NICHTLINEARE INTEGRALGLEICHUNGEN NEBST ANWENDUNGEN.

VON

A. HAMMERSTEIN

in BERLIN.

Inhalt.

Einleitung.

Fredholm war der erste, der die Theorie der linearen Integralgleichungen systematisch durch Grenzübergang aus linearen Gleichungssystemen gewonnen hat. In dieser Arbeit sollen im Wesentlichen aus Eigenschaften nichtlinearer Gleichungssysteme solche nichtlinearer Integralgleichungen erschlossen werden. Eine so übersichtliche Theorie wie die der linearen Integralgleichungen steht freilich nicht zu erwarten, da bei beliebigen Gleichungssystemen ein so abgerundetes Hilfsmittel wie das der Determinanten nicht zur Verfügung steht.

Es handelt sich um die Gleichung

$$\psi(x) + \int_B K(x, y) f(y, \psi(y))\, dy = 0. \tag{1}$$

Dabei bedeutet B einen ein- oder mehrdimensionalen, schlichten, einfach zusammenhängenden, im Endlichen gelegenen Bereich, x, y sind Punkte darin. — $K(x, y)$ ist ein für alle x, y in B gegebener Kern, $f(y, u)$ eine für alle y in B und alle reellen Werte von u erklärte Funktion. $\psi(x)$ soll so bestimmt werden, dass (1) identisch in x erfüllt ist.

Die Gleichung

$$g(x, \varphi(x)) + \int_B K(x, y) f_1(y, \varphi(y))\, dy = 0 \tag{2}$$

ist bei gesuchter Funktion $\varphi(x)$ nicht allgemeiner, wenn $g(x, u)$ für alle Punkte von B und alle reellen Werte von u erklärt und so beschaffen ist, dass die Gleichung $v = g(x, u)$ eindeutig nach u gelöst werden kann: $u = h(x, v)$. Durch die Substitution

$$g(x, \varphi(x)) = \psi(x), \quad \varphi(x) = h(x, \psi(x))$$

nimmt (2) nämlich die Form

$$\psi(x) + \int_B K(x, y) f_1(y, h(y, \psi(y)))\, dy = 0$$

an, die mit $f_1(y, h(y, u)) = f(y, u)$ von Typ (1) ist. So ist z. B.

$$\varphi(x) + \int_B K(x, y) f_1(y, \varphi(y))\, dy = k(x) \tag{3}$$

bei gegebenem stetigem $k(x)$ äquivalent mit

$$\psi(x) + \int_B K(x, y) f_1(y, \psi(y) + k(y)) dy = 0. \tag{4}$$

Auf Integralgleichungen dieser Gestalt wird man bekanntlich durch Randwertaufgaben für gewisse nichtlineare Differentialgleichungen sowie durch Probleme der erzwungenen Schwingung geführt, worauf wir später noch zurückkommen. — Die Frage nach der Lösbarkeit von Gleichungen des vorliegenden Typus ist in der Literatur nur unter speziellen Annahmen behandelt worden.[1] Allgemeingültige Aussagen enthalten nur die bekannten Untersuchungen von E. Schmidt.[2] Sie laufen im Wesentlichen auf Folgendes hinaus:

Kennt man bereits eine Lösung von (1), so wird angegeben, wie viele Lösungen bei geringer Abänderung der Funktion $f(x, u)$ in der Nachbarschaft der bekannten Ausgangslösung existieren. Auf dem Zusammenhang dieser Resultate mit den im Folgenden zu entwickelnden wird später eingegangen. Zunächst ist also die Kenntnis einer Lösung erforderlich. Untersuchungen über das Vorhandensein einer solchen ist das Hauptziel der Arbeit. Sie zerfällt in drei Abschnitte. Der erste behandelt Existenz-, der zweite Eindeutigkeitsfragen. Der dritte ist von den vorangehenden methodisch verschieden; es wird darin im Wesentlichen die Lösung in Abhängigkeit von einem Parameter untersucht und ihre Fortsetzung nach der Schmidtschen Theorie durchgeführt.

Um die Resultate für die Eingangs erwähnten Anwendungen nutzbar zu machen, ist die Beschränkung auf reelle Lösungen geboten. Dass solche nicht immer vorhanden sind, wird an verschiedenen Beispielen gezeigt (§ 5). Es kann sich also nur darum handeln, unter hinreichend allgemeinen Annahmen über den Kern $K(x, y)$ möglichst umfassende Klassen von Funktionen $f(x, u)$ einfach zu charakterisieren, für die die Gleichung (1) stets lösbar ist. — Die Frage nach einfachen, notwendigen und hinreichenden Bedingungen ist zu weit; um nämlich zu erkennen, von wie mannigfacher Art die lösbaren Gleichungen sein können, bedenke man, dass in (3) die Funktionen $f_1(y, u)$ und $\varphi(x)$ willkürlich gewählt werden können, wozu sich dann ein $k(x)$ ergibt. Durch die angegebene Substitution gelangt man dann zu einer lösbaren Gleichung der Form (1). Wir be-

[1] Weitgehende Literaturangaben finden sich in dem Encyklopädieartikel (II. C. 13) von Hellinger und Toeplitz: »Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten«. Abschnitt II. D.

[2] Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen III. M. A. 65, S. 370 u. f.

gnügen uns daher damit, die Voraussetzungen so zu wählen, dass die für die Anwendungen am meisten interessierenden Typen erfasst werden.

Für den Kern wird man zunächst fordern, dass er von solcher Art ist, dass die Greenschen Funktionen darunter fallen. In der ganzen Arbeit sei an folgenden Annahmen festgehalten:

Erstens: $K(x, y)$ ist brauchbar unstetig im Sinne der linearen Integralgleichungen.[1]

Zweitens: $K(x, y)$ ist symmetrisch.

Drittens: $K(x, y)$ ist positiv definit. (Einen negativ definiten Kern führt man durch die Substitution $K_1 = -K$, $f_1 = -f$ auf einen positiv definiten zurück.)

Zunächst sollen solche Funktionsklassen angegeben werden, bei denen man schon aus dem Verhalten von $f(x, u)$ für grosse Werte von $|u|$ auf die Existenz einer Lösung schliessen kann. Es gelten nämlich folgende Sätze:

Satz 1. *$K(x, y)$ sei ein brauchbar unstetiger, symmetrischer, positiv definiter und beschränkter Kern. Für die stetige Funktion $f(x, u)$ gelte*

$$\int_0^u f(x, v)\, dv \geqq -\frac{k}{2} u^2 - C_1, \tag{5}$$

wo k und C_1 positive Konstanten sind, und k kleiner als der kleinste Eigenwert λ_1 von $K(x, y)$ ist. Dann ist die Gleichung (1) *stets lösbar.*

Die Voraussetzung (5) kann, wie man unmittelbar ersieht, weniger allgemein durch eine Wachstumsbeschränkung für $f(x, u)$ ersetzt werden:

Zusatz: *Die Annahme* (5) *ist sicher dann erfüllt, wenn es eine Konstante $u_0 > 0$ gibt, so dass*

$$f(x, u) \geqq -ku \quad \text{für} \quad u \geqq u_0 \quad \text{und} \quad f(x, u) \leqq -ku \quad \text{für} \quad u \leqq -u_0$$

$(0 < k < \lambda_1)$ *ausfällt.*

Die Schranke λ_1 für k kann durch keine grössere ersetzt werden.

Beschränkt man sich jetzt auf solche Funktionen, die für positiv oder negativ wachsendes u und alle x in B entweder dem Betrage nach beschränkt bleiben oder über alle Grenzen wachsen (d. h. $\underline{\lim}_{u \to \infty} f(x, u) = +\infty$ oder $\overline{\lim}_{u \to \infty} = -\infty$ und $\underline{\lim}_{u \to -\infty} = \infty$ oder $\overline{\lim}_{u \to -\infty} = -\infty$), so können dieselben derart in zwei Klassen ein-

[1] D.h. so beschaffen dass die Theorie der linearen Integralgleichungen für $K(x, y)$ gilt.

geteilt werden, dass für die der ersten die Gleichung (1) stets lösbar, für die der zweiten nicht stets lösbar ist. Die für das Verhalten von $f(x, u)$ dann überhaupt möglichen Fälle lassen sich in folgender, leicht verständlicher, durch Beispiele illustrierter Tabelle zusammenstellen:

Verhalten von $f(x, u)$ für		
$u \to -\infty$	$u \to +\infty$	Beispiel
1) Dem Betrage nach beschränkt	D. B. n. b.	In u periodische Funktionen
2) D. B. n. b.	$+\infty$	e^u
3) D. B. n. b.	$-\infty$	$-e^u$
4) $+\infty$	D. B. n. b.	e^{-u}
5) $+\infty$	$+\infty$	Polynom geraden Grades in u mit positivem Koeffizienten der höchsten Potenz
6) $+\infty$	$-\infty$	Polynom ungeraden Grades mit negativem Koeffizienten der höchsten Potenz
7) $-\infty$	D. B. n. b.	$-e^{-u}$
8) $-\infty$	$+\infty$	Polynom ungeraden Grades mit positivem Koeffizienten der höchsten Potenz
9) $-\infty$	$-\infty$	Polynom geraden Grades mit negativem Koeffizienten der höchsten Potenz

Es gilt jetzt: *Ist der symmetrische, positiv definite, brauchbar unstetige Kern beschränkt, so ist Gleichung* (1) *in den Fällen* 1), 2), 7) *nnd* 8) *stets lösbar, in den übrigen dagegen nicht immer lösbar.* Der erste Teil der Behauptung folgt, wie man sofort erkennt, aus dem Zusatz zu Satz 1. Dass die Gleichung in den anderen Fällen nicht stets lösbar ist, wird an Gegenbeispielen erhärtet (§ 5). Freilich kommen dabei auch lösbare Gleichungen vor: man braucht ja nur von einer Gleichung der Form (3) bei willkürlichem f_1 und φ auszugehen. Beim Übergang zu (4) ändert sich der Charakter von f in Bezug auf die Klasseneinteilung nicht. Die Aussage lehrt eben, dass in den Fällen 1), 2), 7), 8) bereits das Verhalten von f im Unendlichen eine Lösung gewährleistet, bei beliebiger Wahl des Kerns und der Funktion f, und darüber hinaus, dass dies auch die einzigen Fälle sind.

