

# DIE GRUPPE DER ABBILDUNGSKLASSEN.

(Das arithmetische Feld auf Flächen.)

VON

M. DEHN

in FRANKFURT a. M.

## Inhaltsangabe.

	Seite.
Einleitung . . . . .	137
§ 1. Allgemeines über Abbildungen von Flächen auf sich selbst . . . . .	139
a) Die Gruppe der Abbildungen und die Gruppe der Abbildungsklassen . . . . .	139
b) Verschiedene Arten von Abbildungen . . . . .	139
c) Homotopie mit festem und beweglichem Rand . . . . .	140
d) Indikatrix . . . . .	140
§ 2. Die Abbildungen der Ein-, Zwei- und Dreilochkugel auf sich . . . . .	141
a) Einlochkugel . . . . .	141
b) Zweilochkugel . . . . .	141
c) Dreilochkugel mit beweglichen und festen Rändern . . . . .	143
§ 3. Spezielle Abbildungen der Vierlochkugel auf sich . . . . .	146
§ 4. Abbildungen des Ringes und des Einlochrings auf sich . . . . .	148
a) Ring . . . . .	148
b) Einlochring . . . . .	149
§ 5. Das arithmetische Feld auf Zwei- und Dreilochkugel sowie auf dem Ring	149
a) Allgemeines . . . . .	149
b) Zweilochkugel . . . . .	150
c) Ring. Durchlaufungssinn der Kurven . . . . .	152
d) Transformationen des arithmetischen Feldes auf dem Ring durch die Abbildungsklassen. Erzeugung und Relationen . . . . .	154
e) Dreilochkugel. Arithmetisches Feld. Invarianz gegenüber homotopen Transformationen . . . . .	157

	Seite.
§ 6. Das arithmetische Feld oder die Kurvensysteme auf dem Einlochring . . .	163
a) Einführung des Feldes . . . . .	163
b) Transformation durch Abbildung. Beispiele . . . . .	165
c) Einlochring mit festem Rand. Zusammenhang mit der Kleeblattschlinge	171
§ 7. Arithmetisches Feld auf der Vierlochkugel . . . . .	172
a) System geschlossener Kurven auf der Vierlochkugel . . . . .	172
b) Abbildungen der Vierlochkugel und die Wirkung auf das arithmetische Feld . . . . .	175
c) Ableitung der Invarianten eines Kurvensystems aus der arithmetischen Darstellung . . . . .	177
d) Durchlaufungssinn. Beispiele . . . . .	177
e) Geometrische Darstellung der Symbole. Ausblick auf höhere Fälle . . .	179
f) Kurvensysteme auf der Vierlochkugel mit Endpunkten auf einem Rand	182
1) Normalform . . . . .	182
2) Arithmetisches Feld . . . . .	184
g) Vierlochkugel mit festen Rändern . . . . .	186
1) Ableitung einer Relation . . . . .	186
2) Anwendung auf den Zweilochring mit festen Rändern . . . . .	188
3) Schraubungen längs des Randes einrandiger Flächen . . . . .	188
4) Schraubungen längs zerstückelnder Kurven auf geschlossenen oder einrandigen Flächen . . . . .	189
§ 8. Fünflochkugel . . . . .	189
a) Koordinatensysteme . . . . .	189
b) Darstellung eines Systems geschlossener Kurven . . . . .	190
c) Reduktion der Symbole. Erzeugung der Abbildungen . . . . .	191
§ 9. Erzeugung der Abbildungsklassen für die Kugel mit $n$ Löchern . . . . .	193
1)–5) Hilfssätze . . . . .	193
6) Erzeugung mit Hilfe der vollständigen Induktion . . . . .	198
7) Die Fünflochkugel als Beispiel . . . . .	199
8) Direkte Angaben der Erzeugenden auf Grund einer zyklischen An- ordnung der Ränder. Anzahl der Erzeugenden . . . . .	200
§ 10. Erzeugung der Abbildungsklassen für jede orientierbare Fläche . . . . .	200
1) und 2) Hilfssätze . . . . .	200
3) Erzeugung mit Hilfe der vollständigen Induktion . . . . .	201
4) Doppelring und dreifacher Ring als Beispiele . . . . .	203
5) Direkte Angabe der Erzeugenden auf Grund der Normaldarstellung der Flächen. Anzahl der Erzeugenden . . . . .	205
6) Arithmetisches Feld im allgemeinsten Fall . . . . .	206

### Einleitung.

In der kombinatorischen Topologie werden topologische Begriffe durch arithmetische Begriffe dargestellt. Prinzipiell sind also alle Probleme der kombinatorischen Topologie auf arithmetische Probleme zurückgeführt. Aber diese Zurückführung ist für die Bewältigung der Probleme in den meisten Fällen von geringem Nutzen. Denn die zugeordneten arithmetischen Probleme haben wenig Beziehung zu bekannten Resultaten oder Methoden. Dies trifft besonders zu für alle Probleme, in denen die homotopen Transformationen von wesentlicher Bedeutung sind, oder, wie man auch sagen kann, der überaus mannigfache und schwer zu übersehende Aufbau der einfach zusammenhängenden Polyeder der verschiedenen Dimensionen in Betracht kommt. Ich habe in einer früheren Arbeit versucht, diesen Aufbau für die zweidimensionalen Polyeder in übersichtlicher Weise arithmetisch darzustellen. Dabei zeigte sich, dass die Probleme der Homotopie arithmetische Probleme ergeben, die nicht mehr in das so umfassende Gebiet der Gruppentheorie hineinpassen. Sie betreffen allgemeinere, sicher schwer zu untersuchende Operationen, die sich zu Gesamtheiten zusammenschliessen, für die ich den Namen »Spiele« vorgeschlagen habe.

Ganz anders ist es, wenn man Probleme untersucht, bei denen die homotopen Transformationen vernachlässigt werden. Hier kann man in vielen Fällen Methoden und Resultate der Gruppentheorie mit grosstem Vorteil benutzen. Für Mannigfaltigkeiten, auch solche höherer Dimensionen, öffnet die von POINCARÉ eingeführte Fundamental- oder Wegegruppe einen Weg, um solche Probleme anzugreifen. Bei zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten konnte durch Arbeiten der letzten Zeit besonders die *Theorie der Abbildungen* dadurch mit grossem Erfolg bearbeitet werden, dass man in eine *Klasse* von Abbildungen alle solche zusammenfasst, die sich nur durch homotope Transformationen unterscheiden (s. § 1.).

In der vorliegenden Arbeit werden nun die Klassen von Abbildungen als Operationen in einem *arithmetischen Feld* auf den Flächen dargestellt. Das Individuum eines solchen Feldes kann nicht etwa der Punkt auf der Fläche sein, denn dieser geht ja durch homotope Transformationen in jeden anderen Flächenpunkt über. Vielmehr wählen wir als solche Individuen arithmetische Darstellungen gewisser *Kurvensysteme*, die in solche Teilmengen zerfallen, die alle durch homotope Transformationen aus einander hervorgehenden Systeme zusammen-

fassen. Jede solche Teilmenge wird durch *ein* Kurvensystem repräsentiert, das durch eine Anzahl ganzer Zahlen eindeutig festgelegt ist. Diese Anzahl kann man als *Dimension* des arithmetischen Feldes betrachten. Der Komplex ganzer Zahlen, der zu einem Kurvensystem oder zu der durch das Kurvensystem repräsentierten Teilmenge von Kurvensystemen gehört, ist das Individuum des arithmetischen Feldes. Die Abbildungsklassen induzieren in diesem arithmetischen Feld Transformationen, die sich als mit den Modulsstitutionen verwandte lineare Transformationen ergeben.

Diese arithmetische Darstellung ermöglicht es, eine Reihe einfacher Abbildungsprobleme zu lösen. Mit Hilfe dieser Lösungen werden dann in der vorliegenden Arbeit allgemeinere Probleme in Angriff genommen, wobei das arithmetische Feld und seine Transformationen nur noch sehr rudimentär benutzt werden. Auf diese Weise gelingt es, *für die Gruppe der Abbildungsklassen einer beliebigen Fläche ein endliches System von Erzeugenden anzugeben*. Diese *Erzeugenden sind sämtlich* gleichartige Abbildungen der Flächen auf sich, nämlich *Schraubungen* längs gewisser Kurven, die in einfachem Zusammenhang mit der üblichen Darstellung der Flächen von höherem Geschlecht stehen.

Damit ist in gewissem Sinne ein Abschluss erreicht, aber die Theorie der Transformationen des arithmetischen Feldes ist hierbei nur sehr unvollkommen entwickelt. Und es ist doch anzunehmen, dass eine Fortführung in dieser Richtung von grosser Bedeutung wäre. Einmal wird ja durch die Aufstellung der Transformationsformeln die Gruppe der Abbildungsklassen durch lineare Transformationen »dargestellt«. Dann aber wird diese Darstellung vielleicht auch die Möglichkeit geben, das Transformationsproblem für die Abbildungsgruppen, das Hauptthema der bisherigen Arbeiten auf diesem Gebiet, von einer neuen Seite aus anzugreifen.

Im Hinblick auf diese Möglichkeit der Entwicklung ist die vorliegende Arbeit nur als Vorarbeit zu betrachten. Dieser Charakter kommt auch darin zum Ausdruck, dass vieles sehr Einfache ausführlich dargestellt wird, dass manche bekannte Resultate abgeleitet werden, die entweder für die Grundlegung der Methode unentbehrlich sind oder als Beispiele nützlich erscheinen.

## § 1.

**Allgemeines über Abbildungen von Flächen auf sich.**

a) Die Abbildung  $\Phi$  einer Fläche auf sich ist gegeben durch die ein-eindeutige Zuordnung der Ecken, Kanten und Flächenstücke einer Zerlegung  $\Sigma_1$  der Fläche zu einer andern Zerlegung  $\Sigma_2$ , von der Art, dass zugeordnete Ecken auf zugeordneten Kanten und diese wiederum auf der Begrenzung zugeordneter Flächenstücke liegen. Man kann schreiben  $\Phi(\Sigma_1) = \Sigma_2$ . Durch  $\Phi$  wird aber auch jeder beliebigen Zerlegung  $\Sigma$  der Fläche eine bestimmte Zerlegung  $\Sigma'$  zugeordnet. Denn  $\Sigma$  entsteht aus  $\Sigma_1$  durch interne Zerlegung. Durch  $\Phi$  entspricht dieser internen Zerlegung eine (topologisch) bestimmte Zerlegung von  $\Sigma_2$ , deren Elemente durch  $\Phi$  den Elementen von  $\Sigma_1$  zugeordnet sind. Wir können also die Abbildung für ein beliebiges  $\Sigma$  angeben und erhalten so  $\Phi(\Sigma) = \Sigma'$ . Insbesondere bekommen wir auf diese Weise  $\Phi(\Sigma_2) = \Sigma_3$ , also  $\Phi^2(\Sigma_1) = \Sigma_3$ , und so fortfahrend die *Potenzen* von  $\Phi$ . Ist  $\Psi$  eine andere Abbildung, so können wir nach Obigem  $\Psi$  auch anwenden auf  $\Sigma_2$  und erhalten so  $\Sigma_4 = \Psi(\Sigma_2) = \Psi\Phi(\Sigma_1)$ . Wir können also die Abbildungen der Fläche zusammensetzen, *die Abbildungen der Fläche auf sich bilden eine Gruppe*.

Es wäre aber unpraktisch, diese Gruppe direkt zu betrachten, schon deshalb, weil sie nicht durch eine endliche Anzahl von Elementen erzeugt werden kann. Man betrachtet vielmehr eine *Faktorgruppe*, der eine *Klasseneinteilung* der Abbildungen entspricht: Zu der Einheitsklasse rechnet man die Abbildung  $\Phi$ , falls  $\Phi(\Sigma_1) = \Sigma_2$  aus  $\Sigma_1$  durch *homotope* Transformation (das ist, durch stetige Abänderung, durch Deformation, im Folgenden häufig kurz mit *Homotopie* bezeichnet) entsteht. Entsprechend gehören zwei Abbildungen zu derselben Klasse, wenn die eine durch Zusammensetzung mit einer Abbildung der Einheitsklasse identisch mit der anderen wird. Die Abbildungen der Einheitsklasse bilden eine invariante Untergruppe der Gruppe der Abbildungen. Denn, ist  $E$  eine solche Abbildung, dann ist  $\Phi E \Phi^{-1}$  die entsprechende Abbildung des auf  $\Sigma$  liegenden Polyeders  $\Phi(\Sigma)$ , also ebenfalls eine homotope Abbildung. Die dieser invarianten Untergruppe entsprechende Faktorgruppe, die *Gruppe der Abbildungsklassen*, ist im Wesentlichen der Gegenstand unser Betrachtung.

b) Eine nicht identische Abbildung kann durch die Beziehung einer Zerlegung auf sich selbst entstehen, falls die Zerlegung eine nicht identische Abbildung auf sich selbst zulässt. Eine solche Abbildung wird immer endlicher Ordnung

sein, d. h. eine Potenz derselben wird nicht nur zur Einheitsklasse gehören, sondern die identische Abbildung selbst sein. Andere Abbildungen sind nicht von dieser Art und haben unendliche Ordnung, so zwar, dass keine ihrer Potenzen zur Einheitsklasse gehört. Schliesslich könnte es auch solche Abbildungen geben, von denen eine endliche, etwa die  $n$ -te Potenz zur Einheitsklasse gehört, ohne dass es in der Klasse dieser Abbildung irgend eine Abbildung gäbe, deren  $n$ -te Potenz die identische Abbildung ist. D. h., es wäre  $\Phi^n = E$ , wo  $E$  eine Deformation ist, aber  $(E' \Phi)^n$  von der Identität verschieden, welche Deformation  $E'$  auch immer gewählt ist. Wir werden Beispiele für die ersten beiden Arten von Abbildungen in den nächsten §§ vorfinden. Ob es aber überhaupt solche dritter Art giebt, ist zweifelhaft.

c) Bei berandeten Flächen kann man auf verschiedene Weise die Einheitsklasse wählen. Entweder lässt man bei den die Einheitsklasse definierenden homotopen Transformationen auch solche zu, bei denen die Ränder nicht identisch auf sich abgebildet werden, oder man verlangt, dass bei jeder solchen Transformation die Ränder punktweise festbleiben. Auch diese zweite, kleinere Einheitsklasse bildet eine invariante Untergruppe in der Gruppe der Abbildungen. Aber wenn man sie zu Grunde legt, wird man sich überhaupt auf solche Abbildungen beschränken, die die Ränder punktweise festlassen. Diese Abbildungen werden durch die Einheitsklasse in feinerer Weise in Klassen eingeteilt als die Gruppe der allgemeinen Abbildungen durch die umfassende Einheitsklasse.

Liegen »punktierte« Flächen vor, d. h. sind alle Ränder auf Punkte zusammengezogen, so fallen die beiden Einheitsklassen zusammen. Denn bei jeder homotopen Transformation wird jeder Rand von selbst punktweise festbleiben, da er nur einen Punkt besitzt. Zu den speziellen, die Ränder festlassenden Abbildungen kann man bei den allgemeinen Abbildungen noch solche hinzufügen, die die Ränder (Punktierungen) mit einander vertauschen.

d) Durch eine Abbildung wird auch der Durchlaufungssinn einer Kurve auf einen bestimmten Durchlaufungssinn abgebildet. Eine (nicht zur Einheitsklasse gehörende) Abbildung vertauscht oder erhält die Indikatrix. Die Gruppe der Klassen von Abbildungen, die die Indikatrix erhalten, ist eine invariante Untergruppe der Gruppe der Klassen von allgemeinsten Abbildungen. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bestimmt wird, sind die Abbildungen *im Folgenden* stets als die *Indikatrix erhaltend* vorausgesetzt.

## § 2.

**Die Abbildungen der Ein-, Zwei- und Dreilochkugel auf sich.**

Wir wollen eine Kugel mit  $n$  Löchern  $n$ -Lochkugel nennen und mit  $L_n$  bezeichnen.

a) Es ist praktisch, zunächst einige ganz einfache Abbildungsprobleme direkt zu betrachten, bevor sie im arithmetischen Feld auf den Flächen betrachtet werden. Die Gruppe der Abbildungsklassen für die *Einlochkugel* (das Elementarflächenstück) ist die Einheitsgruppe, alle Abbildungen gehören zur Einheitsklasse, einerlei ob ein fester Rand oder ein beweglicher Rand zu Grunde gelegt wird. Der Beweis hierfür geschieht einfach durch successive homotope Überführung der einen Einteilung in die (topologisch gleiche) andere Einteilung.

b) Die Gruppe der Abbildungsklassen für die Zweilochkugel (den Zylinder) bei nicht punktfesten Rändern ist die Gruppe der Ordnung zwei (der Vertauschung der beiden Ränder), bei nicht punktfesten, aber nicht vertauschbaren Rändern also die Einheitsgruppe. Bei punktfesten Rändern ist die Gruppe der Abbildungsklassen die unendliche zyklische Gruppe. Der Grund für diese Erscheinung ist, dass man einen Punkt  $Y_1$  des einen Randes mit einem Punkt  $Y_2$  des anderen Randes auf unendlich viele verschiedene Weisen verbinden kann (s. Fig. 1 die Verbindungen  $Y_1 Y Y_2$  und  $Y_1 Z Y_2$ ). In Fig. 1 ist eine Abbildung dargestellt, die diese zyklische Gruppe erzeugt. Sie besteht in der punktweisen Zuordnung des Vielecks  $Z_1 R_1 Y_1 Y Y_2 R_2 Z_2 Z$  zu dem Vieleck  $Z_1 R_1 Y_1 Z Y_2 R_2 Z_2 Y$  und des Vielecks  $Z_1 S_1 Y_1 Y Y_2 S_2 Z_2 Z$  zu dem Vieleck  $Z_1 S_1 Y_1 Z Y_2 S_2 Z_2 Y$ . Bei dieser Zuordnung bleiben die Randpunkte fest (nur die Punkte  $Y$  und  $Z$  werden vertauscht). Die Vielecke bilden zwei topologisch gleiche Zerlegungen des Zylinders. Wir wollen diese Abbildung eine *Verschraubung* nennen. Die Verschraubung ist bei festen Rändern keine Homotopie. Der Beweis hierfür geschieht so, dass man zunächst eine singularitätenfreie Verbindungslinie  $Y_1 Y Y_2$  des einen Randes mit dem anderen Rand und ihr Bild, etwa  $Y'_1 Y' Y'_2$  betrachtet. Sind die Ränder bei den Transformationen der Homotopie beweglich, dann sind alle diese Verbindungslinien miteinander homotop. Sind aber die Ränder punktweise fest, und also auch  $Y'_1 \equiv Y_1$ ,  $Y'_2 \equiv Y_2$ , dann gibt es unendlich viele nicht homotope Verbindungslinien, die durch die Zahl der Umrundungen eines Randes im positiven oder negativen Sinne bis auf eine homotope Transformation eindeutig festgelegt sind. Diese Zahl ist durch die algebraische Summe der Anzahlen der

positiv oder negativ gerechneten Überkreuzungen einer  $Y_1 Y_2$  nicht schneidenden Verbindungslinie  $Z_1 Z_2$  zu bestimmen. Diese zu  $Y_1 Y_2$  gehörende Zahl wird durch Homotopie nicht geändert, aber durch die in Fig. 1 dargestellte Abbildung, die Verschraubung  $\mathcal{A}$ , um eins vermehrt oder vermindert. Das Letztere ist leicht zu sehen, wenn man die in Fig. 1 dargestellte Abbildung homotop abändert, d. h. durch eine Abbildung  $\mathcal{A}'$  derselben Klasse ersetzt. Und zwar (s. Fig. 2) nehmen wir auf  $Y_1 Y_2$  einen Punkt  $Y_1'$  in der Nähe von  $Y_1$ , auf  $Z_1 Z_2$  einen Punkt  $Z_1'$  in der Nähe von  $Z_1$ . Wir ersetzen dann die Verbindungslinie  $Y_1 Z_2$  durch  $Y_1 Y_1' Z_2$  und die Verbindungslinie  $Z_1 Y_2$  durch  $Z_1 Z_1' Y_2$ . Sodann bewirken wir durch Homotopie, dass bei der Abbildung die Stücke  $Y_1 Y_1'$  und  $Z_1 Z_1'$  festbleiben.

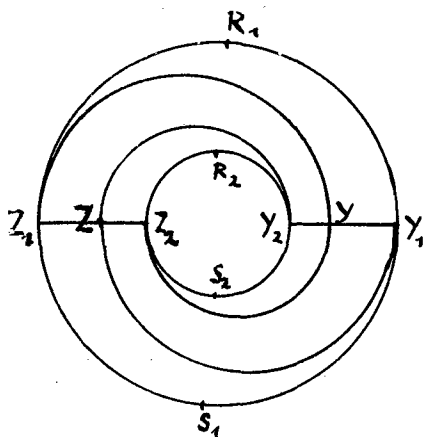


Fig. 1.

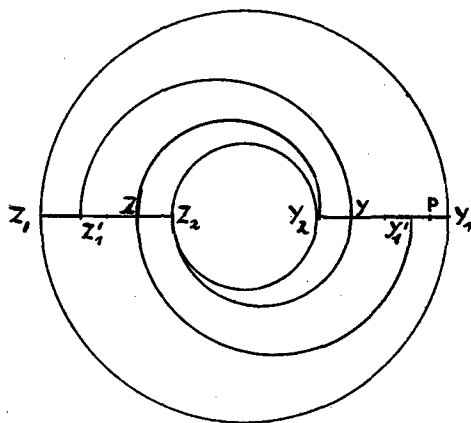


Fig. 2.

Haben wir nun eine beliebige Verbindung von  $Y_1$  und  $Y_2$ , so verlegen wir homotop ihre sämtliche Schnittpunkte mit  $Z_1 Z_2$  und  $Y_1 Y_2$  auf die Strecken  $Z_1 Z_1'$  resp.  $Y_1 Y_1'$ ; die Verbindung des letzten Schnittpunktes auf  $Z_1 Z_1'$  mit  $Y_2$  kann dann stets in eine Verbindung dieses Schnittpunktes mit einem Punkt  $P$  auf  $Y_1 Y_1'$  ohne sonstige Schnittpunkte mit  $Z_1 Z_2$  oder  $Y_1 Y_2$ , und den Streckenzug  $P Y_1' Y_2$  homotop verwandelt werden. Durch die Abbildung  $\mathcal{A}$  wird dann die Strecke  $P Y_1' Y_2$  in die Kurve  $P Y_1' Z_2$  verwandelt, wir erhalten also einen positiv oder negativ zu zählenden Schnittpunkt mehr auf  $Z_1 Z_2$  wie behauptet, denn der übrige Teil der homotop abgeänderten Verbindungslinie kann als bei der Abbildung festbleibend angenommen werden.

Eine Verbindungslinie von  $Y_1$  und  $Y_2$ , zu der die Zahl null gehört, ist mit  $Y_1 Y_2$  homotop. Durch eine geeignet oft wiederholte Ausführung der Abbildung  $\mathcal{A}$  oder der zu ihr reziproken kann demnach  $Y_1 Y_2$  in eine zu einer



beliebig vorgegebenen Verbindungslinie von  $Y_1$  und  $Y_2$  homotope Verbindungslinie übergeführt werden. Durch die Zuordnung von  $Y_1 Y Y_2$  zu  $Y'_1 Y' Y'_2$  resp.  $Y_1 Y' Y_2$  ist aber die *Klasse* der Abbildung vollständig bestimmt, weil durch Aufschneidung längs  $Y_1 Y Y_2$  die Zweilochkugel in die Einlochkugel übergeht, für die alle Abbildungen zur Einheitsklasse gehören. Also ist die Gruppe der Abbildungsklassen, wie im Anfang behauptet, im ersten Falle (bewegliche aber nicht vertauschbare Ränder) die Einheitsgruppe und im zweiten Falle (feste Ränder) die unendliche zyklische Gruppe, erzeugt durch die Abbildung  $\mathcal{A}$ . Diese Gruppe erzeugt in den die Verbindungslinien der Ränder darstellenden Zahlen die Gruppe der Translationen.

Ich habe den Beweis ausführlich dargestellt, weil hier in einfachster Form die Erscheinung auftritt, dass Kurven (bis auf homotope Transformationen) durch Zahlen gegeben sind, die Transformation dieser Zahlen durch eine bestimmte Abbildung dann zur Bestimmung der Gruppe der Abbildungsklassen führt.

c) Für die *Dreilochkugel* ( $L_3$ ) ist die Gruppe der Abbildungsklassen bei beweglichen Rändern die *symmetrische Gruppe der Vertauschungen der drei Ränder*,<sup>1</sup> also bei beweglichen aber nicht vertauschbaren Rändern *die Einheitsgruppe*.<sup>2</sup> Der Beweis hierfür geschieht dadurch, dass man zwei (singularitätenfreie) Verbindungen derselben beiden Ränder betrachtet und nachweist, dass sie unter den hier gemachten Voraussetzungen homotop sind. Wir zerlegen zum Beweise die Kugel durch drei Verbindungen  $AB$ ,  $CD$  und  $EF$  in zwei einfach zusammenhängende Flächenstücke (s. Fig. 3). Wir wollen nachweisen, dass jede Verbindung  $V$  von  $A$  und  $B$  auf  $L_3$  mit  $AB$  homotop ist. Die Verbindung  $V$  ist festgelegt durch die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte mit  $AB$ ,  $CD$  und  $EF$ . Wir können annehmen, dass keine unmittelbar aufeinanderfolgenden Schnittpunkte auf derselben Strecke  $AB$ ,  $CD$  oder  $EF$  liegen. Denn das diesem Paar von Schnittpunkten entsprechende Stück von  $V$  kann homotop ersetzt werden durch ein Stück auf  $AB$ ,  $CD$  oder  $EF$  und sodann kann durch weitere Verschiebung  $V$  in  $V'$  mit zwei Schnittpunkten weniger verwandelt werden. Ferner können wir in derselben Weise erreichen, dass der erste Schnittpunkt von  $A$  aus nicht auf  $AB$  liegt. Liegt er auf  $CD$ , etwa in  $X$ , dann liegen alle ferneren Schnittpunkte auf  $AB$  und  $XC$ . Denn ein Schnittpunkt  $Y$  auf  $EF$  würde zur Folge

<sup>1</sup> In Übereinstimmung mit MAGNUS, Math. Ann. 109.

<sup>2</sup> Das ist die Grundlage für die Arbeiten über Kurvensysteme auf Flächen von DEHN, Autogr. Vortrag, Breslau 1922 und R. BAER, Journ. f. Math. Bd. 156. 160.

haben, dass alle ferneren Schnittpunkte auf  $YE$  und  $DX$  lägen,  $V$  könnte also niemals zum Punkte  $B$  kommen. Wir haben also in diesem Falle für  $V$  eine mehrfache Umkreisung des Randes  $BC$ , die durch homotope Transformation so reduziert werden kann, dass  $V$  keine Schnittpunkte mehr mit den drei Verbin-

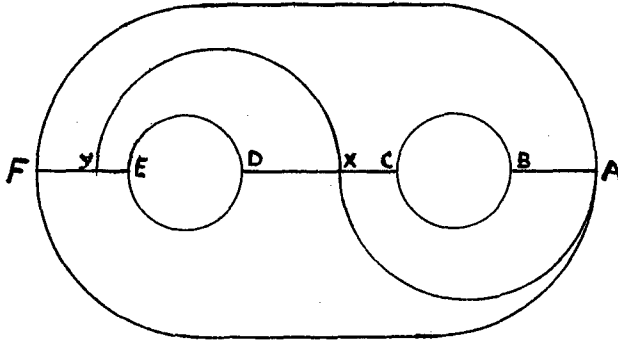


Fig. 3.

dungsstrecken hat, also mit  $AB$  ein einfach zusammenhängendes Flächenstück auf  $L_3$  begrenzt, d. h. mit  $AB$  homotop ist. Es bleibt der Fall, dass der erste Schnittpunkt  $X$  von  $V$  auf  $EF$  liegt (s. Fig. 4). Liegt dann der nächste Schnittpunkt auf  $DC$ , dann bleibt für  $V$  wieder nur Umkreisung des Randes  $CB$  über,

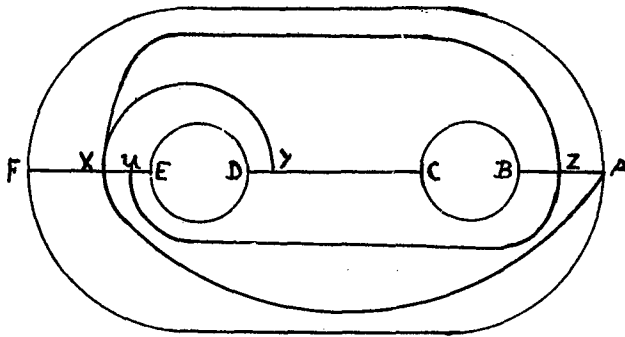


Fig. 4.

die weggeschafft werden kann. Wir können also annehmen, dass der nächste Schnittpunkt  $Z$  auf  $AB$  liegt. Dann kann der dritte Schnittpunkt wieder auf  $DC$  liegen, und wir haben Umkreisungen des Randes  $CB$ , die wir wegschaffen können. Oder aber der nächste Schnittpunkt  $U$  liegt auf  $XE$ . Aus demselben Grunde können wir jetzt auch annehmen, dass alle ferneren Schnittpunkte abwechselnd auf  $AB$  und  $FE$  liegen. Wir haben damit Umkreisungen des Randes  $AF$ , die wir ebenfalls wegschaffen können. Hiermit ist der Nachweis erledigt,

dass  $V$  mit  $AB$  homotop ist. Wir sehen aber aus dem Nachweis, dass bei *festen Rändern*  $V$  stets homotop ist mit einer Anzahl von Umkreisungen des Randes  $AF$  und darauf des Randes  $BC$ . Wir bemerken noch, dass auch folgt, dass drei je zwei von den Rändern verbindende, sich nicht schneidende Linien gleichzeitig durch Homotopie bei beweglichen Rändern in  $AB$ ,  $CD$  und  $EF$  übergeführt werden können. Das ergibt sich sofort, wenn man nach Überführung von  $V$  in  $AB$  die aus  $L_3$  durch Aufschneidung längs  $AB$  entstehende  $L_2$  und die auf ihr laufenden Randverbindungen betrachtet.

