sigma_i\,D\,x^i_\varrho = -\,x^i_\varrho\,D\,x^\sigma_i = \Gamma^{\ \sigma}_{\varrho\ \tau}\,d\,v^\tau.[1]$$

Dann ergibt sich aus (25. 2), (6. 9), (25. 1)

(25. 3) $$\Gamma^{\ \sigma}_{\varrho\ \tau} = x^\sigma_i\,\frac{\partial^2 x^i}{\partial v^\varrho\,\partial v^\tau} + \Gamma^{*\ \sigma}_{\ \varrho\ \tau} - A^{\sigma\mu}_\varrho\,a_{\mu\tau}.$$

Die *Ableitungsgleichungen* lauten jetzt

(25. 4) $$\boxed{D\,x^i_\varrho = \pi^\sigma_\varrho(d)\,x^i_\sigma - \omega_\varrho(d)\,l^i,}$$

(25. 5) $$\boxed{\omega^i(d) = \omega^\sigma(d)\,x^i_\sigma \qquad * \;,}$$

oder ausführlich geschrieben

(25. 6) $$\boxed{\frac{\partial^2 x^i}{\partial v^\varrho\,\partial v^\tau} + \Gamma^{*\ i}_{\ \varrho\ \tau} = (\Gamma^{\ \sigma}_{\varrho\ \tau} + A^{\sigma\mu}_\varrho\,a_{\mu\tau})\,\frac{\partial x^i}{\partial v^\sigma} + a_{\varrho\tau}\,l^i,}$$

(25. 7) $$\boxed{\frac{\partial l^i}{\partial v^\tau} + \Gamma^{*o\,i}_{\ \ \ \tau} = \qquad -\,a^\sigma_\tau\,\frac{\partial x^i}{\partial v^\sigma} + A^\mu\,a_{\mu\tau}\,l^i.}$$

---

[1] Die Koeffizienten $\Gamma^{\ \sigma}_{\varrho\ \tau}$ von $\pi^\sigma_\varrho(d)$ haben nichts mit den $\Gamma^{\ i}_{k\ h}$ aus § 1 zu tun!

Für einen späteren Zweck schreiben wir die Ableitungsgleichungen auch in der Gestalt an, die durch Zerlegung der Vektoren

$$D\,x_j^\sigma = d\,x_j^\sigma - \omega_j^k(d)\,x_k^\sigma, \quad D\,l_j = \omega_j(d)$$

hervorgeht. Wegen (25. 2) und

$$l^h D\,x_h^\sigma = -\,x_h^\sigma\,\omega^h(d) = -\,\omega^\sigma(d) = a_\tau^\sigma\,d\,v^\tau$$

erhält man

$$D\,x_j^\sigma = -\,\pi_\tau^\sigma(d)\,x_j^\tau - \omega^\sigma(d)\,l_j, \tag{25. 8}$$

$$\omega_j(d) = \quad \omega_\tau(d)\,x_j^\tau \quad * \tag{25. 9}$$

oder in ausführlicher Schreibweise (bei Beachtung der Symmetrie von $\Gamma_{j\ \tau}^{*\sigma}$ und der $\Gamma_{\varrho\tau}^\sigma + A_\varrho^{\sigma\mu}\,a_{\mu\tau}$ in den unteren Zeigern, sowie der Gleichung (23. 14))

$$\frac{\partial x_j^\sigma}{\partial v^\tau} - \Gamma_{\tau\ j}^{*\sigma} = -\left(\Gamma_{\tau\varrho}^\sigma + A_\tau^{\sigma\mu}\,a_{\mu\varrho}\right)x_j^\varrho + a_\tau^\sigma\,l_j, \tag{25. 10}$$

$$\frac{\partial l_j}{\partial v^\tau} - \Gamma_{\tau o j}^{*} = - \qquad a_{\varrho\tau}\,x_j^\varrho \qquad - A^\mu\,a_{\mu\tau}\,l_j. \tag{25. 11}$$

Es sei nun $x^i = x^i(s)$ die Parameterdarstellung einer auf ihre Bogenlänge $s = \int \sqrt{g_{\varrho\sigma}\,d\,v^\varrho\,d\,v^\sigma}$ bezogenen etwa analytischen *Kurve in der Hyperfläche.* Dann folgt aus (25. 4)

$$\frac{D^2 x^i}{d\,s^2} = \left(\frac{d^2 v^\sigma}{d\,s^2} + \frac{\pi_\varrho^\sigma(d)}{d\,s}\,\frac{d\,v^\varrho}{d\,s}\right)x_\sigma^i - \frac{\omega_\varrho(d)}{d\,s}\,\frac{d\,v^\varrho}{d\,s}\,l^i$$

oder

$$\frac{d^2 x^i}{d\,s^2} + \Gamma_{hk}^{*i}\,\frac{d\,x^h}{d\,s}\,\frac{d\,x^k}{d\,s} + A_h^{ik}\,\frac{d\,x^h}{d\,s}\,\frac{\omega_k(d)}{d\,s} \tag{25. 12}$$

$$= \left(\frac{d^2 v^\sigma}{d\,s^2} + \Gamma_{\varrho\tau}^\sigma\,\frac{d\,v^\varrho}{d\,s}\,\frac{d\,v^\tau}{d\,s}\right)x_\sigma^i + a_{\varrho\tau}\,\frac{d\,v^\varrho}{d\,s}\,\frac{d\,v^\tau}{d\,s}\,l^i.$$

Der Vektor links ist der *absolute Krümmungsvektor* der Kurve in der Hyperfläche in Bezug auf die Hyperfläche[1], der erste Summand rechts der *Vektor der relativen oder geodätischen Krümmung,* der zweite der *Vektor der erzwungenen oder Normalkrümmung.* Die Länge des ersten Vektors rechts ist die *geodätische Krümmung,* die des zweiten die *Normalkrümmung*

[1] Wenn der Raum kein Riemannscher ist, hängt er auch vom Hyperflächenelement ab.

$$\mathfrak{N} = \frac{a_{\varrho\sigma}\, d\, v^\varrho\, d\, v^\sigma}{g_{\varrho\sigma}\, d\, v^\varrho\, d\, v^\sigma} \tag{25. 13}$$

der Kurve. Mittels der Normalkrümmung lassen sich für die Hyperfläche in der gewöhnlichen Weise die Begriffe: Asymptotenrichtungen, konjugierte Richtungen, Hauptkrümmungsrichtungen, Asymptotenlinien, sowie die $n-1$ Hauptkrümmungen $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \ldots \frac{1}{R_{n-1}}$ erklären. Im Folgenden treten insbesondere die Ausdrücke

$$\begin{cases} H = \dfrac{1}{n-1} \sum \dfrac{1}{R_\alpha} = \dfrac{1}{n-1}\, a^\varrho_\varrho, \\[2ex] K = \dfrac{2}{(n-1)(n-2)} \sum\limits_{\alpha > \beta} \dfrac{1}{R_\alpha} \dfrac{1}{R_\beta} = \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} (a^\varrho_\varrho a^\sigma_\sigma - a^\sigma_\varrho a^\varrho_\sigma) \end{cases} \tag{25. 14}$$

auf, von denen der erste die *mittlere Krümmung* der Hyperfläche heisst.[1] Auch die Sätze von MEUSNIER und EULER bleiben unverändert bestehen.

26. *Die innere Geometrie der Hyperfläche.* Durch die Metrik des umgebenden Raumes wurde (Nr. 23) in der Hyperfläche eine quadratische Massbestimmung mit dem Grundtensor $g_{\varrho\sigma}$ induziert. Wir zeigen jetzt, *dass durch den euklidischen Zusammenhang des Raumes in der Hyperfläche ein euklidischer Zusammenhang mit den Koeffizienten $\Gamma^\sigma_{\varrho\tau}$, induziert wird, der im allgemeinen eine Torsion besitzt.*

Dazu werde die Hyperflächenkomponente des absoluten Differentials eines Tensors mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet, z. B. $\mathfrak{D}\, X_\varrho = x^i_\varrho\, D\, X_i$. Dann gilt wegen $D\, X_\varrho = d\, X_\varrho$:

$$\mathfrak{D}\, X_\varrho = x^i_\varrho\, D\, X_i = d\, X_\varrho - X_i\, D\, x^i_\varrho, \tag{26. 1}$$

also insbesondere für einen Hyperflächenvektor ($X_0 = 0$) mit Rücksicht auf (25. 4)

$$\boxed{\mathfrak{D}\, X_\varrho = d\, X_\varrho - X_\sigma\, \pi^\sigma_\varrho(d) = d\, X_\varrho - X_\sigma\, \Gamma^\sigma_{\varrho\tau}\, d\, v^\tau.} \tag{26. 2}$$

Wegen $D\, g_{ik} = 0$ gilt ferner

$$\mathfrak{D}\, g_{\varrho\sigma} = 0 \tag{26. 3}$$

oder

[1] H wurde zuerst von L. Koschmieder, [1], (für $n = 3$), [2] (für beliebiges n) eingeführt. Für $n = 3$ vgl. auch E. Cartan, [3], S. 26.