Um auch die Greensche Funktion in mehreren Dimensionen erfassen zu können, muss die Beschränktheit von $K(x, y)$ fallen gelassen werden. Hier gelingt der Beweis nur unter einer weiteren Einschränkung über f. Es gilt

Satz 2: *Ist der Kern brauchbar unstetig, symmetrisch und positiv definit, und gilt für die stetige Funktion* $f(x, u)$

$$\int_0^u f(x, v)\, dv \geqq -\frac{k}{2} u^2 - C_1 \qquad (0 < k < \lambda_1) \tag{5}$$

$$|f(x, u)| \leqq C_2 |u| + C_3, \tag{6}$$

wobei C_1, C_2, C_3 *von* x *und* u *unabhängige Konstanten bedeuten, so ist Gleichung* (1) *stets lösbar.*

Falls $C_2 < \lambda_1$ *ist, folgt natürlich Voraussetzung* (5) *aus* (6).

Zu wesentlich allgemeineren Aussagen gelangt man, wenn noch $K(x, y) \geqq 0$ angenommen wird, eine Voraussetzung, die von der am Rande verschwindenden Greenschen Funktion erfüllt ist. Es besteht dann

Satz 3. *Der symmetrische, brauchbar unstetige positiv definite Kern sei nirgends negativ.* $f(x, u)$ *sei stetig und genüge einer der folgenden vier Voraussetzungen:*

	Für $u \leqq 0$ *sei*	*Für* $u \geqq 0$ *sei*
I	$0 \leqq f(x, u) \leqq C_4 \lvert u \rvert + C_5$ $(0 < C_4 < \lambda_1)$	——
oder II	——	$0 \geqq f(x, u) \geqq -C_4 u - C_5$ $(0 < C_4 < \lambda_1)$
oder III	$-C_6 \leqq f(x, u) \leqq C_4 \lvert u \rvert + C_5$ $(0 < C_4 < \lambda_1)$	$-C_6 \leqq f(x, u)$
oder IV	$C_6 \geqq f(x, u)$	$C_6 \geqq f(x, u) \geqq -C_4 u - C_5$ $(0 < C_4 < \lambda_1)$

wobei C_4, C_5, C_6 *Konstanten sind. Dann ist Gleichung* (1) *lösbar.*

Beispiele für diese 4 Fälle sind

$$\begin{aligned}
\text{ad}\quad \mathrm{I}&: f(x,u) = \sin x \,.\, e^{u} + 1\,,\\
\text{ad}\quad \mathrm{II}&: f(x,u) = \sin x \,.\, e^{-u} + 1\,,\\
\text{ad}\quad \mathrm{III}&: f(x,u) = p(x) e^{u} + v(x)\,,\\
\text{ad}\quad \mathrm{IV}&: f(x,u) = p(x) e^{-u} + v(x)\,,
\end{aligned}$$

wobei die stetige Funktion $p(x) \geqq 0$ ist, das stetige $v(x)$ dagegen ganz beliebig gewählt sein kann.

Bemerkt sei, dass im Fall I und II die Funktion $f(x, u)$ für positives bezw. negatives u überhaupt keiner Einschränkung unterliegt. Diese Fälle führen auch bei beschränktem Kern über Satz 1 hinaus. Durch Gegenbeispiele (§ 5) überzeugt man sich davon, dass die Voraussetzung I bezw. II nicht dadurch erweitert werden kann, dass man die Forderung

$$f(x,u) \geqq 0 \text{ für } u \leqq 0, \text{ bezw. } f(x,u) \leqq 0 \text{ für } u \geqq 0 \text{ durch } f(x,u) \geqq -C_6$$
$$\text{bezw. } f(x,u) \leqq C_6 \quad (C_6 > 0)$$

ersetzt.

Für die in dem vorangehenden Schema auf S. 121 charakterisierten Funktionen, die im Unendlichen ein bestimmtes Verhalten zeigen, liefert Satz 2 und 3 unmittelbar: Ist der brauchbar unstetige, symmetrische, positiv definite Kern nirgends negativ, so ist die Gleichung (1) in den Fällen 1), 2) und 7) stets lösbar, in den Fällen 3), 4), 5), 9) dagegen braucht keine Lösung zu existieren. Unentschieden bleibt nur der Fall 8).

Setzt man weiter voraus, dass der Kern die am Rande verschwindende Greensche Funktion ist, so lässt sich ein sehr allgemeiner Satz beweisen, der den Fall 8) umfasst. Wir begnügen uns damit, das Ergebnis in zwei Dimensionen zu formulieren:

Satz 4. *B sei ein von stückweise analytischen Kurven begrenzter, einfach zusammenhängender, schlichter, im Endlichen gelegener Bereich der (x, ξ) Ebene. Damit die Differentialgleichung*

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x}(p u_x) + \frac{\partial}{\partial \xi}(p u_\xi) = f(x, \xi;\, u(x, \xi)) \qquad (p(x,\xi) \geqq 0)$$

eine Lösung mit vorgegebenen stetigen Randwerten hat, ist hinreichend, dass die mit stetigen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehene Funktion

$f(x, \xi; u)$ folgender Bedingung genügt: Wird unter $v(x, \xi)$ diejenige Lösung von $L(v) = 0$ verstanden, welche die vorgeschriebenen Randwerte annimmt, so muss es zwei konstante Werte $u_1 < 0$ und $u_2 > 0$ geben, für welche

$$f(x, \xi; u_1 + v(x, \xi)) < 0 \quad \textit{und} \quad f(x, \xi; u_2 + v(x, \xi)) > 0$$

im abgeschlossenen Bereich B erfüllt ist. Für die Lösung $u(x, \xi)$ gilt dann $u_1 \leqq u(x, \xi) \leqq u_2$.

Diese Bedingung ist gewiss erfüllt, wenn $f(x, u)$ eine mit u von $-\infty$ bis $+\infty$ verlaufende Funktion ist, z. B. ein Polynom ungeraden Grades in u mit durchweg positivem Koeffizienten der höchsten Potenz. Verläuft dagegen f von $+\infty$ nach $+\infty$, wie etwa ein Polynom geraden Grades mit durchweg positivem Koeffizienten der höchsten Potenz, so ist sie z. B. dann erfüllt, wenn $f(x, \xi; v(x, \xi)) < 0$ in B ausfällt.

Wird unter $K(x, \xi; y, \eta)$ die zu $L(u)$ gehörige, am Rande von B verschwindende Greensche Funktion verstanden, und hat $v(x, \xi)$ die in Satz 4 festgesetzte Bedeutung, so ist bekanntlich jedes der Integralgleichung

$$\psi(x, \xi) + \int_B K(x, \xi; y, \eta) f(y, \eta; \psi(y, \eta) + v(y, \eta))\, dy\, d\eta = 0$$

genügende $\psi(x, \xi)$ eine am Rande verschwindende Lösung von

$$L(\psi) = f(x, \xi; \psi(x, \xi) + v(x, \xi)).$$

Daher ist $u(x, \xi) = \psi(x, \xi) + v(x, \xi)$, wegen $L(v) = 0$, eine solche Lösung von

$$L(u) = f(x, \xi; u),$$

welche die vorgegebenen Randwerte annimmt.

Zusammenfassend kann man also sagen: *die Randwertaufgabe für $L(u) = f(x, \xi; u)$ ist stets lösbar, wenn $f(x, \xi; u + v(x, \xi))$ eine der Voraussetzungen der Sätze 2), 3) oder 4) erfüllt.*

Beschränkt man sich wieder auf die Funktionen des Schemas S. 121, so gehört die Funktion $f(x, \xi; u + v(x, \xi))$ zur selben Klasse wie $f(x, \xi; u)$; eine Funktion der Klasse 8) genügt aber den Voraussetzungen zu Satz 4); somit folgt:

In den Fällen 1), 2), 7) und 8) ist die Lösbarkeit der Randwertaufgabe $L(u) = f(x, \xi; u)$ bei beliebiger Wahl der stetigen Randwerte gewährleistet.