Durch eine beliebige Abbildung  $\Phi$  der  $L_3$  bei beweglichen Rändern möge  $AB$  in  $V$  übergehen. Durch eine Homotopie  $H$  möge ebenfalls  $AB$  in  $V$  übergehen. Dann unterscheidet sich die gegebene Abbildung  $\Phi$  von  $H$  durch eine Abbildung  $\Psi$  der Zweilochkugel, die aus  $L_3$  durch Aufschneiden längs  $AB$  entsteht, auf sich, wobei die Punkte  $A$  und  $B$  fest bleiben. Jede Abbildung einer Zweilochkugel auf sich, bei der mindestens ein Rand bewegt werden kann, ist aber eine Homotopie. Also ist  $\Psi$  eine Homotopie der Zweilochkugel, bei der die beiden Stücke, die auf dem einen Rande  $AB$  entsprechen, fest gehalten werden können. Folglich ist  $\Psi$  auch eine Homotopie der  $L_3$ . Also ist  $\Phi$  von  $H$  nur durch eine Homotopie verschieden und gehört zur Einheitsklasse. Damit ist bewiesen, dass die Gruppe der Abbildungsklassen für die  $L_3$  bei beweglichen Rändern die Einheitsgruppe ist.

*Die Gruppe der Abbildungsklassen der  $L_3$  bei festen Rändern ist die freie Abelsche Gruppe mit drei Erzeugenden.* Die drei Erzeugenden sind die Verschraubungen längs der drei Ränder. Eine Verschraubung längs einer Randkurve entsteht durch Verschraubung der Zweilochkugel mit festen Rändern, die auf der Fläche durch den Rand selbst und eine Parallelkurve ausgeschnitten wird. Wir wollen die drei Parallelkurven in unserem Falle so wählen, dass sie keinen Punkt gemeinsam haben. Der Beweis für unsere Behauptung folgt leicht aus dem Vorhergehenden. Denn durch die Abbildung  $\Phi$  der  $L_3$  auf sich möge  $AB$ , eine Verbindungslinie des ersten und zweiten Randes, in  $V$  übergehen. Wie wir vorher gesehen haben, können wir durch Verschraubungen  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  längs des ersten und zweiten Randes  $AB$  in eine zu  $V$  (bei festen Rändern) homotope Kurve  $\bar{V}$  überführen. D. h., wenn dazu  $n_1$  Schraubungen  $\mathcal{A}_1$  und  $n_2$  Schraubungen  $\mathcal{A}_2$  nötig sind, so führt die Abbildung<sup>1</sup>  $\Psi \equiv \mathcal{A}_1^{-n_1} \mathcal{A}_2^{-n_2} H' \Phi$   $AB$  in sich über, wenn  $H'$  eine Homotopie ist, die  $V$  in  $\bar{V}$  überführt. Schneiden wir wieder die  $L_3$  längs  $AB$  auf, so entsteht eine  $L_2$ .

<sup>1</sup> Die Reihenfolge der Operationen ist stets gegeben durch die Reihenfolge *von rechts nach links* der die Operationen darstellenden Symbole.

Eine Abbildung  $\Psi$  der  $L_3$ , die  $AB$  punktweise in sich überführt und nach Voraussetzung die drei Ränder der  $L_3$  fest lässt, ist aber eine Abbildung, die  $L_2$  bei festen Rändern in sich überführt, und gehört also nach b) zu der Klasse einer geeigneten Potenz der Schraubung  $\mathcal{A}_3$  längs des dritten Randes. Also ist

$$\mathcal{A}_1^{-n_1} \mathcal{A}_2^{-n_2} H' \Phi = \mathcal{A}_3^{n_3} H'',$$

wo  $H''$  eine Homotopie von  $L_2$  mit festen Rändern, also auch eine Homotopie von  $L_3$  darstellt. Also ist, da die Homotopieen eine invariante Untergruppe der Gruppe der Abbildungen ergeben,

$$\Phi = H'^{-1} \mathcal{A}_2^{n_2} \mathcal{A}_1^{n_1} \mathcal{A}_3^{n_3} H'' = H \mathcal{A}_2^{n_2} \mathcal{A}_1^{n_1} \mathcal{A}_3^{n_3},$$

d. h. die Schraubungen längs der drei Ränder erzeugen die Gruppe der Abbildungsklassen.

Dass diese Verschraubungen miteinander vertauschbar sind, ergibt sich aus der Voraussetzung, dass die Gebiete, die durch sie transformiert werden, voneinander vollständig getrennt liegen. Weitere Relationen zwischen diesen drei Verschraubungen bestehen nicht. Das ergibt sich leicht. Denn wäre etwa  $\mathcal{A}_1^{n_1} \mathcal{A}_2^{n_2} \mathcal{A}_3^{n_3} = 1$  in der Gruppe der Abbildungsklassen, dann betrachten wir eine Verbindung  $v_{12}$  des ersten und zweiten Randes. Diese wird durch  $\mathcal{A}_3$ , bei geeigneter Wahl des Schraubungsstreifens längs des dritten Randes, überhaupt nicht geändert, durch  $\mathcal{A}_1^{n_1} \mathcal{A}_2^{n_2}$  nur dann in eine homotope Kurve übergeführt, falls  $n_1$  und  $n_2$  gleichzeitig null sind. Da aber eine Abbildung nur dann zur Einheitsklasse gehört, wenn jede Verbindungslinie  $v_{12}$  in eine homotope übergeführt wird, so kann  $\mathcal{A}_1^{n_1} \mathcal{A}_2^{n_2}$  nur dann zur Einheitsklasse gehören, falls  $n_1 = n_2 = 0$  ist. Ebenso erhalten wir auch  $n_1 = n_3 = 0$  als Bedingung. Also bilden  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$  eine freie Abelsche Gruppe.

### § 3.

#### Spezielle Abbildungen der Vierlochkugel auf sich.

Die Vierlochkugel  $L_4$  besitzt auch bei in sich beweglichen aber nicht miteinander vertauschbaren Rändern Abbildungen auf sich, die nicht zur Einheitsklasse gehören. Wir bezeichnen die vier Ränder mit  $r_1, r_2, r_3, r_4$  (s. Fig. 5) und betrachten drei geschlossene Kurven  $YZ$  und  $ST$  und  $UV$ , die  $r_1$  und  $r_2$  von  $r_3$  und  $r_4$  resp.  $r_1$  und  $r_4$  von  $r_2$  und  $r_3$  resp.  $r_2$  und  $r_4$  von  $r_1$  und  $r_3$  trennen. Wir betrachten nun (nach § 2) die Verschraubungen längs  $ZY, ST$  und  $UV$ . Dies sind Abbildungen, die auch bei beweglichen Rändern nicht zur Einheits-

klasse gehören, denn durch Verschraubung längs  $ZY$  z. Bsp. entsteht aus  $ST$  die Kurve  $f \equiv SY_1Z_2TY_2Z_1$  (s. Fig. 5), die nicht homotop mit  $ST$  ist. Das sieht man am bequemsten durch Betrachtung der *Fundamentalgruppe* der  $L_4$ . Diese ist die freie Gruppe aus den drei Erzeugenden  $r_1, r_3, r_4$  und in ihr entspricht  $ST$  einer Transformierten von  $r_1r_4$ ,  $f$  aber einer Transformierten von  $r_1r_3r_4r_3^{-1}$ . Dieses Element ist aber in der freien Gruppe keine Transformierte von  $r_1r_4$ . Also ist  $f$  nicht homotop mit  $ST$  und die Abbildung (Schraubung), die  $ST$  in  $f$  übergeführt, keine Homotopie. Die Darstellung von  $f$  in der Fundamentalgruppe liest man aus dem Verlauf der beiden Kurven in der von einem Punkte  $O$  aus durch Verbindungen nach den vier Rändern aufgeschnittenen  $L_4$

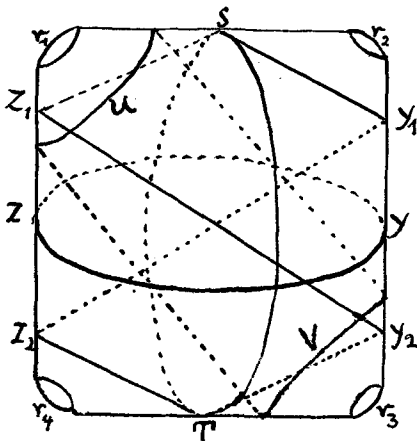


Fig. 5.

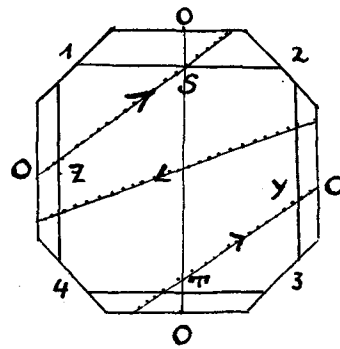


Fig. 6.

ab (s. Fig. 6). Dasselbe gilt für die Verschraubungen längs  $ST$  und  $UV$ . Wir werden später (§ 7) sehen, dass man aus den beiden Verschraubungen längs  $XY$  und  $ST$  in jeder Klasse eine Abbildung der  $L_4$  auf sich mit in sich beweglichen aber nicht vertauschbaren Rändern erzeugen kann, dass also die betreffende Gruppe der Abbildungsklassen durch diese beiden Abbildungen erzeugt wird. Wie unmittelbar ersichtlich, entsteht die Verschraubung längs  $ST$  aus der längs  $XY$  durch Transformation mit einer geeigneten Vertauschung der Ränder.

Im Falle, dass die Ränder unbeweglich sind, entsteht die Gruppe der Abbildungsklassen aus der vorhergehenden durch Hinzufügung der Verschraubungen längs der vier Ränder. Diese sind miteinander und mit irgendwelchen Abbildungen, die die Ränder festlassen, speziell mit den Verschraubungen längs  $ST$ ,  $YZ$  und  $UV$  vertauschbar und es besteht eine einfache Beziehung zwischen den vier Randverschraubungen und den drei Schraubungen längs  $XY$ ,  $ST$  und  $UV$  (s. § 7 g).

§ 4.

**Abbildungen des Ringes und des Einlochrings auf sich.**

a) Die Gruppe der Abbildungsklassen für die Ringfläche  $R$  ist aus der Funktionentheorie seit langem bekannt. Wir wollen sie aber doch im Zusammenhang mit den anderen Problemen nach unserer Methode behandeln. Wir geben zunächst zwei spezielle Abbildungen von  $R$  auf sich an, nämlich die Verschraubungen längs zweier sich in einem Punkt schneidenden geschlossenen Kurven, etwa (s. Fig. 7) längs  $a$  und  $b$ . Wir bezeichnen die Verschraubungen mit  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$ .  $\mathcal{A}_a$  ersetzt die Verbindung  $XY$  durch  $XZ_1Z_2Y$  und  $\mathcal{A}_b$  die Verbindung

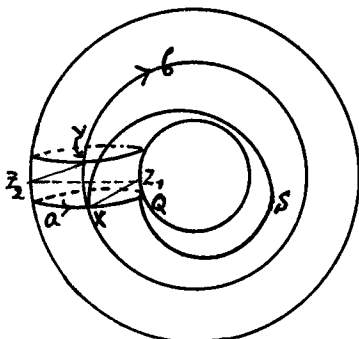


Fig. 7.

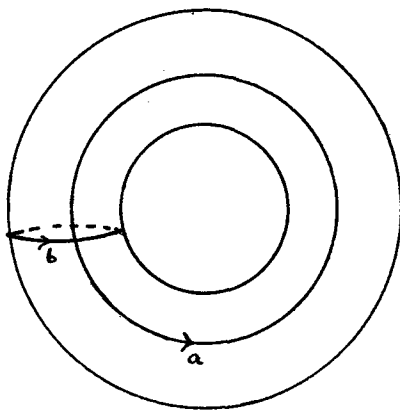


Fig. 8.

$XQ$  durch  $XSQ$ . Ist dann  $\Sigma$  die durch  $a$  und  $b$  erzeugte in Fig. 7 dargestellte Zerlegung von  $R$ , so überzeugt man sich leicht durch sukzessive Ausführung der betr. Transformationen, dass  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a(\Sigma)$ , abgesehen von homotopen Transformationen, durch Fig. 8 gegeben ist. Diese Figur stellt aber eine Drehung des topologisch regulären Ringpolyeders von Fig. 7 mit den Kanten  $a$  und  $b$  und einer Ecke  $X$  um diese Ecke dar,  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a$  gehört also zu einer Abbildungsklasse endlicher und zwar vierter Ordnung. Wir erhalten  $(\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a)^4 = 1$ . Ebenso ist natürlich auch  $(\mathcal{A}_b \mathcal{A}_a^{-1} \mathcal{A}_b)^4 = 1$ . Wir werden später sehen, dass aus  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$  Repräsentanten jeder Abbildungsklasse von  $R$  erzeugt werden können.

$\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$  sind auch Abbildungen der berandeten Ringfläche  $R_1$  auf sich, denn die Verschraubungen affizieren nur die Umgebungen von  $a$  und  $b$ .

Die Gruppe der Abbildungsklassen für die unberandete Ringfläche  $R$  ist durch die Abbildung von  $a$  und  $b$  mit Durchlaufungssinn bestimmt. Wenn nämlich  $\Phi$  und  $\Phi'$  übereinstimmend  $a$  und  $b$  in  $a'$  und  $b'$  (mit Durchlaufungssinn) überführen,

dann führt  $\Phi'^{-1}\Phi$  die Kurven  $a$  und  $b$  in sich mit Durchlaufungssinn über. Wir müssen beweisen, dass  $\Phi'^{-1}\Phi$  zur Einheitsklasse gehört. Zunächst ändern wir  $\Phi'^{-1}\Phi$  homotop so ab, dass bei dieser Abbildung  $a$  und  $b$  punktweise fest bleiben. Das ist möglich, weil durch  $\Phi'^{-1}\Phi$  die Kurven  $a$  und  $b$  in sich mit Durchlaufungssinn übergehen. Schneiden wir nun  $R$  längs  $a$  und  $b$  auf, so entsteht ein Elementarflächenstück und  $\Phi'^{-1}\Phi$  führt dieses Elementarflächenstück bei festgehaltenem Rand in sich über. Eine solche Abbildung ist aber bei festgehaltenem Rand homotop mit der Identität. Eine homotope Transformation des Elementarflächenstückes bei festgehaltenem Rand ist aber auch eine homotope Transformation auf  $R$ . Also ist  $\Phi'^{-1}\Phi$  homotop mit der identischen Abbildung und gehört demnach zur Einheitsklasse. Man beachte, dass eine homotope Transformation des Elementarflächenstückes bei nicht festgehaltenem Rand im allgemeinen durchaus nicht einer isotopen Transformation von  $R$  entspricht, wenn die vier Punkte auf dem Rande des Elementarflächenstückes, die dem Schnittpunkt von  $a$  und  $b$  entsprechen in beliebige Punkte oder ineinander, aber nicht in sich selbst übergehen.

b) Ähnlich folgt auch, dass die Gruppe der Abbildungsklassen des Einlochringes  $R_1$  mit bei Homotopie beweglichem Rand gleich der des unberandeten Ringes  $R$  ist. Denn, machen wir genau dieselben Operationen wie im vorigem Abschnitt, so führt  $\Phi'^{-1}\Phi$  eine Zweilochkugel mit einem festen und einem beweglichem Rand in sich über. Aber auch für dieses Gebilde ist die Gruppe der Abbildungsklassen die Einheitsgruppe. Denn, wie wir in § 26 sahen, ist jede Abbildung der Zweilochkugel auf sich mit festen Rändern so homotop zu verändern, dass bei ihr die Umgebung eines Randes unbeweglich bleibt, die Umgebung des anderen aber verschraubt wird. Wird jetzt der zweite Rand als beweglich angenommen, so lässt sich die Abbildung homotop in die Identität überführen. Folglich gehört  $\Phi'^{-1}\Phi$  zur Einheitsklasse.

## § 5.

### Das arithmetische Feld auf der Zweiloch- und Dreilochkugel und auf der Ringfläche.

a) *Das arithmetische Feld auf den Flächen entsteht durch die Systeme der auf den Flächen verlaufenden Kurven.*

Unser allgemeines Prinzip bei der Darstellung ist, Kurven, die mit einander homotop sind, ununterscheidbar darzustellen. Ferner werden wir nicht einzelne Kurven, geschlossene oder offene, sondern ganze Systeme solcher Kurven aber

ohne Doppelpunkte und ohne gegenseitige Schnittpunkte als Punkte des arithmetischen Feldes darstellen. Ferner werden wir aus solchen Systemen alle auf einen Punkt oder auf einen echten Teil eines Randes zusammenziehbare Kurven weglassen. Die Erfüllung all dieser Bedingungen ist nötig, um überhaupt eine einfache Darstellung zu ermöglichen. — Denken wir einen Augenblick an die übliche Darstellung von Flächenkurven durch Elemente der Fundamental- (oder Wege-)Gruppe und die Unterschiede gegenüber der unsrigen: die Elemente der Fundamentalgruppe entsprechen einzelnen geschlossenen Kurven mit beliebigen Singularitäten. Aber die Kurven werden nur dann eindeutig dargestellt, wenn ein Anfangspunkt in einem festen Punkt der Fläche und der Durchlaufungssinn gegeben ist; Kurven, für die eine solche Bestimmung nicht getroffen ist, entsprechen alle aus einem Element durch Transformation entstehende Elemente. Bei unserer Darstellung werden die Kurven oder die Kurvensysteme durch eine feste Anzahl von ganzen Zahlen, der *Dimension* des arithmetischen Feldes entsprechend, repräsentiert. Dagegen ist das eine Kurve darstellende Element der Fundamentalgruppe durch eine beliebig lange Folge von ganzen Zahlen, den Exponenten der verschiedenen Erzeugenden, gegeben. Unsere einfachere Darstellung ermöglicht es, die Wirkung der Selbstabbildung der Fläche auf diese Zahlenkomplexe, auf das arithmetische Feld, sehr viel weiter zu verfolgen und mit bekannten arithmetischen Transformationen in Verbindung zu bringen.

b) *Kurvensysteme auf der Zweilochkugel.*

Bei beweglichen Rändern wird ein System von Verbindungslinien der Ränder allein durch deren Anzahl, etwa  $n$ , festgelegt. Denn je zwei Verbindungslinien sind homotop, falls bei der Homotopie die Ränder beweglich sind. Zwei Systeme von je  $n$  Verbindungslinien, die sich nicht schneiden, sind stets homotop ineinander überführbar. Dabei kann man noch einer Linie des einen Systems willkürlich eine Linie des anderen Systems zuordnen. Dadurch ist dann die Zuordnung vollständig bestimmt. Aber mit diesen Verbindungslinien ist die Möglichkeit von nicht auf einen Punkt zusammenziehbaren Kurven noch nicht erschöpft. Es gibt ja noch die geschlossenen Parallelkurven zu den Rändern. Diese werden mit dargestellt, wenn wir jetzt bei der *Homotopie die Ränder festhalten*: auf jedem der Ränder wählen wir  $n$  feste Punkte, wählen ferner eine *Normalverbindungslinie*  $v$  der beiden Ränder und eine *positive Seite* von  $v$ . Dann betrachten wir die algebraische Summe  $\delta$  der positiven und negativen Überkreuzungen von  $v$ , falls wir die  $n$  Verbindungen von dem »ersten« Rand zum »zweiten«



Rand durchlaufen. Durch homotope Transformation mit festen Rändern können wir es erreichen, dass alle Verbindungen, da sie sich nach Voraussetzung nicht schneiden,  $v$  nur in einem Sinne überkreuzen. Ist dann  $|\delta|$  zunächst kleiner als  $n$ , dann gibt es genau  $|\delta|$  Verbindungen, die  $v$  schneiden. Sie entstehen aus Verbindungen, die  $v$  nicht schneiden, durch einmalige Umkreisung eines Randes, durch Verschraubung (s. Fig. 9). Also kann nach § 2 b keine Homotopie mit festen Rändern diese Zahl  $\delta$  ändern. Ist aber  $\delta = v + \mu n$  mit  $|v| < n$ , wo  $v$  dasselbe Vorzeichen hat wie  $\mu$ , dann entsteht das System der Verbindungen durch einmalige Verschraubung von  $v$  Verbindungen und darauf  $\mu$ -malige Verschraubung von allen

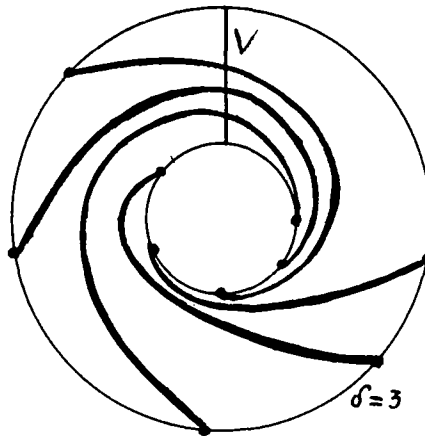


Fig. 9.

$n$  Verbindungen. Da nach § 2 b) die Anzahl der Umkreisungen jeder einzelnen Verbindung nicht durch Homotopie mit festem Rand geändert werden kann, so ist also die Zahl  $\delta$  unabhängig von solchen Homotopieen.

Durch das Zahlenpaar  $\binom{n}{\delta}$  ist bis auf Homotopie mit festen Rändern eindeutig ein System von Verbindungen bestimmt. Ordnen wir jetzt noch dem Symbol  $\binom{0}{\delta}$  ein System von  $|\delta|$  mit Umlaufsinn versehenen Parallelkurven zu den Rändern zu, die je nach dem Vorzeichen von  $\delta$  die Normalverbindung  $v$  in positivem oder negativem Sinne überkreuzen, dann ist die Zuordnung von Kurvensystemen und Symbolen  $\binom{n}{\delta}$  vollständig und bis auf Homotopie mit festen Rändern eindeutig.

Die Abbildungen der Zweilochkugel auf sich, die die Ränder nicht vertauschen, bestehen in Verschraubungen. Diese transformieren das Symbol  $\binom{n}{\delta}$  (nach § 2 b) in  $\binom{n}{\delta + kn}$ , wo  $k$  eine positive oder negative ganze Zahl ist. Die Gesamtheit dieser Transformationen jedes Symbols bildet für  $n \neq 0$  eine mit der Gruppe der Abbildungsklassen der Zweilochkugel einstufig isomorphe Gruppe. Im Falle  $n = 0$  transformiert die Verschraubung das Symbol in sich, die Gruppe der Transformationen dieses Symbols ist also die Einheitsgruppe. — Nur die geschlossenen Kurven haben bei dieser Darstellung einen von den Symbolen abhängigen Durchlaufungssinn bekommen.

c) *Kurvensystem auf der Ringfläche.*

Wir zerlegen die Ringfläche durch zwei nicht zerstückelnde, sich gegenseitig nicht schneidende Kurven  $a_1$  und  $a_2$  (s. Fig. 10) in zwei Zweilochkugeln  $L_2$  und  $L'_2$ . Ein beliebiges Kurvensystem auf der Ringfläche, sofern es nicht aus lauter Parallelkurven zu  $a_1$  zusammengesetzt ist, besteht aus den Verbindungen von  $n$  Punkten auf  $a_1$  mit  $n$  Punkten auf  $a_2$  sowohl in  $L_2$  wie in  $L'_2$ , wobei wir Selbstverbindungen von  $a_1$  oder  $a_2$  in  $L_2$  oder  $L'_2$  durch homotope Transformation weggeschafft denken. Durch homotope Transformation mit beweglichem Rand etwa in  $L_2$  können diese je  $n$  Punkte in bestimmte  $n$  Punkte auf jedem der Ränder übergeführt werden und die Verbindungen in  $L_2$  ebenfalls in bestimmte Verbindungen. Dabei ist die Zuordnung der  $n$  festen Punkte und der  $n$  festen Verbindungen in  $L_2$  zu den  $n$  gegebenen Verbindungen noch durch eine zyklische Vertauschung der  $n$  Punkte und Verbindungen willkürlich (s. b)). Dieser zyklischen Vertauschung entspricht eine homotope Transformation der Ringfläche. Werden jetzt die Verbindungen in  $L_2$  festgehalten, dann ist  $L'_2$  nur noch mit festen Rändern homotop transformierbar. Die  $n$  Verbindungen der  $n$  festen Punkte auf den beiden Rändern in  $L'_2$  sind deswegen nach b) dargestellt durch ein Zahlenpaar  $\binom{n}{\delta}$ , wo  $\delta$  die algebraische Summe der Anzahlen der Überkreuzungen im positiven oder negativen Sinne einer Normalverbindung von  $a_1$  und  $a_2$  ist, falls wir die Kurven des Systems innerhalb von  $L'_2$  stets von  $a_1$  nach  $a_2$  durchlaufen. Als solche Normalverbindung wählen wir etwa das in  $L'_2$  gelegene Stück einer  $a_1$  einmal schneidenden Kurve  $b_1$  (s. Fig. 10) und eine Seite von  $b_1$  als die positive Seite, die Überkreuzung der Normalverbindung von der negativen nach der positiven Seite werde als positiv gerechnet. Durch eine homotope Trans-

formation ist es zu erreichen, dass die Überkreuzungen alle dasselbe Vorzeichen haben, sodass  $|\delta|$  die Anzahl der Überkreuzungen darstellt. Ferner nehmen wir das Stück von  $b_1$ , das in  $L_2$  verläuft, parallel zu den festen Verbindungen in  $L_2$ , sodass also die Kurven des Systems mit  $b_1$  genau  $|\delta|$  Schnittpunkte gemeinsam haben. Durch homotope Transformation können wir erreichen, dass auch die Überkreuzungen der Kurven des Systems mit einer Parallelkurve  $b_2$  zu  $b_1$  alle das gleiche Vorzeichen haben. Dann ist das Kurvensystem auch aufzufassen als System der Verbindungen von  $|\delta|$  Punkten auf  $b_1$  mit  $|\delta|$  Punkten auf  $b_2$  in den beiden Zweilochkugeln  $L_2''$  und  $L_2'''$ , in die die Ringfläche durch  $b_1$  und  $b_2$  zerfällt. Endlich wollen wir noch dem Symbol  $\begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}$

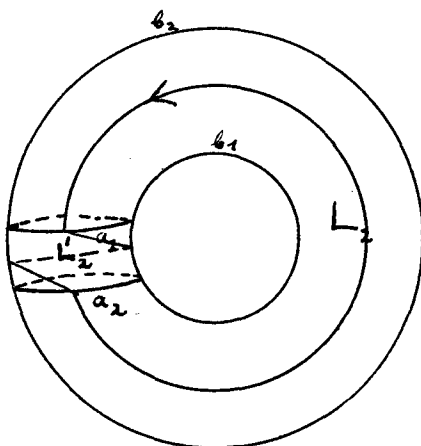


Fig. 10.

ein System von  $|\delta|$  Parallelkurven zu  $a_1$  und  $a_2$  zuordnen. Damit haben wir jedes Kurvensystem auf der Ringfläche durch ein Zahlenpaar  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  dargestellt, wo  $n \geq 0$  ist,  $\delta$  beliebig positiv, negativ oder null. Aber wir haben den Kurven, mit Ausnahme der Parallelkurven zu  $a_1$  *keinen* Durchlaufungssinn gegeben und dies kommt auch in unserem Symbol zum Ausdruck ( $n$  ist nur eine Anzahl). Das hat zur Folge, dass eine Abbildung der Ringfläche auf sich erst durch die Abbildung von drei Kurven festgelegt ist, da ja z. B.  $a_1$  und  $b_1$  gleichzeitig in  $a_1$  und  $b_1$  mit umgekehrtem Durchlaufungssinn abgebildet werden können. Auf den Flächen von höherem Geschlecht ist bisher das Problem nicht gelöst, auch den Durchlaufungssinn arithmetisch darzustellen. Man kann da, bis jetzt wenigstens, nur die obige Darstellung sinngemäss erweitern. Auf der Ringfläche dagegen ist die Einführung des Durchlaufungssinnes der Kurven ohne Schwierig-

keit möglich: Auf der Ringfläche sind alle Kurven eines Systems miteinander homotop, sie sind Parallelkurven, wie aus topologischen Erwägungen unmittelbar folgt. Denn durch Zerschneidung längs einer Kurve  $c$  entsteht eine  $L_2$  und alle geschlossenen doppelpunktslosen Kurven auf der  $L_2$ , die nicht auf einen Punkt zusammenziehbar sind, sind mit der Randkurve  $c$  homotop. Wir geben den Kurven des Systems einen Durchlaufungssinn und zwar sollen bei der homotopen Transformation einer Kurve des Systems in eine andere auch die Durchlaufungssinne sich entsprechen. Kommt man bei der Durchlaufung eines in  $L'_2$  gelegenen Stückes einer Systemkurve von  $a_1$  nach  $a_2$ , dann ist dasselbe für die Durchlaufung jedes in  $L'_2$  gelegenen Stückes dieser Kurve der Fall, weil wir vorausgesetzt haben, dass durch homotope Transformation jede Selbstverbindung von  $a_1$  oder  $a_2$  in  $L_2$  oder  $L'_2$  auf Kurven des Systems weggeschafft ist. Ebenso wie die Stücke einer Kurve des Systems verhalten sich die Stücke aller anderen Systemkurven. Wir geben in diesem Falle  $n$  das *positive* Vorzeichen. Kommt man aber bei der Durchlaufung eines in  $L'_2$  gelegenen Kurvenstückes von  $a_2$  nach  $a_1$ , dann soll  $n$  das *negative* Vorzeichen bekommen. Ferner soll — *abweichend von der obigen Bestimmung* —  $\delta$  das positive Vorzeichen haben, falls die Kurvenstücke in einem bestimmten der beiden Teile, in die  $b_1$  und  $b_2$  die Ringfläche zerlegen, von  $b_1$  nach  $b_2$  gehen. Nehmen wir in Fig. 10 diesen Teil als die Rückseite der Fläche an, dann hat die in der Figur dargestellte Kurve das Symbol  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Drehen wir den Durchlaufungssinn um, so erhalten wir für diese Kurve das Symbol  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Allgemein wird durch Umkehrung des Umlaufsinnnes aus dem Symbol  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  das Symbol  $\begin{pmatrix} -n \\ -\delta \end{pmatrix}$ . Endlich wollen wir noch dem Symbol  $\begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}$  ein System von  $|\delta|$  Parallelkurven zu  $a_1$  mit dem dem Vorzeichen von  $\delta$  entsprechenden Durchlaufungssinn zuordnen.

d) Jetzt betrachten wir die Wirkung der Abbildung  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$  (§ 4), der Verschraubungen etwa längs  $a_1$  und  $b_1$  in  $L_2$  resp.  $L_2'''$ , auf das Symbol  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$ . Nach dem, was wir in § 5 c) und § 2 über diese Abbildungen und die Abbildungen einer Zweilochkugel auf sich gesagt haben, wird durch  $\mathcal{A}_a$  die Zahl  $\delta$  in  $\delta + n$  verwandelt, durch  $\mathcal{A}_b$  wird  $n$  in  $n + \delta$  verwandelt. Wir können also durch  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$  auf das Symbol, wo  $n > 0$  angenommen sei, die Operation des *euklidischen Algorithmus* anwenden und erhalten so durch eine geeignete Reihenfolge von Operationen

$\mathcal{A}_a^{\pm 1}$  und  $\mathcal{A}_b^{\pm 1}$  aus  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  das Symbol  $\begin{pmatrix} (n, \delta) \\ \circ \end{pmatrix}^1$ , also  $(n, \delta)$  Parallelkurven von  $b_1$ , nach obiger Festsetzung mit positivem Durchlaufungssinn. Wie wir in § 4 gesehen haben, können wir durch  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$  aus dem gegebenen System auch  $(n, \delta)$  Parallelkurven von  $b_1$  mit negativem Durchlaufungssinn erhalten oder  $(n, \delta)$  Parallelkurven von  $a_1$  mit positivem oder negativem Durchlaufungssinn. Dem entspricht arithmetisch, dass wir durch unsere arithmetischen Operationen aus  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  sowohl  $\begin{pmatrix} \pm (n, \delta) \\ \circ \end{pmatrix}$  als auch  $\begin{pmatrix} \circ \\ \pm (n, \delta) \end{pmatrix}$  erhalten können.