(26. 4) $$\frac{\partial g_{\varrho\sigma}}{\partial v^\tau} = \Gamma_{\varrho\sigma\tau} + \Gamma_{\sigma\varrho\tau}, \qquad (\Gamma_{\varrho\sigma\tau} = g_{\sigma\mu}\Gamma^\mu_{\varrho\tau}).$$

(26. 4) sagt aus, dass der induzierte Zusammenhang (26. 2) *euklidisch* ist. Seine *Torsion* ist durch

(26. 5) $$B^\sigma = [d\,v^\varrho\,\pi^\sigma_\varrho] = \frac{1}{2} B^\sigma_{\varrho\tau}[d\,v^\varrho\,d\,v^\tau]$$

definiert. Für den Torsionstensor $B^\sigma_{\varrho\tau}$ ergibt sich aus (25. 2), (25. 3)

(26. 6) $$B^\sigma_{\varrho\tau} = \Gamma^\sigma_{\varrho\tau} - \Gamma^\sigma_{\tau\varrho} = a_{\varrho\mu} A^{\sigma\mu}_\tau - a_{\tau\mu} A^{\sigma\mu}_\varrho.$$

Er ist zyklisch symmetrisch:

(26. 7) $$B_{\varrho\sigma\tau} + B_{\sigma\tau\varrho} + B_{\tau\varrho\sigma} = 0, \qquad (B_{\varrho\sigma\tau} = g_{\sigma\mu} B_\varrho{}^\mu{}_\tau).$$

und es gilt wegen (23. 21)

(26. 8) $$B^\varrho_{\varrho\tau} = -B^\varrho_{\tau\varrho} = a_{\varrho\mu} A^{\varrho\mu}_\tau.$$

Aus der Gleichung, die aus (26. 6) durch Herunterziehen des Zeigers σ entsteht und aus (26. 4) erhält man auf bekannte Weise

(26. 9) $$\Gamma^\sigma_{\varrho\tau} = \left\{ {\sigma \atop \varrho\,\tau} \right\} + a_{\varrho\mu} A^{\sigma\mu}_\tau - a^\sigma_\mu A_{\varrho\tau}{}^\mu,$$

wo $\left\{ {\sigma \atop \varrho\,\tau} \right\}$ das Christoffelsymbol 2. Art für den Tensor $g_{\varrho\sigma}$ ist. Endlich folgt aus (26. 4) und (23. 6) noch die später zu benutzende Gleichung

(26. 10) $$\frac{\partial L}{\partial v^\tau} = L\,\Gamma^\varrho_{\varrho\tau}.$$

Die *geodätischen Linien* (autoparallelen Kurven)

(26. 11) $$\frac{d^2 v^\sigma}{d s^2} + \Gamma^\sigma_{\varrho\tau} \frac{d\,v^\varrho}{d s} \frac{d\,v^\tau}{d s} = 0$$

der Hyperfläche sind nach (25. 12) die Kurven, deren absoluter Krümmungsvektor in Bezug auf die Hyperfläche auf dieser senkrecht steht oder auch die Kurven mit der geodätischen Krümmung Null.[1] Sie sind im Allgemeinen verschieden

[1] Das Folgende (bis Nr. 27) ist zum grössten Teil eine Zusammenstellung bekannter Dinge, die weiterhin Verwendung finden.

von den kürzesten Linien auf der Hyperfläche, d. h. den Extremalen des Variationsproblems der Bogenlänge s.

Die Krümmung des in der Hyperfläche induzierten Zusammenhangs oder ihre *innere Riemannsche Krümmung* ist

$$B_\varrho^\sigma = [\pi_\varrho^\mu \pi_\mu^\sigma] - (\pi_\varrho^\sigma)' = \frac{1}{2} B_{\varrho\,\varkappa\lambda}^{\ \sigma} [d v^\varkappa \, d v^\lambda] \tag{26. 12}$$

mit dem *Krümmungstensor*

$$B_{\varrho\,\varkappa\lambda}^{\ \sigma} = \frac{\partial \Gamma_{\varrho\varkappa}^\sigma}{\partial v^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{\varrho\lambda}^\sigma}{\partial v^\varkappa} + \Gamma_{\varrho\varkappa}^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\varrho\lambda}^\mu \Gamma_{\mu\varkappa}^\sigma \tag{26. 13}$$

und der *skalaren Krümmung*

$$B = \frac{1}{(n-1)(n-2)} B^{\varrho\sigma}_{\ \ \varrho\sigma}. \tag{26. 14}$$

Da der Zusammenhang euklidisch ist, sind die kovarianten Komponenten des Krümmungstensors auch in den ersten zwei Zeigern schief symmetrisch.

Die *Bianchischen Identitäten* lauten hier

$$\left\{\begin{array}{l} (B^\varrho)' - [d v^\tau B_\tau^\varrho] + [\pi_\tau^\varrho B^\tau] = 0, \\ B'_{\varrho\sigma} - [\pi_\sigma^\tau B_{\varrho\tau}] + [\pi_\varrho^\tau B_{\sigma\tau}] = 0, \qquad (B_{\varrho\sigma} = - B_{\sigma\varrho} = g_{\sigma\mu} B_\varrho^\mu) \end{array}\right. \tag{26. 15}$$

oder entwickelt

$$\left\{\begin{array}{l} B_{\varkappa\varrho\lambda(\mu)} + B_{\varkappa\varrho\tau} B_{\lambda\mu}^\tau - B_{\varkappa\varrho\lambda\mu} + \text{zykl.} = 0, \\ B_{\varrho\sigma\varkappa\lambda(\mu)} + B_{\varrho\sigma\varkappa\tau} B_{\lambda\mu}^\tau + \text{zykl.} = 0, \end{array}\right. \tag{26. 16}$$

wo + zykl. die Glieder andeutet, die aus den angeschriebenen durch zyklische Vertauschung der Zeiger $\varkappa$, λ, μ entstehen. In (26. 16) bedeutet die Klammer die *kovariante Ableitung*, die der Übertragung in der Hyperfläche entspricht, z. B.

$$a_{\varrho\varkappa(\lambda)} = \frac{\partial a_{\varrho\varkappa}}{\partial v^\lambda} - a_{\sigma\varkappa} \Gamma_{\varrho\lambda}^\sigma - a_{\varrho\sigma} \Gamma_{\varkappa\lambda}^\sigma. \tag{26. 17}$$

27. *Torsion und Krümmung des Raumes in der Hyperfläche.* Die Torsion und die Krümmung des Raumes (Nr. 10, 11) hängen von drei benachbarten Hyperflächenelementen

$$E_0\colon (x, l), \quad E_1\colon (x + d x, l + d l), \quad E_2\colon (x + \delta x, l + \delta l)$$

ab. Wenn diese drei Elemente der Hyperfläche angehören, so sind sie durch ein zweidimensionales Flächenelement $(d x, \delta x)$ oder $(d v, \delta v)$ der Hyperfläche im Punkte (x) derselben bereits vollständig bestimmt. Das Gleiche gilt daher auch von der durch E_0, E_1, E_2 bestimmten Torsion und Krümmung des Raumes, die wir als *Torsion* bezw. *Krümmung des Raumes in der Hyperfläche* bezeichnen. Wir bestimmen jetzt die Komponenten dieser Tensoren.

Da $d x^i$ und $\omega_h(d)$ Hyperflächentensoren mit den Hyperflächenkomponenten $d v^\varrho$ bezw. (24. 4) sind, ergibt sich aus (10. 5) für die *Torsion des Raumes in der Hyperfläche*

(27. 1) $$\Omega^i = A_k^{ih}[d x^k \omega_h] = A_\varrho^{i\mu}[d v^\varrho \omega_\mu].$$

Aus dem ersten Ausdruck und aus (5. 6), (23. 3) folgt $\Omega_0 = 0$. Ω^i ist also ein Hyperflächenvektor mit den Hyperflächenkomponenten

(27. 2) $$\Omega^\sigma = A_\varrho^{\sigma\mu}[d v^\varrho \omega_\mu] = \frac{1}{2}(a_{\varrho\mu} A_\tau^{\sigma\mu} - a_{\tau\mu} A_\varrho^{\sigma\mu})[d v^\varrho d v^\tau].$$

Vergleich von (27. 2) mit (26. 5), (26. 6) ergibt den Satz:

Die Torsion $\bar{B}^\sigma$ des in der Hyperfläche induzierten Zusammenhanges ist mit der Torsion Ω^σ des Raumes in der Hyperfläche identisch.