Dass in den übrigen Fällen bei gewissen Randwerten eine Lösung existieren kann, ist trivial — man braucht ja nur von irgend einer Lösung auszugehen und die von ihr auf der Berandung angenommenen Werte als Randwerte vorzuschreiben. Schliesslich sei noch die Bemerkung gemacht, dass entsprechende Resultate für alle diejenigen Randwertaufgaben gelten, die durch Vermittlung einer Greenschen Funktion auf eine Integralgleichung der betrachteten Art zurückgeführt werden können. Hierher gehört zum Beispiel die Frage nach einer solchen Lösung $u(x, \xi)$ von

$$\Delta u(x, \xi) = f(x, \xi; u(x, \xi)),$$

für die am Rande

$$Au + \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ gilt, mit } A \leqq 0, \quad \int A ds \neq 0. \quad (N \text{ Richtung der Normalen.})$$

Es sollen jetzt die Beweisgedanken, die zu den bisherigen Ergebnissen führen, kurz gekennzeichnet werden. Satz 1 und 2 beruhen auf der Zurückführung auf ein Gleichungssystem, das vermöge einer endlichen Extremumsaufgabe als lösbar erkannt wird. Unter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ seien nämlich die Eigenwerte, beziehungsweise Eigenfunktionen von $K(x, y)$ verstanden. Auf Grund des Entwickelungssatzes für quellenmässig dargestellte Funktionen, d. h. solche der Form $h(x) = \int\limits_B K(x, y) w(y) dy$ lässt sich jede etwa vorhandene Lösung der Gleichung (1) durch eine gleichmässig konvergente Reihe

$$\psi(x) = \sum_{(\nu)} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

darstellen. Die Fourierkoeffizienten c_ν haben gemäss (1) die Gestalt

$$(7) \qquad c_\varrho = -\frac{1}{\lambda_\varrho} \int\limits_B f\left(y, \sum_{(\nu)} c_\nu \varphi_\nu(y)\right) \varphi_\varrho(y) dy, \quad (\varrho = 1, 2, 3, \ldots).$$

Somit sind die Grössen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ein Lösungssystem dieser unendlichvielen transzendenten Gleichungen.

Zufolge der Besselschen Ungleichung konvergiert dabei die Reihe

$$(8) \qquad \sum_{(\varrho)} (c_\varrho \lambda_\varrho)^2.$$

Kennt man umgekehrt ein solches Lösungssystem von (7), für welches die Reihe (8) einen endlichen Wert hat, so konvergiert, da nach der Schwarzschen Ungleichung $|\Sigma c_\nu \varphi_\nu(x)| \leqq \left\{\Sigma(c_\nu\lambda_\nu)^2 \sum \left(\frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ ist, die Reihe $\psi(x) = \sum_{(\nu)} c_\nu \varphi_\nu(x)$ gleichmässig und absolut und stellt ersichtlich eine Lösung von (1) dar. *Die Integralgleichung ist also dem Gleichungssystem* (7) *bei der Nebenbedingung* (8) *äquivalent.* Die Annahme (5) in Satz 1 und 2 ermöglicht es nun, eine solche Extremumsaufgabe anzugeben, dass die zugehörigen notwendigen Bedingungsgleichungen gerade ein Näherungssystem von (7) ausmachen. (§ 1.) Auf Grund der weiteren Voraussetzungen von Satz 1 und 2 lässt sich die Konvergenz einer Teilfolge gegen eine Lösung beweisen.

Die gefundene Lösung liefert nun das absolute Minimum eines gewissen Integrals, welches, wenn der Kern die Greensche Funktion ist, in das zur Randwertaufgabe gehörige Dirichletsche Integral übergeht.[3] (§ 6.)

Satz 3 wird aus Satz 2 durch geeignete Abänderung von f erschlossen. Satz 4 endlich erhält man auf Grund von Eigenschaften des Dirichletschen Integrals aus Satz 2. (§ 7.)

Im zweiten Abschnitt werden Fragen der Eindeutigkeit untersucht. Hier liegen, wie sich ergeben wird, die Dinge wesentlich verwickelter. Es kann vorkommen, dass die Gleichung (1) nur eine, oder mehrere, oder unendlichviele Lösungen hat. (§ 5.) Immerhin lassen sich zwei Klassen von Funktionen einfach kennzeichnen, für welche die Eindeutigkeit der Lösung gewährleistet ist. Es gilt nämlich, wenn über den Kern wieder wie im ersten Abschnitt vorausgesetzt wird, dass er brauchbar unstetig, symmetrisch und positiv definit sei:

Satz 5. *Die Gleichung* (1) *hat höchstens eine Lösung, wenn die stetige Funktion* $f(x, u)$ *bei jedem festen* x *in* B *monoton nicht abnehmend in* u *ist.* (§ 8.)

Zusammen mit Satz 1 und 4 ergibt sich: Ist der Kern beschränkt oder eine Greensche Funktion, und nimmt die stetige Funktion $f(x, u)$ in u nicht ab, so hat die Gleichung (1) eine und nur eine Lösung.

Weiter besteht für einen brauchbar unstetigen, symmetrischen, positiv definiten Kern

Satz 6. *Die Gleichung* (1) *hat eine und nur eine Lösung, wenn es eine positive Konstante* $\alpha < \lambda_1$ (λ_1 *kleinster Eigenwert des Kerns*) *derart gibt, dass für alle* u *und* x *in*

[3] Lichtenstein wendet zur Behandlung gewisser nichtlinearer Randwertaufgaben, die in den vorstehenden Sätzen als Spezialfälle enthalten sind, das Ritzsche Verfahren auf das Dirichletsche Integral an: Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung. J. f. Math. 145 (1915).

B die stetige Ableitung von $f(x, u)$ der Bedingung

$$\left|\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}\right| \leqq \alpha$$

genügt. (§ 9.)

Wendet man diesen Satz auf die lineare Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_B K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = k(x)$$

an, welche durch die Substitution $\varphi(x) - k(x) = \psi(x)$ auf die Form (1)

$$\psi(x) + \lambda \int\limits_B K(x, y)\, [-\psi(y) - k(y)]\, dy = 0$$

gebracht wird, so deckt er sich, wegen $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| = |\lambda|$, mit der Aussage, dass die lineare Integralgleichung für $|\lambda| < \lambda_1$, stets eindeutig lösbar ist, als deren Verallgemeinerung er angesprochen werden kann. Daraus erkennt man, dass die Schranke λ_1 durch keine kleinere ersetzt werden kann.

Genügt $f(x, u)$ einer der Annahmen von Satz 5 oder 6, so gilt dasselbe von $f(x, u + v(x))$ bei beliebigem stetigem $v(x)$. Daraus folgt aber nach den vorangehenden Überlegungen, dass auch *die Randwertaufgabe unter diesen Voraussetzungen eindeutig lösbar ist.* Im Fall eines monotonen f ist dies Ergebnis nicht neu. Die oft behandelte Gleichung $\Delta u = e^u$ ist darin enthalten.

Die mit einem Lösungssystem $c_1^{(n)}, \ldots c_n^{(n)}$ der Näherungsgleichungen zu (7) gebildeten Funktionen

$$\psi_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^{(n)} \varphi_\nu(x)$$

brauchen mit wachsendem n nicht gegen eine Grenzfunktion zu streben, wenn Gleichung (1) nicht eindeutig lösbar ist. Beim Existenzbeweise (§ 1) wird nur die Konvergenz einer Teilfolge nachgewiesen. Anders bei Eindeutigkeit. Unter der Voraussetzung von Satz 6 wird gezeigt, dass die Funktionen $\psi_m(x)$ gegen die Lösung $\psi(x)$ konvergieren, und für den Fehler eine Restabschätzung angegeben. (§ 10.) Die Gleichungen (7) können also zur angenäherten Berechnung von $\psi(x)$ dienen.

Weiter ergibt sich für solche Funktion f, für die

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \leqq A$$

bei beliebigem A gilt, dass die Lösungszahl von Gleichung (1) mit der von gewissen endlich vielen transzendenten Gleichungen übereinstimmt. In § 11 wird noch eine notwendige Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung gegeben.

Der dritte Abschnitt handelt von der mit einem Faktor λ versehenen Gleichung

$$\psi(x) + \lambda \int\limits_B K(x, y) f(y, \psi(y)) dy = 0. \tag{9}$$

Die Einführung des Parameters ergibt sich hier nicht auf natürliche Weise, wie bei den linearen Integralgleichungen, scheint aber dadurch gerechtfertigt, dass wie später gezeigt wird, derartige Gleichungen in den Anwendungen eine Rolle spielen. Dass (9) bei hinreichend kleinem λ eine Lösung hat, ist lange bekannt[4] und kann auf verschiedene Arten bewiesen werden. Aus den vorangehenden Ergebnissen lassen sich jedoch Schlüsse über das Verhalten der Lösungen bei gegen 0 abnehmendem λ ziehen. Es gilt nämlich

Satz 7. *Der Kern sei brauchbar unstetig, positiv definit und symmetrisch. Die Funktion $f(x, u)$ besitze eine stetige Ableitung $\frac{\partial f}{\partial u}$. Ist $l > 0$ eine beliebig vorgegebene Zahl, so gibt es dazu ein $\lambda_0 = \lambda_0(l)$ derart, dass für alle der Bedingung $0 < |\lambda| \leqq \lambda_0$ genügenden λ die Gleichung*

$$\psi(x) + \lambda \int\limits_B K(x, y) f(y, \psi(y)) dy = 0 \tag{9}$$

genau eine Lösung $\psi(x, \lambda)$ hat, welche ganz in das Intervall $-l \leqq \psi \leqq l$ hineinfällt. (§ 12.)

Hieraus entnimmt man, indem man l gegen 0 konvergieren lässt, dass es stets genau eine Lösung gibt, für welche das Maximum des absoluten Betrages mit $|\lambda|$ gegen 0 konvergiert. Dies kann die einzige Lösung sein (z. B. nach

[4] z. B. Block: Sur la solution de certaines équations fonctionnelles. Arkiv för Matematik Bd. 3.

Satz 5, wenn f monoton wachsend ist). Wenn jedoch noch weitere vorhanden sind, so muss das Maximum ihres Betrages mit abnehmendem λ über alle Grenzen wachsen, was man erkennt, wenn man l gegen Unendlich gehen lässt. Dass dies Vorkommnis tatsächlich eintreten kann, wird durch ein Beispiel gezeigt.