Besteht das ursprüngliche Kurvensystem aus einer einzigen Kurve, so ist  $(n, \delta) = 1$ . Haben wir zwei Systeme je aus einer einzigen Kurve bestehend, so können wir die zu ihnen gehörigen Symbole durch den euklidischen Algorithmus oder  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$  gleichzeitig auf  $\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} n_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$  reduzieren.  $\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix}$  ist eine Parallelkurve zu  $b_1$ , schneidet also die zweite Kurve in  $|\delta_2|$  Punkten. Haben die beiden gegebenen Kurven nur einen Schnittpunkt, so ist also  $\delta_2 = \pm 1$ , und durch weitere Anwendung von  $\mathcal{A}_b$  erhalten wir die Symbole für die beiden Systeme transformiert in  $\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \circ \\ +1 \end{pmatrix}$ . Bei jeder Abbildung geht nun ein bestimmtes, mit Umlaufsinn versehenes Kurvenpaar in das durch  $\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \end{pmatrix}$  dargestellte, und dasselbe Paar, bei dem aber die zweite Kurve den umgekehrten Durchlaufungssinn hat, in das durch  $\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ \\ -1 \end{pmatrix}$  dargestellte Paar über. Jede Abbildung, die gleichzeitig  $\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \circ \\ 1 \end{pmatrix}$  oder  $\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \circ \\ -1 \end{pmatrix}$  in sich überführt, gehört nach § 4 a) zur Einheitsklasse. Also gehören zwei Abbildungen, die dieselben Kurven in  $\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \circ \\ 1 \end{pmatrix}$  resp.  $\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \circ \\ -1 \end{pmatrix}$  überführen, jedesmal zu derselben Klasse. Die Transformationen des arithmetischen Feldes bestimmen eindeutig die Abbildungsklassen. Andererseits, wenn es eine Abbildung giebt, die ein Kurvenpaar in  $\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \circ \\ 1 \end{pmatrix}$  überführt, dann kann es keine unter den hier betrachteten Abbildungen geben, die dieses Kurvenpaar in  $\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \circ \\ -1 \end{pmatrix}$  überführt. Denn sonst wäre eine der beiden Abbildungen eine die Indikatriz vertauschende Abbildung. Wir können

<sup>1</sup> Unter  $(n, \delta)$  wollen wir hier den positiven grössten gemeinschaftlichen Teiler von  $n$  und  $\delta$  verstehen.

demnach jedes Kurvenpaar, das durch eine Abbildung in  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  übergeht, auch durch  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$  in  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  überführen. Also ist in jeder Klasse von Abbildungen ein Element durch  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$  erzeugbar:  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$  erzeugen die Gruppe der Abbildungsklassen der Ringfläche.

Wir haben in § 4 zwei Relationen für  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$  aufgestellt. Durch folgende Überlegung finden wir eine weitere: Die Abbildung  $\mathcal{A}_a^{-1} \mathcal{A}_b \mathcal{A}_a^{-1}$  verwandelt die Kurve  $a_1$ , in bestimmtem Sinne durchlaufen, in  $b_1$  mit bestimmtem Durchlaufungsinn, also wird eine Schraubung längs  $a_1$  oder  $\mathcal{A}_a$  durch die Operation  $\mathcal{A}_a^{-1} \mathcal{A}_b \mathcal{A}_a^{-1}$  transformiert in eine Schraubung längs  $b_1$ . Dementsprechend ist

$$\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a \mathcal{A}_a^{-1} \mathcal{A}_a^{-1} \mathcal{A}_b \mathcal{A}_a^{-1} = \mathcal{A}_b,$$

eine Relation, die leicht in der Darstellung von  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$  durch lineare Transformationen zu bestätigen ist. Setzen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a &= \Sigma^{-1} T^{-1}, & \mathcal{A}_b &= \Sigma^{-2} T^{-1}, \text{ mit der Auflösung:} \\ \Sigma &= \mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1}, & T &= \mathcal{A}_a^{-1} \mathcal{A}_b \mathcal{A}_a^{-1} \end{aligned}$$

in diese Relationen ein, so erhalten wir

$$\Sigma^3 T^2 = 1.$$

Andererseits folgt aus unserer früher (§ 4) gewonnenen Relation

$$(\mathcal{A}_a^{-1} \mathcal{A}_b \mathcal{A}_a^{-1})^4 = 1$$

die Relation

$$T^4 = 1.$$

Wir haben also: die Gruppe der Abbildungsklassen wird erzeugt durch zwei Operationen  $\Sigma$  und  $T$ , für die die Relationen

$$T^4 = \Sigma^3 T^2 = 1$$

bestehen. Die Gruppe mit diesen beiden Relationen zwischen den Erzeugenden ist, wie bekannt, die homogene Modulgruppe, also die Gruppe der Abbildungsklassen der Ringfläche. In der Tat, auf Grund der beiden Relationen stellt man leicht eine Normalform für die Elemente her und beweist dann mit Hilfe der Eindeutigkeit der Kettenbruchentwicklung, dass die beiden Relationen für die Definition der Gruppe der Abbildungsklassen ausreichend sind, also diese Gruppe mit der homogenen Modulgruppe identisch ist.

e) *Kurvensysteme auf der Dreilochkugel.*

Betrachten wir zunächst nur die ungeschlossenen Kurven. Diese verbinden entweder zwei verschiedene Ränder miteinander oder zwei Punkte ein und desselben Randes. Im letzteren Falle bezeichnen wir sie als Selbstverbindung des betreffenden Randes. Da wir keine Kurven betrachten wollen, die auf eine Strecke des Randes zusammenziehbar sind, so muss eine zwei Punkte desselben Randes verbindende Kurve die beiden anderen Ränder von einander trennen, diese können also dann keine Verbindung miteinander haben. Sind  $n_1, n_2, n_3$  die Anzahlen der Endpunkte der Kurven des Systems auf den drei Rändern, so ist  $n_1 + n_2 + n_3$  gerade. Ist ferner  $v_{ik} = v_{ki}$  die Anzahl der Verbindungen des  $i^{\text{ten}}$  und  $k^{\text{ten}}$  Randes, dann ist

$$n_i = v_{ik} + v_{il} \quad \text{und} \quad v_{ik} = \frac{n_i + n_k - n_l}{2},$$

falls keine Selbstverbindungen auftreten oder, was dasselbe ist,  $n_i + n_k$  stets grösser als  $n_l$  ist. Ist aber z. B.

$$n_i > n_k + n_l$$

dann ist

$$\frac{n_i - n_k - n_l}{2} = v_{ii}$$

die Anzahl der Verbindungen des  $i^{\text{ten}}$  Randes mit sich selbst. Ferner ist in diesem Falle

$$v_{ki} = n_k, \quad v_{li} = n_l.$$

Durch  $n_1, n_2, n_3$  ist also in jedem Fall die Anzahl der Verbindungen von Rand zu Rand eindeutig gegeben und das ganze System bis auf homotope Transformationen bestimmt, falls bei der Homotopie die Ränder beweglich sind. D. h. wir können für gegebene Werte  $n_i$  durch nicht randfeste homotope Transformationen jedes System überführen in ein bestimmtes, das wir etwa Normalsystem nennen. Das haben wir in § 2 c) für Verbindungen von verschiedenen Rändern bewiesen. Es folgt aber auch leicht für Selbstverbindungen. Denn sei  $v_{11}$  eine solche Selbstverbindung etwa des ersten Randes, dann gibt es sich nicht schneidende Verbindungen  $v_{12}$  und  $v_{13}$  des ersten Randes mit dem zweiten und dritten Rande, die  $v_{11}$  nicht schneiden, und eine Verbindung  $v_{23}$  des zweiten mit dem dritten Rand, die  $v_{11}$  ein Mal schneidet. Ebenso ordnen wir einer zweiten Selbstverbindung  $v'_{11}$  drei Verbindungen  $v'_{12}$ ,  $v'_{13}$  und  $v'_{23}$  mit denselben Eigenschaften zu. Wenn wir aber  $v_{12}$ ,  $v_{13}$  und  $v_{23}$  nach § 2 c) gleichzeitig in  $v'_{12}$ ,  $v'_{13}$  und  $v'_{23}$  durch

Homotopie überführen, dann geht hierbei  $v_{11}$  in  $\bar{v}_{11}$  über, das  $v'_{12}$  und  $v'_{13}$  kein Mal und  $v'_{23}$  ein Mal schneidet. Also können wir  $\bar{v}_{11}$  und folglich auch  $v_{11}$  in  $v'_1$  homotop überführen. Ist aber  $v_{11}$  fest, dann sind  $v_{12}$  und  $v_{13}$  in  $v'_{12}$  und  $v'_{13}$  bei beweglichem zweiten und dritten Rand homotop überführbar.

Im Gegensatz zu den Verhältnissen auf der Zweilochkugel oder der geschlossenen Ringfläche ist bei der Dreilochkugel die Zuordnung der gegebenen Verbindungen zu den festen Verbindungen *niemals* zyklisch zu verändern. Denn bei einer Reihe sich nicht schneidender Verbindungen etwa des ersten mit dem zweiten Rande (s. Fig. 11) gibt es zwei ausgezeichnete Verbindungen  $v_{12,1}$  und  $v_{12,m}$ , längs denen aufgeschnitten  $L_3$  in zwei Teile zerfällt, eine  $L_1$ , auf der alle anderen Verbindungen liegen, und eine  $L_2$ . Kein Paar anderer Verbindungen

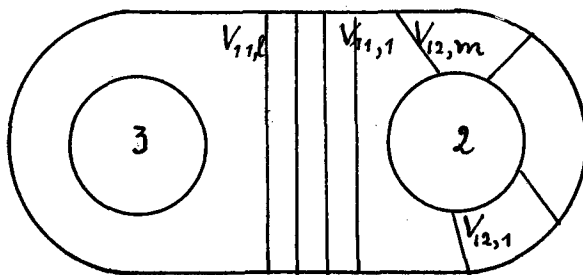


Fig. 11.

hat diese Eigenschaft, dass auf der durch Aufschneiden entstehenden  $L_2$  keine weiteren Verbindungen liegen.  $v_{12,1}$  ist auch nicht mit  $v_{12,m}$  zu vertauschen, weil dadurch die Indikatrix der Fläche umgekehrt würde. Ebenso gibt es auch unter den Selbstverbindungen eines Randes zwei ausgezeichnete nicht miteinander vertauschbare Verbindungen  $v_{11,1}$  und  $v_{11,l}$  (s. Fig. 11).

Durch die Zahlentripel  $n_1 n_2 n_3$  bezogen auf die drei Ränder werden alle Kurvensysteme, die keine geschlossenen Kurven enthalten, dargestellt. Diese letzteren erhalten wir, wenn wir nun wieder *die Ränder festhalten*. Zur Untersuchung benutzen wir dieselben Methoden wie bei der Zweilochkugel: Wir verbinden die drei Ränder  $r_1 r_2 r_3$  mit einander durch sich nicht schneidende Normalverbindungen  $v_{12} v_{23} v_{31}$  und schneiden die  $v_{ik}$  durch Parallelkurven  $r'_i$  und  $r'_k$  zu  $r_i$  und  $r_k$  in zusammen sechs Punkten (s. Fig. 12, 13). Die Normalverbindungen und die Randkurven bilden zwei Sechsecke  $S_1$  und  $S_2$ , ebenso Stücke der Normalverbindungen und die Parallelkurven die Sechsecke  $S'_1$  und  $S'_2$ , die Teile von  $S_1$  resp.  $S_2$  sind. Wir bestimmen nun  $n_i$  feste Punkte auf  $r_i$  und  $r'_i$ , und zwar legen wir, falls

$$n_k + n_l \geq n_i$$



ist (Fig. 12,  $i=1, k=2, l=3$ ) alle Punkte von  $r_i$  sowie von  $r'_i$  in das Sechseck  $S_1$ . Ist aber

$$n_k + n_l < n_i$$

(Fig. 13), dann legen wir

$$\frac{n_i - n_k - n_l}{2}$$

Punkte von  $r_i$  und  $r'_i$  in  $S_2$ ,

$$\frac{n_i + n_k + n_l}{2}$$

Punkte in  $S_1$ . Wir verbinden nun im ersten Falle die  $n_i$  Punkte auf  $r'_i$  mit

$$\frac{n_i + n_k - n_l}{2}$$

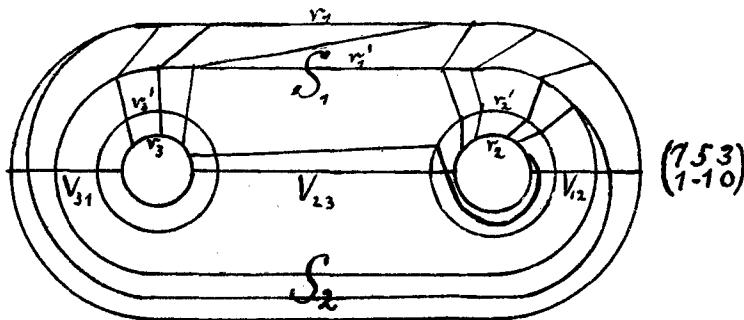


Fig. 12.

Punkten auf  $r'_k$  und

$$\frac{n_i + n_l - n_k}{2}$$

Punkten auf  $r'_i$  durch sich nicht schneidende Verbindungen in  $S'_1$ , im zweiten Falle verbinden wir

$$\frac{n_i - n_k - n_l}{2}$$

geeignete Punkte auf  $r'_i$ , die in  $S'_1$  liegen, mit den

$$\frac{n_i - n_k - n_l}{2}$$

Punkten auf  $r'_i$ , die in  $S'_2$  liegen, durch sich nicht schneidende Linien, die  $v_{ik}$  und  $v_{li}$  nicht und  $v_{kl}$  je ein Mal schneiden, ferner  $n_k$  Punkte auf  $r'_i$  mit den  $n_k$  Punkten auf  $r'_k$ ,  $n_l$  Punkte auf  $r'_i$  mit den  $n_l$  Punkten auf  $r'_l$  durch sich und die  $v_{ik}$  nicht schneidende, in  $S'_1$  gelegene Linien. In ein solches System von Verbindungslinien kann jedes System von Verbindungslinien der Ränder, soweit es in  $S'_1$  und  $S'_2$  liegt, homotop mit festen Rändern  $r_i$  aber beweglichen  $r'_i$  übergeführt werden.

Bleiben nur die Verbindungen in den drei  $L_{2,i}$  zwischen  $r_i$  und  $r'_i$ . Diese behandeln wir genau so wie oben und bestimmen  $\delta_i$  als algebraische Summe der Anzahlen der Überkreuzungen von  $v_{ik}$  in positivem und negativem Sinne, wobei als positive Seite von  $v_{ik}$  etwa die in  $S_1$  liegende bestimmt wird. Die Durchlaufung der Verbindungen sei von  $r_i$  nach  $r'_i$  gehend festgesetzt. Damit ist das Symbol  $\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix}$  bestimmt. Wir wollen zeigen, dass es sich bei homotopen Transformationen mit festem Rand nicht ändert.

Kommen keine Selbstverbindungen vor, dann können wir genau dieselben Betrachtungen anstellen wie oben bei der Zweilochkugel: Ist etwa  $\delta_1 = \nu_1 + \mu_1 n_1$ , dann bedeutet das, dass das System der Verbindungslinien aus dem (»ungestörten«) Normalsystem, das aus lauter  $v_{12}$  nicht schneidenden Verbindungen besteht,

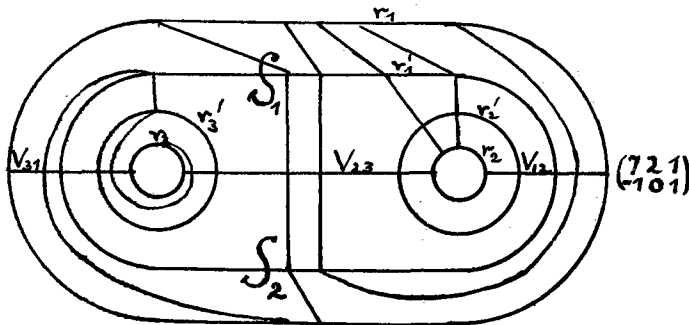


Fig. 13.

dadurch hervorgeht, dass erst  $\nu_1$  Verbindungen ein Mal  $r_1$  umkreisen und darauf das ganze System in demselben Sinne  $\mu_1$ -mal  $r_1$  umkreist. Diese Eigenschaft und damit  $\delta_1$  kann durch Homotopie nicht verändert werden, wie wir aus der Untersuchung der Verbindungen *verschiedener* Ränder bei der Dreilochkugel (§ 2 c)) wissen. Wir müssen aber noch den Fall der Selbstverbindungen betrachten, die in § 2 c) nicht untersucht wurden. Zunächst bemerken wir, dass zwar alle Selbstverbindungen eines Randes, wie wir oben sahen, bei beweglichen aber nicht vertauschbaren Rändern in einander übergeführt werden können, aber dabei können die Endpunkte nicht willkürlich einander zugeordnet werden. Denn (s. Fig. 14) die Selbstverbindung  $AB$ , von  $A$  nach  $B$  durchlaufen, bestimmt zwei verschiedene Umlaufsinne für die beiden  $L_2$  in die die  $L_3$  durch  $AB$  zerfällt. Da in beiden  $L_2$  miteinander nicht vertauschbare Ränder liegen, so können die beiden  $L_2$  nicht miteinander vertauscht werden. Ist also  $A'B'$  eine andere Selbstverbindung desselben Randes, so kann nur dann  $A'B'$  in  $AB$ ,  $A'$  in  $A$  und  $B'$  in  $B$  über-

gehen, falls  $A'B'$  von  $A'$  nach  $B'$  durchlaufen den beiden  $L_2$  resp. denselben Umlaufsinn gibt wie  $AB$  von  $A$  nach  $B$  durchlaufen. Wenn das bei dieser Zuordnung der Fall ist, dann ist es nicht der Fall, wenn  $A'$  in  $B$  und  $B'$  in  $A$  übergehen soll.

Ferner: Die Verbindungen des ersten und zweiten Randes etwa mit denselben Endpunkten gehen durch Abbildungen mit festen Rändern sämtlich in einander über. Die Selbstverbindungen des ersten Randes dagegen zerfallen in zwei Klassen (s. Fig. 15). Die Verbindung  $AXCYB \equiv v$  kann durch keine Abbildung mit festem ersten Rand in die Verbindung  $AX'CY'B \equiv v'$  übergeführt werden. Denn die beiden Teile  $ADB \equiv r_{11}$  und  $AEB \equiv r_{12}$  des ersten Randes bleiben

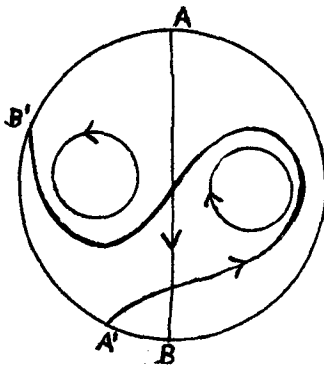


Fig. 14.

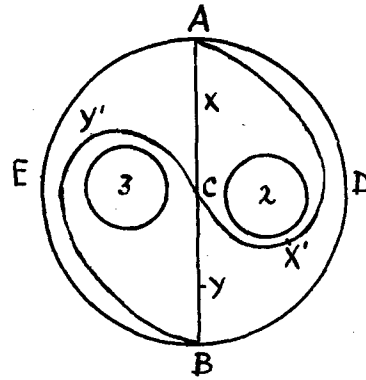


Fig. 15.

fest. Die geschlossene Kurve, die aus  $v$  und  $r_{11}$  zusammengesetzt ist, ist aber auf der  $L_3$  mit  $r_3$  homolog, die geschlossene Kurve, die aus  $v'$  und  $r_{11}$  zusammengesetzt ist, dagegen mit  $r_3$ , also ist durch *keine Abbildung mit festem Rande*  $v$  in  $v'$  überführbar. Machen wir wieder dieselben Überlegungen wie in § 2 b), so erkennen wir, dass alle Verbindungen von  $A$  und  $B$  (falls sie nicht mit einem Stück des Randes homotop sind, was ausgeschlossen ist,) aus  $v$  oder  $v'$  durch Umkreisungen des Randes  $r$  entstehen.

Es sei nun in dem Falle dass  $n_1 > n_2 + n_3$  ist, zunächst  $|\delta_1| < n_1$ . Wir wollen der Bequemlichkeit halber die Normalverbindung  $v_{31}$  durch  $v'_{31}$  als Normalverbindung ersetzen, wo jetzt alle festen Punkte auf  $r_1$  und die korrespondierenden Punkte auf  $r'_1$  in *einem* der Sechsecke  $S_1$  oder  $S_2$ , etwa  $S_1$ , liegen, die von  $v_{12}$ ,  $v_{23}$  und  $v'_{31}$  sowie den  $r_i$  gebildet werden (s. Fig. 16). Die Zahl  $\delta_1$  wird, weil sie durch Überkreuzungen von  $v_{12}$  definiert wird, hierdurch nicht geändert. Jetzt gibt es wieder genau  $\delta_1$  Verbindungsstrecken in der  $L_{2,1}$  zwischen  $r_1$  und  $r'_1$ , die einmal in Bezug auf  $v_{12}$  und  $v_{31}$   $r_1$  umkreisen. Soweit diese Strecken zu Verbindungen

mit anderen Rändern gehören, ist die Umkreisung, wie wir bereits wissen, durch Homotopie nicht zu zerstören. Wenn aber *eine* von den beiden zu einer Selbstverbindung gehörenden Strecken  $r_1$  umkreist, dann kann diese Selbstverbindung durch Abbildung mit festen Rändern nicht in eine Selbstverbindung ohne umkreisende Strecken übergeführt werden. Denn (s. Fig. 16) die ungestörte Selbstverbindung  $GM$  zusammen mit dem zu  $S_1$  gehörenden Teil von  $r_1$  ist etwa mit  $r_3$  homolog, die gestörte Selbstverbindung  $G'M'$  mit dem in  $S_1$  liegenden Teil von  $r_1$  zusammen ist aber  $r_2$  homolog. Werden aber beide zu einer Selbstverbindung gehörenden Strecken in  $L_{2,1}$  durch umkreisende Verbindungen ersetzt, dann entsteht die gestörte Selbstverbindung aus einer ungestörten Selbstverbindung durch

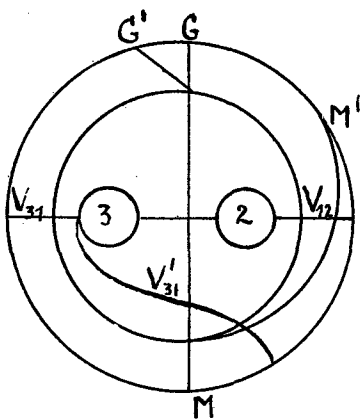


Fig. 16.

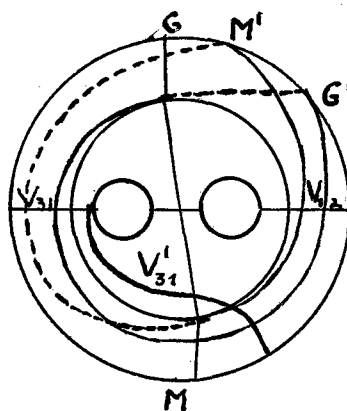


Fig. 17.

Verschraubung in  $L_{2,1}$  (s. Fig. 17). Dabei bedeutet das Wort »ungestört«, dass die betreffende Verbindung dieselben Endpunkte auf  $r_1$  und  $r'_1$  hat, aber in  $L_{2,1}$  die Strecken  $v_{12}$  (und  $v'_{31}$ ) nicht schneidet (die  $M'G'$  in eine ungestörte Verbindung verwandelnden Strecken in  $L_{2,1}$  sind in Figur 17 gestrichelt eingezeichnet). Zusammenfassend sehen wir also, dass die Zahl  $\delta_1$  der Überkreuzungen von  $v_{12}$  durch Homotopie mit festen Rändern auch in diesem Falle nicht geändert werden kann, denn sie bedeutet einen durch eine solche Homotopie nicht zu verändernden Unterschied der gegebenen Verbindungen des ersten Randes mit anderen Rändern oder mit sich selbst gegenüber den ungestörten Verbindungen. Und zwar ist dieser Unterschied für positives und negatives  $\delta$  nicht derselbe.

Ist endlich  $|\delta_1| > n_1$ , etwa  $\delta_1 = v_1 + \mu_1 n_1$  wo  $\mu_1$  dasselbe Vorzeichen hat wie  $\delta_1$ , dann haben wir zu den durch  $v_1$  gegebenen Veränderungen noch  $\mu_1$  Verschraubungen des ganzen Systems der Verbindungen in  $L_{2,1}$  mit demselben Vor-

zeichen, das  $\delta_1$  hat, hinzuzufügen.  $\delta_1$  ist nicht durch Homotopie mit festen Rändern zu verändern. Jedes System von Verbindungen liefert also unabhängig von Homotopie bei Zugrundelegung von festen Rändern eindeutig das Symbol

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix}.$$

Wir ordnen jetzt für  $n_i = 0$  (also keine Verbindung mit dem  $i^{\text{ten}}$  Rand) der Zahl  $\delta_i$   $|\delta_i|$  Parallelkurven zu  $r_i$  mit einem dem Vorzeichen von  $\delta_i$  entsprechenden Umlaufssinn zu. Dann ist auch jedem solchem Symbol eindeutig bis auf homotope Transformationen ein die festen  $n$  Punkte auf den drei Rändern verbindendes Kurvensystem zugeordnet, und umgekehrt wird jedes System von geschlossenen oder ungeschlossenen Kurven auf der Dreilochkugel durch ein solches Symbol dargestellt. Jedes solche Kurvensystem zerfällt übrigens höchstens in drei Abteilungen von lauter bei beweglichen Rändern homotopen Kurven. Die Anzahlen der Glieder in diesen Abteilungen sind für die verschiedenen Fälle

$$\frac{n_i + n_k - n_l}{2} \text{ oder } \frac{n_i - n_k - n_l}{2} \text{ und } n_k \text{ oder endlich } \delta_i \text{ (für } n_i = 0).$$

Die Abbildungen der  $L_3$  auf sich sind uns bekannt, sie bestehen in Verschraubungen längs der drei Ränder. Sie transformieren unser Symbol in

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \delta_1 + k_1 n_1 & \delta_2 + k_2 n_2 & \delta_3 + k_3 n_3 \end{pmatrix},$$

wo die  $k_i$  ganze positive oder negative Zahlen oder Null sind.

Zum Schluss bemerken wir noch, dass wir hier den  $n_i$  kein Vorzeichen geben können, wie das bei der Ringfläche möglich war.

## § 6.

### Das arithmetische Feld oder die Kurvensysteme auf dem Einlochring.

a) Wir zerlegen den Einlochring  $R_1^1$  ebenso wie die geschlossene Ringfläche  $R_1$  (s. § 5 c)) durch zwei geschlossene nicht zerstückelnde, sich nicht schneidende Kurven  $a_1$  und  $a_2$  in eine Zweilochkugel  $L_{2,a}$  und eine Dreilochkugel  $L_{3,a}$  (s. Fig. 18). Ein Kurvensystem in  $R_1^1$  hat etwa  $n$  Schnittpunkte sowohl mit  $a_1$  wie mit  $a_2$  und  $2q$  Endpunkte auf dem Rande  $r$ . Wir können durch homotope Transformationen mit beweglichen Rändern auf  $L_{3,a}$  das Kurvensystem in  $L_{3,a}$  überführen in ein solches mit  $n$  festen Punkten je auf  $a_1$  und  $a_2$  und  $2q$  festen Punkten auf dem Rande  $r$  und festen Verbindungen. Diese letzteren mögen solche Kurven sein, die

die Kurven  $b_1$  und  $b_2$  nicht schneiden, oder soweit sie Selbstverbindungen von  $r$  in  $L_{3,a}$  sind, je einen Punkt mit  $b_1$  und  $b_2$  gemeinsam haben. Und zwar ist diese Zuordnung der gegebenen zu den festen Verbindungen nach dem, was wir über die Dreilochkugel in § 5 e) sagten, eindeutig. Selbstverbindungen von  $a_1$  oder  $a_2$  in  $L_{3,a}$  können nicht vorkommen, da  $n$  nicht grösser ist als  $n + 2q$ . Wohl aber haben wir Selbstverbindungen des Randes  $r$ , falls  $q > n$  ist.