Für die *Krümmung des Raumes in der Hyperfläche* erhält man aus (11. 3) mittels (23. 3), (24. 2)

$$\Omega_r^i = \frac{1}{2} R_{r\,\varkappa\lambda}^{\;i}[d v^\varkappa d v^\lambda] + P_{r\,\varkappa}^{\;i\,\mu}[d v^\varkappa \omega_\mu] + \frac{1}{2} S_r^{\;i\mu\nu}[\omega_\mu \omega_\nu]$$

und hieraus vermöge (25. 1)

(27. 3) $$\Omega_r^i = \frac{1}{2}(R_{r\,\varkappa\lambda}^{\;i} + a_\varkappa^\mu P_{r\,\lambda\mu}^{\;i} - a_\lambda^\mu P_{r\,\varkappa\mu}^{\;i} + a_\varkappa^\mu a_\lambda^\nu S_{r\,\mu\nu}^{\;i})[d v^\varkappa d v^\lambda].$$

Wegen der schiefen Symmetrie der R_{rikh}, P_{rikh}, S_{rikh} in den beiden ersten Zeigern sind nur die folgenden Komponenten der Krümmung des Raumes in der Hyperfläche von Null verschieden

(27. 4) $$\Omega_\varrho^\sigma = \frac{1}{2}\Omega_{\varrho\,\varkappa\lambda}^{\;\sigma}[d v^\varkappa d v^\lambda] = \frac{1}{2}(R_{\varrho\,\varkappa\lambda}^{\;\sigma} + a_\varkappa^\mu P_{\varrho\,\lambda\mu}^{\;\sigma} - a_\lambda^\mu P_{\varrho\,\varkappa\mu}^{\;\sigma} + a_\varkappa^\mu a_\lambda^\nu S_{\varrho\,\mu\nu}^{\;\sigma})[d v^\varkappa d v^\lambda],$$

(27. 5) $$\Omega_{\varrho 0} = -\Omega_{0\varrho} = \frac{1}{2}(R_{\varrho 0\varkappa\lambda} + a_\varkappa^\mu P_{\varrho 0\lambda\mu} - a_\lambda^\mu P_{\varrho 0\varkappa\mu})[d v^\varkappa d v^\lambda].$$

28. *Die Gauss-Codazzischen Gleichungen.* Zur Herleitung der Integrabilitätsbedingungen der Ableitungsgleichungen (25. 4), (25. 5) hat man aus diesen $(\varDelta D - D\varDelta)x^i_\varrho$, $(\varDelta D - D\varDelta)l^i$ zu bilden und die Ableitungsgleichungen selbst, sowie (11. 1) zu benutzen. Man erhält so

$$\Omega^i_\varrho = \Omega^i_r x^r_\varrho = ([\pi^\mu_\varrho \pi^\sigma_\mu] - (\pi^\sigma_\varrho)' - [\omega_\varrho \omega^\sigma])\, x^i_\sigma + (\omega'_\varrho - [\pi^\sigma_\varrho \omega_\sigma])\, l^i, \tag{28. 1}$$

$$\Omega^i_o = \Omega^i_r l^r = -((\omega^\sigma)' - [\pi^\sigma_\varrho \omega^\varrho])\, x^i_\sigma + \quad * \tag{28. 2}$$

Die Integrabilitätsbedingungen reduzieren sich also wegen (26. 12) auf

$$\boxed{\begin{aligned} &B^\sigma_\varrho - [\omega_\varrho \omega^\sigma] = \Omega^\sigma_\varrho, && (28.\ 3)\\ &\omega'_\varrho - [\pi^\sigma_\varrho \omega_\sigma] = \Omega_{\varrho o}. && (28.\ 4)\end{aligned}}$$

(28. 3) ist die Gausssche, (28. 4) die Mainardi-Codazzische Gleichung für die Hyperfläche. In ausführlicher Schreibweise lauten sie

$$\boxed{\begin{aligned} &B_{\varrho\sigma\varkappa\lambda} - (a_{\varrho\varkappa} a_{\sigma\lambda} - a_{\varrho\lambda} a_{\sigma\varkappa}) = R_{\varrho\sigma\varkappa\lambda} + a^\mu_\varkappa P_{\varrho\sigma\lambda\mu} - a^\mu_\lambda P_{\varrho\sigma\varkappa\mu} + a^\mu_\varkappa a^\nu_\lambda S_{\varrho\sigma\mu\nu}, && (28.\ 5)\\ &a_{\varrho\varkappa(\lambda)} - a_{\varrho\lambda(\varkappa)} + a^\mu_\varrho B_{\varkappa\mu\lambda} = R_{\varrho o\varkappa\lambda} + a^\mu_\varkappa P_{\varrho o\lambda\mu} - a^\mu_\lambda P_{\varrho o\varkappa\mu}. && (28.\ 6)\end{aligned}}$$

Aus (28. 5), (28. 6) folgen zwei weitere Gleichungen, in denen die in Nr. 25 erklärten Skalare H, K sowie die skalare Krümmung B (Nr. 26) der Hyperfläche auftreten

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}(B - K) = \frac{1}{2}(R^{\varrho\sigma}{}_{\varrho\sigma} - 2\, a^\mu_\varrho P^{\varrho\sigma}{}_{\mu\sigma} + a^\mu_\varrho a^\nu_\sigma S^{\varrho\sigma}{}_{\mu\nu}), \tag{28. 7}$$

$$(n-1)\, H_{(\varkappa)} = a^\varrho_{\varkappa(\varrho)} + a^\varrho_\mu B^\mu_{\varkappa\varrho} + R_o{}^\varrho{}_{\varkappa\varrho} - a^\mu_\varkappa P_o{}^\varrho{}_{\mu\varrho} + a^\mu_\varrho P_o{}^\varrho{}_{\mu\varkappa}. \tag{28. 8}$$

Die erste dieser Gleichungen stellt die Verallgemeinerung des Gaussschen »*theorema egregium*» auf den vorliegenden Fall dar.[1]

Durch äussere Ableitung von (28. 3), (28. 4) und Benutzung dieser Gleichungen selbst, sowie von (26. 5), (26. 12), (26. 15) erhält man noch zwei weitere Identitäten

$$\Omega'_{\varrho\sigma} + [\pi^\tau_\varrho \Omega_{\sigma\tau}] - [\pi^\tau_\sigma \Omega_{\varrho\tau}] - [\omega_\varrho \Omega_{\sigma o}] + [\omega_\sigma \Omega_{\varrho o}] = 0, \tag{28. 9}$$

$$\Omega'_{\varrho o} - [\pi^\sigma_\varrho \Omega_{\sigma o}] - [\omega_\sigma B^\sigma_\varrho] = 0. \tag{28. 10}$$

[1] Für $n = 3$ hat bereits Herr E. Cartan, [3], S. 27 ihren Inhalt angedeutet.

Sie lauten ausführlich geschrieben

$$\Omega_{\varrho\sigma\varkappa\lambda(\mu)} + \Omega_{\varrho\sigma\varkappa\tau} B^{\tau}_{\lambda\mu} - \Omega_{\varrho o\varkappa\lambda} a_{\sigma\mu} + \Omega_{\sigma o\varkappa\lambda} a_{\varrho\mu} + \text{zykl.} = 0, \tag{28. 11}$$

$$\Omega_{\varrho o\varkappa\lambda(\mu)} + \Omega_{\varrho o\varkappa\tau} B^{\tau}_{\lambda\mu} + a_{\varkappa}{}^{\tau} B_{\varrho\tau\lambda\mu} + \text{zykl.} = 0, \tag{28. 12}$$

wobei + zykl. dieselbe Bedeutung hat wie in Nr. 26. $\Omega^{\sigma}_{\varrho\varkappa\lambda}$ ist der durch (27. 4) definierte Tensor, $\Omega_{\varrho\sigma\varkappa\lambda} = g_{\sigma\mu} \Omega_{\varrho}{}^{\mu}{}_{\varkappa\lambda}$.

29. *Hyperebenen.* Um eine einfache Anwendung der Formeln dieses Abschnittes zu geben, betrachten wir die Hyperebenen.[1]

Eine Hyperfläche heisst in einem Punkte *geodätisch*, wenn ihr Hyperflächenelement in diesem Punkte durch Parallelübertragung (im Raume) nach irgend einem Nachbarpunkte der Hyperfläche in das Element der Hyperfläche in diesem Punkte übergeht. Eine Hyperfläche, die in jedem ihrer Punkte geodätisch ist heisst *(total-)geodätisch* oder auch eine *Hyperebene.*

Eine Hyperebene ist also dadurch gekennzeichnet, dass in jedem ihrer Punkte für jede Fortschreitungsrichtung in ihr

$$\omega_i(d) = 0 \tag{29. 1}$$

oder, was nach (24. 2), (24. 4) dasselbe ist, dass längs ihr

$$a_{\varrho\tau} = 0 \tag{29. 2}$$

gilt. Da für einen Hyperflächenvektor $X^i = X^{\varrho} x^i_{\varrho}$ bei Fortschreitung in der Hyperfläche aus (25. 4)

$$D X^i = (d X^{\sigma} + \pi^{\sigma}_{\varrho}(d) X^{\varrho}) x^i_{\sigma} - \omega_{\varrho}(d) X^{\varrho} l^i \tag{29. 3}$$

folgt, so ist dann und nur dann für jeden beliebigen Hyperflächenvektor X^i auch $D X^i$ ein Hyperflächenvektor, wenn (29. 1) gilt. Hieraus folgt:

Eine Hyperfläche ist dann und nur dann eine Hyperebene, wenn jeder Hyperflächenvektor durch Parallelübertragung (im Raum) von seinem Hyperflächenelement nach einem willkürlichen Nachbarelement der Hyperfläche wieder in einen Hyperflächenvektor übergeht.