Man kann jetzt die für hinreichend kleines λ vorhandenen Lösungen $\psi(x, \lambda)$ mit wachsendem λ weiter verfolgen. Ist die Funktion $f(x, u)$ in eine nach $u-u_0$ fortschreitende Potenzreihe entwickelbar, so bietet die geeignete Handhabe hierfür die Theorie von E. Schmidt.[5]

In Rücksicht auf die folgende Anwendung (§ 15) wird dies lediglich unter der Annahme $|f(x, u)| \leqq$ const. ausgeführt. (§ 13.) Es besteht

Satz 8. *Die analytische Funktion $f(x, u)$ sei für reelles u dem Betrage nach beschränkt. Betrachtet man die Lösungsanzahl der Gleichung*

$$\psi(x, \lambda) + \lambda \int_B K(x, y) f(y, \psi(y, \lambda)) dy = 0 \tag{9}$$

in Abhängigkeit von λ, so existiert für hinreichend kleines λ genau eine Lösung $\psi(x, \lambda)$. Eine Änderung der Lösungsanzahl kann nur an einer solchen Stelle λ_0 eintreten, zu der es eine Lösung $\psi(x, \lambda_0)$ von (9) gibt, derart, dass die lineare Integralgleichung in $\varphi(x)$

$$\varphi(x) + \lambda \int_B K(x, y) \frac{\partial f(y, \psi(y, \lambda_0))}{\partial u} \varphi(y) dy = 0 \tag{10}$$

den Eigenwert λ_0 hat. Überdies kann sich die Lösungsanzahl nur um eine gerade Zahl ändern.

Die Existenz einer nicht identisch verschwindenden Lösung von (10) ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend für die Änderung der Lösungszahl. Kriterien, welche hierüber Aufschluss geben, werden auf Grund der Schmidtschen Theorie angegeben.

Als Beispiel wird in § 15 die Gleichung der erzwungenen Pendelschwingung betrachtet. Hamel[6] hat dieselbe auf die nichtlineare Integralgleichung

[5] In §§ 13 und 14 wird die in Anmerkung 2 genannte Arbeit als bekannt vorausgesetzt. Sie sind methodisch von den vorangehenden verschieden.

[6] Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden. M. A. 86.

$$\Psi(x) - \alpha^2 \int_0^\pi K(x, y) \sin \Psi(y) dy = -\beta \sin x \tag{11}$$

zurückgeführt, worin α, β Konstanten bedeuten, und

$$K(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \,.\, \sin ny}{n^2} = \begin{cases} x\left(\frac{-y}{\pi} + 1\right) & \text{für } x < y \\ y\left(\frac{-x}{\pi} + 1\right) & \text{für } x > y \end{cases}$$

ist.

Es soll hier etwas allgemeiner diejenige Gleichung zugrunde gelegt werden, bei der die rechte Seite $-\beta \sin x$ durch eine beliebige stetige Funktion $-g(x)$ ersetzt ist.

Die Substitution $\Psi(x) + g(x) = \psi(x)$, $\alpha^2 = \lambda$ bringt sie auf die Form (9):

$$\psi(x) + \lambda \int_0^\pi K(x, y) \sin(-\psi(y) + g(y)) dy = 0.$$

Hamel hat für die spezielle Gleichung (11) die Existenz einer Lösung bewiesen, und für $\alpha < 1$ Eindeutigkeit gezeigt. Dies Ergebnis folgt nun bei beliebigem $g(x)$ sofort aus Satz 1 (Zusatz) und Satz 6, denn es ist $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| = |\lambda| \, |\cos(-u + g)| \leqq$ $\leqq |\lambda| < 1 = \lambda_1$. Die im Anschluss an Duffing von Hamel zur Berechnung der Lösung aufgestellte Näherungsgleichung kann dem Gleichungssystem (7) ohne weiteres entnommen werden.

Für $|\lambda| < 1$ beherrscht man also die betrachtete Gleichung. Hamel zeigt nun, dass, wenn λ weiter wächst, bei genügend kleinem β neue Lösungen hineintreten.

Ferner kann man elementar beweisen[7], dass bei beliebigem zweimal stetig differenzierbarem $g(x)$ mit $g(0) = 0$, $g(\pi) = 0$ für hinreichend grosses λ mehr Lösungen als $\left[\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right]$ vorhanden sind. Über die Werte von λ, an denen eine Änderung der Lösungszahl eintritt, gibt, theoretisch wenigstens, Satz 8 Auf-

---

[7] Vergl. die Arbeit des Verfassers: Eine nichtlineare Randwertaufgabe (Pendelgleichung). Jahresber. d. D. M. V.

schluss. Darüber hinaus kann eine allgemeingültige Aussage nicht gemacht werden. Aus den Resultaten von Paragraph 13 und 14 folgt nämlich, dass bei geeigneter Wahl von $g(x)$ in der Tat sowohl Lösungen an einer Stelle λ_0 neu hinzutreten können, als auch, dass solche wieder verschwinden können.

I. ABSCHNITT.

Existenzsätze.

§ 1. Zurückführung auf ein unendliches Gleichungssystem und dessen Auflösung.

Der Beweis des Satzes 1 und 2 wird zunächst gemeinsam geführt. In diesem Paragraphen gelten folgende Voraussetzungen:

Der symmetrische Kern $K(x, y)$ ist positiv definit und brauchbar unstetig.

Mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ sollen im Folgenden stets die der Grösse nach geordneten Eigenwerte, mit $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$ das vollständige Orthogonalsystem der normierten Eigenfunktionen von K bezeichnet werden.

Für die stetige Funktion $f(x, u)$ wird gefordert

(5) $$F(x, u) = \int_0^u f(x, v)\,dv \geqq -\frac{k}{2}u^2 - C_1 \qquad (k < \lambda_1).$$

Den Ausgangspunkt bildet folgende Funktion von m Veränderlichen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$:

$$H_m(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \alpha_\nu^2 + 2\int_B F\left(y, \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu \varphi_\mu(y)\right) dy.$$

Dieselbe ist in $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ stetig. Auf Grund der Annahme (5) folgt nun, dass sie nach unten beschränkt ist und positiv unendlich wird, wenn auch nur eine Variable nach der positiven oder negativen Seite ins Unendliche rückt, denn es ist ja

$$H_m(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) \geqq \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \alpha_\nu^2 - 2\int_B \left(\frac{k}{2}\left(\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu \varphi_\mu(y)\right)^2 + C_1\right) dy$$

(12) $$\geqq \sum_{\nu=1}^{m} (\lambda_\nu - k)\alpha_\nu^2 - 2\,C_1 \int_B dy.$$

Daher gibt es zu jedem m mindestens ein Wertsystem $\alpha_\nu = c_\nu^{(m)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots m)$, welches der Funktion H_m ein absolutes Minimum d_m erteilt, und somit das Gleichungssystem

$$\frac{\partial H_m}{\partial \alpha_\varrho} = 2\lambda_\varrho c_\varrho^{(m)} + 2\int\limits_B f\left(y, \sum_{\mu=1}^m c_\mu^{(m)} \varphi_\mu(y)\right) \varphi_\varrho(y)\, dy = 0, \quad (\varrho = 1, 2, \ldots m)$$

$$c_\varrho^{(m)} = -\frac{1}{\lambda_\varrho}\int\limits_B f\left(y, \sum_{\mu=1}^m c_\mu^{(m)} \varphi_\mu(y)\right) \varphi_\varrho(y)\, dy \tag{13}$$

löst. Sind mehrere solche vorhanden, so wird eines herausgegriffen. Ferner ist $d_1 \geqq d_2 \geqq d_3 \ldots$

Aus (12) ergibt sich nun leicht eine Schranke für $\sum\limits_{\nu=1}^m \lambda_\nu (c_\nu^{(m)})^2$. Es ist nämlich

$$d_m + 2C_1 \int\limits_B dy \geqq \sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu (c_\nu^{(m)})^2 \left(1 - \frac{k}{\lambda_\nu}\right), \tag{14}$$

$$\sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu (c_\nu^{(m)})^2 \leqq \frac{d_1 + 2C_1 \int\limits_B dy}{1 - \frac{k}{\lambda_1}} = D. \tag{15}$$

Jetzt wird eine Folge von in B stetigen Funktionen $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ wie folgt erklärt:

$$\psi_m(x) = \sum_{\nu=1}^m c_\nu^{(m)} \varphi_\nu(x). \tag{16}$$

Dabei ist

$$\int\limits_B \psi_m^2(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^m (c_\nu^{(m)})^2 \leqq \frac{1}{\lambda_1} \sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu (c_\nu^{(m)})^2 \leqq \frac{1}{\lambda_1} D, \tag{17}$$

wobei D die in (15) erklärte von m unabhängige Konstante bedeutet.

Auf Grund von (13) kann ψ_m auf die Form

$$\psi_m(x) = -\sum_{\nu=1}^m \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int\limits_B f(y, \psi_m(y)) \varphi_\nu(y)\, dy \tag{18}$$

gebracht werden.

Hieraus lässt sich folgendes Teilergebnis erschliessen: *Falls* $K(x, y)$ *nur endlich viele, etwa* m, *Eigenwerte hat, also* $K(x, y) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$ *ist, so löst* $\psi_m(x)$ *die Gleichung* (1). *Die Anzahl der Lösungen von* (1) *stimmt in diesem Fall genau mit der Anzahl der Lösungen* $c_1^{(m)}, \ldots c_m^{(m)}$ *des Gleichungssystems* (13) *überein.* Denn aus der Gleichung (18), die dann ja mit (1) identisch ist, entnimmt man leicht, dass auch umgekehrt zu jedem ψ_m ein Lösungssystem von (13) gehört.