Es bleiben noch die Verbindungen der  $n$  Punkte auf  $a_1$  und der  $n$  Punkte auf  $a_2$  in  $L_{2,a}$ . Diese werden durch eine positive oder negative Zahl  $\delta$  festgelegt, (s. § 5 c)). Ebenso wie bei der Ringfläche wollen wir jetzt den auf  $R_1$

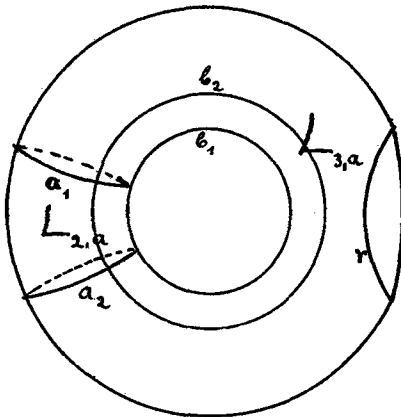


Fig. 18.

laufenden  $a_1$  und  $a_2$  schneidenden Kurven übereinstimmenden Durchlaufungssinn und damit auch  $n$  ein Vorzeichen geben. Aber hier sind nicht alle Kurven homotop. Wir müssen deshalb etwas anders wie bei der geschlossenen Ringfläche die Übereinstimmung der Vorzeichen erreichen. Wir bestimmen, dass sämtliche Kurven, die  $a_1$  schneiden,  $a_1$  in demselben Sinne überkreuzen. Das können wir erreichen, weil eine Kurve überhaupt nur ein Mal  $a_1$  überkreuzt oder aber (abgesehen von durch Homotopie wegzuschaffenden Punkten)  $a_1$ , die Kurve  $b_1$

umkreisend, stets in demselben Sinne überkreuzt. (Hier ist der Punkt, wo die Festsetzung des Vorzeichens für grösseres Geschlecht scheitert.) Durch diese Festsetzung bekommt  $n$  ein Vorzeichen, positiv bei positiver Überkreuzung, negativ bei negativer Überkreuzung. Durch diese Festsetzung werden zugleich auch alle diese Kurven in demselben Sinne  $b_1$  überkreuzen. Für diejenigen, die  $a_1$  nicht schneiden, nämlich die Selbstverbindungen des Randes  $r$  in  $L_{3,a}$  setzen wir die Durchlaufung so fest, dass die Überkreuzung von  $b_1$  durch alle Kurven in demselben Sinne stattfindet. Auf diese Weise ist  $\delta$  analog wie bei der geschlossenen Ringfläche definierbar. — So erhalten wir durch  $\binom{n}{\delta} q$ , wo  $n$  und  $\delta$  beliebige ganze Zahlen,  $q$  eine Anzahl ist, ein beliebiges mit Durchlaufungssinn versehenes Kurvensystem auf  $R_1$ , wenn wir von Parallelkurven zum Rand absehen. Eine Ausnahme bildet nur das durch das Symbol  $\binom{n}{0} q$  dargestellte Kurvensystem. Hier ist die Durchlaufung der  $q - |n|$  Selbstverbindungen des Randes willkürlich.

Um auch die Parallelkurven zu  $r$  zu bekommen, müssten wir Homotopieen mit festem Rand betrachten (ebenso wie bei der  $L_3$ , § 5 e)) und eine Drehungszahl für den Rand einführen. Das geht genau so wie oben, aber wir brauchen es im Späteren nicht und wollen deshalb diese Kurven unberücksichtigt lassen. Wir werden aber weiter unten (s. c) in diesem §) über die Abbildungen mit festem Rand einen Satz ableiten.

Das von uns eingeführte arithmetische Feld für die  $R_1$  ist dreidimensional und enthält als Punkte alle mit Durchlaufungssinn versehenen Kurvensysteme des  $R_1$  mit Ausnahme der Parallelkurven zu  $r$ .

b) *Transformationen des arithmetischen Feldes oder des Symboles  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix} q$  durch die Abbildungen des Einlochringes auf sich.*

Die Abbildungen sind dieselben wie die der Ringfläche (s. § 4 b)), die Abbildungsklassen werden erzeugt durch Verschraubungen  $\mathcal{A}_a$  längs einer Parallelkurve  $a$  zu  $a_1$  und  $\mathcal{A}_b$  längs der  $a$  ein Mal schneidenden Kurve  $b$ . Wir denken uns die Verschraubungen  $\mathcal{A}_a$  in der  $L_{2,a}$  zwischen  $a_1$  und  $a_2$  ausgeführt, und die Verschraubungen  $\mathcal{A}_b$  in der  $L_{2,b}$  zwischen  $b_1$  und  $b_2$ . Diese Abbildungen induzieren in den Symbolen  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  der Ringfläche  $R$  die Operationen des euklidischen Algorithmus. Wie wirken diese Abbildungen auf die Symbole  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix} q$ ? Die Wirkung von  $\mathcal{A}_a$  ist dieselbe wie auf das Symbol  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$ , denn durch sie wird nur die Zweilochkugel  $L_{2,a}$  affiziert. Es ist also  $\mathcal{A}_a \left( \begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix} q \right) = \begin{pmatrix} n \\ \delta + n \end{pmatrix} q$ . Wir wollen aber nun nicht die Wirkung von  $\mathcal{A}_b$  betrachten, sondern die von  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a$ . Diese Transformation führt  $a$  in  $b^{-1}$ ,  $b$  in  $a$  über (s. § 4 a)). Nun ist  $|n|$  stets die irreduzible Anzahl der Schnittpunkte des Kurvensystems mit  $a$ , dagegen  $\delta$  nur dann die irreduzible Anzahl der Schnittpunkte des Systems mit  $b$ , falls  $|n| \geq q$  ist, d. h. wenn keine Selbstverbindungen des Randes in  $L_{3,a}$  vorliegen. Nehmen wir nun an,  $q$  sei nicht grösser als  $|n|$  und  $|\delta|$ , so ist  $|\delta|$  die Anzahl der Schnittpunkte des Systems mit  $b$ , also nach der Transformation  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a$  die Anzahl der Schnittpunkte mit  $a$ , also gleich  $|n'|$ , wenn  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a \left( \begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix} q \right) = \begin{pmatrix} n' \\ \delta' \end{pmatrix} q$  gesetzt ist.  $|n|$  ist die Anzahl der Schnittpunkte des Systems mit  $a$ , also nach der Abbildung gleich der Anzahl der Schnittpunkte mit  $b$ , also gleich  $|\delta'|$ , weil  $|n'| = |\delta'|$  nach Voraussetzung  $\geq q$  ist. Die Vorzeichen von  $\delta$  und  $n$  sind leicht

zu bestimmen, wenn man berücksichtigt, dass  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a$  als eine Drehung des Systems  $a, b$  angesehen werden kann. Es ergibt sich so, ebenso wie bei der geschlossenen Ringfläche,  $n' = -\delta$ ,  $\delta' = n$ . Durch fortgesetzte Anwendung der Operationen  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_a^{-1}$  und der Operation  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a$  können wir das Symbol  $\binom{n}{\delta} q$  verwandeln in  $\binom{n'}{\delta'} q$ , wo nun  $|\delta'| < q$  ist. So lange  $q$  nicht grösser ist als  $|n|$  oder  $|\delta|$ , gilt der euklidische Algorithmus. Wir betrachten also jetzt den Fall  $|n| > q > |\delta|$ . Sei wieder  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a \left( \binom{n}{\delta} q \right) \equiv \binom{n'}{\delta'} q$  so ist noch

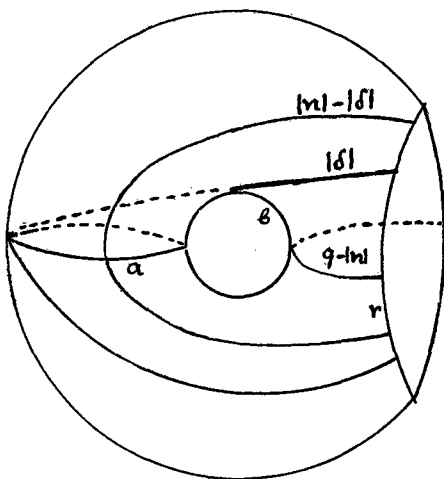


Fig. 19.

immer  $|n'| = |\delta|$ .  $|n|$  ist die Anzahl der Schnittpunkte des transformierten Systems mit  $b$ , aber da jetzt  $|n'| < q$  ist, so ist diese Anzahl auch gleich  $|\delta'| + q - |n'|$ , denn  $q - |n'|$  ist die Anzahl der Selbstverbindungen des Randes in  $L_{3,a}$  für das transformierte System. Also ist  $|\delta'| = |n| + |\delta| - q$ . Das Vorzeichen ist auch unschwer zu bestimmen, und es ergibt sich, dass  $n'$  das umgekehrte Vorzeichen von  $\delta$  hat,  $\delta'$  das Vorzeichen von  $n$ . Durch diese neue Operation ist aber  $|n| < q$  geworden, und durch eine geeignete Anzahl von Operationen  $\mathcal{A}_a$  oder  $\mathcal{A}_a^{-1}$  wird jetzt auch  $|\delta| < |n| < q$ , sodass

wir jetzt den Fall zu behandeln haben  $q > |n| > |\delta|$ . Wir bezeichnen wieder  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a \left( \binom{n}{\delta} q \right)$  mit  $\binom{n'}{\delta'} q$ . Die Anzahl der Schnittpunkte mit  $b$  ist jetzt  $|\delta| + q - |n|$ , also ist  $|n'| = |\delta| + q - |n|$ . Die Anzahl der Selbstverbindungen des Randes in  $L_{3,a}$  für das transformierte System ist  $q - |n'|$  also  $= |n| - |\delta|$ . Also ist  $|\delta'| = |n| - (|n| - |\delta|) = |\delta|$ . Über die Vorzeichen gilt dasselbe wie oben.

Es ist nun leicht zu sehen, dass es nur 12 verschiedene Kurvensysteme gibt, die die Bedingung  $q > |n| > |\delta|$  erfüllen und ineinander transformierbar sind. Denn in diesem Falle haben wir (s. Fig. 19)  $|n| - |\delta|$  Verbindungen von zwei Punkten auf  $r$ , die  $a$  ein Mal und  $b$  kein Mal schneiden und miteinander homotop sind,  $|\delta|$  Verbindungen, die  $a$  und  $b$  ein Mal schneiden und miteinander homotop sind und endlich  $q - |n|$  Verbindungen, die nur  $b$  ein Mal schneiden (die Selbst-



verbindungen von  $r$  in  $L_{3,a}$ ) und auch miteinander homotop sind. Das Kurvensystem zerfällt also in 3 *Abteilungen* und es muss also, wenn  $\begin{pmatrix} n' \\ \delta' \end{pmatrix} q$  ein Symbol ist, das in  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix} q$  transformierbar ist und dieselben Ungleichungen befriedigt,  $|n'| - |\delta'|$  und  $|\delta'|$  je gleich einer von den 3 Anzahlen für die 3 *Abteilungen* sein. Durch die Wahl der beiden *Abteilungen* und die Zuordnung zu  $|n'| - |\delta'|$  und  $|\delta'|$  sind aber  $|n'|$  und  $|\delta'|$  bestimmt. Also haben wir im ganzen 6 verschiedene Möglichkeiten für das Paar  $|n'|, |\delta'|$  und da die zweimal ausgeführte Abbildung  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a$  bei  $n$  und  $\delta$  das Vorzeichen gleichzeitig ändert, haben wir, wie behauptet, 12 verschiedene Möglichkeiten. Diese sind durch Anwendung von  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_a$ , wie wir gleich sehen werden, zu erreichen, sodass wir das Resultat haben, dass wir durch  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a$  alle Abbildungen des gelochten Ringes auf sich erzeugen können. Das ist nur eine Bestätigung des früheren Resultates, da aus der Erzeugbarkeit durch  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$  unmittelbar die Erzeugbarkeit durch  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a$  folgt. Gleichzeitig folgt, dass jedes Kurvensystem auf dem Einlochring aus 3 *Abteilungen* besteht, deren Anzahl wir durch unser Rekursionsverfahren bestimmen können (siehe die Beispiele).

Es fehlt noch die Übersicht über die Erzeugung der 12 verschiedenen Möglichkeiten für  $n$  und  $\delta$ , falls  $q > |n| > |\delta|$  ist. Das werden wir gleichzeitig mit einer allgemeinen *geometrischen Darstellung des arithmetischen Feldes und der durch die Abbildungen induzierten Transformationen* erledigen. Wir beschränken uns aber auf die Darstellung der Transformationen von  $|n|$  und  $|\delta|$ . Wir konstruieren für diese Anzahlen ein gewöhnliches Quadratgitter (s. Fig. 20 und 21) und zeichnen das Quadrat  $OQRS$  mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(q, 0)$ ,  $(q, q)$ ,  $(0, q)$  aus. Dann stellen in dem Winkelraum  $q \leq |n|$ ,  $q \leq |\delta|$  die gewöhnlichen Operationen des euklidischen Algorithmus

$$\begin{pmatrix} |n| \\ |\delta| \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} |\delta| \\ |n| \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} |n| \\ |\delta| \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} |n| \\ |\delta| \pm |n| \end{pmatrix}$$

solche Transformationen dar. Durch diese Operationen kann man von jedem Gitterpunkt des Winkelraumes in den rechtwinkligen Halbstreifen  $|n| \geq q > |\delta|$  gelangen. Aus diesem wieder durch die Operation

$$\begin{pmatrix} |n| \\ |\delta| \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} |\delta| \\ |n| - q + |\delta| \end{pmatrix}$$

in den schiefwinkligen Halbstreifen  $q > |n| < |\delta|$ . Aus diesem endlich, falls



liche Teiler von  $n$  und  $\delta$  kleiner als  $q$  ist, gelangen also durch unsere Operationen in eines der 6 Teildreiecke. Alle Kurvensysteme, für die  $(n, \delta) \geq q$  ist, sind transformierbar in Kurvensysteme, bestehend aus  $(n, \delta) - q$  geschlossenen zu  $b_i$  parallelen Kurven und  $q$  Selbstverbindungen des Randes in  $L_{3,b}$ . Denn ein solches System wird durch  $\begin{pmatrix} n \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$  für  $|n| > q$  dargestellt. Eines der Teildreiecke zusammen mit der Halbgeraden  $\delta = 0$ ,  $|n| > q$  stellt also den Fundamentalbereich auf dem arithmetischen Feld oder für die Kurvensysteme bei Transformationen mit beweglichem Rand dar. Der Fundamentalbereich bei der geschlossenen Ringfläche ist durch die Halbgerade  $\delta = 0$  gegeben. Denn man kann jedes  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  auf  $\begin{pmatrix} (n, \delta) \\ \sigma \end{pmatrix}$  reduzieren. Wir bemerken noch, dass je zwei verschiedene Gitterpunkte in ein und demselben Teildreieck zwei verschiedene Tripel von Abteilungs- zahlen ergeben.

*Beispiele:* 1)  $\begin{pmatrix} 25 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,  $|n|$  und  $|\delta| > q$ . Man erhält durch  $A_a A_b^{-1} A_a$  für die absoluten Werte  $\begin{pmatrix} |\delta| \\ |n| \\ q \end{pmatrix}$ , d. h.  $\begin{pmatrix} 11 \\ 25 \\ 7 \end{pmatrix}$ , durch  $A_a^{-2}$ :  $\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ . Jetzt sind wir im Bereich  $n > q > \delta$ , also erhalten wir durch  $A_a A_b^{-1} A_a$  für die absoluten Werte  $\begin{pmatrix} |\delta| \\ |n| - q + |\delta| \end{pmatrix}$  d. h.  $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$  und durch  $A_a^{-2}$ :  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ . Damit sind wir in einem der Teildreiecke und erhalten also die Abteilungs- zahlen:  $|\delta| = 1$ ,  $|n| - |\delta| = 2$ ,  $q - |n| = 4$ . Das werden wir durch direkte Betrachtung des Kurvensystems  $\begin{pmatrix} 25 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}$  bestätigen: Wir numerieren die Punkte auf  $a_1$  und  $a_2$  mit 1 bis 25. Die ersten 7 Punkte auf  $a_1$  und  $a_2$  haben Verbindungslinien in  $L_{3,a}$  mit  $r$ , die übrigen sind in  $L_{3,a}$  mit  $a_2$  resp.  $a_1$  verbunden. Der Übergang von  $a_1$  nach  $a_2$  in  $L_{2,a}$  geschieht durch Addition von 11 modulo 25, der Übergang von  $a_1$  nach  $a_2$  in  $L_{3,a}$  durch Verbindung gleich numerierter Punkte. Wir gehen von  $r$  nach dem Punkt 1 auf  $a_1$  und erhalten dann der Reihe nach:

1 (auf  $a_1$ ), 12, 23, 9, 20, 6 auf  $a_2$  und, da dieser Punkt in  $L_{3,a}$  mit  $r$  verbunden ist, ist 1 auf  $a_1$  mit  $r$  verbunden nach 4-maliger Umkreisung von  $b$ , 2-maliger Umkreisung von  $a$ .

Von  $r$  nach 2 gehend, erhalten wir eine parallele Kurve: 2, 13, 24, 10, 21, 7; dagegen von  $r$  nach 3 gehend die Reihe

3, 14, 25, 11, 22, 8, 19, 5, also 6-malige Umkreisung von  $b$ , 3-malige Umkreisung von  $a$ ;

von  $r$  nach 4, 5, 6, 7 gehend erhalten wir die vier gleichgebauten Reihen:

4, 15, 1

5, 16, 2

6, 17, 3

7, 18, 4, also je eine 1-malige Umkreisung von  $b$  und eine 1-malige Umkreisung von  $a$ . Wir erhalten also in der Tat 3 Abteilungen mit resp. 2, 1, 4 Gliedern, wie wir durch unser arithmetisches Verfahren oben bereits gefunden hatten. Wir bemerken noch, dass die, hier aus topologischen Betrachtungen hervorgehende, Tatsache, dass bei dem direkten Prozess, den wir zuletzt ausführten, immer nur 3 Abteilungen mit verschieden langen Reihen herauskommen, einen rein arithmetischen Satz darstellt. Der rein arithmetische Beweis wird wohl kaum anders zu führen sein, als dass man nachweist, dass bei unserm »Verfahren« die Abteilungszahlen erhalten bleiben.

$$2) \begin{pmatrix} 23 \\ 11 \end{pmatrix} 7 \rightarrow \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix} 7 \rightarrow \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} 7 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} 7 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 7.$$

Wir haben also nur 2 Abteilungen mit einem Glied, resp. mit 6 Gliedern.

Wir bilden zur Kontrolle die Reihen

1, 12, 23, 11, 22, 10, 21, 9, 20, 8, 19, 7;

2, 13, 1

3, 14, 2

4, 15, 3

5, 16, 4

6, 17, 5

7, 18, 6,

die in der Tat in 2 verschiedene Abteilungen mit einem Glied, resp. mit 6 Gliedern zerfallen.

Schliesslich bemerken wir noch, dass ein gemeinschaftlicher Teiler von  $n$ ,  $\delta$  und  $q$  bei dem Verfahren nicht verloren geht und auch in den Abteilungszahlen auftritt. Es stellt demnach das Symbol  $\begin{pmatrix} q^n \\ q \delta \end{pmatrix} q q$  die Kurven des Symbols  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix} q$  dar, jede mit  $q - 1$  Parallelkurven versehen. Wenn geschlossene Kurven, die nicht Parallelkurven zu  $r$  sind, auftreten, dann kann es nur 2 Abteilungen geben. Denn schneiden wir  $R_1^!$  längs einer solchen Kurve, etwa  $c$  auf, so entsteht eine  $L_{3,c}$ . Kurven auf dieser  $L_{3,c}$ , die mit zwei Rändern keinen Punkt gemeinsam haben und nicht parallel mit dem dritten Rand sind, sind entweder Parallel-

kurven zu diesen Rändern, also auf  $R_1^1$  homotop mit  $c$ , oder Selbstverbindungen des dritten Randes. Die solchen Kurvensystemen entsprechenden Symbole sind stets von der Art, dass entweder  $n = 0$  oder  $(n, d) > q$  ist.

Wenn keine geschlossenen Kurven auftreten, dann sind alle Kurven begrenzt durch die  $2q$  Punkte auf  $r$ . Diese zerfallen, wie wir wissen, in drei Paare von Abteilungen. Wir sehen aus Fig. 19, dass ein Paar zusammengehöriger Punkte einer Abteilung jedes Paar zusammengehöriger Punkte einer anderen Abteilung auf  $r$  trennt. Die Paare derselben Abteilung trennen sich nicht. Dies entspricht genau dem über Polyeder mit *einer* Ecke ohne Einecke mit  $p = 1$  früher Entwickelten.<sup>1</sup> Der *einen* Ecke entspricht hier der Rand. Dieses Resultat ist ganz leicht ohne Benutzung der Symbole für die Kurvensysteme, d. h. des arithmetischen Feldes direkt abzuleiten.

c) *Einlochring  $R_1^1$  mit festem Rand.* Auf  $R_1^1$  gehört bei beweglichem Rand die Abbildung  $T^4 = (\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a)^4$  zur Einheitsklasse. Es ist leicht zu sehen, dass  $T^4$  bei festem Rand eine Schraubung längs des Randes darstellt. In der Tat transformiert eine Abbildung der Klasse  $T$  die Verbindungslinie  $A_1BA_2$  (s. Fig. 22 u. 23) in  $A_1CA_2$ , eine Abbildung der Klasse  $T^2$   $A_1BA_2$  in  $A_1D_1E_2BE_1D_2A_2$ , eine

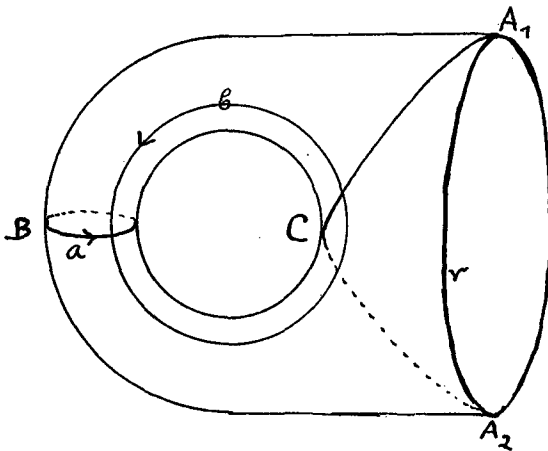


Fig. 22.

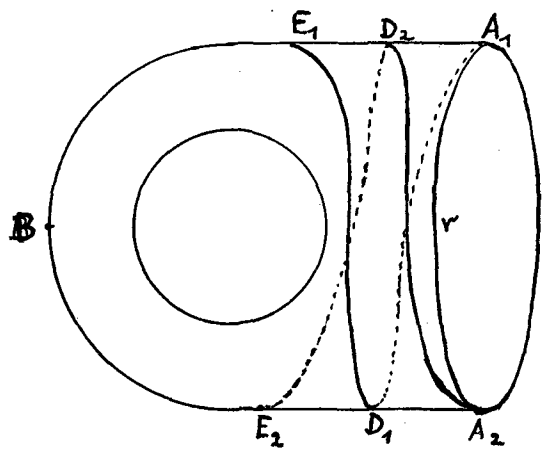


Fig. 23.

Abbildung der Klasse  $T^4$  endlich  $A_1BA_2$  in  $A_1D_1E_1BE_2D_2A_2$ , die durch Schraubung  $\mathcal{A}_r$  längs des Randes aus  $A_1BA_2$  entsteht. Also führt  $T^4 \mathcal{A}_r^{-1}$  die Kurven  $a$  und  $b$  sowie die Verbindungslinie  $A_1BA_2$  in sich über. Schneiden wir  $R_1^1$  längs  $A_1BA_2$  auf, so entsteht eine  $L_2$ , für die die einzigen Abbildungen auf sich

<sup>1</sup> s. Act. math. Bd 67. S. 165 ff.

Schraubungen längs des Randes, d. h. Schraubungen längs  $b$  sind. Aber durch diese Schraubungen geht  $a$  *nicht* in sich über, also gehört  $T^4 \mathcal{A}_r^{-1}$  zur Einheitsklasse der Abbildungen des  $R_1^!$  auf sich. Also gehört  $T^4$  zur Klasse von  $\mathcal{A}_r$  und stellt eine Schraubung längs des Randes dar.

Die Gruppe der Abbildungsklassen für  $R_1^!$  bei festem Rand wird erzeugt durch die beiden Abbildungen  $\Sigma$  und  $T$  mit der Relation  $\Sigma^3 T^2 = 1$  (s. § 5 d). Denn diese Relation gilt auch bei festem Rand, weil die Relation  $\Sigma^3 T^2 = 1$  ausdrückt, dass durch eine Abbildung (nämlich  $\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b^{-1} \mathcal{A}_a$ ) die Schraubung  $\mathcal{A}_b$  in die Schraubung  $\mathcal{A}_a^{-1}$  übergeht. Das muss auch für festen Rand gelten. Denn durch eine Abbildung bei festem oder beweglichem Rand geht eine Schraubung stets in eine Schraubung über. Also kann  $\mathcal{A}_b$  nicht in die Schraubung  $\mathcal{A}_a^{-1}$  verbunden mit einer Schraubung längs des Randes übergehen. Dagegen gilt die zweite Relation  $T^4 = 1$  nicht. Denn  $A_1 B A_2$  und  $T^4(A_1 B A_2)$  sind bei festgehaltenem Rand nicht homotop, wie man durch Betrachtung der universellen Überlagerungsfläche von  $R_1^!$  sofort erkennt. Durch Normaldarstellung der durch  $\Sigma$  und  $T$  erzeugten Elemente auf Grund der Relation  $\Sigma^3 T^2 = 1$  ergibt sich dann, dass diese Relation allein die Gruppe der Abbildungsklassen für den  $R_1^!$  definiert, dass also *diese Gruppe mit der Gruppe der Kleblattschlinge identisch ist*.

## § 7.

### Arithmetisches Feld und Kurvensysteme auf der Vierlochkugel.

a) *Systeme geschlossener Kurven auf der  $L_4$  (Fig. 24).*

Wir zerlegen die  $L_4$  durch zwei parallele Kurven  $a_1$  und  $a_2$  in zwei Dreilochkugeln  $L_{3,a_1}$  und  $L_{3,a_2}$  und eine Zweilochkugel  $L_{2,a}$ . Da die Kurven der Systeme alle geschlossen sein sollen, so sind auf den beiden Dreilochkugeln alle Kurven, die nicht parallel zu den Rändern oder zu  $a_1$  und  $a_2$  sind, Selbstverbindungen des Randes  $a_1$  resp.  $a_2$ . Wir verbinden die vier Ränder der  $L_4$  mit Normalverbindungen  $V_{12}$ ,  $V_{23}$ ,  $V_{34}$ ,  $V_{41}$ .  $V_{23}$  und  $V_{41}$  mögen  $a_1$  und  $a_2$  je in einem Punkt schneiden. Die Kurven des Systems haben etwa  $2n$  Punkte je mit  $a_1$  und  $a_2$  gemeinsam. Dann legen wir je  $n$  von den auf  $a_1$  und  $a_2$  gelegenen Punkten auf einen der beiden Teile zwischen  $V_{23}$  und  $V_{41}$  und legen in  $L_{3,a_1}$  und  $L_{3,a_2}$  Verbindungen je zweier solcher Punkte fest, die  $V_{12}$  resp.  $V_{34}$  ein Mal,  $V_{23}$  und  $V_{41}$  kein Mal schneiden. Jedes System geschlossener Kurven auf  $L_4$ , das keine Kurven parallel zu den Rändern oder  $a_1$  und  $a_2$  hat, ist innerhalb  $L_{3,a_1}$  und  $L_{3,a_2}$  homotop mit *beweglichen Rändern* auf diese Verbindungen zu transformieren.

Bleiben nur die Verbindungen in der  $L_{2,a}$ , die genau so wie die vorigen Male durch eine Zahl  $\delta$  festgelegt werden. Die Kurven des Systems werden also durch das Symbol  $\binom{n}{\delta}$  gegeben, wo  $\delta$  eine positive oder negative ganze Zahl oder Null,  $n$  aber eine Anzahl ist. Dem Symbol  $\binom{0}{\delta}$  ordnen wir  $\delta$  mit Durchlaufungssinn entsprechend dem Vorzeichen von  $\delta$  versehene Parallelkurven zu  $a_1$  zu. Den Kurven im allgemeinen einen Durchlaufungssinn zu geben, ist ohne weiteres nicht möglich; wir kommen später darauf zurück. Durch das Symbol  $\binom{n}{\delta}$  werden alle Systeme geschlossener Kurven auf der  $L_4$  dargestellt, die keine Parallelkurven zu den Rändern enthalten. Und zwar sind  $n$  und  $\delta$  unabhängig von homotopen Transformationen mit beweglichen (aber nicht vertauschbaren) Rändern. Dies kann man durch direkte topologische Betrachtungen, vielleicht etwas umständlich nachweisen. Bequemer ist es wieder die Darstellung durch die Fundamentalgruppe der  $L_4$  zu benutzen, also die freie Gruppe gebildet aus 3 von den Operationen  $r_1, r_2, r_3, r_4$ , die jetzt Umkreisungen der 4 Randkurven darstellen mögen. Es ist in der Tat leicht, aus unserem Symbol die Darstellung des Kurvensystems in der Fundamentalgruppe zu gewinnen. Wir wollen aber diese Aufgabe zunächst dadurch vereinfachen, dass wir voraussetzen, dass unser Kurvensystem aus einer einzigen Kurve besteht. Wir werden später sehen, dass, ebenso wie bei der Ringfläche, das Symbol  $\binom{n}{\delta}$  dann und nur dann eine einzige Kurve darstellt, falls  $(n, \delta) = 1$ , ist, dass ferner das allgemeine Kurvensystem aus  $(n, \delta)$  Parallelkurven besteht. Für den Nachweis unserer Behauptung der Homotopieinvarianz von  $\binom{n}{\delta}$  genügt es also, den Fall  $(n, \delta) = 1$  zu betrachten. Ferner setzen wir zunächst  $0 < \delta < n$  voraus. Dann ergibt sich durch Betrachtung des Verlaufs in der aufgeschnittenen Fläche (vgl. oben S. 147 und Fig. 25, wo  $\binom{n}{\delta} = \binom{5}{2}$  ist), dass die Kurve  $\binom{n}{\delta}$  dargestellt wird durch einen  $2n$ -gliedrigen Ausdruck in den Erzeugenden  $r_1^{\pm 1} r_3^{\pm 1} r_4^{\pm 1}$ . Die Erzeugende  $r_3^{\pm 1}$  kommt in diesem Ausdruck  $\delta$ -mal vor, die Erzeugende  $r_4^{\pm 1}$  kommt  $n - \delta$ -mal und  $r_1^{\pm 1}$  kommt  $n$ -mal vor. Da eine Transformation, wegen der Freiheit der Erzeugenden, nur eine zyklische Umordnung der Glieder des Ausdrucks bewirkt (falls in dem zyklisch geschriebenen Ausdruck auf einander folgende Glieder von der Form  $\mathcal{J} \mathcal{J}^{-1}$  weggelassen werden), so sind  $n$  und  $\delta$  durch diesen Ausdruck oder irgend eine seiner Transformierten eindeutig

bestimmt, d. h.  $n$  und  $\delta$  bleiben in diesem Falle bei homotopen Transformationen ungeändert. Ist  $|\delta| < n$  aber  $0 > \delta$ , dann gilt dieselbe Überlegung, wenn wir statt der Erzeugenden  $r_3$  die Erzeugende  $r_2$  einführen und die Fundamentalgruppe durch die freie Gruppe der Erzeugenden  $r_1 r_2 r_3$  darstellen.