Wegen (29. 2) sind sämtliche Hauptkrümmungen einer Hyperebene Null,

[1] Vgl. die entsprechenden Entwicklungen für den Finslerschen Raum bei J. M. Wegener, [1], § 3.

also auch die Grössen H und K (Nr. 25). Nach (26. 6) ist auch die Torsion einer Hyperebene Null. Diese ist also eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Krümmungstensor wegen (28. 5), (29. 2) gleich dem ersten Krümmungstensor des Raumes ist:

$$B_{\varrho\sigma\varkappa\lambda} = R_{\varrho\sigma\varkappa\lambda}. \tag{29. 4}$$

Endlich ist nach (28. 6) längs einer Hyperebene

$$R_{\varrho 0 \varkappa\lambda} = 0. \tag{29. 5}$$

Diese Gleichung stellt eine Bedingung für den umgebenden Raum dar. Es gibt also nicht in jedem regulären Cartanschen Raum Hyperebenen. *Insbesondere gibt es durch jedes Hyperflächenelement des Raumes eine Hyperebene nur in den regulären Cartanschen Räumen mit absolutem Parallelismus von Hyperflächenelementen* (Nr. 20). Das folgt daraus, dass (29. 4), (29. 5) die Integrabilitätsbedingungen des Systems

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial v^\varrho \partial v^\tau} + \Gamma^{*\,i}_{h\,k} x^h_\varrho x^k_\tau = \left\{ {\sigma \atop \varrho\tau} \right\} \frac{\partial x^i}{\partial v^\sigma}, \tag{29. 6}$$

$$\frac{\partial l^i}{\partial v^\tau} + \Gamma^{*\,i}_{h\,k} l^h x^k_\tau = 0 \tag{29. 7}$$

darstellen, aus dem nach (25. 6), (25. 7), (26. 9) die Hyperebene zu bestimmen ist.

Dritter Abschnitt: Über die erste und zweite Variation des Oberflächenintegrals.

§ 6. Die erste Variation des Oberflächenintegrals[1].

30. *Die Ableitungen* $\dfrac{\partial p_i}{\partial x^j_\varrho}$, $\dfrac{\partial^2 p_i}{\partial x^j_\varrho \partial x^k_\sigma}$. Aus der Erklärung der p_h in Nr. 2 und aus (23. 2) folgt leicht

[1] Vgl. dazu bes. J. Radon, [1]. Die Bezeichnungen bei Radon hängen mit denen des Textes in folgender Weise zusammen:

Radon	F	p_h	F_{p_h}	$F_{p_h p_k}$	$\Phi_{\alpha\beta}$	T
Verfasser	L	p_h	$l^h \sqrt{g}$	$\frac{g}{L}(g^{hk} - l^h l^k)$	$\frac{g}{L} g^{\alpha\beta}$	$-(n-1) H \sqrt{g}$

(30. 1) $$\frac{\partial p_i}{\partial x^j_\varrho} x^r_\varrho = p_i \delta^r_j - p_j \delta^r_i .$$

Durch Auflösung nach $\frac{\partial p_i}{\partial x^j_\varrho}$ mittels (23. 8) erhält man

(30. 2) $$\frac{\partial p_i}{\partial x^j_\varrho} = p_i x^\varrho_j - p_j x^\varrho_i$$

oder

(30. 3) $$\boxed{\frac{\partial p_i}{\partial x^j_\varrho} = \frac{L}{\sqrt{g}} (l_i x^\varrho_j - l_j x^\varrho_i) .}$$

Aus (30. 1) folgt weiter durch Ableitung nach x^k_σ:

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^j_\varrho \partial x^k_\sigma} x^r_\varrho = - \frac{\partial p_i}{\partial x^j_\sigma} \delta^r_k + \frac{\partial p_i}{\partial x^k_\sigma} \delta^r_j - \frac{\partial p_j}{\partial x^k_\sigma} \delta^r_i ,$$

und hieraus durch Auflösung nach $\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^j_\varrho \partial x^k_\sigma}$ und Benutzung von (30. 3)

(30. 4) $$\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^j_\varrho \partial x^k_\sigma} = \frac{L}{\sqrt{g}} \left\{ l_i (x^\varrho_j x^\sigma_k - x^\sigma_j x^\varrho_k) + l_j (x^\varrho_k x^\sigma_i - x^\sigma_k x^\varrho_i) + l_k (x^\varrho_i x^\sigma_j - x^\sigma_i x^\varrho_j) \right\} .$$

Aus (30. 4) folgt noch

(30. 5) $$l^i \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^j_\varrho \partial x^k_\sigma} = \frac{L}{\sqrt{g}} (x^\varrho_j x^\sigma_k - x^\sigma_j x^\varrho_k) .$$

31. *Umformung der ersten Variation.* Wir variieren jetzt das Oberflächenintegral (2. 7). Bei der Variation δx^i der x^i erleiden die p_i wegen der Vertauschbarkeit von Variation und Ableitung nach v^ϱ die Variation

(31. 1) $$\delta p_i = \frac{\partial p_i}{\partial x^j_\varrho} \delta x^j_\varrho = \frac{\partial p_i}{\partial x^j_\varrho} \frac{\partial \delta x^j}{\partial v^\varrho} = \frac{L}{\sqrt{g}} (l_i x^\varrho_j - l_j x^\varrho_i) \frac{\partial \delta x^j}{\partial v^\varrho} .$$

Wegen (23. 1), (23. 10) ist ferner

(31. 2) $$\frac{\partial L}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x^j_\varrho} = L x^\varrho_j$$

und daher

$$(31.\ 3)\qquad \delta L = \frac{\partial L}{\partial x^j}\,\delta x^j + \frac{\partial L}{\partial p_i}\,\frac{\partial p_i}{\partial x^j_\varrho}\,\frac{\partial\,\delta x^j}{\partial v^\varrho} = \left(\frac{\partial L}{\partial x^j} - \frac{\partial (L x^\varrho_j)}{\partial v^\varrho}\right)\delta x^j + \\ + \frac{\partial}{\partial v^\varrho}\left(\frac{\partial L}{\partial p_i}\,\frac{\partial p_i}{\partial x^j_\varrho}\,\delta x^j\right).$$

Nun ist nach (8. 13) und (23. 19), bezw. (26. 10)

$$\frac{\partial L}{\partial x^j} = L\,\Gamma^{*\varrho}_{\varrho j}, \qquad \frac{\partial L}{\partial v^\tau} = L\,\Gamma^\varrho_{\varrho\tau},$$

und nach (25. 10), (23. 21)

$$\frac{\partial}{\partial v^\varrho}(x^\varrho_j) - \Gamma^{*\varrho}_{\varrho j} = -\,\Gamma^\varrho_{\varrho\tau}\,x^\tau_j + a^\varrho_\varrho\, l_j.$$

Mittels (25. 14), (31. 2) ergibt sich also

$$(31.\ 4)\qquad \frac{\partial L}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial v^\varrho}\left(\frac{\partial L}{\partial p_i}\,\frac{\partial p_i}{\partial x^j_\varrho}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial v^\varrho}(L\,x^\varrho_j) = -(n-1)\,H\,L\,l_j.$$

Es sei nun $V l^i$ die Normalkomponente der Variation δx^i:

$$(31.\ 5)\qquad V = l_j\,\delta x^j.$$

Dann wird

$$(31.\ 6)\qquad \delta L = -(n-1)\,H\,L\,V + \frac{\partial}{\partial v^\varrho}\left(\frac{\partial L}{\partial p_i}\,\frac{\partial p_i}{\partial x^j_\varrho}\,\delta x^j\right).$$

Führt man dies in die erste Variation des Oberflächenintegrals (2. 7) ein und verwandelt den zweiten Summanden in ein Integral über die $(n-2)$-dimensionale Berandung des betrachteten Bereiches der Hyperfläche, so ergibt sich für die *erste Variation der Oberfläche:*

$$(31.\ 7)\qquad \boxed{\begin{aligned}\delta O = -(n-1)\int\limits_{(n-1)} H\,V\,d\,O \pm \int\limits_{(n-2)} \sqrt{g}\,\det.\left(l^i, \delta x^i, \frac{\partial x^i}{\partial w^1}, \frac{\partial x^i}{\partial w^2}, \ldots \frac{\partial x^i}{\partial w^{n-2}}\right) \\ d\,w^1\,d\,w^2 \ldots d\,w^{n-2},\end{aligned}}$$

wo das Vorzeichen im zweiten Summanden von der Orientierung der Berandung abhängt. In (31. 7) bedeutet $d\,O$ das Element des Integrals (2. 7), w^1, w^2, ... w^{n-2} die Parameter des Randes. Von der n-reihigen Determinante im Integranden des Randintegrals ist die i-te Zeile angeschrieben.