Es sei also fortan angenommen, dass unendlichviele Eigenwerte existieren. Somit ist die Folge $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ abzählbar unendlich.

Jetzt wird ψ_m in die Gleichung (1) eingesetzt. Dies ergibt, wenn der Entwicklungssatz für quellenmässig darstellbare Funktionen berücksichtigt wird, auf Grund von (18)

$$(19) \qquad \begin{aligned} &\psi_m(x) + \int_B K(x, y) f(y, \psi_m(y)) dy \\ &= \psi_m(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int_B f(y, \psi_m(y)) \varphi_\nu(y) dy \\ &= \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int_B f(y, \psi_m(y)) \varphi_\nu(y) dy. \end{aligned}$$

Für den absoluten Betrag der letzten Summe liefert die Schwarzsche und Besselsche Ungleichung die Schranke

$$\left\{ \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \right)^2 \int_B [f(y, \psi_m(y))]^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nun soll zuvörderst die Existenz einer Lösung von (1) unter der Annahme erwiesen werden, dass es eine von m unabhängige Constante A gibt, so dass

$$(20) \qquad \int_B [f(y, \psi_m(y))]^2 dy \leqq A$$

gilt. Das Bestehen der Ungleichung (20) wird später unter den Voraussetzungen der Sätze 1) und 2) in verschiedener Weise gezeigt werden.

Aus (19) ergibt sich nach dem Vorigen infolge der gleichmässigen Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\right)^2$ sofort

$$\lim_{m\to\infty}\left(\psi_m(x)+\int_B K(x,y)f(y,\psi_m(y))\,dy\right)=0, \tag{21}$$

gleichmässig in x.

Nun ist die Funktionenfolge

$$\omega_m(x)=\int_B K(x,y)f(y,\psi_m(y))\,dy$$

unter der Annahme (20) gleichmässig beschränkt und gleichgradig stetig, denn es ist ja

$$\begin{aligned}|\omega_m(x_1)-\omega_m(x_2)| &= \left|\int_B (K(x_1,y)-K(x_2,y))f(y,\psi_m(y))\,dy\right| \\ &\leqq \left\{\int_B (K(x_1,y)-K(x_2,y))^2dy\int_B [f(y,\psi_m(y))]^2dy\right\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

wobei der erste Posten, zufolge der Stetigkeit des Iterierten eines brauchbar unstetigen Kernes bei hinreichend kleinem $|x_2-x_1|$ beliebig klein gemacht werden kann.

Es gibt also nach einem geläufigen Satz eine derartige Teilfolge $\psi_{m_1}, \psi_{m_2}, \psi_{m_3}, \ldots$, dass die zugehörige Folge $\omega_{m_1}, \omega_{m_2}, \omega_{m_3}, \ldots$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion konvergiert. Hieraus und aus (21) erschliesst man jetzt, dass auch die Folge $\psi_{m_1}, \psi_{m_2}, \psi_{m_3}, \ldots$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $\psi(x)$ konvergiert.

Endlich zieht die Stetigkeit von $f(y,u)$ noch

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_B K(x,y)f(y,\psi_{m_\nu}(y))dy=\int_B K(x,y)f(y,\psi(y))\,dy$$

nach sich, so dass also nach (21)

$$\psi(x)+\int_B K(x,y)f(y,\psi(y))dy=0$$

ist. Die Existenz einer Lösung ist somit auf den Nachweis von (20) zurückgeführt.

§ 2. Der beschränkte Kern. Beweis von Satz 1.

In diesem Paragraphen wird vorausgesetzt, dass der Kern beschränkt sei. Für f gelte die Voraussetzung (5). Dann können die Ergebnisse von § 1 angewandt werden.

Es sei x ein Punkt aus B. Man verstehe unter $\varkappa$ den Durchschnitt einer um x geschlagenen Kugel mit B. Aus (16) ergibt sich dann

$$\left|\int_\varkappa \psi_m(\xi)\,d\xi\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{m} \sqrt{\lambda_\nu}\, c_\nu^{(m)} \cdot \int_\varkappa \frac{\varphi_\nu(\xi)}{\sqrt{\lambda_\nu}}\,d\xi\right|$$
$$\leqq \left\{\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu (c_\nu^{(m)})^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu}\left[\int_\varkappa \varphi_\nu(\xi)\,d\xi\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wendet man den Entwicklungssatz:

$$\int_B\int_B K(\xi,\eta)\,h(\xi)\,h(\eta)\,d\xi\,d\eta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu}\left[\int_B \varphi_\nu(\xi)\,h(\xi)\,d\xi\right]^2$$

mit der Funktion $h(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ wenn } \xi \text{ Punkt von } \varkappa \text{ ist} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$ an und berücksichtigt (15), so folgt aus der vorangehenden Ungleichung

$$\left|\int_\varkappa \psi_m(\xi)\,d\xi\right| \leqq D^{\frac{1}{2}}\left\{\int_\varkappa\int_\varkappa K(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Bezeichnet jetzt $\bar{K}$ die obere Schranke von $K(x, y)$ in B und $\varkappa^*$ den Inhalt von $\varkappa$, so ergibt sich

$$\left|\frac{1}{\varkappa^*}\int_\varkappa \psi_m(\xi)\,d\xi\right| \leqq D^{\frac{1}{2}}\,\bar{K}^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen der Stetigkeit von ψ_m erhält man, wenn man $\varkappa^*$ gegen 0 konvergieren lässt

$$|\psi_m(x)| \leqq D^{\frac{1}{2}}\,\bar{K}^{\frac{1}{2}}.$$

Daraus entnimmt man sofort die Existenz einer von m unabhängigen Konstanten A für die (20) gilt.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Überdies genügt die Lösung der Ungleichung $|\psi(x)| \leqq D^{\frac{1}{2}} \overline{K}^{\frac{1}{2}}$.

§ 3. Funktionen, die nicht stärker unendlich werden als die linearen. Beweis von Satz 2.

In diesem Paragraphen wird über den Kern nur vorausgesetzt, dass er brauchbar unstetig ist. Für die Funktion f gelte neben (5) die Annahme

$$|f(x, u)| \leqq C_2 |u| + C_3. \tag{6}$$

Dann ist

$$(f(x, u))^2 \leqq C_7 u^2 + C_8,$$

wobei C_7 und C_8 von u und x unabhängige Konstanten bedeuten. Somit wird

$$\int_B [f(y, \psi_m(y))]^2 dy \leqq C_7 \int_B [\psi_m(y)]^2 dy + C_8 \int_B dy.$$

Nach (17) liegt die rechte Seite unter einer von m unabhängigen Konstanten. Damit ist (20) und somit Satz 2 bewiesen.

§ 4. Der positive Kern. Beweis von Satz 3.

Es werde mit folgender einfachen Bemerkung begonnen. Hat eine Gleichung der Form

$$\varphi(x) + \int_B K(x, y) f_1(y, \varphi(y)) dy = 0 \tag{1}$$

eine Lösung $\varphi(x)$, so erhält man durch die Spiegelung

$$f_1(x, u) = -f(x, -u) \tag{22}$$

daraus eine Lösung $\psi(x) = -\varphi(x)$ von

$$\psi(x) + \int_B K(x, y) f(y, \psi(y)) dy = 0.$$

Genügt nun f der Voraussetzung (II) bezw. (IV) von Satz 3, so erfüllt, wie unmittelbar ersichtlich, das durch (22) damit verbundene f_1 die Bedingungen (I) bezw. (III). Der Satz braucht daher nur unter diesen beiden Annahmen bewiesen zu werden. Er kann gemäss der Forderung $K \geqq 0$ leicht aus Satz 2 gefolgert werden.

Für f gelte zunächst die Voraussetzung (I), d. h.:

Für $u \leqq 0$ ist $0 \leqq f(x, u) \leqq C_4 |u| + C_5$. $(0 < C_4 < \lambda_1)$.

Man erkläre eine stetige Funktion $f^*(x, u)$ durch

$$f^*(x, u) = \begin{cases} f(x, u) & \text{für } u < 0 \\ f(x, 0) & \text{für } u \geqq 0. \end{cases}$$

Offensichtlich genügt f^* wegen $C_4 < \lambda_1$ den Bedingungen des Satzes 2. Die Gleichung

$$\psi^*(x) = -\int_B K(x, y) f^*(y, \psi^*(y)) dy$$

besitzt somit mindestens eine Lösung ψ^*, die nach dem Verfahren von § 1 gefunden werden kann. Gemäss der Annahme $K \geqq 0$, $f^* \geqq 0$ folgt $\psi^*(x) \leqq 0$. Da aber für $\psi^* \leqq 0$ die Funktion $f^*(y, \psi^*(y))$ mit $f(y, \psi^*(y))$ übereinstimmt, so ist ψ^* auch Lösung von (1).

Es gelte jetzt für f die Voraussetzung (III); diese kann so formuliert werden:

Stets ist $-C_6 \leqq f(x, u)$; für $u \leqq 0$ ist $f(x, u) \leqq C_4 |u| + C_5$. $(0 < C_4 < \lambda_1)$.

Die Funktion $g(x)$ werde durch

$$g(x) = C_6 \int_B K(x, y)\, dy$$

erklärt und

$$f^*(x, u) = f(x, u + g(x)) + C_6$$

gesetzt. $f^*(x, u)$ erfüllt, mit anderen Konstanten, offenbar die Annahme (I), woraus folgt, dass

$$\psi^*(x) + \int_B K(x, y) f^*(y, \psi^*(y)) dy = 0$$

eine Lösung $\psi^*(x) \leqq 0$ hat. Durch die Substitution $\psi(x) = \psi^*(x) + g(x)$ geht diese Gleichung in

$$\psi(x) + \int_B K(x, y) f(y, \psi(y)) dy = 0 \tag{1}$$

über. $\psi(x)$ ist somit eine Lösung von (1). Für sie gilt übrigens

$$\psi(x) \leqq C_6 \int_B K(x, y)\, dy.$$

Damit ist Satz 3. völlig bewiesen.