Es bleibt noch der Fall  $|\delta| > n$ . Diesen führen wir durch eine »Koordinatentransformation« auf den vorigen zurück, die überhaupt bei unseren Betrachtungen der  $L_4$  eine grundlegende Rolle spielt: wir bestimmen nämlich das Kurvensystem, statt durch die  $n$  Schnittpunkte auf den Parallelen  $a_1$  und  $a_2$  und durch das Mass  $\delta$  der Verschraubung der Verbindungen, durch die  $n'$  Schnittpunkte auf den Kurven  $b_1$  und  $b_2$  (s. Fig. 24) und das Mass  $\delta'$  der Verschraubung in der

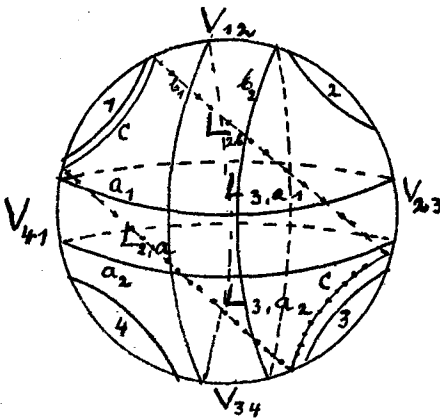


Fig. 24.

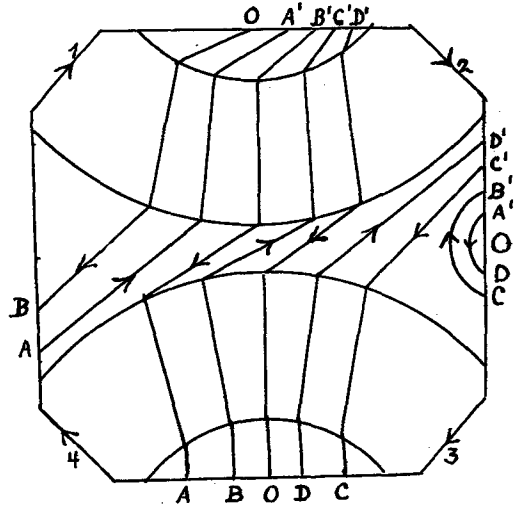


Fig. 25.

$L_{2,b}$  zwischen  $b_1$  und  $b_2$ . Wir legen  $b_1$  und  $b_2$  so, dass in der  $L_{2,b}$  alle Selbstverbindungen der  $a_i$  liegen. Dann haben wir genau  $|\delta|$  Selbstverbindungen der  $b_i$  in den  $L_{3,b_i}$ . Also ist  $n' = |\delta|$ , und alle diese Selbstverbindungen liegen in der  $L_{2,a}$ . Durch Umkehrung der Betrachtung erhalten wir  $n = |\delta'|$ . Wir geben endlich  $\delta'$  das Vorzeichen von  $\delta$  durch eine geeignete Festsetzung über die positive Seite von  $a_1$ . Die Koordinatentransformation lautet dann  $n' = |\delta|$ ,  $\delta' = \frac{|\delta|}{\delta} n$ . Der Unterschied gegen die analoge Transformation bei der Ringfläche  $R^1$  ist klar: bei der  $L_4$  handelt es sich nur um eine Koordinatentransformation, bei der  $R^1$  kann diese auch als Abbildung angesehen werden. Aber das kommt für die  $L_4$  unter Voraussetzung von *nicht vertauschbaren* Rändern nicht in Frage, weil die  $b_i$  andere Paare von Rändern trennen als die  $a_i$ . Bei Vertauschbarkeit



der Ränder entspricht der Koordinatentransformation eine Vierteldrehung. Damit haben wir nun den Fall  $|\delta| > n$  auf den Fall  $|\delta| < n$  zurückgeführt.

Es bleibt nur der Fall  $n = |\delta| = 1$  übrig. Aber in ein Symbol mit anderem  $n$  oder  $\delta$  kann bei homotopen Transformationen  $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$  nicht übergehen, weil wir für die anderen Symbole die Invarianz von  $n$  und  $|\delta|$  nachgewiesen haben. Aber es kann auch nicht  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  in  $\begin{pmatrix} n \\ -\delta \end{pmatrix}$  übergehen. Denn, transformieren wir beide Kurven durch eine Verschraubung in  $L_{2,a}$ , dann gehen sie in Kurven mit den Symbolen  $\begin{pmatrix} n \\ \delta + 2n \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} n \\ -\delta + 2n \end{pmatrix}$  über, die, weil für  $\delta \neq 0$  die Zahl  $|\delta + 2n|$  von  $|\delta - 2n|$  verschieden ist, zwei nicht durch Homotopie in einander überführbare Kurven darstellen. Also sind auch  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} n \\ -\delta \end{pmatrix}$  nicht durch Homotopie ineinander überführbar, und wir haben jetzt *allgemein die Invarianz von  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  bei Homotopie nachgewiesen*. Hierbei ist es, weil es sich um lauter geschlossene Kurven handelt, gleichgültig, ob die Ränder als fest oder beweglich angenommen werden.

b) *Abbildungen der Vierlochkugel auf sich und die Wirkung auf das arithmetische Feld*. Wir haben in § 3 spezielle Abbildungen der  $L_4$  auf sich betrachtet, Verschraubungen der  $L_{2,a}$  und  $L_{2,b}$ . Nach den früheren Ergebnissen und dem soeben Entwickelten wirken sie so, dass die erste Verschraubung  $n$  überführt in  $n$ ,  $|\delta|$  in  $|\delta + 2kn|$ , die zweite  $n$  in  $|n + 2k'\delta|$ ,  $|\delta|$  in  $|\delta|$ . Wir haben also (zunächst nur für die absoluten Werte) wieder den euklidischen Algorithmus, aber so, dass wir stets nur ein *gerades* Vielfaches der einen Zahl zu der anderen addieren oder von ihr abziehen können. Diese Operationen bilden eine (nicht invariante) Untergruppe der Operationen des allgemeinen euklidischen Algorithmus. Wir wollen sie als *gerade euklidische* Operationen bezeichnen. Ist  $|\delta| > n > 0$ , so können wir  $k$  so bestimmen, dass  $|\delta + 2kn| \leq n$  ist, ist aber  $n > |\delta| > 0$ , so können wir  $k'$  so bestimmen, dass  $|n + 2k'\delta| \leq |\delta|$  ist. Das Verfahren bricht in folgenden drei Fällen ab: 1)  $n = 0$ , 2)  $\delta = 0$ , 3)  $n = |\delta|$ . Im ersten Falle erhalten wir  $|\delta|$  Parallelkurven zu  $a_1$ , im zweiten  $n$  Parallelkurven zu  $b_1$ , im dritten Fall haben wir  $\delta = \pm n$ . Das Symbol  $\begin{pmatrix} n \\ -n \end{pmatrix}$  geht aber durch Addition von  $2n$  zu  $-n$  über in  $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$ . Das sind  $n$  Parallelkurven zu einer bestimmten  $r_2$  und  $r_4$  von

$r_1$  und  $r_3$  trennenden Kurve, etwa  $c$  (s. Fig. 24). Also haben wir zunächst das Resultat: jedes System von geschlossenen, doppelpunktslosen, sich gegenseitig nicht schneidenden Kurven auf der Vierlochkugel kann durch eine vermittle der Schraubungen längs  $a$  und längs  $b$  erzeugte Abbildung der  $L_4$  auf sich übergeführt werden in eine Anzahl Parallelkurven zu einer von drei bestimmten die Ränder paarweise trennenden Kurven. Diese Anzahl ist gleich  $(n, \delta)$ , wenn das Kurvensystem durch  $\binom{n}{\delta}$  dargestellt wird. Hierbei sind Parallelkurven zu den Rändern unberücksichtigt geblieben. Damit haben wir die oben benutzte Tatsache, dass für  $(n, \delta) = 1$  das Kurvensystem nur aus einer Kurve besteht, abgeleitet. Wir haben dazu nicht den Satz über die Homotopieinvarianz der Symbole benutzt.

Eine Abbildung nun, die etwa  $a_1$  und  $a_2$  in sich überführt, kann auf  $L_{3, a_1}$  und  $L_{3, a_2}$  durch Homotopie (mit beweglichen Rändern) erzeugt werden. In der  $L_{2, a}$  erzeugt sie eine Verschraubung, die der Transformation  $\binom{n}{\delta} \rightarrow \binom{n}{\delta + kn}$  entspricht. Führt nun eine Abbildung  $\Phi$  der  $L_4$  auf sich zwei Kurven  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  in  $a_1$  und  $a_2$  über, dann gehen durch eine geeignete Transformation  $\bar{\Phi}$ , die aus Verschraubungen in  $L_{2, a}$  und  $L_{2, b}$  zusammengesetzt ist,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  in Parallelkurven zu  $a_1, b_1$  oder  $c$  über. Aber es müssen Parallelkurven zu  $a_1$  sein, weil nach der Voraussetzung  $a_1$  und  $\alpha_1$  dieselben Ränderpaare trennen. Also ist  $E\bar{\Phi}(\alpha_1) = a_1$ ,  $E'\Phi\bar{\Phi}^{-1}(a_1) = a_1$ . Folglich ist  $\Phi\bar{\Phi}^{-1}$  bis auf Homotopie gleich einer Verschraubung in  $L_{2, a}$ . Also sind aus Verschraubungen in  $L_{2, a}$  und  $L_{2, b}$ , die den geraden euklidischen Operationen entsprechen, Repräsentanten jeder Klasse von Abbildungen der Vierlochkugel auf sich erzeugbar. Ist aber eine gerade euklidische Operation nicht die identische Transformation, d. h. führt sie nicht alle Symbole in sich über, dann repräsentiert sie nicht eine homotope Transformation, die, wie wir nachgewiesen haben, alle Symbole in sich überführt. Andererseits führt eine nicht homotope Transformation mindestens eines der Symbole  $\binom{1}{0}$  oder  $\binom{0}{1}$  nicht in sich über, entspricht also nicht der identischen Transformation in der Gruppe der geraden euklidischen Operationen. Also haben wir: die geraden euklidischen Operationen erzeugen eine der Gruppe der Abbildungsklassen der Vierlochkugel einstufig isomorphe Gruppe<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Herr W. MAGNUS teilt mir mit, dass sich hieraus unter Benutzung des Resultats von H. FRASCH, Math. Ann. 108 S. 245 ergibt, dass die Gruppe der Abbildungsklassen für die  $L_4$  die freie Gruppe von zwei Erzeugenden ist.

c) Es ist leicht zu sehen, welche Symbole Kurvensysteme darstellen, die auf ein bestimmtes der drei Systeme von Parallelkurven abbildbar sind. Denn bei den geraden euklidischen Operationen bleibt der Charakter von  $n$  und  $\delta$  als gerade oder ungerade erhalten. Wir können annehmen, dass  $n$  und  $\delta$  nicht beide gerade sind, weil wir sonst die grösste Potenz von 2, etwa  $2^l$ , die in beiden aufgeht, herausnehmen können, und deswegen  $\binom{n}{\delta}$  ein Kurvensystem darstellt, das aus

$2^l$  Kurvensystemen besteht, die je parallel sind zu dem Kurvensystem  $\binom{n}{\frac{\delta}{2^l}}$ , wo

$\frac{n}{2^l}$  und  $\frac{\delta}{2^l}$  nicht beide gerade sind. Wir haben dann drei Fälle: 1)  $n$  und  $\delta$  ungerade,  $\binom{n}{\delta}$  stellt ein Kurvensystem dar, das auf  $(n, \delta)$  Parallelkurven zu  $c$  abbildbar ist. 2)  $n$  gerade,  $\delta$  ungerade,  $\binom{n}{\delta}$  stellt ein Kurvensystem dar, das auf  $(n, \delta)$  Parallelkurven zu  $a$  abbildbar ist. 3)  $n$  ungerade,  $\delta$  gerade, das Kurvensystem ist auf  $(n, \delta)$  Parallelkurven zu  $b$  abbildbar. Damit haben wir die Invarianten eines Kurvensystems gegen Abbildungen aus den Symbolen abgeleitet.

d) Ein Durchlaufungssinn des Systems  $\binom{n}{\delta}$  überträgt sich auf den Durchlaufungssinn etwa von  $r_1$  in der Weise, dass das Stück von  $L_4$  zwischen  $r_1$  und einer Kurve des Systems durch die Durchlaufung von  $r_1$  und der Kurve die gleiche Indikatrix bekommt. Bei der Abbildung geht  $r_1$  in sich mit Durchlaufungssinn über, also überträgt sich vermittels  $r_1$  der Durchlaufungssinn des Systems  $\binom{n}{\delta}$  auf die Bildkurven, also auch auf die Kurven  $a, b$  oder  $c$  in deren eine  $\binom{n}{\delta}$  abgebildet werden kann. Es ist leicht (s. Fig. 26) diese Übertragung des Umlaufsinns von  $r_1$  auf  $a, b, c$  einerseits und — durch die erste Selbstverbindung von  $a$  in  $L_{3, a_1}$  — auf  $\binom{n}{\delta}$  andererseits herzustellen.

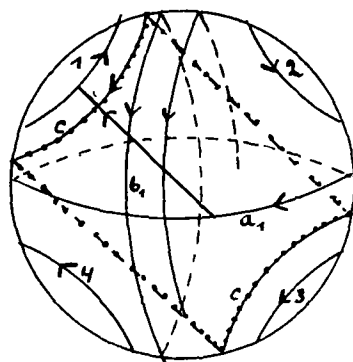


Fig. 26.

Wir wollen nun eine bestimmte Durchlaufung von  $r_1$  als positiv annehmen und damit auch eine bestimmte Durchlaufung von  $a_1, b_1, c$  und  $\binom{n}{\delta}$  als positiv. Wir

wollen die so durchlaufene Kurve  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  oder im Falle  $(n, \delta) > 1$  die in diesem Sinne gleich durchlaufenen parallelen Kurven des Systems  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  wie bisher durch  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  darstellen. Die in umgekehrtem Sinne durchlaufenen Kurven wollen wir *jetzt an* mit dem Symbol  $\begin{pmatrix} -n \\ \delta \end{pmatrix}$  bezeichnen. Unsere *Koordinatentransformation* ( $a \rightarrow b$ ) sieht dann so aus:

$$\bar{n} = \frac{|n|}{n} |\delta| \quad \bar{\delta} = \frac{|\delta|}{\delta} |n|.$$

Auf diese Weise behält das obere Symbol des Paares, also  $n, \bar{n}$  u. s. w. stets dasselbe Vorzeichen bei den Operationen der Koordinatentransformation und des euklidischen Algorithmus. Wir wollen ferner, ebenso wie früher bei den Symbolen für die Kurvensysteme auf der Ringfläche, jetzt dem Symbol  $\delta$  verschiedene geometrische Bedeutung geben, je nachdem  $n$  positiv oder negativ ist, und zwar soll sich bei Wechsel des Umlaufsinn der Kurven auch die Umkreisungsrichtung für dasselbe  $\delta$  ändern oder, anders ausgedrückt, wenn  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  ein Kurvensystem darstellt, so soll  $\begin{pmatrix} -n \\ -\delta \end{pmatrix}$  dasselbe Kurvensystem mit umgekehrter Durchlaufung darstellen. Diese Festsetzung ist nötig, damit *eine* Abbildung für *beliebigen* Umlaufsinn durch *dieselbe* Transformationsformel  $\delta' = \delta + kn$  dargestellt wird (ohne diese Festsetzung würde  $k$  für dieselbe Abbildung mit dem Vorzeichen von  $n$  sein Vorzeichen wechseln).

Beispiele: 1)

$$\begin{aligned} c &\equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ durch Verschraubung in } L_{2,a} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ durch Koordinatentrans-} \\ &\hspace{15em} \text{formation } a \rightarrow b: \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ durch Verschraubung in } L_{2,b} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ durch Koordinatentrans-} \\ &\hspace{15em} \text{formation } b \rightarrow a: \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d. h.: *durch eine Verschraubung in  $L_{2,a}$  und eine Verschraubung in  $L_{2,b}$  entsteht eine Abbildung, die  $c \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  in sich überführt, also eine Schraubung längs  $c$ .*

2)

$$c^{-1} \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ durch Koordinatentransformation } a \rightarrow b:$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad b \rightarrow a:$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Das Resultat dieses Abschnittes ist: *Es ist die Gesamtheit der Systeme geschlossener, je mit demselben Umlaufsinn versehener Kurven, abgesehen von Parallelkurven zu den Rändern, eineindeutig der Gesamtheit der Symbole  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$ , wo  $n$  und  $\delta$  positive oder negative Zahlen oder auch null, aber nicht beide null sein können, zugeordnet.*

e) *Geometrische Darstellung der Symbole  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$ .*

Wir wollen noch einmal das ursprüngliche Symbol  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$ , wo  $n$  eine positive Zahl ist, betrachten. Die den Punkten auf  $a_1$  und  $a_2$  entsprechenden  $2n$  Zeichen  $S_1 \dots S_n, S_{n+1} \dots S_{2n}$  werden vermöge der Verschraubung in  $L_{2,a}$  auf sich selbst abgebildet durch  $S_i \rightarrow S_{i^*}$ , wo  $i^* \equiv i + \delta \pmod{2n}$  ist. Durch die Selbstverbindungen in  $L_{3,a_2}$  geht nun  $S_{i^*}$  über in  $S_{\bar{i}}$ , wo  $\bar{i} = 2n + 1 - i^*$  ist, also  $\bar{i} \equiv 1 - i - \delta \pmod{2n}$ ;  $i$  geht wieder durch Verschraubung in  $L_{2,a}$  über in  $i'^*$ , wo  $i'^* \equiv i - \delta \equiv 1 - i - 2\delta \pmod{2n}$  ist, und dann endlich durch Selbstverbindung in  $L_{3,a_1}$  in  $i' = 2n + 1 - i'^* \equiv i + 2\delta \pmod{2n}$ .

Also liefert das Symbol  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  bei einer einmaligen Umkreisung von  $b$  eine Substitution

$$i' \equiv i + 2\delta \pmod{2n}.$$

Diese Substitution ist zyklisch, also haben alle Zyklen, in die sie zerfällt, dieselbe Anzahl von Zeichen, und zwar gibt es genau  $(n, \delta)$  solcher Zyklen. Dies entspricht dem obigen Resultat; dass alle Kurven eines Systems Parallelkurven sind und zwar in der Anzahl  $(n, \delta)$ .

Der Zusammenhang des Symbols  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix}$  mit der obigen Substitution führt dazu, das Kurvensystem graphisch darzustellen (s. Fig. 27): Wir benutzen ein Quadratnetz und zeichnen auf allen horizontalen Seiten die Punkte  $S_1 \dots S_{2n}$  in derselben Durchlaufungsrichtung mit dem gleichen Abstand  $\varepsilon$  voneinander und dem Abstand  $\frac{\varepsilon}{2}$

der Punkte  $S_1$  und  $S_{2n}$  von den Ecken. Dann ist das Kurvensystem, das durch  $\binom{n}{\delta}$  dargestellt wird, auch dargestellt durch alle Geraden, die einen Punkt  $S_i$  mit der

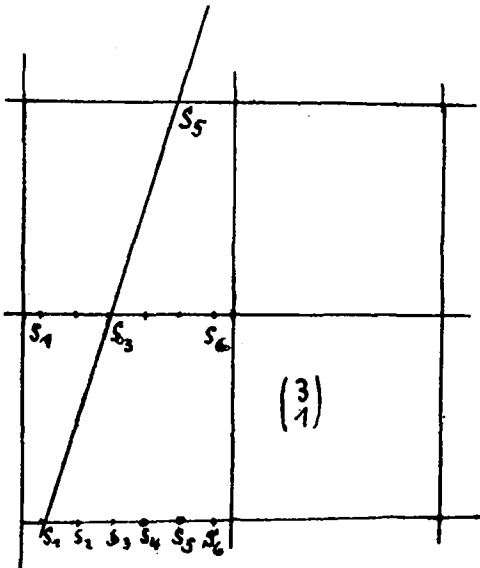


Fig. 27.

Abszisse  $x$  etwa auf der unteren Seite eines horizontalen Streifens mit einem Punkte mit der Abszisse  $x + 2\delta\varepsilon$  auf der oberen Seite des Streifens verbinden. Dabei sind Geraden, die homologe Geraden des Netzes sind, d. h. solche, die durch Parallelverschiebung des Netzes in sich auseinander hervorgehen, nicht als verschieden anzusehen, die Geraden werden nur »modulo des Netzes« betrachtet. Die Geraden liefern durch die Schnittpunkte mit auf einander folgenden horizontalen Netzgeraden die den Kurvensystemen entsprechenden Substitutionen. Statt auf einem Quadratnetz können wir die Kurvensysteme auch auf einer Ring-

fläche darstellen, deren universelle Überlagerungsfläche das Quadratnetz ist. Aber es ist selbstverständlich unmöglich, das Quadratnetz als universelle Überlagerungsfläche der Vierlochkugel aufzufassen.

Das Kurvensystem auf der  $L_4$  entspricht, wie wir soeben gesehen haben, einer Substitution von  $2n$  Symbolen, die erzeugt wird durch eine Spiegelung  $I$ , nämlich die Indexsubstitution  $i' = 2n + 1 - i$ , und eine zyklische Verschiebung  $Z: i' \equiv i + \delta \pmod{2n}$ . Und zwar ist diese Substitution, gleich  $I^{-1}Z^{-1}IZ$  und stellt wieder eine Verschiebung dar:  $i' \equiv i + 2\delta \pmod{2n}$ . Dies ist nur der einfachste Fall einer in der Topologie sehr häufig vorkommenden Erscheinung. Betrachten wir z. B. den aus zwei Einlochringen  $R_{1,1}^1$  und  $R_{1,2}^1$  durch Zusammenheftung längs des Randes  $r$  entstehenden Doppelring. Die Kurvensysteme auf  $R_{1,1}^1$  und  $R_{1,2}^1$  sind, wie wir in § 6 b) sahen, abbildbar auf Kurven dreier Abteilungen. Diese teilen die  $2n$  Schnittpunkte auf  $r$  ein in drei Paare von Abteilungen. Wir haben etwa für  $R_{1,1}^1$  die Schnittpunkte

$$S_1 \quad \dots \quad S_{n_1} \quad S_{n_1+1} \quad \dots \quad S_{n_1+n_2} \quad S_{n_1+n_2+1} \quad \dots \quad S_{n_1+n_2+n_3=n}$$

$$S_{n+n_1} \quad \dots \quad S_{n+1} \quad S_{n+n_1+n_2} \quad \dots \quad S_{n+n_1+1} \quad S_{2n} \quad \dots \quad S_{n+n_1+n_2+1}.$$

Hierbei entspricht die Anordnung der Punkte auf  $r$  der natürlichen Aufeinanderfolge der Indices von 1 bis  $2n$ . In der oben hingeschriebenen Anordnung hingegen stehen die durch die Verbindungen auf  $R_{1,1}^1$  zusammengehörigen Endpunkte der Kurven unter einander. Die hierdurch gegebene Zuordnung ist eine Substitution der  $2n$  in natürlicher Reihenfolge angeordneten Zeichen von der zweiten Ordnung, etwa  $I$ . Ebenso haben wir eine solche Substitution  $I'$  der  $2n$  Zeichen entsprechend den Kurven von  $R_{1,2}^1$  mit anderen Abteilungszahlen, etwa  $n'_1, n'_2, n'_3$ . Das Kurvensystem auf dem Doppelring entsteht durch Verschraubung  $Z$  längs  $r$ , d. h. einer Substitution  $i' \equiv i + \delta(2n)$ , und diesem Kurvensystem entspricht also die Substitution  $ZIZ^{-1}I'^{-1}$ . Für andere topologische Gebilde haben wir ganz anders

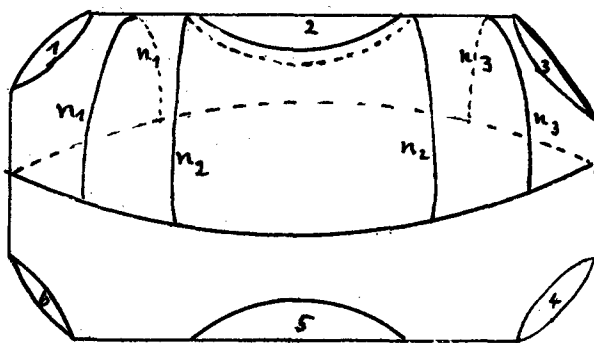


Fig. 28.

gebaute Substitutionen zweiter Ordnung  $I$ , z. B. für Kurvensysteme auf der Sechslöcherkugel, wo die drei Abteilungspaare in der Reihenfolge  $n_1 n_1 n_2 n_2 n_3 n_3$  auf einander folgen, wie die Betrachtung der Fig. 28 zeigt. Bei dem einfachsten Falle, den wir oben betrachtet haben, wo nur ein Paar von Abteilungen vorliegt, und (was übrigens ganz unwichtig ist)  $I = I'$  ist, war  $ZIZ^{-1}I'^{-1}$  wieder eine zyklische Substitution und der euklidische Algorithmus liefert uns ihre wesentlichen Eigenschaften. In anderen Fällen kennt man bisher nur recht unübersichtliche, auf topologischen Überlegungen beruhende Verfahren. Es fehlt eben eine einfache Transformation, die der obigen »Koordinatentransformation«, also der Vertauschung von  $n$  und  $\delta$ , entspricht. Vielleicht lässt sich aber die geometrische Darstellung des einfachsten Falles durch ein Quadratnetz auf kompliziertere Fälle durch regelmässige Einteilungen der nicht-euklidischen Ebene übertragen.

f) *Kurvensysteme auf der Vierlochkugel mit Endpunkten auf einem Rand.*

1) Wir wollen das Resultat anders wie beim Einlochring zunächst direkt ableiten, indem wir zu dem bisher Bewiesenen noch einige topologische Betrachtungen hinzufügen. Schneiden wir längs einer nicht auf  $r_1$  zusammenziehbaren Selbstverbindung  $\sigma$  des Randes  $r_1$  die  $L_4$  auf (s. Fig. 29), so entsteht eine  $L_{3,\sigma}$  und eine  $L_{2,\sigma}$ . Auf der  $L_{2,\sigma}$  liegt noch ein zweiter Rand der  $L_4$ , etwa  $r_2$ . Die Ränder  $r_3$  und  $r_4$  bilden dann auf der  $L_{3,\sigma}$  die beiden anderen Ränder. Die  $L_{2,\sigma}$  wird ausser von  $r_2$  begrenzt durch eine Kurve, die zusammengesetzt ist aus der Selbstverbindung  $\sigma$  und einem Stück  $r_{1,2}$  des Randes  $r_1$  zwischen den Endpunkten von  $\sigma$ . Ebenso ist die  $L_{3,\sigma}$  ausser von  $r_3$  und  $r_4$  noch begrenzt durch

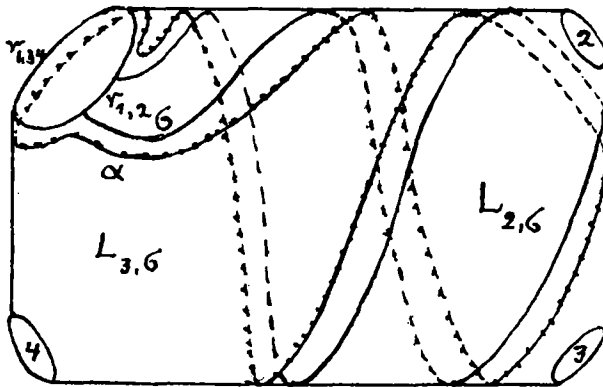


Fig. 29.

eine Kurve, die zusammengesetzt ist aus  $\sigma$  und dem anderen Stück  $r_{1,3,4}$  von  $r_1$  zwischen den Endpunkten von  $\sigma$ .

Wir betrachten nun eine Parallelkurve  $\alpha$  zu diesem letzteren Rand in  $L_{3,\sigma}$ . Diese ist eine geschlossene Kurve auf der  $L_4$ , die  $r_1$  und  $r_2$  von  $r_3$  und  $r_4$  trennt. Folglich ist sie nach dem oben Bewiesenen durch eine Abbildung der  $L_4$  auf sich mit beweglichen, aber nicht vertauschbaren Rändern auf die Kurve  $\alpha_1$  abbildbar. Durch diese Abbildung geht  $\sigma$  in eine Selbstverbindung  $\bar{\sigma}$  von  $r_1$  über, die in  $L_{3,\alpha_1}$  liegt und nach dem früher (§ 3) Bewiesenen in eine bestimmte Selbstverbindung  $s$  des Randes  $r_1$  in  $L_{3,\alpha_1}$  homotop bei beweglichen Rändern, also auch homotop auf  $L_4$  übergeführt werden kann.

Haben wir mehrere (sich nicht schneidende) Selbstverbindungen  $\sigma_i$  von  $r_1$ , die  $r_2$  von  $r_3$  und  $r_4$  trennen, so schneiden wir längs derjenigen Verbindung  $\sigma_0$  auf, für die das Randstück  $r_{1,3,4}$  von  $r_1$ , das zu  $L_{3,\sigma}$  gehört, keine Endpunkte von anderen solchen Selbstverbindungen enthält. Eine Parallelkurve  $\alpha$  zu  $\sigma_0$   $r_{1,3,4}$  in



$L_{3,\sigma}$  kann wieder durch Abbildung in  $a_1$  übergeführt werden. Jetzt liegen alle diese Selbstverbindungen in  $L_{3,\sigma_1}$  und können durch Homotopie mit beweglichen Rändern in feste Selbstverbindungen von  $r_1$  übergeführt werden. Betrachten wir nun die Dreilochkugel  $L_{3,\sigma}$ . In ihr liegen alle vielleicht noch vorhandenen Selbstverbindungen von  $r_1$ , die nicht mit  $\sigma_0$  homotop sind. Denn alle auf der Zweilochkugel  $L_{2,\sigma}$  liegenden (die nicht mit einem Stück von  $r_1$  homotop sind) sind mit  $\sigma_0$  homotop. Durch Homotopieabbildung der  $L_4$  sind die Endpunkte jener anderen Verbindungen auf  $r_{1,34}$  beweglich, aber natürlich nicht über  $\sigma_0$  verschiebbar. Also haben wir hier den Fall des festen Randes und erhalten nach Früherem zwei verschiedene Arten von nicht miteinander und nicht mit einem

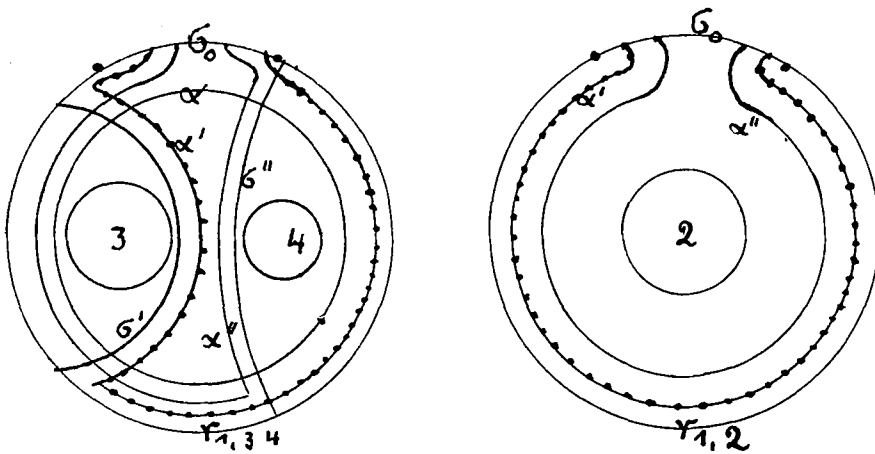


Fig. 29 a.