Aus (31. 7) folgt:

In den regulären Cartanschen Räumen sind die Extremalhyperflächen des Va-

riationsproblems des Oberflächenintegrals (2. 7) *die Minimalhyperflächen, d. h. die Hyperflächen, deren mittlere Krümmung Null ist.*[1]

§ 7. Die Koschmiedersche Normalform der zweiten Variation des Oberflächenintegrals.

32. *Normalform der Variation* $\delta^2 L$. Im Folgenden soll eine Normalform der zweiten Variation der Grundfunktion L sowie des Oberflächenintegrals (2. 7) hergestellt werden, wenn über einen Bereich einer *Extremalhyperfläche* integriert wird, dessen $(n-2)$-dimensionale Berandung fest bleibt. Wir setzen also im Folgenden durchwegs

$$(n-1)H = a^{\varrho}_{\varrho} = 0 \tag{32. 1}$$

voraus. Wir können uns dann auf Variation in der Richtung der Hyperflächennormalen beschränken. Es soll also

$$\delta x^i = V l^i \tag{32. 2}$$

sein, wo V am Rande des betrachteten Bereiches verschwindet.

Zunächst vereinfachen wir den Ausdruck für die zweite Variation der Grundfunktion:

$$\delta^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}\,\delta x^i \delta x^j + 2\,\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial p_h}\,\delta x^i \delta p_h + \frac{\partial^2 L}{\partial p_h \partial p_k}\,\delta p_h \delta p_k + \\ + \frac{\partial L}{\partial x^i}\,\delta^2 x^i + \frac{\partial L}{\partial p_h}\,\delta^2 p_h. \tag{32. 3}$$

Aus (31. 1) ergibt sich

$$\delta^2 p_h = \frac{\partial^2 p_h}{\partial x^i_{\varrho} \partial x^j_{\sigma}}\,\frac{\partial \delta x^i}{\partial v^{\varrho}}\,\frac{\partial \delta x^j}{\partial v^{\sigma}} + \frac{\partial p_h}{\partial x^i_{\varrho}}\,\frac{\partial \delta^2 x^i}{\partial v^{\varrho}},$$

so dass nach Durchführung einer partiellen Integration

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}\,\delta^2 x^i + \frac{\partial L}{\partial p_h}\,\delta^2 p_h = \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial v^{\varrho}}\left(\frac{\partial L}{\partial p_h}\,\frac{\partial p_h}{\partial x^i_{\varrho}}\right)\right)\delta^2 x^i + \\ + \frac{\partial}{\partial v^{\varrho}}\left(\frac{\partial L}{\partial p_h}\,\frac{\partial p_h}{\partial x^i_{\varrho}}\,\delta^2 x^i\right) + \frac{\partial L}{\partial p_h}\,\frac{\partial^2 p_h}{\partial x^i_{\varrho} \partial x^j_{\sigma}}\,\frac{\partial \delta x^i}{\partial v^{\varrho}}\,\frac{\partial \delta x^j}{\partial v^{\sigma}}$$

[1] E. Cartan, [3], S. 26 hat gezeigt, dass dieser Satz auch für die singulären Cartanschen Räume richtig bleibt.

wird. Wegen (31. 4) und (32. 1) verschwindet das erste Glied rechts. Vereinfacht man das zweite mittels (31. 2) und setzt in (32. 3) ein, so ergibt sich

$$(32.\ 4)\quad \delta^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}\,\delta x^i \delta x^j + 2\,\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial p_h}\,\delta x^i\,\frac{\partial p_h}{\partial x^j_\varrho}\,\frac{\partial \delta x^j}{\partial v^\varrho} + $$
$$+ \left(\frac{\partial^2 L}{\partial p_h \partial p_k}\,\frac{\partial p_h}{\partial x^i_\varrho}\,\frac{\partial p_k}{\partial x^j_\sigma} + \frac{\partial L}{\partial p_h}\,\frac{\partial^2 p_h}{\partial x^i_\varrho \partial x^j_\sigma}\right)\frac{\partial \delta x^i}{\partial v^\varrho}\,\frac{\partial \delta x^j}{\partial v^\sigma} + \frac{\partial}{\partial v^\varrho}\,(L\,\delta^2 x^\varrho).$$

Von hier aus führt eine sehr umständliche Rechnung, deren Gang wir im Anhang angeben, zu der gesuchten *Normalform von* $\delta^2 L$. Man erhält

$$(32.\ 5)\quad \boxed{\begin{aligned}&\delta^2 L = L\Big\{g^{\varrho\sigma}\,\frac{\partial V}{\partial v^\varrho}\,\frac{\partial V}{\partial v^\sigma} - V^2\,[(A^\mu a^\varrho_\mu)_{(\varrho)} + a^\varrho_\mu A^\mu B^\sigma_{\sigma\varrho} - a^\varrho_\mu a_{\varrho\nu} A^\mu A^\nu - \\ &- (n-1)(n-2)K + R_o{}^\varrho{}_{o\varrho} - P_o{}^\varrho{}_{o\sigma} a^\sigma_\varrho]\Big\} + \frac{\partial}{\partial v^\varrho}\big\{L[\delta^2 x^\varrho + V^2(\Gamma^{*o\varrho o} + A^\mu a^\varrho_\mu)]\big\},\end{aligned}}$$

wo K durch (25. 14) erklärt ist. $B^\varrho_{\sigma\tau}$ ist der Torsionstensor (26. 6) der Hyperfläche, R_{ikhj}, P_{ikhj} der erste und zweite Krümmungstensor des Raumes. (ϱ) bedeutet kovariante Ableitung im Sinne der inneren Geometrie der Hyperfläche (Nr. 26).

33. *Normalform der zweiten Variation des Oberflächenintegrals.* Wir bilden nun die zweite Variation des Oberflächenintegrals (2. 7) erstreckt über einen Bereich einer Extremalhyperfläche bei fester $(n-2)$-dimensionaler Berandung. Dann fallen die Bestandteile von $\delta^2 L$, die sonst Randintegrale ergeben würden, weg, und es bleibt wegen (32. 5) und (2. 7)

$$(33.\ 1)\quad \boxed{\delta^2 O = \int_{(n-1)} \delta^2 L\, d v^1\, d v^2 \cdots d v^{n-1} = \int_{(n-1)} \Big(g^{\varrho\sigma}\,\frac{\partial V}{\partial v^\varrho}\,\frac{\partial V}{\partial v^\sigma} - U^*_o\, V^2\Big)\, d\, O\,,}$$

mit

$$(33.\ 2)\quad \boxed{U^*_o = (A^\mu a^\varrho_\mu)_{(\varrho)} + a^\varrho_\mu A^\mu B^\sigma_{\sigma\varrho} - a^\varrho_\mu a_{\varrho\nu} A^\mu A^\nu - (n-1)(n-2)K + R_o{}^\varrho{}_{o\varrho} - a^\sigma_\varrho P_o{}^\varrho{}_{o\sigma}.}$$

Man kann U^*_o mit Hilfe der Gleichungen (28. 7), (28. 8) (mit $H=0$) auch noch auf andere Gestalten bringen, die wir nicht anschreiben.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass die Normalform (33. 1) mit der von Herrn Koschmieder ([3]) angegebenen identisch ist. Bei Koschmieder ist die Dimensionenzahl des Raumes $n+1$. Für den n-dimensionalen Raum ist also in seinen Formeln überall n durch $n-1$ zu ersetzen. Der Zusammenhang zwischen seinen und unseren Bezeichnungen wird durch folgende Tabelle gegeben:[1]

Koschmieder	I	F	Θ_i	$\Phi_{\alpha\beta}$	Φ	v	V	u_α	du	Fdu
Verfasser	O	L	p_i	$\frac{g}{L}\, g^{\alpha\beta}$	$\frac{g^{n-1}}{L^{n+1}}$	$p_i\,\delta x^i$	V	v^α	$dv^1\,dv^2\cdots dv^{n-1}$	$d\,O$

Man bestätigt jetzt leicht, dass die Koschmiedersche Normalform

$$\delta^2 O = \int\limits_{(n-1)} \left(F^{-\frac{2}{n-1}}\, \Phi^{-\frac{1}{n-1}}\, \Phi_{\alpha\beta}\, \frac{\partial V}{\partial v^\alpha}\,\frac{\partial V}{\partial v^\beta} - U_o^*\, V^2\right) F\,d\,u \,^2 \tag{33.3}$$

mit (33.1) übereinstimmt. (33.2) stellt also die *Invariante U_o^* von Koschmieder* durch den Torsionstensor und die Krümmungstensoren des Cartanschen Raumes und durch die in Nr. 25 f. erklärten Grössen für die Hyperfläche dar. Besonders einfach wird diese Darstellung für die Räume, in denen der Vektor (A^h) Null ist. Man erhält hier wegen (17.7) und $R_{o}{}^{\varrho}{}_{o\varrho} = R_{o}{}^{r}{}_{or}$

$$\boxed{U_o^* = R_{o}{}^{r}{}_{or} - (n-1)(n-2)K.} \qquad (A^h = 0). \tag{33.4}$$

34. *Die in die Normalform eingehenden Tensoren.* Wir geben schliesslich noch an, welche geometrische Bedeutung die in (33.2) eingehenden Tensoren

$$a^\varrho_\mu A^\mu \text{ und } R_{o}{}^{\sigma}{}_{o\varrho} - a^\mu_\varrho P_{o}{}^{\sigma}{}_{o\mu}$$

haben.