§ 5. Beispiele für nicht lösbare Integralgleichungen.

In diesem Paragraphen werden Beispiele zur Illustration der Fälle, in denen Gleichung (1) keine Lösung zu haben braucht, zusammengestellt. Das Konstruktionsprinzip ist ausserordentlich einfach.

Für $0 \leqq x \leqq 1$ nehme man eine stetige Funktion $\alpha(x)$ derart, dass $\alpha(x) > 0$ wird. Dann erfüllt der Kern

$$K(x, y) = \alpha(x)\, \alpha(y)$$

alle Voraussetzungen, einschliesslich $K \geqq 0$.

Die Integralgleichung

$$\psi(x) + \int_0^1 K(x, y) f(y, \psi(y)) dy = 0$$

hat nun offenbar genau so viele Lösungen $\psi(x) = \xi \alpha(x)$, wie die Gleichung für ξ

$$\xi + \int_0^1 \alpha(y) f(y, \xi\alpha(y)) dy = 0. \tag{23}$$

Es genügt also zur Bildung von Beispielen für nicht lösbare Gleichungen solche Funktionen f anzugeben, für die (23) keine reelle Lösung besitzt. Für die verschiedenen Fälle der Tabelle auf Seite 121 geschieht dies wie folgt:

ad 3) $f(x, u) = -e^u$. Die Gleichung (23) wird

$$\xi = e^{\xi} \int_0^1 \alpha(y)\, e^{\xi(\alpha(y)-1)}\, dy.$$

Zunächst müsste $\xi \geqq 0$ sein. Wählt man jetzt $\alpha(x) \geqq 1$, so ist für $\xi \geqq 0$ die rechte Seite nicht kleiner als e^{ξ}, woraus man erkennt, dass keine reelle Lösung vorhanden sein kann.

ad 4) Der Fall wird wie in § 4 durch die Spiegelung

$$f_1(x, u) = -f(x, -u) \tag{22}$$

auf den vorigen zurückgeführt.

ad 5) $f(x, u) = u^2 + 1$

$$\xi + \xi^2 \int_0^1 [\alpha(y)]^3\, dy + \int_0^1 \alpha(y)\, dy = 0$$

hat für $\alpha(x) \geqq 1$ keine reelle Wurzel.

ad 6) $f(x, u) = -u + 1$.

$$\xi\left(1 - \int_0^1 \alpha^2 dy\right) + \int_0^1 \alpha\, dy = 0.$$

Wählt man α so, dass $\int\limits_0^1 \alpha^2\, dy = 1$ wird, so hat die Gleichung keine Lösung.

ad 9) Folgt aus 5) durch die Spiegelung (22).

Man erkennt aus diesen Beispielen, dass für die Funktionen der Klasse 3), 4), 5), 6), 9) die Wahl des Kernes für die Lösbarkeit von Gleichung (1) ausschlaggebend ist.

Die Beispiele zu Fall 3) und 4) zeigen auch, dass die Voraussetzungen in Satz 3 nicht durch allgemeinere in dem in der Einleitung genannten Sinn ersetzt werden können.

Eine Gleichung mit unendlich vielen Lösungen bildet man leicht mit $\alpha(x) \geqq 2$ und $f(x, u) = u \sin \frac{u}{\alpha(x)}$. Die Gleichung (23) lautet dann

$$\xi\left(1+\sin\xi\int_0^1 \alpha^2\,dy\right)=0.$$

Sie wird durch unendlich viele Werte von ξ erfüllt.

§ 6. Zusammenhang der Integralgleichung mit einer Variationsaufgabe.

Dieser Paragraph schliesst sich unmittelbar an die Paragraphen 2 und 3 an.

Für K und f mögen die Voraussetzungen von Satz 1 oder 2 gelten und es sei wieder $F(x,u)=\int_0^u f(x,v)\,dv$ gesetzt. ψ bedeute wie bisher die durch das Verfahren von § 1 erhaltene Lösung der Gleichung (1). *Dann erteilt unter allen in B stetigen Funktionen χ die Funktion*

$$\chi(x)=-f(x,\psi(x))$$

dem Integral

$$I(\chi)=\int_B\int_B K(x,y)\,\chi(x)\,\chi(y)\,dx\,dy+2\int_B F\left(x,\int_B K(x,y)\,\chi(y)\,dy\right)dx$$

ein absolutes Minimum.

Beweis: Es existiert, wenn in den Bezeichnungen von § 1

$$H_m(c_1^{(m)},\ldots c_m^{(m)})=d_m$$

gesetzt ist, $\lim\limits_{m\to\infty} d_m=d$, da die monoton abnehmende Folge d_m gemäss (14) nach unten beschränkt ist.

Zunächst wird nun gezeigt, dass das Integral $I(\chi)$ für alle stetigen χ als Vergleichsfunktionen, d zur unteren Grenze hat. Ist nämlich χ beliebig gegeben, so wird mit den Abkürzungen

$$\frac{1}{\lambda_\varrho}\int_B \chi(x)\,\varphi_\varrho(x)\,dx=\beta_\varrho, \qquad (\varrho=1,2,3,\ldots)$$

nach dem bekannten Entwicklungssatze

$$I(\chi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \beta_\nu^2 + 2 \int_B F\left(x, \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \varphi_\nu(x)\right) dx. \tag{24}$$

Zufolge der gleichmässigen Konvergenz der in F als Argument auftretenden Reihe und der Stetigkeit von F kann zu gegebenem ε offenbar ein m so gefunden werden, dass

$$|I(\chi) - H_m(\beta_1, \ldots \beta_m)| \leqq \varepsilon$$

ausfällt. Nach der Definition von d_m ist aber

$$H_m(\beta_1, \ldots \beta_m) \geqq d_m \geqq d.$$

Demnach folgt

$$I(\chi) \geqq d - \varepsilon$$

für jedes ε. Daher ist die untere Grenze D von $I(\chi)$ endlich und $D \geqq d$.

Setzt man jetzt, wenn die Grössen $c_\nu^{(m)}$ dieselbe Bedeutung wie in § 1 haben

$$\chi_m(x) = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu c_\nu^{(m)} \varphi_\nu(x),$$

so wird

$$D \leqq I(\chi_m) = H_m(c_1^{(m)}, \ldots c_m^{(m)}) = d_m,$$

was $D \leqq d$ nach sich zieht. Es ist also, wie behauptet, $D = d$.

Zum Beweis des Satzes bleibt jetzt nur

$$J(-f(x, \psi(x))) = d$$

zu zeigen. In § 1 war eine solche Teilfolge ψ_{m_ν} aufgewiesen worden, dass gleichmässig $\psi_{m_\nu} \to \psi$ und somit

$$I(-f(x, \psi_{m_\nu}(x))) \to I(-f(x, \psi(x)))$$

gilt.

Nach der Definition von $I(\chi)$ ist in Rücksicht auf (21),

$$I(-f(x, \psi_{m_\nu}(x))) = -\int_B f(x, \psi_{m_\nu}(x))\, \psi_{m_\nu}(x)\, dx + 2 \int_B F(x, \psi_{m_\nu}(x))\, dx + R_{m_\nu},$$

wobei R_{m_ν} mit wachsendem m_ν gegen Null strebt. Beachtet man jetzt (16) und (13), so folgt

$$I(-f(x, \psi_{m_\nu}(x))) = H_{m_\nu}(c_1^{(m_\nu)}, \ldots c_{m_\nu}^{(m_\nu)}) + R_{m_\nu},$$

und wegen $H_{m_\nu} = d_{m_\nu} \to d$ weiter

$$I(-f(x, \psi_{m_\nu}(x))) \to d.$$

In der Tat ist also $I(-f(x, \psi(x))) = d$; w. z. b. w.

Es sei noch bemerkt, dass aus der Variationsaufgabe, unter Zulassung aller stetigen Funktionen χ das Integral $I(\chi)$ zum Minimum zu machen, ein Teil der in Rede stehenden Existenzsätze direkt sehr einfach gewonnen werden kann.[8]

Zusatz: *Der Bereich B der x, ξ-Ebene sei von stückweise analytischen Randkurven begrenzt. Unter $G(x, \xi; y, \eta)$ werde die am Rande verschwindende Greensche Funktion zu dem Differentialausdruck*

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x}(p u_x) + \frac{\partial}{\partial \xi}(p u_\xi) \quad (p(x, \xi) \geqq 0 \text{ mit stetigen Ableitungen 1. und 2. Ordnung})$$

verstanden. Die Funktion $f(x, \xi; u)$ sei mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen und genüge den Voraussetzungen zu Satz 2. Dann erteilt die nach dem Verfahren von § 1 erhaltene Lösung $\psi(x, \xi)$ der Gleichung

$$\psi(x, \xi) + \iint_B G(x, \xi; y, \eta) f(y, \eta; \psi(y, \eta))\, dy\, d\eta = 0 \tag{1 a}$$

dem Dirichletschen Integral

$$D(\omega) = \iint_B [p(\omega_x^2 + \omega_\xi^2) + 2F(x, \xi; \omega(x, \xi))]\, dx\, d\xi$$

unter allen am Rande verschwindenden stetigen, mit stückweise stetigen beschränkten Ableitungen erster Ordnung versehenen Funktionen $\omega(x, \xi)$ ein absolutes Minimum.