Randstück, insbesondere nicht mit  $\sigma_0$  homotopen Selbstverbindungen von  $r_1$ , die sich dadurch von einander unterscheiden, dass die einen, etwa  $\sigma'_i$ , mit einem Stück von  $r_{1,34}$  zusammen  $r_3$  einschliessen, die anderen, etwa  $\sigma''_i$ , ebenso  $r_4$  (s. o. S. 161 und Fig. 29 a). Die ersteren liegen nach der Abbildung von  $\alpha$  auf  $a_1$  auf der Dreilochkugel  $L_{3,b_1}$ . Denn die Parallelkurve  $\alpha'$ , die zu  $\sigma'_i$  ebenso konstruiert ist, wie oben  $\alpha$  zu  $\sigma_i$ , schneidet, wie wir aus der Figur sehen ( $\alpha'$  ist punktiert in den beiden zusammengehörigen Figuren 29 a eingezeichnet),  $\alpha$  resp. nach der Abbildung  $\alpha \rightarrow a_1$  die Kurve  $a_1$  zweimal, hat also (nach der Abbildung  $\alpha \rightarrow a_1$ ) das Symbol  $\begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix}$  und ist durch Verschraubung in  $L_{2,a}$  auf  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  d. h.  $b_1$ , oder  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  d. h.  $c$  abbildbar. Aber es kann nur  $b_1$  sein (d. h.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\delta$  gerade), falls  $\alpha'$  wie vorausgesetzt  $r_1$  und  $r_4$  von  $r_2$  und  $r_3$  trennt. Ebenso geht die Parallelkurve  $\alpha''$  zu

$\alpha''$  durch die Abbildung in eine Kurve mit dem Symbol  $\begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix}$ . Da die  $\alpha''$  aber auch mit  $\alpha'$  zwei Punkte gemeinsam hat, so muss, falls  $\alpha'$  in  $b_1$  abgebildet ist,  $\alpha''$  in eine Kurve mit dem Symbol  $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$  übergehen. Nun können wir zwar durch Verschraubung in  $L_{2,a}$  oder  $L_{2,b}$  die Kurve  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv c_1^*$  in  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv c_1$  verwandeln, aber dabei geht entweder  $b_1$  oder  $a_1$  in eine nicht homotope Kurve über. Wenn die Parallelkurven  $a_1$  zu  $s$  und  $b_1$  zu  $s'$  je in homotope Kurven übergehen sollen, dann ist nur noch eine homotope Abbildung möglich und Verbindungen  $s''$  mit der Parallelkurve  $c_1$  nicht in Verbindungen mit der Parallelkurve  $c_1^*$  überführbar. Die Verbindungen  $s''$  liegen entweder in der mit  $c_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  gebildeten Dreilochkugel  $L_{3,c_1}$  (in der  $r_1$  liegt) oder in der mit  $c_1^* \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  gebildeten Dreilochkugel  $L_{3,c_1^*}$  (in der  $r_1$  liegt). — Zusammenfassend haben wir:

*Jedes System von Selbstverbindungen eines Randes  $r_1$  kann durch eine einzige Abbildung übergeführt werden in ein System von festen Verbindungen, das aus drei Abteilungen besteht, die je in  $L_{3,a_1} L_{3,b_1} L_{3,c_1}$  oder  $L_{3,a_1} L_{3,b_1} L_{3,c_1^*}$  liegen.*

Es ist klar, dass man eine von den Dreilochkugeln  $L_{3,c_1}$  oder  $L_{3,c_1^*}$  vorschreiben kann, dann muss man aber neben  $L_{3,a_1}$  noch  $L_{3,a_1^*}$  oder neben  $L_{3,b_1}$  noch  $L_{3,b_1^*}$  zulassen, je nachdem man  $c_1$  durch eine Schraubung längs  $b_1$  oder durch eine Schraubung längs  $a_1$  in  $c_1^*$  verwandelt hat.

Besteht aber unser Kurvensystem nicht nur aus Selbstverbindungen des Randes  $r_1$ , sondern auch aus geschlossenen Kurven, dann können wir die geschlossenen Kurven sämtlich entweder in  $a_1$  oder in  $b_1$  oder in  $c_1$  verwandeln und damit gehen die Selbstverbindungen von  $r_1$  alle über entweder in die zu  $a_1$  oder in die zu  $b_1$  oder zu  $c_1$  gehörende Abteilung. In diesem Falle haben wir also, ebenso wie beim Einlochring, nur zwei Abteilungen: die geschlossenen Kurven und eine Abteilung von Selbstverbindungen.

2) Wir haben in 1) eine Normalform für Kurvensysteme (ohne Umlaufssinn) mit Endpunkten auf einem Rand gefunden und wollen nun sehen, wie diese Normalform durch Symbole ausgedrückt wird. Wir führen die Symbole ebenso wie früher ein: wir zerlegen die  $L_4$  durch  $a_1$  und  $a_2$ . Dann sind durch Homotopie mit beweglichen Rändern die Kurven in  $L_{3,a_1}$  sowie in  $L_{3,a_2}$  in feste Verbindungen überführbar. Bleiben nur die Verbindungen in  $L_{2,a}$ , die durch die Verschraubungszahl  $\delta$  in Bezug auf eine bestimmte Verbindung, etwa das Stück von  $b_1$  zwischen  $a_1$  und

$a_2$  festgelegt ist. Dann ist durch die Anzahl  $2n$  der Schnittpunkte auf  $a_1$  und  $a_2$ , die Anzahl  $2q$  der Endpunkte auf  $r_1$  sowie  $\delta$  das Kurvensystem bis auf Homotopie festgelegt. Wir bezeichnen das Kurvensystem durch  $\begin{pmatrix} n \\ \delta q \end{pmatrix}$ . Im Falle, dass  $l$  geschlossene Kurven parallel zu  $a_1$  resp.  $b_1$ , resp.  $c_1$  resp.  $c_1^*$  und  $m$  Selbstverbindungen das Kurvensystem bilden, haben wir die Symbole

$$\begin{pmatrix} 0 & m \\ l & m \end{pmatrix} \text{ resp. } \begin{pmatrix} m+l & m \\ 0 & m \end{pmatrix} \text{ resp. } \begin{pmatrix} m+l & m \\ m+l & m \end{pmatrix} \text{ resp. } \begin{pmatrix} m+l & m \\ -m & -l \end{pmatrix}.$$

Im Falle, dass keine geschlossenen Kurven, dagegen  $m_a$  Selbstverbindungen parallel mit  $a_1$ ,  $m_b$  Selbstverbindungen parallel mit  $b_1$ ,  $m_c$  Selbstverbindungen parallel mit  $c_1$  resp.  $c_1^*$  vorhanden sind, haben wir die Symbole

$$\begin{pmatrix} m_a + m_c & m_a + m_b + m_c \\ m_c & m_c \end{pmatrix} \text{ resp. } \begin{pmatrix} m_a + m_c & m_a + m_b + m_c \\ -m_c & m_c \end{pmatrix}.$$

Wir wollen dieses Koordinatensystem das  $(a, b)$ -Koordinatensystem nennen (die zweite Koordinate ist bestimmend für die Zahl  $\delta$ ). Wählen wir entsprechend das  $(b, a)$ -Koordinatensystem, so werden  $m_a$  und  $m_b$  vertauscht. Wir bezeichnen das Symbol in diesem Koordinatensystem mit  $\begin{pmatrix} n' \\ \delta' q \end{pmatrix}$ . Wir sehen, dass wenn  $m_b \neq 0$  ist,  $q > n$  ist, wenn  $m_a \neq 0$  ist,  $q > n'$  ist. Ist aber  $m_a = m_b = 0$ , dann führen wir das Koordinatensystem  $(c, a)$  ein und erhalten als Symbol  $\begin{pmatrix} 0 \\ m_c \end{pmatrix}$  im Falle, dass die Selbstverbindungen alle parallel zu  $c_1$  sind, was wir durch Verschraubung in  $L_{2,a}$  oder  $L_{2,b}$  stets erreichen können. Im  $(c, a)$ -Koordinatensystem bezeichnen wir das Symbol mit  $\begin{pmatrix} n'' \\ \delta'' q \end{pmatrix}$ . Wir haben dann das Resultat, *das für jedes Kurvensystem nach einer geeigneten Abbildung für ein geeignetes der drei Koordinatensysteme stets  $n$  resp.  $n'$  resp.  $n'' < q$  ist.* Das  $(c, a)$ -Koordinatensystem ist nur erforderlich, falls  $n = |\delta| \geq q$  d. h. nach eventueller Verschraubung in  $L_{2,a}$   $n = \delta \geq q$ . Das Kurvensystem ist in diesem Falle parallel mit  $c_1$  und enthält  $n - q$  geschlossene Kurven.

Die topologischen Betrachtungen können wir umgehen, wenn wir die Transformationen des Symbols  $\begin{pmatrix} n \\ \delta q \end{pmatrix}$  betrachten wie oben (§ 6) die Transformationen des analogen Symbols für den Einlochring. Es ist kaum etwas anderes als eine Wiederholung, mit der Änderung, dass hier nur die geraden euklidischen Operationen vorkommen: die Reduktion des Symbols  $\begin{pmatrix} n \\ \delta q \end{pmatrix}$  findet so statt, dass durch

$\bar{\delta} = \delta + 2kn$  zunächst  $|\bar{\delta}| < n$  gemacht wird. Dann gehen wir zum  $(b, a)$ -Koordinatensystem über und erhalten als Symbol  $\begin{pmatrix} n_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} q$ , wo  $n_1 = |\bar{\delta}| < n$  ist,  $\delta_1$  sich aber genau so bestimmt, wie im Falle  $q = 0$  (keine Randpunkte), falls  $|\delta|$  und  $n$  beide  $\geq q$  sind. In diesem Falle ist  $\delta_1 = \frac{\bar{\delta}}{|\bar{\delta}|} n$ . Wir können also durch gerade euklidische Operationen das Symbol  $\begin{pmatrix} n \\ \delta \end{pmatrix} q$  in ein Symbol  $\begin{pmatrix} n_{t-1} \\ \delta_{t-1} \end{pmatrix} q$  verwandeln, für das  $|\delta_{t-1}| < q$  ist. Das Symbol stellt entweder im  $(a, b)$ - oder im  $(b, a)$ -Koordinatensystem ein Kurvensystem dar, das durch die den geraden euklidischen Operationen entsprechenden Abbildungen aus dem vorgegebenen hervorgeht. Ist aber  $n_{t-1} > q > |\delta_{t-1}|$  dann ist

$$n_t = |\delta_{t-1}| \quad \text{und} \quad \delta_t = \frac{\delta_{t-1}}{|\delta_{t-1}|} (n_{t-1} - q + |\delta_{t-1}|)$$

(genau entsprechend wie im Falle des Einlochringes) und von  $\begin{pmatrix} n_t \\ \delta_t \end{pmatrix} q$  gelangen wir, falls  $n \neq 0$  ist, im Allgemeinen durch die Operation  $\delta^* = \delta_t + 2kn_t$  zu einem Symbol  $\begin{pmatrix} n_t \\ \delta^* \end{pmatrix} q$  in dem sowohl  $n_t$  wie  $|\delta^*| < q$  sind.

Wir haben die Symbole hier nur soweit betrachtet, als wir es für die Behandlung der Probleme der Fünflochkugel nötig haben. Wir wollen aber noch bemerken, dass in der (zu einem bestimmten Koordinatensystem gehörenden)  $(n, \delta)$ -Ebene ein Fundamentalbereich in diesem Falle das gleichschenkelig rechtwinklige Dreieck mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(q, q)$   $(q, -q)$  ist zusammen mit den Halbgeraden  $n = \delta > q$ ;  $n = 0, \delta > 0$  und  $n > q, \delta = 0$ .

g)  $L_4$  mit festen Rändern.

1) Wir sahen oben (d. Beisp. 1 & 3), dass eine Schraubung in  $L_{2a}$  und eine Schraubung in  $L_{2b}$  eine Schraubung längs  $c$  erzeugt. Also werden bei festen Rändern geeignete Schraubungen längs  $a, b$  und  $c$  hintereinander ausgeführt eine Kombination von Schraubungen längs der vier Ränder ergeben. Wir wollen jetzt diese Kombination feststellen. Wir bezeichnen die Schraubungen längs  $a, b, c$  und  $r_i$  mit  $A_a, A_b, A_c, A_{r_i}$  und setzen (s. Fig. 30, 30 a) den Sinn der Schraubungen folgendermassen fest:

$$\begin{array}{lclcl} XX_0 & \text{wird bei } A_a & \text{ersetzt durch} & XX_1 X_2 X_0, \\ YY_0 & \text{» » } A_b & \text{» »} & YY_1 Y_2 Y_0, \\ RR_0 & \text{» » } A_{r_1} & \text{» »} & RR_1 R_2 R_0, \\ ZZ_0 & \text{» » } A_c^{-1} & \text{» »} & ZZ_1 Z_2 Z_3 Z_0. \end{array}$$

Die Schraubungen  $\mathcal{A}_{r_i}$  sind untereinander und mit den Schraubungen  $\mathcal{A}_a, \mathcal{A}_b, \mathcal{A}_c$  vertauschbar.

Wir betrachten nun die Verbindungslinien  $A_1A_3$  (s. Fig. 31) des ersten und dritten Randes.  $\mathcal{A}_b\mathcal{A}_a(A_1A_3)$  ist nach unserer Festsetzung homotop mit der

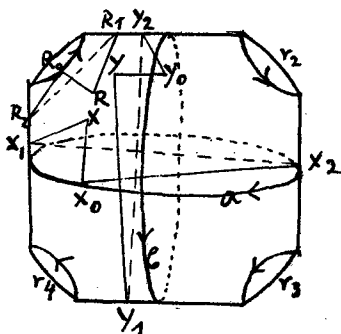


Fig. 30.

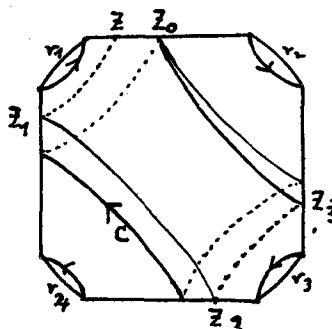


Fig. 30 a.

Verbindungslinie  $A_1B_1C_1C_3B_3A_3$ . Diese entsteht ebenfalls aus  $A_1A_3$  durch die Abbildung  $\mathcal{A}_{r_1}\mathcal{A}_{r_2}$ . Es führt also  $\mathcal{A}_{r_1}^{-1}\mathcal{A}_{r_3}^{-1}\mathcal{A}_b\mathcal{A}_a$  die Verbindungen  $A_1A_3$  in sich selbst über. Ebenso führt  $\mathcal{A}_{r_2}^{-1}\mathcal{A}_{r_4}^{-1}\mathcal{A}_b\mathcal{A}_a$  die Verbindung  $A_2A_4$  (s. Fig. 31) in sich über. Da aber  $\mathcal{A}_{r_1}$  und  $\mathcal{A}_{r_3}$  die Verbindung  $A_2A_4$  nicht verändern,  $\mathcal{A}_{r_2}$  und  $\mathcal{A}_{r_4}$  die Verbindung  $A_1A_3$  nicht verändern, so führt  $\mathcal{A}_{r_1}^{-1}\mathcal{A}_{r_2}^{-1}\mathcal{A}_{r_3}^{-1}\mathcal{A}_{r_4}^{-1}\mathcal{A}_b\mathcal{A}_a$  die

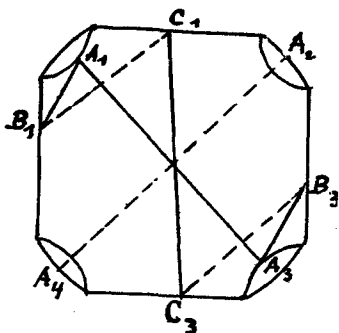


Fig. 31.

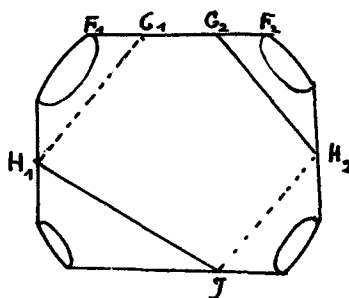


Fig. 31 a.

beiden Verbindungen  $A_1A_3$  und  $A_2A_4$  in sich über. Schneiden wir die  $L_4$  längs dieser beiden Verbindungen auf, so entsteht eine  $L_2$ , die durch  $\mathcal{A}_{r_1}^{-1}\mathcal{A}_{r_2}^{-1}\mathcal{A}_{r_3}^{-1}\mathcal{A}_{r_4}^{-1}\mathcal{A}_b\mathcal{A}_a$  in sich übergeht. Also ist diese Abbildung eine Abbildung der  $L_2$ , d. h. eine Schraubung längs  $c$ , also gleich  $\mathcal{A}_c^m$ . Um  $m$  zu ermitteln, betrachten wir die Verbindung  $F_1F_2$  (s. Fig. 31 a). Es ist

$$\mathcal{A}_{r_1}^{-1}\mathcal{A}_{r_2}^{-1}\mathcal{A}_{r_3}^{-1}\mathcal{A}_{r_4}^{-1}\mathcal{A}_b\mathcal{A}_a(F_1F_2) = \mathcal{A}_c^{-1}(F_1F_2),$$

wie aus der Figur hervorgeht. Also gehen durch  $\mathcal{A}_{r_1}^{-1} \mathcal{A}_{r_2}^{-1} \mathcal{A}_{r_3}^{-1} \mathcal{A}_{r_4}^{-1} \mathcal{A}_c \mathcal{A}_b \mathcal{A}_a$  die Verbindungen  $A_1 A_3$ ,  $A_2 A_4$  und  $F_1 F_2$  in sich über. Also ist diese Abbildung eine Abbildung der Einheitsklasse, und es ist in der Gruppe der Abbildungsklassen

$$\mathcal{A}_c \mathcal{A}_b \mathcal{A}_a = \mathcal{A}_{r_1} \mathcal{A}_{r_2} \mathcal{A}_{r_3} \mathcal{A}_{r_4}.$$

2) Wir wollen das Resultat anwenden auf den *Zweilochring mit festen Rändern*. Durch Aufschneiden längs  $a$  (s. Fig. 32) erkennen wir nach 1), dass bei geeigneter Bezeichnung

$$\mathcal{A}_{a_2} \mathcal{A}_c \mathcal{A}_d = \mathcal{A}_a \mathcal{A}_b \mathcal{A}_{r_1} \mathcal{A}_{r_2}.$$

Nun ist  $\mathcal{A}_c$  nach § 6 c durch  $\mathcal{A}_a$  und  $\mathcal{A}_b$  zu erzeugen. Also ist  $\mathcal{A}_{r_2}$  aus  $\mathcal{A}_{r_1}$ ,  $\mathcal{A}_a$ ,  $\mathcal{A}_{a_2}$ ,  $\mathcal{A}_b$  und  $\mathcal{A}_d$  zu erzeugen: die Schraubung längs des einen Randes ist zu

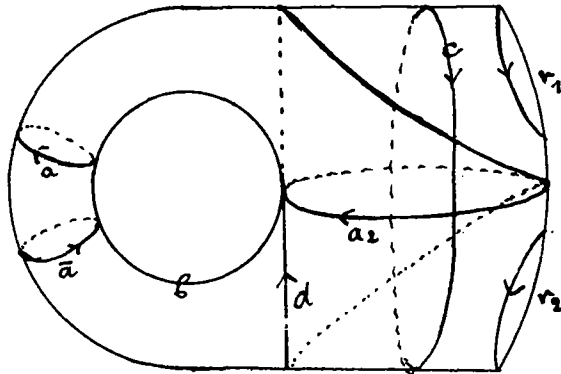


Fig. 32.

erzeugen durch Schraubungen längs des anderen Randes und längs den die Ringfläche nicht zerstückelnden Kurven  $a$ ,  $a_2$ ,  $b$  und  $d$ .

3) *Flächen von höherem Geschlecht mit einer Randkurve ( $R_p^1$ )*.

Die Fläche zerfällt (s. Fig. 33) durch  $p - 1$  zerstückelnde Kurven  $C_1 \dots C_{p-1}$  in eine  $R_1^1$  und  $p - 1$   $R_2^1$ . Nach § 6 c ist die Schraubung längs des Randes  $C_1$  der  $R_1^1$  durch Schraubungen längs Kurven zu erzeugen, die (einzeln)  $R_1^1$ , also erst recht  $R_p^1$  nicht zerstückeln. Die Schraubung längs  $C_2$  ist nach dem oben unter 2) Bewiesenen zu erzeugen durch Schraubungen längs  $C_1$  und Schraubungen längs solcher Kurven, die die  $R_{2,C_1,C_2}$  also auch die  $R_p^1$  nicht zerstückeln. Also lässt sich die Schraubung längs  $C_2$  erzeugen durch Schraubungen längs Kurven, die  $R_1^1$  nicht zerstückeln.

So fortfahrend erhalten wir das Resultat: die Schraubung längs des Randes einer Fläche  $R_p^1$  ist erzeugbar durch Schraubungen längs lauter die Fläche nicht zerstückelnder Kurven.

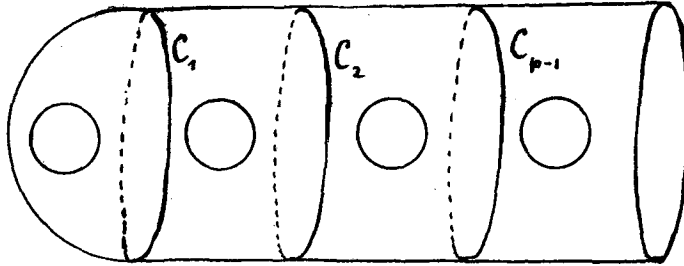


Fig. 33.

4) *Schraubungen längs zerstückelnder Kurven auf einen  $R_p^p$  oder  $R_1^p$ .* Eine zerstückelnde Kurve auf einem  $R_p^p$  zerlegt den  $R_p^p$  in einen  $R_1^q$  und einen  $R_1^{p-q}$ , eine zerstückelnde Kurve auf einem  $R_1^p$  zerlegt den  $R_1^p$  in einen  $R_1^q$  und einen  $R_1^{p-q}$ . Aus 3) folgt: *die Schraubung längs einer zerstückelnden Kurve auf einer Fläche mit höchstens einer Randkurve ist erzeugbar durch Schraubungen längs lauter die Flächen nicht zerstückelnder Kurven.*

Da die nicht zerstückelnden Kurven alle durch Abbildung der Fläche auseinander hervorgehen, d. h. äquivalent sind, Schraubungen aber durch Abbildungen wieder in Schraubungen übergehen, haben wir das Resultat: *jede durch Schraubungen erzeugte Abbildung einer Fläche mit höchstens einer Randkurve ist erzeugbar durch lauter Abbildungen, die in der Gruppe der Abbildungsklassen ineinander transformierbar sind.*

## § 8.

**Die Fünflochkugel.**

a) *Koordinatensysteme.* Auf der  $L_4$  haben wir drei geschlossene Kurven  $a$ ,  $b$  und  $c$ , die sich wechselseitig in zwei Punkten schneiden und die bei der Bestimmung von Kurvensystemen zu Grunde gelegt wurden. Auf eine von ihnen lässt sich jede geschlossene Kurve der  $L_4$  (, die nicht auf einen Punkt zusammenziehbar oder nicht mit einem Rand homotop ist,) abbilden. Analog wird man daran denken, zehn geschlossene Kurven auf der  $L_5$  einzuführen, die je zwei von den Rändern von den drei anderen trennen. Bezeichnen wir eine solche Kurve mit  $a_{ik} \equiv a_{ki} (i \neq k)$ , falls sie die Ränder  $r_i$  und  $r_k$  von den anderen Rändern trennt, dann müssen die zehn Kurven  $a_{ik}$  die Bedingung befriedigen, dass sich  $a_{ik}$  und  $a_{kl}$  in zwei Punkten schneiden, aber  $a_{ik}$  und  $a_{lm}$  ( $l \neq i, k; m \neq i, k$ ) keinen Punkt gemeinsam haben. Das ist nun aber nicht möglich, weil, wie leicht zu sehen,

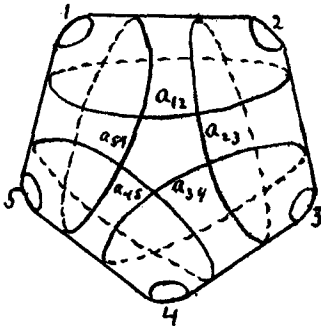


Fig. 34.

die letztere Bedingung mindestens für ein Paar nicht befriedigt werden kann. Das liegt daran, dass fünf Punkte auf der Kugel nicht so miteinander verbunden werden können, dass die Verbindungsstrecken ausser den fünf Punkten keinen Punkt gemeinsam haben. Wir begnügen uns deswegen mit fünf geschlossenen Kurven als »Koordinatenachsen« etwa  $a_{12}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{34}$ ,  $a_{45}$  und  $a_{51}$  (s. Fig. 34). Jede dieser Kurven  $a_{i,i+1}$  zerlegt die Fläche in eine  $L_{4,i}$  und eine  $L_{3,i}$ . In der  $L_{4,i}$  liegen die beiden Kurven, die mit  $a_{i,i+1}$  keinen Punkt

gemeinsam haben, nämlich  $a_{i+2,i+3}$  und  $a_{i+3,i+4}$ . Hierbei sind die Indices immer modulo 5 zu reducieren.

b) *Darstellung eines Systems geschlossener Kurven auf der  $L_5$ .* Wir zerlegen die Fläche durch eine Kurve  $a_{i,i+1}$  in eine  $L_{4,i}$  und  $L_{3,i}$ . Es sei etwa  $i = 4$ . Wir zeichnen in  $L_{4,4}$  und  $L_{3,4}$  Parallelkurven  $a'_{45}$  und  $a''_{45}$  zu  $a_{45}$ . Dann ist auf der  $L_{4,4}$  das Kurvensystem gegeben durch die Anzahl  $n_{12}$  der Schnittpunkte mit der Kurve  $a_{12}$ , eine Verschraubungszahl  $\delta_{12}$  und die Anzahl  $n_{45}$  der Randpunkte auf  $a'_{45}$ ;  $n_{45}$  ist auch die Anzahl der Schnittpunkte der Kurven des Systems mit  $a_{45}$ . Auf der  $L_{3,4}$  mit den Rändern  $a''_{45}$ ,  $r_4$  und  $r_5$  besteht das Kurvensystem abgesehen von eventuellen Kurven parallel zu  $a''_{45}$  aus Selbstverbindungen des Randes  $a''_{45}$ , ist also durch die Anzahl  $n_{45}$  (bei beweglichen Rand  $a''_{45}$ ) gegeben. Es bleibt noch das Kurvensystem auf der  $L_{2,4}$  mit den Rändern  $a'_{45}$  und  $a''_{45}$ , das durch eine Verschraubungszahl  $\delta_{45}$  bestimmt ist. Das Kurvensystem ist also durch das Paar von Symbolen

$$\begin{pmatrix} n_{12} & n_{45} \\ \delta_{12} & n_{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{45} \\ \delta_{45} \end{pmatrix}$$

völlig bestimmt.