[1] Die ersten drei und die letzten drei Spalten der Tabelle sind aus L. Koschmieder, [3], Formeln (4), (14), (15), S. 143, 145 und (40), S. 469 unmittelbar zu bestätigen. Weiter ist nach (63), S. 472

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial p_h\, \partial p_k}\, x_h^\alpha x_k^\beta = \frac{g}{L}\,(g^{hk} - l^h l^k)\, x_h^\alpha x_k^\beta = \frac{g}{L}\, g^{\alpha\beta},$$

und nach (60), S. 471

$$\Phi = \det.(\Phi_{\alpha\beta}) = \frac{g^{n-1}}{L^{n-1}}\,\frac{1}{g} = \frac{g^{n-1}}{L^{n+1}}.$$

Endlich ist nach (42), S. 470

$$v = p_i\,\delta x^i$$

und nach (115), S. 480

$$V = L^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}}\,\Phi^{\frac{1}{2(n-1)}}\, v = \frac{\sqrt{g}}{L}\, p_i\,\delta x^i = l_i\,\delta x^i.$$

[2] L. Koschmieder, [3], S. 482, Formel für $\delta^2 I^*$ (Der Stern bedeutet, dass das Integral über eine Extremalhyperfläche erstreckt wird).

Es seien

$$E_0:(x, l), \qquad E_1:(x + d\,x,\, l + d\,l), \qquad E_2:(x + \delta\,x,\, l + \delta\,l)$$

drei Hyperflächenelemente, von denen die ersten beiden der Hyperfläche angehören, während E_2 aus E_0 durch Parallelübertragung nach einem Punkte $(x^i + \delta\,x^i)$ der Hyperflächennormalen im Punkte (x) entsteht. Es soll also

$$\left\{\begin{aligned} &d\,x^i = x^i_\varrho\,d\,v^\varrho, && \omega_i(d) = x^\mu_i\,\omega_u(d) = -\,x^\mu_i\,a_{\mu\varrho}\,d\,v^\varrho, \\ &\delta\,x^i = \delta\,x^o\,l^i, && \omega_i(\delta) = 0 \end{aligned}\right. \tag{34. 1}$$

sein.

Dann wird

$$\left\{\begin{aligned} &[d\,x^h\;d\,x^k] = \delta\,x^o\,(x^h_\varrho\,l^k - x^k_\varrho\,l^h)\,d\,v^\varrho, \\ &[d\,x^h\;\omega_k] = -\,\delta\,x^o\,l^h\;\omega_k(d) = \delta\,x^o\,l^h\,x^\mu_k\,a_{\mu\varrho}\,d\,v^\varrho, \\ &[\omega_h\;\omega_k] = 0. \end{aligned}\right. \tag{34. 2}$$

Den drei Elementen E_0, E_1, E_2 entspricht wegen (10. 5), (5. 6), (5. 8) die *Torsion*

$$\Omega^i = A^{ik}_h\,[d\,x^h\,\omega_k] = \delta\,x^o\,A^\mu\,a_{\mu\varrho}\,d\,v^\varrho\,l^i \tag{34. 3}$$

und nach (11. 3) die *Krümmung*

$$\Omega^i_r = -\,\delta\,x^o\,(R_{r\;o\varrho}^{\;i} - a^\mu_\varrho\,P_{r\;o\mu}^{\;i})\,d\,v^\varrho. \tag{34. 4}$$

Bedeuten D, Δ die absoluten Differentiale, die den Zuwüchsen d, bezw. δ entsprechen, so ist ferner

$$(\Delta\,D - D\,\Delta)\,l^i = \Omega^i_o, \tag{34. 5}$$

wo wegen der schiefen Symmetrie der R_{rjhk}, P_{rjhk} in den beiden ersten Zeigern Ω^i_o ein Hyperflächenvektor mit den Hyperflächenkomponenten

$$\Omega^\sigma_o = -\,\delta\,x^o\,(R_{o\;o\varrho}^{\;\sigma} - a^\mu_\varrho\,P_{o\;o\mu}^{\;\sigma})\,d\,v^\varrho \tag{34. 6}$$

ist.

Anhang: Herstellung der Normalform von $\delta^2 L$.

1. Die Rechnung, die von (32. 4) zur Normalform (32. 5) führt, zielt auf die Einführung der Torsions- und Krümmungstensoren des Raumes, sowie der Grundtensoren der Hyperfläche ab. Daher werden soweit als möglich die Ab-

leitungen der Grundfunktion durch die $\Gamma^{*k}_{i\ h}$ ausgedrückt und alle auftretenden Glieder in Komponenten in der Hyperfläche und senkrecht dazu zerlegt. Dabei wird besonders Nr. 23 verwendet und die Symmetrie der $\Gamma^{*i}_{k\ h}$ in den unteren Zeigern benutzt.

Umformung des ersten Summanden in (32. 4). Nach (8. 13) und (23. 19) ist

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial L}{\partial x^i} = L\, \Gamma^{*\varrho}_{\varrho\ i}.$$

Ableitung nach x^j und nochmalige Benutzung von (a) ergibt

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} = L \left(\Gamma^{*\varrho}_{\varrho\ i}\, \Gamma^{*\sigma}_{\sigma\ j} + \frac{\partial \Gamma^{*\varrho}_{\varrho\ i}}{\partial x^j} \right),$$

also wegen (32. 2)

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}\, \delta x^i\, \delta x^j = L\, V^2 \left(\Gamma^{*\varrho}_{\varrho\ o}\, \Gamma^{*\sigma}_{\sigma\ o} + l^i\, l^j\, \frac{\partial \Gamma^{*\varrho}_{\varrho\ i}}{\partial x^j} \right).$$

Nun ist wegen (23. 15)

$$\frac{\partial \Gamma^{*\varrho}_{\varrho\ i}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ (\delta^p_r - l^p\, l_r)\, \Gamma^{*r}_{p\ i} \right\} = x^p_\varrho\, x^\varrho_r\, \frac{\partial \Gamma^{*r}_{p\ i}}{\partial x^j} - \Gamma^{*\ ro}_{i}\, \frac{\partial l_r}{\partial x^j} - \Gamma^{*}_{poi}\, \frac{\partial l^p}{\partial x^j}.$$

Bei Beachtung von (8. 6), (8. 7), (23.18), (23. 19) ergibt sich weiter

$$\text{(c)} \qquad l^i\, l^j\, \frac{\partial \Gamma^{*\varrho}_{\varrho\ i}}{\partial x^j} = l^i\, l^j\, x^p_\varrho\, x^\varrho_r\, \frac{\partial \Gamma^{*r}_{p\ i}}{\partial x^j} + (\Gamma^{*\varrho o o} + \Gamma^{*o\varrho o})\, \Gamma^{*}_{\varrho o o},$$

wo $\Gamma^{*\varrho o o} = g^{\varrho\sigma}\, \Gamma^{*}_{\sigma o o}$ ist. Nach Veränderung einiger Zeiger wird schliesslich

$$\text{(I} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}\, \delta x^i\, \delta x^j = L\, V^2 \left\{ l^r\, l^s\, x^t_\varrho\, x^\varrho_i\, \frac{\partial \Gamma^{*i}_{t\ r}}{\partial x^s} + \Gamma^{*\ \varrho o}_{\varrho}\, \Gamma^{*\ \sigma o}_{\sigma} + (\Gamma^{*\varrho o o} + \Gamma^{*o\varrho o})\, \Gamma^{*}_{\varrho o o} \right\}.$$

Umformung des zweiten Summanden in (32. 4). Zunächst folgt aus (23. 1), (8. 7), (8. 11)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial p_h} = \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}\, l^h) = \sqrt{g} \left\{ (\Gamma^{*\varrho}_{\varrho\ i} + 2\, \Gamma^{*}_{ooi})\, l^h - \Gamma^{*\ ho}_{i} - \Gamma^{*\ oh}_{i} \right\},$$

und hieraus wegen (32. 2) und (23. 19)