Eingangs sei bemerkt, dass der Satz 2 anwendbar ist, da die betrachtete Greensche Funktion $G(x, \xi; y, \eta)$ bekanntlich ein positiv definiter Kern ist. Unter

---

[8] Man vergleiche die Arbeit des Verfassers: »Nichtlineare Integralgleichungen und direkte Methoden der Variationsrechnung«. Sitzungsbericht der Berliner Math. Ges. 1927.

der Annahme über $f(x, \xi; u)$ besitzt ψ zufolge von (1 a) nach bekannten Sätzen stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung und verschwindet am Rande.

Der Zusatz wird jetzt auf den vorigen Satz zurückgeführt, und zwar zunächst für mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehene Vergleichsfunktionen.

Bezeichnet $\omega(x, \xi)$ eine solche, so setze man

$$L(\omega) = -\chi(x, \xi). \tag{25}$$

Nach geläufigen Eigenschaften der Greenschen Funktion lautet die Umkehrung hiervon

$$\omega(x, \xi) = \iint_B G(x, \xi; y, \eta)\chi(y, \eta)\, dy\, d\eta. \tag{26}$$

Aus der Greenschen Formel ergibt sich

$$D(\omega) = -\iint_B \omega L(\omega)\, dx\, d\xi + 2\iint_B F(x, \xi; \omega)\, dx\, d\xi.$$

Daraus folgt, wenn man nach (25) und (26) die stetige Funktion χ für ω einführt,

$$D(\omega) = I(\chi).$$

(26) ergibt mit $\chi = -f(x, \xi; \psi(x, \xi))$ nach (1 a) $\omega = \psi$ und also

$$D(\psi) = I(-f(x, \psi(x, \xi))).$$

Nach dem Vorangehenden ist nun für jedes stetige χ

$$I(\chi) \geqq I(-f(x, \xi; \psi(x, \xi)))$$

und somit

$$D(\omega) \geqq D(\psi).$$

Es bleibt jetzt zu zeigen, dass die Konkurrenz auf stetige mit stückweise stetigen beschränkten Ableitungen erster Ordnung versehene Funktionen ω ausgedehnt werden kann. Hierzu genügt der Nachweis, dass die untere Grenze von $D(\omega)$ dabei nicht herabsinkt. Sei also ω jetzt eine stetige mit stückweise stetigen beschränkten ersten Ableitungen versehene Funktion. Setzt man ihre Fourierkoeffizienten in Bezug auf die Eigenfunktionen von $G(x, \xi; y, \eta)$

$$\iint_B \omega \varphi_\nu \, dx \, d\xi = a_\nu$$

so ist bekanntlich[9]

$$\iint_B p(\omega_x^2 + \omega_\xi^2) \, dx \, d\xi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu a_\nu^2.$$

Nun werde ω durch die mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehene Funktion

$$\omega_n(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x, \xi)$$

im Mittel approximiert. Dann ist

$$D(\omega) - D(\omega_n) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lambda_\nu a_\nu^2 + 2 \iint_B (F(x, \xi; \omega) - F(x, \xi; \omega_n)) \, dx \, d\xi.$$

Dabei wird

$$\iint_B (F(x, \xi; \omega) - F(x, \xi; \omega_n)) \, dx \, d\xi = \iint_B (\omega - \omega_n) f(x, \xi; \omega_n + \vartheta(\omega - \omega_n)) \, dx \, d\xi \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

$$\leqq \left\{ \iint_B (\omega - \omega_n)^2 \, dx \, d\xi \cdot \iint_B f^2 \, dx \, d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wie in § 3 schliesst man, auf Grund der für f gültigen Annahme (6) von Satz 2, dass das Integral $\iint_B f^2 \, dx \, d\xi$ unter einer von n unabhängigen Schranke liegt, woraus also

$$\lim_{n \to \infty} D(\omega_n) = D(\omega)$$

folgt. Dies zieht die Behauptung nach sich.

---

[9] Zum Beispiel L. Lichtenstein: Zur Analysis der unendlichvielen Variablen. (M. Z. 3. Seite 125.)

§ 7. Anwendung auf die Randwertaufgabe. Beweis von Satz 4.

Nach dem in der Einleitung Gesagten genügt es, um die genannten Resultate über die Randwertaufgabe für $L(u)=f(x, \xi; u)$ zu erhalten, den Satz 4 zu beweisen. Die Funktion $f(x, \xi; u)$ möge also den dort gemachten Annahmen genügen. Zur Abkürzung sei

$$f(x, \xi; u+v(x, \xi))=f_1(x, \xi; u)$$

gesetzt. Dann besitzt f_1 stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung und es gibt zwei Werte $u_1<0$, $u_2>0$ derart, dass für alle Punkte des abgeschlossenen Bereiches B

$$f_1(x, \xi; u_1)<0; \quad f_1(x, \xi; u_2)>0$$

ausfällt.

Neben f_1 wird jetzt eine Funktion f_2 mit folgenden Eigenschaften betrachtet[10]:

I.) f_2 besitzt stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.

II.) $f_2(x, \xi; u)=f_1(x, \xi; u)$ für $u_1 \leqq u \leqq u_2$ und alle x, ξ in B.

III.) $|f_2(x, \xi; u)| \leqq C$. (C konstant.)

IV.) $\left.\begin{cases} f_2(x, \xi; u)<0 & \text{für } u \leqq u_1 \\ f_2(x, \xi; u)>0 & \text{für } u \geqq u_2 \end{cases}\right\}$ für alle x, ξ in B.

Dann hat nach Satz 2 auf Grund von III.) die Gleichung

$$\psi(x, \xi)+\iint_B K(x, \xi; y, \eta) f_2(y, \eta; \psi(y, \eta))\, dy\, d\eta=0 \tag{27}$$

---

[10] Eine solche ist zum Beispiel $f_2(x, \xi; u)=\int_0^u f_2'(x, \xi; v)\, dv+f_1(x, \xi; 0)$, wo bei hinreichend kleinem $h>0$

$$f_2'(x, \xi; u)=\begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x, \xi; u)}{\partial u} & \text{für } u_1 \leqq u \leqq u_2 \\ 0 & \text{für } u \leqq u_1-h \text{ und } u \geqq u_2+h \\ \dfrac{1}{h}[u-(u_1-h)] \dfrac{\partial f_1(x, \xi; u_1)}{\partial u} & \text{für } u_1-h \leqq u \leqq u_1 \\ \dfrac{1}{h}[-u+(u_2+h)] \dfrac{\partial f_1(x, \xi; u_2)}{\partial u} & \text{für } u_2 \leqq u \leqq u_2+h \end{cases}$$

gesetzt ist.

eine oder mehrere Lösungen, wenn K die zum Problem gehörige Greensche Funktion bedeutet.

Wird von einer gezeigt, dass sie ganz dem Intervall $u_1 \leqq \psi \leqq u_2$ angehört, so löst diese zufolge von II.) die mit f_1 anstelle von f_2 gebildete Integralgleichung, und somit die vorliegende Randwertaufgabe. In der Tat genügt die nach dem Verfahren in § 1 konstruierte Lösung von (27) der geforderten Bedingung[11] $u_1 \leqq \psi \leqq u_2$.

Um dies einzusehen, hat man gemäss dem Zusatz in § 4, der nach I.) und III.) mit f_2 anwendbar ist, nur folgendes zu zeigen: Ist u eine 2 mal stetig differenzierbare am Rande verschwindende Funktion, deren Maximum grösser als u_2 oder deren Minimum kleiner als u_1 ist, oder beides, so kann dazu eine mit stückweise stetigen beschränkten Ableitungen erster Ordnung versehene, am Rande verschwindende Funktion ω so angegeben werden, dass $D(u) > D(\omega)$ ausfällt.

Hierzu wird die stetige Funktion

---

[11] Die Eigenschaft, dass eine Lösung der Integralgleichung (27) unter den angegebenen Voraussetzungen über f_1 ganz dem Intervall $u_1 \leqq \psi \leqq u_2$ angehört, kommt speziell der Greenschen Funktion als Kern zu. Bei stetigem Kern können sehr wohl alle Lösungen über u_1 oder u_2 hinausgreifen. Ein Beispiel hierfür kann wie in § 5 hergestellt werden, und zwar mit $f_1(x, u) = -\cos u$, $\alpha(x) = 1 + \beta(x)$, wenn

$$\beta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{l^3}\left(x - \dfrac{1}{2} + l^2\right) & \text{für } \dfrac{1}{2} - l^2 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{l^3}\left(x - \dfrac{1}{2} - l^2\right) & \text{für } \dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2} + l^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \left(0 < l < \frac{1}{2}\right)$$

bedeutet.