Ebenso können wir die Fläche durch  $a_{12}$  zerlegen. Dann haben wir für dasselbe Kurvensystem ein Symbolpaar:

$$\begin{pmatrix} n_{12} \\ \delta_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{45} & n_{12} \\ \delta_{45} & n_{12} \end{pmatrix}.$$

Wir wollen diese Koordinatentransformation, eine Vertauschung von  $a_{12}$  und  $a_{45}$ , mit  $W_{14}$  bezeichnen. Führen wir andererseits auf  $L_{4,4}$  einen Wechsel des Koordinatensystems von  $(a_{12}, a_{23})$  nach  $(a_{23}, a_{12})$  aus (s. o. § 7 die Vertauschung von  $a$ - und  $b$ -Achse bei der Vierlochkugel), dann erhalten wir das Paar



$$\begin{pmatrix} n_{23} & \\ & n_{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{45} \\ \delta'_{45} \end{pmatrix}.$$

Ist z. B.  $n_{45} < n_{12}$  und  $< |\delta_{12}|$ , dann ist

$$n_{23} = |\delta_{12}|, \quad \delta_{23} = \frac{\delta_{12}}{|\delta_{12}|} n_{12} \quad \text{und} \quad \delta'_{45} = \delta_{45} \pm n_{45}.$$

Beim Wechsel des Koordinatensystems in  $L_{4,4}$  müssen die Normalverbindungen des Randes  $a_{45}$  mit der Achse  $a_{12}$  übergeführt werden in Normalverbindungen von  $a_{45}$  mit der Achse  $a_{23}$ . Dadurch entsteht eine Verschraubung längs des Randes  $a_{45}$  und die Beziehung  $\delta'_{45} = \delta_{45} \pm n_{45}$ . Wir wollen auf die Bestimmung des Vorzeichens in dieser Beziehung sowie auf die Herleitung der übrigen mannigfachen Koordinatentransformationen auf der Fünflochkugel nicht eingehen. Für das hier abzuleitende sind sie ohne Bedeutung. Dagegen ist hierfür das Folgende von Wichtigkeit: Dem Koordinatensystem  $(a_{12}, a_{23})$  in  $L_{4,4}$  entspricht durch  $W_{14}$  in  $L_{4,1}$  das Koordinatensystem  $(a_{45}, a_{34})$ , aber dem Koordinatensystem  $(a_{23}, a_{12})$  in  $L_{4,4}$  entspricht durch  $W_{2,4}$  in  $L_{4,2}$  das Koordinatensystem  $(a_{45}, a_{51})$ .

c) *Reduktion der Symbole.* Nach § 7 f) können wir durch Abbildung der  $L_{4,4}$  auf sich bei beweglichen Rändern das Kurvensystem überführen in eines mit dem Symbolpaar  $\begin{pmatrix} n'_{12} & \\ & n_{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{45} \\ \delta'_{45} \end{pmatrix}$  wobei  $n'_{12}$  kleiner ist als  $n_{45}$ . Bei dieser Reduktion wird im allgemeinen das Koordinatensystem unverändert, nämlich  $(a_{12}, a_{23})$  bleiben können. Wenn aber das Kurvensystem im  $L_{4,4}$  nur aus zwei Abteilungen besteht, dann kann es nötig sein, um die Reduktion  $n'_{12} < n_{45}$  zu erreichen, statt des Koordinatensystems  $(a_{12}, a_{23})$  das Koordinatensystem  $(a_{23}, a_{12})$  zu benutzen. Endlich ist, um  $n'_{12} < n_{45}$  zu erreichen, das  $(a_{13}, a_{12})$ -Koordinatensystem zu benutzen, falls  $n_{12} = |\delta_{12}| > n_{45}$  ist. Diesen Ausnahmefall wollen wir später behandeln. Wir haben dann nach Reduktion und Vertauschung  $W_{14}$  der Vierlochkugeln das Symbolpaar.

$$\begin{pmatrix} n'_{12} & \\ & n_{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{45} & n'_{12} \\ \delta'_{45} & \end{pmatrix}$$

wo jetzt  $n_{45} > n'_{12}$  ist und wo das dreigliedrige Symbol sich auf die  $L_{4,1}$  und das Koordinatensystem  $(a_{45}, a_{34})$  oder, für den besonderen Fall, auf die  $L_{4,2}$  und das Koordinatensystem  $(a_{45}, a_{51})$  bezieht. In jedem dieser beiden Fälle können wir wieder das Symbol reduzieren, sodass  $n'_{45} < n'_{12}$  wird. Wir nehmen dann wieder die entsprechende Vertauschung der Vierlochkugeln entweder  $W_{41}$  oder  $W_{31}$  oder  $W_{42}$  oder  $W_{52}$  vor (die erste Vertauschung entspricht dem »allgemeinen« Fall) und reduzieren in der neuen Vierlochkugel. Dieser Prozess hört auf, falls

die Anzahl der Randpunkte in dem dreigliedrigen Symbol gleich null ist. Wir haben dann etwa

$$\begin{pmatrix} \bar{n}_{i,i+1} \\ \bar{\delta}_{i,i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\delta}_{k,k+1} \end{pmatrix}.$$

Das Symbol bezeichnet  $|\delta_{k,k+1}|$  Kurven parallel zu  $a_{k,k+1}$  und  $(\bar{n}_{i,i+1}, \bar{\delta}_{i,i+1})$  Kurven parallel zu einer der drei Achsen in  $L_{k,k+1}$ . Von diesen drei Achsen sind zwei von der Form  $a_{i,l+1}$  und bereits festgelegt. Es fehlt noch die Festlegung der dritten, die von der Form  $a_{i,l+2}$  ist, wo  $l, l+1, l+2, k, k+1$  alle von einander modulo 5 verschieden sind. Wir müssen die fünf Achsen  $a_{i,l+2}$  so festlegen,

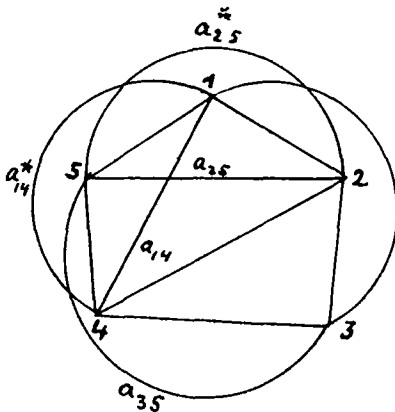


Fig. 35.

dass sie die Achsen  $a_{k,k+1}$  nicht schneiden. Das ist in der Figur 35 getan, die dadurch übersichtlicher gemacht wurde, dass die Löcher auf Punkte, die Kurven  $a_{ik}$  auf doppelt zu durchlaufende Strecken zusammengezogen und die Umkreisungen der Löcher weggelassen sind. Dass bei unserer Festlegung  $a_{25}$  und  $a_{14}$  sich in vier Punkten schneiden, ist für diese Fälle ohne Bedeutung.

Wir haben aber noch den Ausnahmefall zu behandeln, nämlich etwa  $n_{12} = |\delta_{12}| \geq n_{45}$ . Sei etwa  $a_{13}$  in  $L_{4,4}$  und mit dem Koordinaten-

system  $(a_{12}, a_{23})$  durch  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  dargestellt und  $n_{12} = \delta_{12}$ , was wir durch eine Schraubung längs  $a_{12}$  stets erreichen können, dann stellt das Symbol

$$\begin{pmatrix} n_{12} & n_{45} \\ n_{12} & \delta_{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{45} \\ \delta_{45} \end{pmatrix}$$

lauter Kurven dar, die  $a_{13}$  nicht schneiden. Davon sind, falls  $n_{12} > n_{45}$  ist,  $n_{12} - n_{45}$  geschlossene Kurven parallel zu  $a_{13}$ . Die übrigen sind geschlossene Kurven, die in der durch  $a_{13}$  abgeschnittenen  $L_4$  nicht parallel mit einem der Ränder laufen, also durch Schraubung längs  $a_{24}$  und  $a_{54}$  sich abbilden lassen auf Kurven parallel zu  $a_{24}, a_{54}$  oder  $a_{25}$ . Die Schraubung aber längs  $a_{24}$  ist in der  $L_{4,5}$  aus den Schraubungen längs  $a_{23}$ , längs  $a_{34}$  und der Schraubung längs des Randes  $a_{51}$  zusammensetzbar. Für den Ausnahmefall aber spielt es eine Rolle, dass  $a_{52}$  und  $a_{14}$  sich schneiden, falls wir bei unserem Reduktionsverfahren zu den Kurvensystemen in  $L_{4,4}$  oder  $L_{4,5}$  kommen. Denn in der zu  $a_{14}$  gehörenden  $L_4$  liegt die Achse  $a_{25}$  nicht (sie schneidet ja  $a_{14}$ ), und in der zu  $a_{25}$  gehörenden

$L_4$  liegt  $a_{14}$  nicht. Also wählen wir noch zwei weitere Kurven,  $a_{25}^*$  die  $a_{14}$  nicht schneidet, und  $a_{14}^*$ , die  $a_{25}$  nicht schneidet (s. Fig. 35). Diese benutzen wir nur, falls wir die Kurven in den zu  $a_{14}$  oder zu  $a_{25}$  gehörenden  $L_4$  darzustellen haben. Der Ausnahmefall tritt stets erst am Ende des Reduktionsverfahrens auf.

Eine Kurve  $a_{ik}$  kann in keine Kurve  $a_{lm}$  übergeführt werden, falls nicht das Paar  $(i, k)$  gleich dem Paar  $(l, m)$  ist. Andererseits ist eine Abbildung der  $L_5$  auf sich mit beweglichen Rändern, die zwei nicht parallele, sich nicht schneidende Kurven  $a_{ik}$  und  $a_{lm}$  festhält, eine Potenz von Schraubungen längs  $a_{ik}$  und  $a_{lm}$ . Denn diese beiden Kurven zerlegen die  $L_5$  in drei  $L_3$ . Also haben wir jetzt zusammenfassend:

1) Durch Schraubungen längs  $a_{12}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{34}$ ,  $a_{45}$  und  $a_{51}$  lässt sich jede Abbildung der Fünflochkugel auf sich mit beweglichen Rändern zusammensetzen, und durch eine solche Abbildung kann jedes System von geschlossenen Kurven, abgesehen von Parallelkurven zu den Rändern, abgebildet werden auf geschlossene Kurven parallel zu zwei sich nicht schneidenden Kurven aus insgesamt zwölf Kurven  $a_{ik}$ ,  $a_{14}^*$  und  $a_{25}^*$  (solcher Paare gibt es 15).

2) Die Gruppe der Abbildungsklassen für die  $L_5$  wird erzeugt durch miteinander gekoppelte gerade euklidische Operationen für die Symbole  $\begin{pmatrix} n & m \\ \delta & \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} m & n \\ \varepsilon & \end{pmatrix}$ .

## § 9.

### Erzeugung der Gruppe der Abbildungsklassen für die $L_n$ .<sup>1</sup>

Wir wollen den Satz beweisen:

Zu jeder Abbildung einer  $n$ -Lochkugel auf sich kann eine zu derselben Klasse gehörende Abbildung durch Schraubungen längs fest zu wählenden Kurven erzeugt werden. Zum Beweise leiten wir in 1) bis 5) Hilfssätze ab:

1) Zwei geschlossene Kurven, die dieselben Ränder auf der  $L_n$  von den übrigen Rändern trennen, sind äquivalent, d. h. durch eine Abbildung der  $L_n$  auf sich mit festen oder beweglichen Rändern in einander überführbar. Es mögen etwa  $c_1$  und  $c_2$  beide die Ränder  $r_1 \dots r_m$  von den Rändern  $r_{m+1} \dots r_n$  abtrennen. Dann

<sup>1</sup> Die Gruppe der Abbildungsklassen für die  $L_n$ , wenn die Ränder Punktierungen sind und miteinander vertauscht werden dürfen, ist durch W. MAGNUS, Math. Ann. 109 S. 617 ff., untersucht worden. Magnus findet nicht nur ein Erzeugendensystem, sondern auch ein System von definierenden Relationen. Hierbei wird benutzt, dass eine Verbindung besteht zwischen den Abbildungen der  $L_n$  auf sich und den von E. ARTIN eingeführten »Zöpfen«. Für eine Untergruppe der Zöpfengruppe, die den Abbildungen der punktierten Kugel bei nicht vertauschbaren Rändern entspricht hat W. BURAU, Abh. Hamb. Math. Sem. 9 S. 117 ff., Erzeugende und Relationen angegeben. Es ist zu vermuten, dass seine Resultate mit unserem Resultat in Beziehung stehen.

erhalten wir durch Zerschneidung von  $L_n$  längs  $c_1$  resp.  $c_2$  die Flächen  $L_{m+1}^1$  und  $L_{n-m+1}^1$  resp.  $L_{m+1}^2$  und  $L_{n-m+1}^2$ . Wir können etwa durch die Abbildung  $\Phi$  die Fläche  $L_{m+1}^1$  so auf  $L_{m+1}^2$  abbilden, dass dabei die Ränder  $r_1 \dots r_m$  auf  $L_{m+1}^1$  in die Ränder  $r_1 \dots r_m$  auf  $L_{m+1}^2$  und  $c_1$  in  $c_2$  übergehen. Ferner können wir durch eine Abbildung  $\Psi$  die Fläche  $L_{n-m+1}^1$  auf  $L_{n-m+1}^2$  so abbilden, dass dabei die Ränder  $r_{m+1} \dots r_n$  auf der ersten Fläche in die Ränder  $r_{m+1} \dots r_n$  auf der zweiten Fläche übergehen, ebenfalls  $c_1$  in  $c_2$  und zwar derart, dass  $\Phi$  einen Punkt von  $c_1$  in denselben Punkt von  $c_2$  überführt wie  $\Psi$ . Dann ergeben  $\Phi$  und  $\Psi$  zusammen eine Abbildung  $(\Phi, \Psi)$  der ganzen  $L_n$  auf sich mit nicht vertauschten Rändern, bei der  $c_1$  in  $c_2$  übergeht.

Ebenso beweist man: zwei Selbstverbindungen desselben Randes, die dieselben Ränder von den anderen trennen, sind äquivalent. Dasselbe gilt von zwei Verbindungen desselben Ränderpaares.

2) *Zwei geschlossene Kurven, die denselben Rand von allen anderen Rändern trennen, sind (nicht nur äquivalent, sondern auch) homotop.* Denn jede von ihnen ist homotop mit dem abgetrennten Rand, da sie mit ihm zusammen auf der  $L_n$  eine  $L_2$  begrenzt.

3) *Zwei geschlossene Kurven, die sich nicht schneiden und die dieselben Ränder voneinander trennen, sind (nicht nur äquivalent, sondern auch) homotop.* Denn die beiden Kurven begrenzen zusammen auf der  $L_n$  eine  $L_2$ .

4) Wenn  $c_1$  die Ränder in zwei Gruppen einteilt, deren keine eine der beiden Gruppen, in die  $c_2$  die Ränder einteilt, umfasst, dann müssen sich  $c_1$  und  $c_2$  schneiden. Wir nehmen speziell  $c_1$  als Kurve, die nur zwei Ränder  $r_1$  und  $r_2$  von den übrigen trennt, und  $c_2$  als eine beliebige Kurve, die  $r_1$  und  $r_2$  voneinander trennt. Durch homotope Transformationen von  $c_2$  innerhalb oder in der Umgebung von  $c_1$  kann  $c_2$  so verwandelt werden, dass alle Teile von  $c_2$ , die in der von  $c_1$  mit  $r_1$  und  $r_2$  begrenzten  $L_3$  verlaufen, Selbstverbindungen von  $c_1$  sind, die  $r_1$  und  $r_2$  voneinander trennen (s. Fig. 36). Da nun  $r_1$  und  $r_2$  auf verschiedenen Seiten von  $c_2$  liegen, so ist die Anzahl dieser Selbstverbindungen ungerade und also die Anzahl der Schnittpunkte von  $c_1$  mit (dem transformierten)  $c_2$  nicht durch 4 teilbar. Jetzt betrachten wir ebenso die  $L_{n-1}$  (s. Fig. 37), die die Ränder  $r_3 \dots r_n$ , die auf der anderen Seite von  $c_1$  liegen, mit  $c_1$  bilden. Wieder können wir durch homotope Transformationen alle solche  $c_2$  angehörende Selbstverbindungen von  $c_1$  wegschaffen, die keine der Ränder  $r_i$  von den andern in der  $L_{n-1}$  trennen. Durch eine solche Wegschaffung wird die Anzahl der Schnittpunkte von  $c_1$  mit  $c_2$  verringert. Es entstehen dabei vielleicht wieder Selbstverbin-

dungen innerhalb der  $L_3$  auf der anderen Seite von  $c_1$ , die  $r_1$  nicht von  $r_2$  trennen, die wir also wegschaffen können. Diesen Prozess wiederholen wir bis sowohl in der  $L_3$  wie in der  $L_{n-1}$  durch jede Selbstverbindung mindestens ein Rand von den übrigen getrennt wird. So erhalten wir aus  $c_2$  durch homotope Transformationen eine Kurve  $c_2^0$  mit etwa  $4m+2$  Schnittpunkten mit  $c_1$  und  $2m+1$  Selbstverbindungen von  $c_1$  in  $L_3$  und  $L_{n-1}$ , von denen jede in  $L_3$  verlaufende  $r_1$  und  $r_2$  voneinander trennt, jede in  $L_{n-1}$  verlaufende mindestens einen der Ränder von den anderen trennt.

Wir betrachten nun weiter eine Kurve  $\bar{c}_1$ , die  $c_2$  nicht schneidet und die wieder nur zwei Ränder, etwa  $r_4$  und  $r_3$ , von den übrigen Rändern trennt, die aber auf derselben Seite von  $c_2$  liegen mögen. Wir nehmen wieder in Bezug auf  $\bar{L}_3$  und  $\bar{L}_{n-1}$  dieselben homotopen Transformationen mit  $c_2^0$  vor, die wir vorher

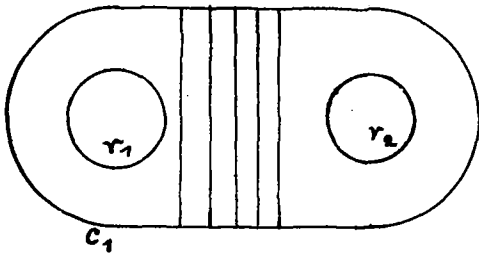


Fig. 36.

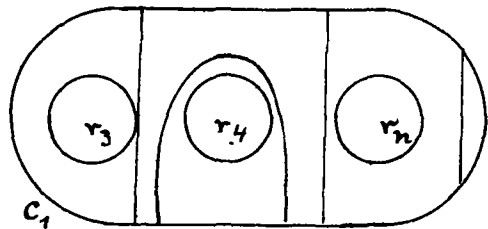


Fig. 37.

mit  $c_2$  in Bezug auf  $L_3$  und  $L_{n-1}$  vorgenommen haben, d. h. wir schaffen alle Stücke von  $c_2^0$  weg, die nicht ränder-trennende Selbstverbindungen in  $\bar{L}_3$  und  $\bar{L}_{n-1}$  sind. Durch Herauswerfen von Selbstverbindungen in  $\bar{L}_3$  wird das System der Selbstverbindungen in  $L_3$  und  $L_{n-1}$  überhaupt nicht geändert. Wir wollen zunächst nicht die Möglichkeit diskutieren, ob durch die Wegschaffung von Selbstverbindungen in  $\bar{L}_{n-1}$ , d. h. Ersatz von Teilen von  $c_2^0$  durch Strecken, die in  $\bar{L}_3$ , also ausserhalb von  $L_3$  liegen und also  $c_1$  nicht schneiden, Veränderungen in dem Bestande von Selbstverbindungen in  $L_3$  oder  $L_{n-1}$  entstehen können. Denn wenn solche Veränderungen entstehen sollten, dann könnte nur die Anzahl der Schnittpunkte von  $c_2^0$  mit  $c_1$  verringert werden, also auch die Anzahl der Selbstverbindungen in  $L_3$  und  $L_{n-1}$ . Dann könnten wir wieder den obigen Prozess für  $L_3$  und  $L_{n-1}$  ansetzen und erreichten eine weitere Verminderung der Zahl der Schnittpunkte von  $c_2$  mit  $c_1$ , bis wir wieder zu einer Kurve, etwa  $c_2^*$  kommen, die nur ränder-trennende Selbstverbindungen in  $L_3$  und  $L_{n-1}$  hat. Dann operieren wir wieder mit  $\bar{L}_3$  und  $\bar{L}_{n-1}$  und vermindern evtl. die Anzahl der

Schnittpunkte der Kurve  $c_2^{**}$  mit  $\bar{c}_1$ . Der Prozess muss einmal abbrechen, und wir erhalten so schliesslich eine Kurve  $c_2^{00}$ , die sowohl in  $L_3$  und  $L_{n-1}$  wie in  $\bar{L}_3$  und  $\bar{L}_{n-1}$  nur rändertrennende Selbstverbindungen liefert. Wegen unserer Voraussetzung, dass  $r_1$  und  $r_2$  auf verschiedenen Seiten von  $c_2$ , aber  $r_4$  und  $r_5$  auf derselben Seite von  $c_2$  liegen, hat  $c_2^{00}$  gleichzeitig mit  $c_1$  eine nicht durch 4 teilbare und mit  $\bar{c}_1$  eine durch 4 teilbare Anzahl von Punkten gemeinsam.

Jetzt wollen wir uns aber auch noch überzeugen, was ja für die Herstellung von  $c_3^{00}$  nicht notwendig vorauszusetzen war, dass der Reduktionsprozess, angewandt auf  $c_2^0$  in Bezug auf  $\bar{L}_3$  und  $\bar{L}_{n-1}$ , das System der Selbstverbindungen in  $L_3$  und  $L_{n-1}$  nicht ändern kann. Wir haben hier nämlich den allgemeinen Satz: *Zwei geschlossene doppelpunktslose sich schneidende Kurven auf einer Kugel bilden auf jeder Seite jeder der beiden Kurven mindestens zwei Zweiecke.* Der Beweis dieses Satzes ergibt sich sofort durch Betrachtung der Selbstverbindungen, die von der einen Kurve, etwa  $\gamma$ , in einem der beiden Gebiete der anderen Kurve  $\gamma'$  gebildet werden; denn die Paare der Endpunkte solcher Selbstverbindungen können sich auf  $\gamma$  nicht trennen. Eine Selbstverbindung nun von  $c_2^0$  in  $\bar{L}_{n-1}$ , die keine Ränder von den anderen trennt und deswegen wegzuschaffen ist, bildet mit einem Stück von  $\bar{c}_1$  eine Kurve  $\gamma'$ , die die Kugel in zwei Gebiete teilt, in deren einem kein Rand liegt. Würde nun jene Selbstverbindung und damit  $\gamma'$  die Kurve  $c_1$  schneiden, so würden nach unserem allgemeinen Satz die Selbstverbindungen von  $c_1$  in diesem Gebiete mit  $\gamma'$  mindestens zwei Zweiecke bilden, in denen keine Ränder liegen. Ein Stück von  $\gamma'$ , das mit einem Stück von  $c_1$  ein Zweieck bildet, ist aber eine Selbstverbindung von  $c_2^0$  in  $L_3$  oder  $L_{n-1}$ , die keinen Rand von den anderen, also auch nicht  $r_1$  von  $r_2$  trennt. Also wäre gegen die Voraussetzung unser Prozess für die  $L_3$  und  $L_{n-1}$  noch nicht abgeschlossen gewesen. Also schneidet keine wegzuschaffende Selbstverbindung von  $c_2^0$  in  $L_{n-1}$  die Kurve  $c_1$ . Und so kann die Wegschaffung einer solchen Selbstverbindung das System der Selbstverbindung in  $L_3$  und  $L_{n-1}$  nicht ändern.

5 a) Wir betrachten eine Selbstverbindung  $v$  des Randes  $r$  und eine beliebige geschlossene Kurve  $c$ . Dann gibt es stets eine Selbstverbindung  $v^0$  derselben Punkte des Randes  $r$ , die dieselben Ränder voneinander trennt wie  $v$  und die mit  $c$  zwei Punkte oder keinen Punkt gemeinsam hat. Denn durch  $c$  zerfällt die  $L_n$  in eine  $L_m$  und eine  $L_{n-m+2}$ ;  $r$  möge etwa auf  $L_m$  liegen. Trennt  $v$  keine der auf  $L_{n-m+2}$  liegenden Ränder, dann gibt es eine Selbstverbindung  $v^0$  von  $r$  in  $L_m$ , die auf  $L_n$  dieselben Ränder von einander trennt wie  $v$  und keine Schnittpunkte mit  $c$  hat. Werden aber durch  $v$  auf  $L_{n-m+2}$  Ränder von einander ge-

trennt, dann giebt es zunächst zwei Verbindungen von  $c$  und  $r$ ,  $v_{11}^0$  und  $v_{12}^0$ , die zusammen auf  $L_m$  dieselben Ränder von einander trennen wie  $v$ . Ebenso giebt es auf  $L_{n-m+2}$  eine Verbindung  $v_2^0$  der Endpunkte von  $v_{11}^0$  und  $v_{12}^0$  auf  $c$ , die dieselben Ränder von einander trennt wie  $v$ . In diesem Falle erhalten wir die gesuchte Selbstverbindung  $v^0$  von  $r$  durch den  $c$  zweimal schneidenden Streckenzug  $v_{11}^0 v_2^0 v_{12}^0$ .

b) Es seien  $v_1$  und  $v_2$  zwei Selbstverbindungen desselben Randes  $r$ , deren Endpunktpaare auf  $r$  sich nicht trennen. Dann wird ebenso wie bei a) bewiesen, dass  $v_1$  durch Abbildung der  $L_n$  in eine Selbstverbindung  $v_1^0$  übergeführt werden kann, die mit  $v_2$  keinen oder zwei Punkte gemeinsam hat.

c) Wir betrachten ein System  $v_1, v_2 \dots v_m$  von Selbstverbindungen von  $r$  ohne gemeinsame Punkte und eine beliebige Kurve  $c$ . In dem einen Teil von  $r$

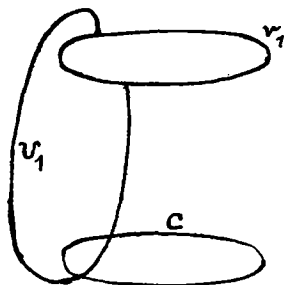


Fig. 38.

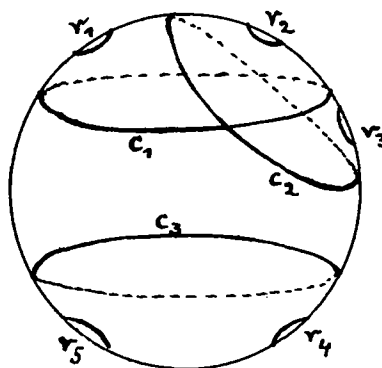


Fig. 39.

zwischen den Endpunkten von  $v_1$  mögen keine Endpunkte von  $v_2 \dots v_m$  liegen, in dem einen Teil von  $r$  zwischen den Endpunkten von  $v_2$  nur die Endpunkte von  $v_1$  u. s. w. Durch eine Abbildung der  $L_n$  geht  $v_1$  in  $v_1^0$  über, das zwei Punkte oder keinen Punkt mit  $c$  gemeinsam hat. Dabei gehen  $v_2 \dots v_m$  in  $v_2^0 \dots v_m^0$  über. Wir bilden eine geschlossene Kurve  $r^0$  aus  $v_1^0$  und dem Teil von  $r$ , auf dem alle Endpunkte von  $v_2^0 \dots v_m^0$  liegen (s. Fig. 38, in der versehentlich  $r$  mit  $r_1$  und  $v_1^0$  mit  $v_1$  bezeichnet ist). Diese geschlossene Kurve begrenzt auf der  $L_n$  eine  $L_m$ , die alle Selbstverbindungen  $v_2^0 \dots v_m^0$  enthält. Auf dieser  $L_m$  liegt entweder kein Teil von  $c$ , dann schneiden  $v_1^0 \dots v_m^0$  die Kurve  $c$  überhaupt nicht. Oder die ganze Kurve  $c$  liegt auf  $L_m$  oder ein Teil  $c^0$  von  $c$  als Selbstverbindung von  $r^0$  mit Endpunkten, die kein Endpunktpaar von  $v_2^0 \dots v_m^0$  auf  $r^0$  trennen. Wir wenden jetzt auf  $c$  und  $v_2^0$  resp. auf  $c^0$  und  $v_2^0$  die Betrachtungen von a) resp. b) an und erhalten durch Abbildung von  $L_m$  auf sich mit festem Rand  $r^0$ , also auch durch Abbildung der  $L_n$  die Verbindung  $v_2^0$  übergeführt in

$v_2^{00}$ , wobei  $v_2^{00}$  mit  $c$  zwei Punkte oder keinen Punkt gemeinsam hat. Dabei ist  $v_1^0$  unverändert geblieben,  $v_3^0 \dots v_m^0$  in  $v_3^{00} \dots v_m^{00}$  übergegangen. Ebenso behandeln wir jetzt  $v_3^{00}$ , fahren so fort und erhalten endlich das Resultat: *das System  $v_1, v_2 \dots v_m$  ist durch Abbildung von  $L_n$  auf sich überführbar in ein System von Selbstverbindungen, deren jede höchstens zwei Punkte mit  $c$  gemeinsam hat, die also insgesamt höchstens  $2m$  Punkte mit  $c$  gemeinsam haben.*

6) Der an den Anfang gestellte Satz ist (§§ 5, 7, 8) bewiesen für  $n \leq 5$ . Wir wollen ihn jetzt (zunächst ohne Feststellung der Anzahl der Erzeugenden) für jedes  $n$  mit Hilfe der vollständigen Induktion beweisen. Wir nehmen also an, er sei bereits bewiesen für eine  $L_m$ , falls  $m < n$  ist, und beweisen ihn auf Grund dieser Annahme für  $m = n$ . Wir nehmen ferner an, es sei  $n \geq 5$ . Wir betrachten drei Kurven  $c_1, c_2, c_3$  (s. Fig. 39), die die Ränder  $r_1, r_2$  resp.  $r_2, r_3$  resp.  $r_4, r_5$  von den übrigen Rändern trennen. Wir wählen diese Kurven so, dass  $c_1$  mit  $c_2$  zwei Punkte gemeinsam hat,  $c_3$  mit  $c_1$  und  $c_2$  keinen Punkt gemeinsam hat. Wir bezeichnen ferner die  $L_{n-1}$ , die von  $c_1, c_2$  und  $c_3$  auf der  $L_n$  begrenzt werden mit  $L_{n-1}^1$  resp.  $L_{n-1}^2$  resp.  $L_{n-1}^3$ . Durch eine beliebige Abbildung  $\Phi$  von  $L_n$  geht  $c_2$  in  $\gamma_2$  über.  $\gamma_2$  wird im allgemeinen mit  $c_3$  Punkte gemeinsam haben. Wir werden nun eine Abbildung  $\Psi^{-1}$  von  $L_n$  so konstruieren, dass  $\Psi^{-1}(\gamma_2)$  keinen Punkt mit  $c_3$  gemeinsam hat, also in der  $L_{n-1}^3$  liegt. Nach 1) wird dann durch eine Abbildung  $\Psi_3^{-1}$  der  $L_{n-1}^3$  die Kurve  $\Psi^{-1}(\gamma_2)$  in  $c_2$  übergeführt werden können. Dann wird  $\Psi_3^{-1} \Psi^{-1} \Phi(c_2) = c_2$  sein. D. h.  $\Psi_3^{-1} \Psi^{-1} \Phi$  ist eine Abbildung  $(\Psi_3, \Omega_3)$ , die zusammengesetzt ist aus einer Abbildung  $\Psi_3$  der  $L_{n-1}^3$  und einer Abbildung  $\Omega_3$  der Dreilochkugel  $(c_2, r_2, r_3) \equiv L_3^2$ . Also ist  $\Phi = \Psi \Psi_3(\Psi_3, \Omega_3)$ . Nach unserer Induktionsannahme sind  $\Psi_3, \Psi_2$  und  $\Omega_2$  aus Schraubungen längs einer endlichen Anzahl bestimmter Kurven in  $L_{n-1}^3, L_{n-1}^2$  und  $L_3^2$  zusammensetzbar. Es bleibt nur übrig, die Abbildungen  $\Psi^{-1}$  aus Schraubungen längs einer endlicher Anzahl bestimmter Kurven zu erzeugen:

Durch homotope Transformationen verwandeln wir nach 4)  $\gamma_2$  in die Kurve  $\gamma_2^{00}$ , die keine ränderfreien Zweiecke mit  $c_1$  resp.  $c_3$  bildet. Dann hat  $\gamma_2^{00}$   $2m_1$  Schnittpunkte mit  $c_1$ ,  $2m_3$  Schnittpunkte mit  $c_3$  gemeinsam, wo  $m_1$  ungerade und  $m_3$  gerade ist. Also ist  $m_1 \neq m_3$ . Sei etwa  $m_1 < m_3$ . Dann betrachten wir die  $L_{n-1}^1$ , in der  $\gamma_2^{00}$  aus  $m_1$  Selbstverbindungen des Randes  $c_1$  besteht. Nach 5) können wir durch eine Abbildung  $\Psi_{11}$  von  $L_{n-1}^1$  diese Selbstverbindungen (mit festem Rand  $c_1$ ) so abbilden, dass sie höchstens  $2m_1$  Punkte mit  $c_3$  gemeinsam haben. Die Kurve  $\Psi_{11}(\gamma_2^{00}) = \gamma_{21}^{00}$  können wir ferner (nach 4) durch homotope Transformationen so verwandeln, dass sie keine ränderfreien Zweiecke mit  $c_1$  und  $c_3$  ein-



schliesst. Auf diese Weise erhalten wir eine Kurve  $\gamma_{21}^{00}$ , die  $2 m_{11}$  Punkte mit  $c_1$  und  $2 m_{31}$  Punkte mit  $c_3$  gemeinsam hat, wobei  $m_{11} \leq m_1$  und  $m_{31} \leq m_1 < m_3$  ist. Also ist ev. nach homotoper Transformation, die wir mit  $\Psi_{11}$  vereinigt denken, die Anzahl der Schnittpunkte mit  $c_3$  sicher verringert, die mit  $c_1$  nicht erhöht worden, und es ist wieder  $m_{11} \neq m_{31}$ . Ist jetzt wieder  $m_{11} < m_{31}$ , dann verwandeln wir  $\gamma_{21}^{00}$  durch eine Abbildung  $\Psi_{12}$  von  $L_{n-1}^1$ . Ist aber  $m_{31} < m_{11}$ , dann verwandeln wir  $\gamma_{21}^{00}$  durch Abbildung  $\Psi_{32}$  der  $L_{n-1}^3$ . Wir erhalten so eine Kurve  $\gamma_{22}^{00}$ , die mit  $c_1$  resp.  $c_3$   $m_{12} \leq m_{11}$  resp.  $m_{32} \leq m_{31}$  Punkte gemeinsam hat, wobei mindestens in einem Fall das Kleiner-Zeichen gilt. So fahren wir fort und vermindern dauernd die Anzahl der Schnittpunkte mit mindestens einer der beiden Kurven  $c_1$  und  $c_3$ , bis endlich eine Kurve  $\gamma_2^{000}$  entsteht, die keinen Punkt mehr

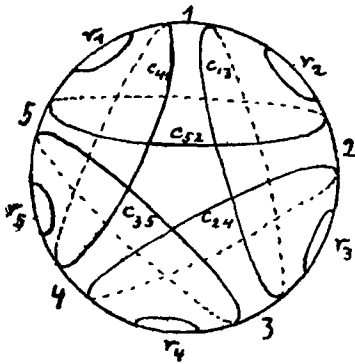


Fig. 40.