(d) $$\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial p_h} \delta x^i = V\sqrt{g}\left\{-(\Gamma^{*\sigma o o} + \Gamma^{*o\sigma o}) x^h_\sigma + \Gamma^{*\sigma o}_\sigma l^h\right\}.$$

Weiter ergibt Ableitung von (32. 2) wegen (25. 7), (23. 3), (23. 10), (23. 19)

(e) $$\frac{\partial \delta x^j}{\partial v^\varrho} = \frac{\partial (V l^j)}{\partial v^\varrho} = -V(\Gamma^{*\sigma o}_\varrho + a^\sigma_\varrho) x^j_\sigma + \left[\frac{\partial V}{\partial v^\varrho} + V(A^\mu a_{\mu\varrho} - \Gamma^*_{oo\varrho})\right] l^j.$$

Wegen (30. 3), (23. 3), (23. 8), (23. 10), (32. 1) erhält man ferner

(f) $$\frac{\partial p_h}{\partial x^j_\varrho} \frac{\partial \delta x^j}{\partial v^\varrho} = -\frac{L}{\sqrt{g}}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial v^\varrho} + V(A^\mu a_{\mu\varrho} - \Gamma^*_{oo\varrho})\right) x^\varrho_h + V\Gamma^{*\varrho o}_\varrho l_h\right\},$$

und durch Multiplikation von (d) und (f) schliesslich

(2) $$2\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial p_h} \delta x^i \frac{\partial p_h}{\partial x^j_\varrho} \frac{\partial \delta x^j}{\partial v^\varrho} = L\left\{\frac{\partial (V^2)}{\partial v^\varrho}(\Gamma^{*\varrho o o} + \Gamma^{*o\varrho o}) + V^2 [2 a_{\varrho\mu} A^\mu (\Gamma^{*\varrho o o} + \right.$$
$$\left. + \Gamma^{*o\varrho o}) - 2\Gamma^{*\varrho o}_\varrho \Gamma^{*\sigma o}_\sigma - 2(\Gamma^{*\varrho o o} + \Gamma^{*o\varrho o})\Gamma^*_{\varrho o o}]\right\}.$$

Umformung der übrigen Summanden in (32. 4). Nach (4. 1) und (23. 16) ist

(g) $$\frac{\partial^2 L}{\partial p_h \partial p_k} = \frac{g}{L}(g^{hk} - l^h l^k) = \frac{g}{L} g^{\alpha\beta} x^h_\alpha x^k_\beta.$$

Andererseits folgt aus (f)

$$\frac{\partial p_h}{\partial x^i_\varrho} \frac{\partial \delta x^i}{\partial v^\varrho} \frac{\partial p_k}{\partial x^j_\sigma} \frac{\partial \delta x^j}{\partial v^\sigma} = \frac{L^2}{g}\left\{\frac{\partial V}{\partial v^\varrho} + V(A^\mu a_{\mu\varrho} - \Gamma^*_{oo\varrho})\right\}\left\{\frac{\partial V}{\partial v^\sigma} + \right.$$
$$\left. V(A^\nu a_{\nu\sigma} - \Gamma^*_{oo\sigma})\right\} x^\varrho_h x^\sigma_k + \cdots,$$

wo die nicht angeschriebenen Glieder mindestens einen Faktor l^h oder l^k haben. Also ergibt sich

(3) $$\frac{\partial^2 L}{\partial p_h \partial p_k} \frac{\partial p_h}{\partial x^i_\varrho} \frac{\partial p_k}{\partial x^j_\sigma} \frac{\partial \delta x^i}{\delta v^\varrho} \frac{\partial \delta x^j}{\partial v^\sigma} = L\left\{g^{\varrho\sigma}\frac{\partial V}{\partial v^\varrho}\frac{\partial V}{\partial v^\sigma} + \frac{\partial (V^2)}{\partial v^\varrho}(A^\mu a^\varrho_\mu - \Gamma^{*\varrho o o}) + \right.$$
$$\left. + V^2 (a^\varrho_\mu A^\mu a_{\nu\varrho} A^\nu - 2A^\mu a_{\mu\varrho}\Gamma^{*\varrho o o} + \Gamma^{*\varrho o o}\Gamma^*_{\varrho o o})\right\}.$$

Endlich ist wegen (23. 1) und (30. 5)

(h) $$\frac{\partial L}{\partial p_h} \frac{\partial^2 p_h}{\partial x^i_\varrho \partial x^j_\sigma} = L(x^\varrho_i x^\sigma_j - x^\sigma_i x^\varrho_j)$$

und wegen (e), (wo wieder nur die mit x^j_σ multiplizierten Glieder in Betracht kommen), (32. 1), (25. 14)

$$(4)\qquad \frac{\partial L}{\partial p_h}\frac{\partial^2 p_h}{\partial x^i_\varrho \partial x^j_\sigma}\frac{\partial \delta x^i}{\partial v^\varrho}\frac{\partial \delta x^j}{\partial v^\sigma} = L\, V^2\big((n-1)(n-2)K - 2\, a^\sigma_\varrho \Gamma^{*\varrho o}_\sigma + \\ + \Gamma^{*\varrho o}_\varrho \Gamma^{*\sigma o}_\sigma - \Gamma^{*\varrho o}_\sigma \Gamma^{*\sigma o}_\varrho\big).$$

Einsetzen von (1) bis (4) in (32. 4) ergibt schliesslich

$$(5)\qquad \delta^2 L = L\Big\{g^{\varrho\sigma}\frac{\partial V}{\partial v^\varrho}\frac{\partial V}{\partial v^\sigma} + \frac{\partial (V^2)}{\partial v^\varrho}(A^\mu a^\varrho_\mu + \Gamma^{*o\varrho o}) + V^2 (l^r l^s x^t_\varrho x^\varrho_i \frac{\partial \Gamma^{*i}_{t\,r}}{\partial x^s} + \\ + a^\varrho_\mu a_{\varrho\nu} A^\mu A^\nu + (n-1)(n-2)K + 2\, a_{\varrho\mu} A^\mu \Gamma^{*o\varrho o} - 2\, a^\sigma_\varrho \Gamma^{*\varrho o}_\sigma - \Gamma^{*o\varrho o}\Gamma^*_{\varrho oo} - \\ - \Gamma^{*\varrho o}_\sigma \Gamma^{*\sigma o}_\varrho)\Big\} + \frac{\partial}{\partial v^\varrho}(L\,\delta^2 x^\varrho).$$

2. Bevor wir weitergehen, schalten wir die Berechnung zweier Grössen ein, die im Folgenden auftreten. Zunächst ergibt sich aus (12. 10), (5. 6), (23. 10), (23. 20)

$$R_{o\;o\varrho}^{\;\varrho} = \overline{R}_{o\;o\varrho}^{\;\varrho} = l^r l^s x^\varrho_i x^t_\varrho \overline{R}_{r\;st}^{\;i} = l^r l^s x^\varrho_i x^t_\varrho \Bigg(\frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,s}}{\partial x^t} + \Gamma^{*i}_{r\,s}\|^m \Gamma^*_{mot} - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,t}}{\partial x^s} - \\ - \Gamma^{*i}_{r\,t}\|^m \Gamma^*_{mos}\Bigg) + \Gamma^*_{ooo}\Gamma^{*\varrho o}_\varrho + \Gamma^{*o\sigma o}\Gamma^{*\varrho}_{\sigma\;\varrho} - \Gamma^*_{oo\varrho}\Gamma^{*o\varrho o} - \Gamma^{*\sigma o}_\varrho \Gamma^{*\varrho o}_\sigma.$$

Wegen (23. 15) und (15. 5) ist aber

$$\Gamma^{*i}_{r\,t}\|^m x^\varrho_i x^t_\varrho = \Gamma^{*i}_{r\,t}\|^m (\delta^t_i - l_i l^t) = 0,$$

also

$$(6)\qquad R_{o\;o\varrho}^{\;\varrho} = l^r l^s x^\varrho_i x^t_\varrho \Bigg(\frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,s}}{\partial x^t} + \Gamma^{*i}_{r\,s}\|^m \Gamma^*_{mot} - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,t}}{\partial x^s}\Bigg) + \Gamma^{*\varrho o}_\varrho \Gamma^*_{ooo} + \\ + \Gamma^{*\varrho}_{\varrho\;\sigma}\Gamma^{*o\sigma o} - \Gamma^*_{\varrho oo}\Gamma^{*o\varrho o} - \Gamma^{*\sigma o}_\varrho \Gamma^{*\varrho o}_\sigma.$$

Ferner folgt aus (17. 4), (23. 10)

$$(7)\qquad P_{o\;o}^{\;\varrho\;\sigma} = x^\varrho_i x^\sigma_m l^h P_{o\;h}^{\;i\;m} = x^\varrho_i x^\sigma_m l^r l^s \Gamma^{*i}_{r\,s}\|^m.$$