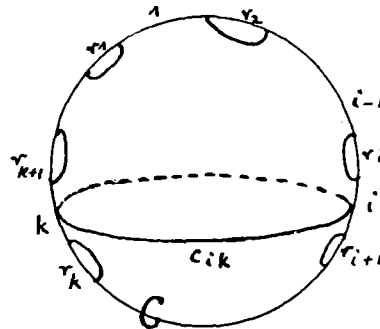


Fig. 41.

mit  $c_3$  gemeinsam hat. Damit ist das Ziel erreicht, die Abbildungen  $\Psi_{ik}$  ( $i = 1$  oder  $3$ ) setzen die gesuchte Abbildung  $\Psi^{-1}$  zusammen, die aus  $\gamma_2$  eine Kurve macht, die mit  $c_3$  keinen Punkt gemeinsam hat. Die Abbildungen  $\Psi_{ik}$  entstehen nach unserer Induktionsannahme aus Schraubungen längs bestimmter Kurven in  $L_{n-1}^1$  und  $L_{n-1}^3$ . Wir haben also zusammenfassend: jede Abbildung der  $L_n$  entsteht durch Zusammensetzung aus Abbildungen von  $L_{n-1}^1$ ,  $L_{n-1}^2$  und  $L_{n-1}^3$ . (Die Abbildungen der  $L_3^2$  auf sich können wir auffassen als Abbildungen der  $L_{n-1}^3$ .)

7) Als erstes Beispiel für die allgemeine Methode wollen wir jetzt noch einmal die  $L_5$  behandeln (s. Fig. 40). Wir bezeichnen die  $c_1, c_2, c_3$  des vorigen Abschnitts genauer mit  $c_{52}, c_{13}, c_{35}$  und dementsprechend auch die  $L_4$ , die durch  $c_{ik}$  abgeschnitten werden, mit  $L_4^{ik}$ . Die Abbildungen der  $L_4^{35}$  (mit festen Rändern) werden erzeugt (nach den Resultaten über die  $L_4$ ) durch Schraubungen längs  $c_{52}, c_{13}, c_{35}, r_1, r_2, r_3$ ; die Abbildungen der  $L_4^{52}$  (mit festen Rändern) durch Schraubungen längs  $c_{35}, c_{24}, c_{52}, r_3, r_4, r_5$ ; die Abbildungen der  $L_4^{13}$  (mit festen Rändern)

durch Schraubungen längs  $c_{41}, c_{35}; c_{13}, r_4, r_5, r_1$ . Also haben wir auf's Neue das Resultat gewonnen, dass alle Abbildungen der  $L_5$  (mit festen Rändern) erzeugt werden durch Schraubungen längs  $c_{52}, c_{13}, c_{24}, c_{35}, c_{41}; r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ .

8) Allgemein ordnen wir wieder wie bei der  $L_4$  und  $L_5$  die Ränder  $r_1 \dots r_n$  auf der  $L_n$  längs einer jede von den Rändern zweimal schneidenden Kurve  $C$  an (s. Fig. 41). Daß Stück von  $C$  zwischen  $r_i$  und  $r_{i+1}$  bezeichnen wir mit  $C_i$ . Wir verbinden ein Stück  $C_i$  mit einem Stück  $C_k$  ( $i < k$ ) durch eine Kurve  $c_{ik}$ .  $c_{ik}$  trennt die Ränder  $r_{k+1} \dots r_n r_1 \dots r_i$  von den Rändern  $r_{i+1} \dots r_k$ . Wir wählen die Kurven  $c_{ik}$  so, dass  $c_{ik}$  und  $c_{i'k'}$  zwei Punkte gemeinsam haben falls  $(i, k)$  und  $(i', k')$  sich trennen, dass ferner  $c_{ik}$  und  $c_{i'k'}$  keinen Punkt gemeinsam haben, falls  $(i, k)$  und  $(i', k')$  sich nicht trennen. Für die durch  $c_{ik}$  abgeschnittenen  $L_{(k-i)+1}$  und  $L_{n-(k-i)+1}$  liefern die für die  $L_n$  konstruierten Kurven  $c_{in}$  ohne Weiteres das entsprechende System von Kurven. Da nun, wie wir gesehen haben, durch Schraubungen längs eines Systems solcher Kurven etwa bei einer  $L_5$  alle Abbildungen der  $L_5$  erzeugt werden können, so folgt durch unsere Konstruktion der Abbildungen für eine  $L_n$  aus den Abbildungen für drei auf ihr liegende  $L_{n-1}$  und durch den Schluss von  $n-1$  auf  $n$ , dass alle Abbildungen der  $L_n$  auf sich durch Schraubungen längs der  $\frac{n(n-1)}{2}$  Kurven  $c_{ik}$  erzeugt werden können. Hierbei sind die Abbildungen als mit festen Rändern erfolgend betrachtet. Lässt man die Ränder beweglich, so ist die Anzahl der erzeugenden Schraubungen um die Anzahl der Ränder, d. h.  $n$  zu vermindern. Wir erhalten dann  $\frac{n(n-3)}{2}$  Erzeugende. Dies Resultat gilt für  $n \geq 3$ , während das Resultat für die Anzahl der Erzeugenden für Abbildungen mit festen Rändern für  $n \geq 0$  gilt.

## § 10.

### Erzeugung der Gruppe der Abbildungsklassen für jede orientierbare Fläche.

1) Durch Abbildung eines  $R_n^p$  auf sich kann eine beliebige doppelpunktslose Verbindungslinie  $v_{12}$  zweier Ränder  $r_1$  und  $r_2$  in eine beliebig vorgegebene diese Ränder verbindende derartige Linie  $v_{12}^0$  verwandelt werden.

2) Zu zwei beliebigen Systemen von sich nicht schneidenden, doppelpunktslosen Selbstverbindungen  $v_1^i$  und  $v_2^k$  eines Randes  $r_1$  und eines Randes  $r_2$  auf einem  $R_n^p$  gibt es eine Verbindung  $v_{12}$  von  $r_1$  und  $r_2$ , die die  $v_1^i$  und  $v_2^k$  nicht schneidet: Die Selbstverbindungen  $v_1^i$  teilen zusammen mit  $r_1$  den  $R_n^p$  in ver-

schiedene einfach oder mehrfach zusammenhängende Gebiete. Aber keines dieser Gebiete ist allein von Linien  $v_i^j$  begrenzt, weil sie untereinander keinen Punkt gemeinsam haben und selbst ungeschlossen sind. Der Rand  $r_2$  liegt in einem dieser Gebiete, etwa  $B$ . Die Selbstverbindungen  $v_2^k$  von  $r_2$  liegen alle in diesem Gebiet und teilen zusammen mit  $r_2$  das Gebiet  $B$  in Gebiete. Die ganze Begrenzung von  $B$  gehört zu einem dieser Gebiete, etwa  $\bar{B}$ . Zur Begrenzung von  $\bar{B}$  gehören folglich sowohl Teile von  $r_1$  als auch Teile von  $r_2$ , die also durch eine die  $v_i^j$  und  $v_2^k$  nicht schneidende Kurve verbunden werden können.

3) Wir nehmen jetzt an, dass wir bereits die Erzeugenden für alle  $R_m^q$  aufstellen können, falls  $q < p$  ist (für  $q = 0$  haben wir im § 9 dies System aufgestellt) und konstruieren auf Grund dieser Annahme das System für  $R_n^p$ . Wir zerlegen die gegebene  $R_n^p$  (s. Fig. 42) durch die Kurve  $C$  in eine  $R_{1,C}^1$  und eine  $R_{n+1,C}^{p-1}$ . In der  $R_{1,C}^1$  betrachten wir ein kanonisches Schnittsystem  $a, b$ .

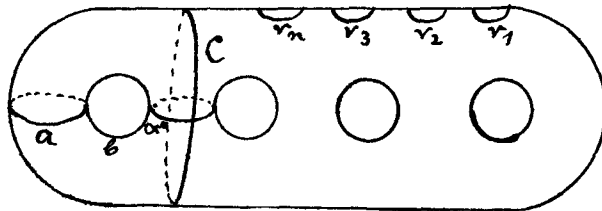


Fig. 42.

Durch eine beliebige Abbildung  $\Phi$  der  $R_n^p$  auf sich wird  $a$  übergeführt in  $\alpha$ . Wir konstruieren nun eine geeignete Abbildung  $\Psi^{-1}$ , so dass  $\Psi^{-1} \Phi(a) = a$  ist. Dann ist  $\Psi^{-1} \Phi$  notwendigerweise eine Abbildung der durch Aufschneiden längs  $a$  aus  $R_n^p$  entstehenden  $R_{n+2,a}^{p-1}$ , also eine Abbildung, deren Erzeugende wir nach Voraussetzung kennen. Unsere Aufgabe wird demzufolge erledigt sein, falls wir eine solche  $\Psi^{-1}$  zusammensetzen aus Abbildungen der  $R_{1,C}^1$  und der  $R_{n+2,a}^{p-1}$ , die wir ihrerseits nach unserer Induktionsannahme ebenfalls erzeugen können. Es sei noch bemerkt, dass wir das Abbildungsproblem für eine  $R_1^1$  auf diese Weise nicht reduzieren können, weil die  $C$ -Kurve stets eine  $R_1^1$  abschneidet. Aber die Abbildungen des  $R_1^1$  auf sich haben wir bereits früher direkt erledigt (s. § 6 b)).

<sup>1</sup> Für den einmal und den zweimal punktierten Ring hat bereits R. FRICKE Erzeugende und definierende Relationen der Gruppe der Abbildungsklassen angegeben. Hierzu und für die mehrfach punktierte Ringfläche vgl. W. MAGNUS, Math. Ann. 109, S. 634 ff. Für die Gruppe der Abbildungsklassen des Doppelringes  $R_0^2$  ist schon früher durch die Methode des arithmetischen Feldes ein System von Erzeugenden aufgestellt worden, s. M. DEHN, Autographie Breslau 1922 und R. BAER, Journ. f. Math. 160, S. 1 ff.

a) Die Kurve  $\alpha$  wird, wenn sie  $a$  schneidet, in  $R_{n+2,a}^{p-1}$  ein Kurvensystem darstellen, das aus Selbstverbindungen der Ränder  $a$  und  $\bar{a}$  von  $R_{n+2,a}^{p-1}$  und aus Verbindungen  $v_{a\bar{a}}^i$  dieser Ränder miteinander besteht. Greifen wir eine solche, etwa  $v_{a\bar{a}}^1$  heraus. Nach 1) können wir sie durch Abbildung der  $R_{n+2,a}^{p-1}$  auf die Verbindung  $b$  von  $a$  und  $\bar{a}$  in  $R_{n+2,a}^{p-1}$  abbilden. In diesem Falle gibt es also nach der Abbildung (nicht reduzierbare) Selbstverbindungen der Kurve  $a$  in der  $R_{1,C}^1$ , also kann nach § 6 b) die Anzahl der Schnittpunkte von  $\alpha$  mit  $a$  durch Abbildung des  $R_{1,C}^1$  auf sich verringert werden. Auf diese Weise können wir die Anzahl der Schnittpunkte verringern, solange noch Verbindungen  $v_{a\bar{a}}^i$  vorhanden sind. Dieser Prozess muss, da die Anzahl der Schnittpunkte von  $\alpha$  mit  $a$  endlich ist, abbrechen, d. h. wir können durch abwechselnde Abbildungen der  $R_{n+2,a}^{p-1}$  und  $R_{1,C}^1$  auf sich alle Verbindungen  $v_{a\bar{a}}^i$  wegschaffen. Durch diese Abbildungen möge  $\alpha$  in  $\alpha^0$  übergehen.

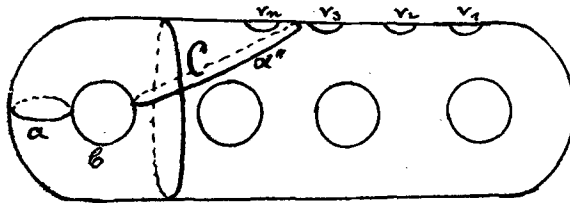


Fig. 43.

b) Entstehen durch  $\alpha^0$  Selbstverbindungen  $v_a^i$  des Randes  $a$  und  $v_{\bar{a}}^k$  des Randes  $\bar{a}$  auf  $R_{n+2,a}^{p-1}$ , dann können wir nach 2)  $a$  mit  $\bar{a}$  verbinden durch eine Kurve  $\beta$ , die keinen Punkt mit den  $v_a^i$  und  $v_{\bar{a}}^k$  gemeinsam hat. Durch eine Abbildung von  $R_{n+2,a}^{p-1}$  auf sich können wir nach 1)  $\beta$  in  $b$  verwandeln. Dann haben also die Selbstverbindungen von  $a$  und  $\bar{a}$  keinen Punkt mehr mit  $b$  gemeinsam. Gehen wir wieder von der  $R_{n+2,a}^{p-1}$  zu der  $R_n^p$  zurück, dann haben wir die Ränder  $a$  und  $\bar{a}$  zusammenzuheften. Dabei entstehen evtl. Schnittpunkte der Selbstverbindungen mit  $b$ , aber durch Schraubung längs  $a$  können wir erreichen, dass diese Anzahl kleiner ist als die Anzahl der Schnittpunkte mit  $a$ . Durch Abbildung von  $R_{1,C}^1$  auf sich, nämlich Vertauschung von  $a$  und  $b$ , können wir dann also wieder eine Verminderung der Schnittpunktzahl von  $\alpha$  mit  $a$  erreichen. So fahren wir fort, solange überhaupt noch das transformierte  $\alpha^0$  Verbindungen von  $a$  und  $\bar{a}$  oder Selbstverbindungen von  $a$  und  $\bar{a}$  liefert. Dieser Prozess muss abbrechen, d. h., wir können die Anzahl der Schnittpunkte von  $\alpha$  mit  $a$  auf Null reduzieren.  $\alpha^0$  sei hierbei in  $\alpha'$  übergegangen.

c) Entweder ist  $\alpha'$  homotop mit  $a$ , also in  $a$  durch Homotopie überzuführen, womit unser Ziel erreicht ist, oder es ist eine mit  $a$  nicht homotope,  $a$  nicht schneidende, nicht zerstückelnde Kurve auf  $R_n^p$ . Diese wird auf  $R_{n+2,a}^{p-1}$  entweder nicht zerstückelnd sein oder die Ränder  $a$  und  $\bar{a}$  voneinander trennen, da sie ja auf  $R_n^p$  nicht zerstückelnd sein soll. In beiden Fällen können wir  $\alpha'$  durch Abbildung von  $R_{n+2,a}^{p-1}$  in eine Kurve  $\alpha''$  überführen, die  $b$  ein Mal schneidet (s. Fig. 42 und 43). Eine geeignete Umgebung des Kurvenpaares  $\alpha''$  und  $b$  auf der  $R_n^p$  bildet eine  $R_1^1$ . Durch Schraubungen längs  $\alpha''$  und  $b$  in dieser  $R_1^1$  können wir (§ 6 b))  $\alpha''$  in  $b$  überführen, durch Schraubungen längs  $b$  und  $a$  ferner  $b$  in  $a$  überführen (in  $R_1^1, c$ ). Aber die Schraubung längs  $\alpha''$  ist in jedem Fall eine Abbildung des  $R_{n+2,a}^{p-1}$  auf sich. Wir haben also in der Tat durch Abbildungen des  $R_1^1, c$  und  $R_{n+2,a}^{p-1}$   $\alpha$  in  $a$  übergeführt, d. h. eine Abbildung  $\Psi^{-1}$  mit der verlangten Eigenschaft konstruiert. Wir haben jetzt bewiesen: *Alle Abbildungen einer Fläche vom Geschlecht  $p$  und  $n$  Löchern auf sich können erzeugt werden durch Schraubungen längs einer endlichen Anzahl von bestimmten geschlossenen Kurven.* — Ein solches System von Kurven werden wir weiter unten (5) direkt aus der Normaldarstellung der  $R_n^p$  ableiten.

4) *Beispiele.*

a)  $R_0^2$  (s. Fig. 44). Nach unserem Verfahren betrachten wir auf  $R_0^2$  die  $R_{2,a_1}^1$  und die  $a_1$  enthaltende  $R_{1,c}^1$ . Jede Abbildung der  $R_0^2$  auf sich wird erzeugt durch Abbildungen dieser beiden Flächen auf sich.

Die Abbildung der  $R_{1,c}^1$  wird erzeugt durch Schraubungen längs  $a_1$  und  $b_1$ . Um die Abbildungen der  $R_{2,a_1}^1$  zu bekommen, betrachten wir auf der  $R_{2,a_1}^1$  die  $R_{1,c}^{1,*}$  (mit  $a_3$  und  $b_2$  als kanonischem Schnittsystem) und die  $L_{4,a_1,a_3}$ . Alle Abbildungen der  $R_{2,a_1}^1$  auf sich werden erzeugt durch Abbildungen dieser

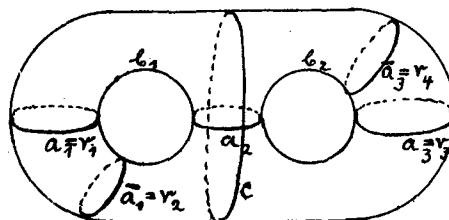


Fig. 44.

beiden Flächen auf sich. Die Abbildungen der  $R_{1,c}^{1,*}$  werden erzeugt durch die Schraubungen längs  $a_3$  und  $b_2$ , die Abbildungen der  $L_{4,a_1,a_3}$  werden erzeugt durch Schraubungen längs  $a_1$  (und  $\bar{a}_1$ ), längs  $a_3$  (und  $\bar{a}_3$ ), längs  $a_2$  und längs  $C$ . Die Schraubung längs  $C$  ist aber (§ 6 c)) zusammensetzbar aus Schraubungen längs  $a_1$  und  $b_1$  (oder auch aus Schraubungen längs  $a_3$  und  $b_2$ ). Also haben wir: *alle Abbildungen der geschlossenen Doppelringfläche sind erzeugbar durch Schraubungen längs der fünf Kurven  $a_1, a_2, a_3, b_1$  und  $b_2$ .*

b)  $R_0^3$  (s. Fig. 45). Durch Zerschneidung längs  $a_1, a_4$  und  $a_5$  entsteht aus der  $R_0^3$  eine  $L_6$ , deren Rändern wir die Bezeichnung und Reihenfolge (s. § 9, 8)) geben:  $a_1 = r_1, \bar{a}_1 = r_2, a_5 = r_3, \bar{a}_5 = r_4, a_4 = r_5, \bar{a}_4 = r_6$ . Wir betrachten nach § 9 die erzeugenden Schraubungen  $c_{ik}$ , lassen aber  $c_{62}, c_{24}, c_{46}$  weg, weil sie aus Schraubungen längs  $a_1$  und  $b_1$ , resp.  $a_5$  und  $b_2$ , resp.  $a_4$  und  $b_3$  erzeugbar sind. Wir erhalten so  $c_{13} = a_2, c_{35} = a_3, c_{51}$  ferner  $c_{14}, c_{25}, c_{36} = a_6$ . Wir behaupten, dass auf Grund der Konstruktion in 3) *alle Abbildungen des dreifachen Ringes auf sich zusammensetzbar sind aus Schraubungen längs der 12 Kurven  $a_1 \dots a_6$ ,*

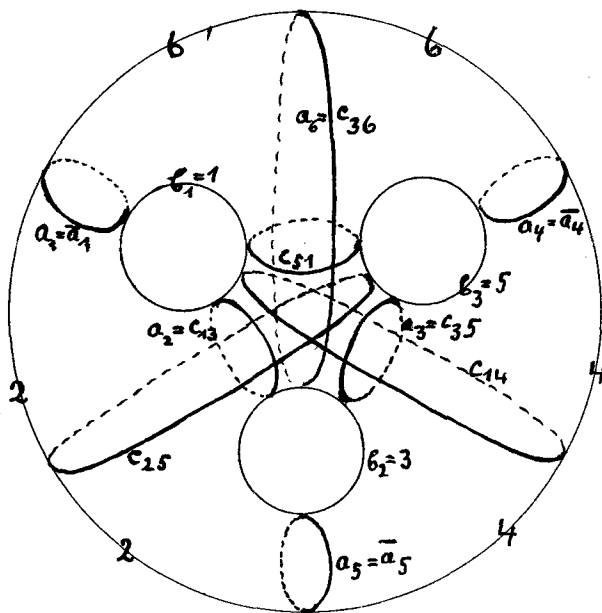


Fig. 45.

$b_1, b_2, b_3, c_{51}, c_{14}$  und  $c_{25}$ . In der Tat, wir betrachten auf der  $R_0^3$  die durch  $c_{62}$  entstehende  $R_{1,c_{62}}^1$  und die durch Aufschneiden längs  $a_1$  entstehende  $R_{2,a_1}^2$ . Die Abbildungen von  $R_{1,c_{62}}^1$  werden erzeugt durch Schraubungen längs  $a_1$  und  $b_1$ . Um die Abbildungen von  $R_{2,a_1}^2$  zu erhalten, betrachten wir auf dieser Fläche die  $R_{1,c_{46}}^1$  und die  $R_{4,a_1,a_4}^4$ . Die Abbildungen der  $R_{1,c_{46}}^1$  auf sich werden erzeugt durch Schraubungen längs  $a_4$  und  $b_3$ . Um die Abbildungen der  $R_{4,a_1,a_4}^4$  auf sich zu erhalten, betrachten wir auf dieser Fläche die  $R_{1,c_{24}}^1$  und die  $L_{6,a_1,a_4,a_5}$ . Die Abbildungen der  $R_{1,c_{24}}^1$  werden erzeugt durch Schraubungen längs  $a_5$  und  $b_2$ , die Abbildungen der  $L_6$  sind in § 9, 8) erkannt als erzeugbar durch Schraubungen längs der  $a_i, b_i, c_{51}, c_{14}$  und  $c_{25}$ . Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

5) Allgemein ergibt sich für die geschlossene Fläche  $R_p^g$  folgende Betrachtung: Wir wählen  $p$  zusammen nicht zerstückelnde Kurven  $a_1 \dots a_p$  und ein zweites solches System  $b_1 \dots b_p$ , wobei  $b_i$  mit  $a_i$  einen Punkt, mit  $a_k$  ( $k \neq i$ ) keinen Punkt gemeinsam hat. Durch Zerschneidung längs der  $a_i$  entsteht aus  $R_p^g$  eine  $L_{2p}$ . Die Abbildungen dieser  $L_{2p}$  werden nach § 9, 8) erzeugt durch Schraubungen längs  $\frac{2p(2p-1)}{2}$  Kurven. Aber dabei sind die Schraubungen längs der  $p$  Kurven  $a_i$  doppelt gezählt, weil die Schraubung längs der  $a_i$  auch Schrau-

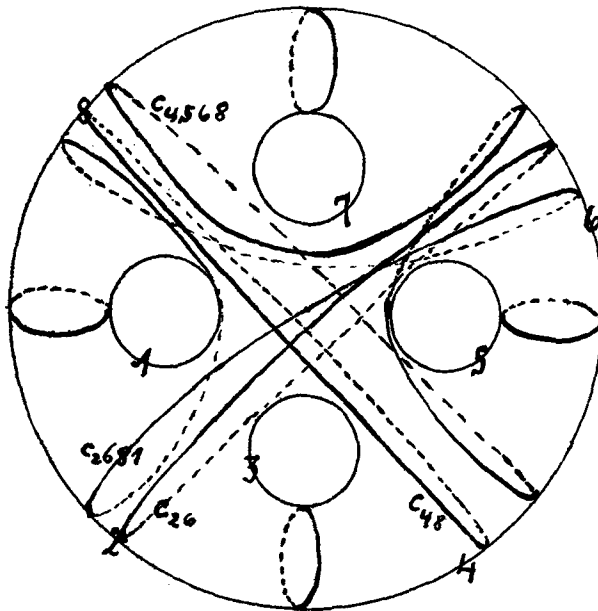


Fig. 46.

bungen längs der  $\bar{a}_i$  sind. Ferner sind  $p$  Schraubungen, wie wir oben bereits mehrfach bemerkt haben, je aus Schraubungen längs  $a_i$  und  $b_i$  erzeugbar, die andererseits die Abbildungen der  $R_{i, a_i b_i}^1$  auf sich erzeugen. Die Kurven  $c_{2i, 2i+2}$  (s. u.), längs der diese Schraubungen erfolgen, sind für  $p > 2$  alle voneinander verschieden, für  $p = 2$  fallen sie zusammen. Daher ist die für  $p > 2$  sich ergebende Formel für die Anzahl von erzeugenden Schraubungen für  $p = 2$  um 1 zu vermehren. Wir haben also im ganzen für  $p > 2$ : alle Abbildungen des  $R_p^g$  (, die die Indikatrix erhalten,) sind erzeugbar durch Schraubungen längs

$$\frac{2p(2p-1)}{2} - 2p + p = 2p(p-1) \text{ Kurven.}$$

Diese Kurven bestehen neben den  $a_i$  und  $b_i$  aus Kurven, die wir leicht angeben können, wenn wir die Ränder  $a_i$  und  $\bar{a}_i$  durch die  $p$  Kurven  $b_i$  und weitere  $p$  Verbindungsstücke auf einer geschlossenen Kurve anordnen, wie oben für  $p = 3$ . Numerieren wir diese Verbindungsstücke fortlaufend mit  $v_1 \dots v_{2p}$ , dann sind die anderen Kurven für die erzeugenden Schraubungen gegeben durch Kurven  $c_{ik}$  die zwei Stücke  $v_i$  und  $v_k$  je in einem Punkte schneiden, wobei ferner  $c_{ik}$  und  $c_{i'k'}$  sich in zwei Punkten schneiden, resp. keinen Punkt gemeinsam haben, je nachdem  $(i, k)$  und  $(i', k')$  sich trennen oder sich nicht trennen.

So erhalten wir für den  $R_0^4$  im Ganzen 24 erzeugende Schraubungen. Unter diesen haben wir zwei Schraubungen längs zerstückelnden Kurven, nämlich (s. Fig. 46) längs  $c_{48}$  und längs  $c_{26}$ . Diese können nach § 7 f) 2) erzeugt werden durch Schraubungen längs nicht zerstückelnder Kurven, die in der Figur angegeben sind als  $c_{4568}$  und  $c_{2681}$ .

6) Wir fügen noch eine kurze Bemerkung über das arithmetische Feld für die  $L_n$  und die  $R_n^p$  hinzu. Das arithmetische Feld für die  $L_n$  erhält man, indem man diese durch  $n - 3$  geschlossene Kurven  $c_j$  in  $n - 2$  Dreilochkugeln  $L_{3,j}$  zerlegt, die begrenzt werden durch

$$r_1 r_2 c_1, r_3 c_1 c_2, \dots r_{i+1} c_{i-1} c_i, \dots r_{n-2} c_{n-4} c_{n-3}, r_n r_{n-1} c_{n-3} \dots$$

Ein Kurvensystem ist auf der  $L_n$  mit festen Rändern gegeben durch die Schnittzahlen und Verschraubungszahlen für die  $n$  Ränder  $r_i$  und die  $n - 3$  Kurven  $c_j$ , also insgesamt durch  $2n - 3$  Zahlenpaare. Bei beweglichen Rändern fallen die  $n$  Verschraubungszahlen für die Ränder weg. Zerlegen wir die  $R_0^p$  durch  $p$  zusammen nicht zerstückelnde Kurven, so erhalten wir eine  $L_{2p}$ . Ein Kurvensystem auf der  $R_0^p$  liefert ein Kurvensystem auf der  $L_{2p}$ , für das die Schnittzahlen auf je zwei Rändern gleich sind und die Verschraubungszahl längs je eines der Ränder jedes Paares gleich Null gewählt werden kann. Wir erhalten also nach dem eben Abgeleiteten zur Bestimmung der Kurvensysteme auf einer  $R_0^p$  ins gesamt  $3p - 3$  Zahlenpaare. Entsprechend erhalten wir zur Bestimmung der Kurvensysteme auf einem  $R_n^p$  ins gesamt  $3p + 2n - 3$  Zahlenpaare.

Wir haben in § 5 e) bewiesen, dass die drei Zahlenpaare die auf der Dreilochkugel ein Kurvensystem festlegen, durch homotope Transformation nicht geändert werden. Hieraus folgert man, dass auch das System der Zahlenpaare, das wir eben für die Kurvensysteme auf der allgemeinsten Fläche angegeben haben, durch homotope Transformationen nicht geändert wird.