3. Jetzt vereinfachen wir $\delta^2 L$ weiter, indem wir in (5) das Glied mit $\dfrac{\partial (V^2)}{\partial v^\varrho}$

durch Anwendung der Regel für die Ableitung eines Produktes beseitigen. Es ergibt sich zunächst, wenn (26. 10) benutzt wird

$$\text{(A)}\quad L\frac{\partial (V^2)}{\partial v^\varrho}(A^\mu a^\varrho_\mu + \Gamma^{*o\varrho o}) = L\,V^2\left(-\frac{\partial (A^\mu a^\varrho_\mu)}{\partial v^\varrho} - A^\mu a^\varrho_\mu \Gamma^\lambda_{\lambda\varrho} - \frac{\partial \Gamma^{*o\varrho o}}{\partial v^\varrho} - \Gamma^{*o\varrho o}\Gamma^\lambda_{\lambda\varrho}\right) + \frac{\partial}{\partial v^\varrho}\{L\,V^2(\Gamma^{*o\varrho o} + A^\mu a^\varrho_\mu)\}.$$

Hier sind die einzelnen Glieder rechts umzuformen. In das erste führen wir an Stelle der gewöhnlichen die kovariante Ableitung (26. 17) ein und erhalten wegen (26. 6)

$$\text{(B)}\qquad -\frac{\partial (A^\mu a^\varrho_\mu)}{\partial v^\varrho} - A^\mu a^\varrho_\mu \Gamma^\lambda_{\lambda\varrho} = -(A^\mu a^\varrho_\mu)_{(\varrho)} - A^\mu a^\sigma_\mu B^\varrho_{\varrho\sigma}.$$

Weiter ist

$$\text{(C)}\quad \frac{\partial \Gamma^{*o\varrho o}}{\partial v^\varrho} + \Gamma^{*o\varrho o}\Gamma^\lambda_{\lambda\varrho} = \frac{\partial}{\partial v^\varrho}(l^r l^s x^\varrho_i \Gamma^{*i}_{r\,s}) + \Gamma^{*o\varrho o}\Gamma^\lambda_{\lambda\varrho} =$$

$$= l^r l^s x^\varrho_i \frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,s}}{\partial v^\varrho} + 2\frac{\partial l^r}{\partial v^\varrho}\Gamma^{*\varrho o}_r + \left(\frac{\partial x^\varrho_i}{\partial v^\varrho}\Gamma^{*oio} + \Gamma^{*o\varrho o}\Gamma^\lambda_{\lambda\varrho}\right).$$

Hier erhält man für $\dfrac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,s}}{\partial v^\varrho}$ mittels (30. 3), (25.6), (23. 15) bei Beachtung der Homogeneität nullter Ordnung von $\dfrac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,s}}{\partial p_h}$ in den p_h

$$\frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,s}}{\partial v^\varrho} = \frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,s}}{\partial x^t}x^t_\varrho + \frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,s}}{\partial p_h}\frac{\partial p_h}{\partial x^k_\sigma}\frac{\partial^2 x^k}{\partial v^\varrho \partial v^\sigma} = x^t_\varrho\left(\frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,s}}{\partial x^t} + \Gamma^{*i}_{r\,s}\|^m \Gamma^*_{mot}\right) - \Gamma^{*i}_{r\,s}\|^m x^\sigma_m a_{\varrho\sigma},$$

und daher wegen (7)

$$\text{(D)}\qquad l^r l^s x^\varrho_i \frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,s}}{\partial v^\varrho} = l^r l^s x^\varrho_i x^t_\varrho\left(\frac{\partial \Gamma^{*i}_{r\,s}}{\partial x^t} + \Gamma^{*i}_{r\,s}\|^m \Gamma^*_{mot}\right) - P_o{}^\varrho{}_o{}^\sigma a_{\varrho\sigma}.$$

Weiter ist wegen (25. 7), bezw. (25. 10), (23. 21), (32. 1)

$$\text{(E)}\qquad 2\frac{\partial l^r}{\partial v^\varrho}\Gamma^{*\varrho o}_r = 2A^\mu a_{\mu\varrho}\Gamma^{*o\varrho o} - 2a^\sigma_\varrho \Gamma^{*\varrho o}_\sigma - 2\Gamma^*_{oo\varrho}\Gamma^{*o\varrho o} - 2\Gamma^{*\varrho o}_\sigma \Gamma^{*\sigma o}_\varrho,$$

$$\text{(F)}\qquad \frac{\partial x^\varrho_i}{\partial v^\varrho}\Gamma^{*oio} + \Gamma^{*o\varrho o}\Gamma^\lambda_{\lambda\varrho} = \Gamma^{*\varrho o}_\varrho \Gamma^*_{ooo} + \Gamma^{*\mu}_{\mu\,\varrho}\Gamma^{*o\varrho o}.$$

Durch Einsetzen aus (D), (E), (F) in (C), und sodann aus (B), (C) in (A) erhält man

$$
\begin{aligned}
(8)\quad L\frac{\partial(V^2)}{\partial v^\varrho}(A^\mu a^\varrho_\mu + \Gamma^{*o\varrho o}) = L\,V^2 \Big\{ &-(A^\mu a^\varrho_\mu)_{(\varrho)} - A^\mu a^\sigma_\mu B_{\varrho}{}^{\varrho}{}_{\sigma} - l^r l^s x^\varrho_i x^t_\varrho \Bigg(\frac{\partial \Gamma^{*}{}_{r}{}^{i}{}_{s}}{\partial x^t} + \\
&+ \Gamma^{*}{}_{r}{}^{i}{}_{s}\Big\|^m \Gamma^{*}_{mot}\Bigg) + P_{o}{}^{\varrho}{}_{o\sigma} a^\sigma_\varrho - 2\,A^\mu a_{\mu\varrho}\Gamma^{*o\varrho o} + 2\,a^\sigma_\varrho \Gamma^{*}_{\sigma}{}^{\varrho o} + 2\,\Gamma^{*}_{oo\varrho}\Gamma^{*o\varrho o} + \\
&+ 2\,\Gamma^{*}_{\sigma}{}^{\varrho o}\Gamma^{*}_{\varrho}{}^{\sigma o} - \Gamma^{*}_{\varrho}{}^{\varrho o}\Gamma^{*}_{ooo} - \Gamma^{*}_{\varrho}{}^{\varrho}{}_{\sigma}\Gamma^{*o\sigma o}\Big\} + \frac{\partial}{\partial v^\varrho}\{L\,V^2(\Gamma^{*o\varrho o} + A^\mu a^\varrho_\mu)\}.
\end{aligned}
$$

Geht man endlich mit (8) in (5) hinein, und beachtet (6), so ergibt sich die Normalform (32. 5) von $\delta^2 L$.

Prag, am 27. September 1938.

Schriftenverzeichnis.

L. Berwald, [1] Über Finslersche und verwandte Räume. C. R., 2. Congr. Math. des Pays Slaves. Prag 1935, 1—16.

E. Cartan, [1] Leçons sur les invariants intégraux. Paris, Hermann et Cie., 1922. X + 210 Seiten.

——, [2] Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Paris, Gauthier-Villars, 1928. VI + 273 Seiten.

——, [3] Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire. Actualités scientifiques et industrielles 72. Paris, Hermann et Cie, 1933. 47 Seiten.

——, [4] Les espaces de Finsler. Actualités scientifiques et industrielles 79. Paris, Hermann et Cie, 1934. 42 Seiten.

Th. De Donder, [1] Sur les invariants du calcul des variations. C. R. Acad. Sci. Paris 155 (1912), 577—580, 1003—1005.

E. Kähler, [1] Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. Hamburger math. Einzelschriften 16. Leipzig und Berlin, Teubner 1934. 78 Seiten.

L. Koschmieder, [1] Über zwei bei der Variation der Doppelintegrale auftretende Invarianten. Math. Ann. 94 (1925), 252—261.

——, [2] Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale. Math. Zeitschr. 24 (1925), 181—190.

——, [3] Invarianten der Integranden vielfacher Integrale in der Variationsrechnung I., II. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam 31 (1927), 140—150, 469—484.

J. RADON, [1] Über einige Fragen betreffend die Theorie der Maxima und Minima mehrfacher Integrale. Monatsh. f. Math. u. Phys. 22 (1911), 53—63.

J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES, [1] Über die Festlegung von allgemeinen Massbestimmungen und Übertragungen in Bezug auf ko- und kontravariante Vektordichten. Monatsh. f. Math. u. Phys. 43 (1936), 161—176.

O. VARGA, [1] Beiträge zur Theorie der Finslerschen Räume und der affinzusammenhängenden Räume von Linienelementen. Lotos, Prag 84 (1936), 1—4.

G. VIVANTI, [1] Sull' equazione di Eulero per gli integrali multipli. Rend. Circ. Mat. Palermo 33 (1912), 268—274.

J. M. WEGENER, [1] Hyperflächen in Finslerschen Räumen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen. Monatsh. f. Math. u. Phys. 44 (1936), 115—130.