Die Gleichung (23) ist dann von der Form

$$\xi = \cos \xi + \vartheta(\xi),$$

wobei

$$|\vartheta(\xi)| \leqq 4l,$$

ausfällt. Sie hat somit bei hinreichend kleinem l eine reelle Wurzel ξ, die nur wenig von der Lösung ξ_0 von $\xi_0 = \cos \xi_0$ abweicht. Für die Lösung $\psi(x)$ der Integralgleichung gilt daher für $l \leqq l_0(\varepsilon)$:

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \xi\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \xi\left(1 + \frac{1}{l}\right) > (\xi_0 - \varepsilon)\left(1 + \frac{1}{l}\right).$$

Sie nimmt also bei abnehmendem l beliebig grosse Werte an, und liegt somit in keinem fest gegebenen Intervall.

$$w(x,\xi)=\begin{cases} u_1 & \text{für diejenigen Punkte } x,\xi, \text{ für welche } u(x,\xi)\leqq u_1 \text{ ist,}\\ u(x,\xi) & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad x,\xi, \text{ »} \quad \text{»} \quad u_1\leqq u(x,\xi)\leqq u_2 \text{ »}\\ u_2 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad x,\xi, \text{ »} \quad \text{»} \quad u_2\leqq u(x,\xi) \text{ »}\end{cases}$$

eingeführt. Auf Grund der Eigenschaften IV.) von f_2 ist nun $F_2(x,\xi;u)= = \int\limits_0^u f_2(x,\xi;v)\,dv$ für $u\leqq u_1$ monoton abnehmend, für $u\geqq u_2$ dagegen monoton zunehmend in u bei festen x,ξ und also

$$(28)\qquad 2\iint\limits_B F_2(x,\xi;u(x,\xi))\,dx\,d\xi-2\iint\limits_B F_2(x,\xi;w(x,\xi))\,dx\,d\xi=k>0.$$

Jetzt approximiere man u nebst seinen partiellen Ableitungen 1. Ordnung durch eine analytische, am Rande verschwindende Funktion $\vartheta(x,\xi)$ so, dass für alle Punkte x,ξ von B[12]

$$|\vartheta-u|\leqq\varepsilon,\quad \left|\frac{\partial\vartheta}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\right|\leqq\varepsilon,\quad \left|\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|\leqq\varepsilon$$

gilt, wobei über ε noch geeignet verfügt wird.

Nunmehr leistet die Funktion

$$\omega(x,\xi)=\begin{cases} u_1 & \text{für diejenigen Punkte } x,\xi, \text{ für welche } \vartheta(x,\xi)\leqq u_1 \text{ ist}\\ \vartheta(x,\xi) & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad x,\xi, \text{ »} \quad \text{»} \quad u_1\leqq \vartheta(x,\xi)\leqq u_2 \text{ »}\\ u_2 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad x,\xi, \text{ »} \quad \text{»} \quad u_2\leqq \vartheta(x,\xi) \text{ »},\end{cases}$$

das Gewünschte. Denn die Schnittlinien von $\vartheta(x,\xi)$ mit den Ebenen $\vartheta=u_1$ beziehungsweise $\vartheta=u_2$ sind analytische Kurven. Also besitzt ω abteilungsweise stetige beschränkte Ableitungen erster Ordnung. Ferner verschwindet ω am Rande von B, da dasselbe von ϑ gilt, und ist also zulässige Konkurrenz-Funktion. Um noch

$$D(u)>D(\omega)$$

zu erreichen, hat man ε so zu wählen, dass[13]

---

[12] Das Konstruktionsverfahren für ein derartiges ϑ findet sich zum Beispiel bei Lichtenstein l. c. M. Z. 3. Anm. S. 134.

[13] k ist hierbei in (28) erklärt.

$$\left|\iint_B p(u_x^2 + u_\xi^2)\,dx\,d\xi - \iint_B p(\vartheta_x^2 + \vartheta_\xi^2)\,dx\,d\xi\right| \leqq \frac{k}{4} \tag{29}$$

und

$$\left|2\iint_B F_2(x, \xi; w(x, \xi))\,dx\,d\xi - 2\iint_B F_2(x, \xi; \omega(x, \xi))\,dx\,d\xi\right| \leqq \frac{k}{4}$$

wird; dies ist möglich, da, wie leicht ersichtlich, für alle Punkte x, ξ von B stets $|w(x, \xi) - \omega(x, \xi)| \leqq \varepsilon$ gilt.

Hieraus ergibt sich, zusammen mit (28)

$$2\iint_B F(x, \xi; u)\,dx\,d\xi - 2\iint_B F(x, \xi; \omega)\,dx\,d\xi \geqq \frac{3}{4}k. \tag{30}$$

Ferner ist

$$\iint_B p(\vartheta_x^2 + \vartheta_\xi^2)\,dx\,d\xi - \iint_B p(\omega_x^2 + \omega_\xi^2)\,dx\,d\xi \geqq 0.$$

Wird (29) hinzugenommen, so erhält man

$$\iint_B p(u_x^2 + u_\xi^2)\,dx\,d\xi - \iint_B p(\omega_x^2 + \omega_\xi^2)\,dx\,d\xi \geqq \frac{-1}{4}k. \tag{31}$$

Addition von (30) und (31) liefert

$$D(u) - D(\omega) \geqq \frac{k}{2} > 0,$$

w. z. b. w.

II. ABSCHNITT.

Eindeutigkeitssätze.

§ 8. **Monotone Funktionen. Beweis von Satz 5.**[14]

Vorbemerkung. Die Frage nach der Eindeutigkeit einer Lösung der Gleichung (1) lässt sich sofort auf die Frage nach nicht identisch verschwindenden Lösungen einer

[14] Die §§ 8, 9 und 10 setzen nur die §§ 1, 2 und 3 voraus.

ebenso gebauten Gleichung zurückführen. Hat nämlich die Gleichung (1) neben $\psi(x)$ noch eine weitere Lösung $\psi_1(x)$, das heisst, ist

$$\psi(x) + \int_B K(x, y) f(y, \psi(y))\, dy = 0$$

und

$$\psi_1(x) + \int_B K(x, y) f(y, \psi_1(y))\, dy = 0,$$

so erhält man durch Subtraktion, wenn noch

$$\psi_1 - \psi = \Psi \quad \text{und} \quad g(x, u) = f(x, u + \psi(x)) - f(x, \psi(x))$$

gesetzt ist,

$$\Psi(x) + \int_B K(x, y)\, g(y, \Psi(y))\, dy = 0. \tag{32}$$

Daraus folgt:

Notwendig und hinreichend dafür, dass Gleichung (1) *nicht mehr als eine reelle Lösung hat, ist, dass die Gleichung* (32) *nur durch* $\Psi \equiv 0$ *befriedigt wird.*

Das Charakteristische an der Funktion g ist, dass $g(x, 0) = 0$ für alle x in B gilt.

Um nun zu den in der Einleitung genannten Eindeutigkeitssätzen zu gelangen, werden Klassen von Funktionen g angegeben, für welche die Gleichung (32) nur die Null zur Lösung hat.

Hilfssatz 1. *Der Kern K sei brauchbar unstetig, symmetrisch und positiv definit. Für die stetige Funktion $g(x, u)$ gelte:*

$$g(x, u) \geqq 0 \quad \textit{für} \quad u > 0 \quad \textit{und alle } x \textit{ in } B.$$
$$g(x, u) \leqq 0 \quad » \quad u < 0 \quad » \quad » \; x \; » \; B.$$

Dann hat die Gleichung

$$\Psi(x) + \int_B K(x, y)\, g(y, \Psi(y))\, dy = 0 \tag{32}$$

nur die Lösung $\Psi(x) \equiv 0$.

Beweis: Aus der Annahme folgt $g(x, 0) = 0$. Es bedeute $\Psi(x)$ irgend eine Lösung von (32). Dann ist

$$\int\limits_B \Psi(x)\, g(x, \Psi(x))\, dx + \int\limits_B \int\limits_B K(x, y)\, g(y, \Psi(y))\, g(x, \Psi(x))\, dy\, dx = 0.$$

Da der Kern positiv definit ist, fällt der zweite Posten nicht negativ aus und somit ist

$$\int\limits_B \Psi(x)\, g(x, \Psi(x))\, dx \leqq 0.$$

Nach der Annahme haben aber $\Psi(x)$ und $g(x, \Psi(x))$ nirgends entgegengesetzte Vorzeichen, so dass die vorstehende Ungleichung nur durch $\Psi(x) g(x, \Psi(x)) \equiv 0$ erfüllt sein kann. Für alle Stellen x in B, an denen etwa $\Psi(x) \neq 0$ ausfällt, muss daher $g(x, \Psi(x)) = 0$ sein; für diejenigen x, für welche $\Psi(x) = 0$ ist, ist auch $g(x, \Psi(x)) = g(x, 0) = 0$, d. h. $g(x, \Psi(x))$ verschwindet identisch in B, woraus nach (32) dasselbe für $\Psi(x)$ folgt, w. z. b. w. Aus diesem Hilfssatz folgt Satz 5 unmittelbar. Ist nämlich $f(x, u)$ monoton nicht abnehmend und bedeutet $\psi(x)$ eine Lösung von (1), so erfüllt die Funktion

$$g(x, u) = f(x, u + \psi(x)) - f(x, \psi(x))$$

die Voraussetzung des Hilfssatzes 1; Gleichung (32) wird also nur durch die Null erfüllt. Nach der Vorbemerkung kann (1) daher nicht mehr als eine Lösung haben.

§ 9. Funktionen mit beschränkter Ableitung. Beweis von Satz 6.

Die Grundlage für die Untersuchungen dieses Paragraphen bildet

Hilfssatz 2. *Der Kern sei brauchbar unstetig, symmetrisch und positiv definit. Für die stetige Funktion $g(x, u)$ gelte $|g(x, u)| \leqq \alpha |u|$ mit konstantem, der Bedingung $0 < \alpha < \lambda_1$ unterworfenem α, wobei λ_1 wie bisher den kleinsten Eigenwert von K bedeutet. Dann hat Gleichung*

$$\Psi(x) + \int_B K(x, y)\, g(y, \Psi(y))\, dy = 0 \tag{32}$$

nur die Lösung $\Psi(x) \equiv 0$.

Beweis: Wie bereits in der Einleitung bemerkt, haben die Fourierkoeffizienten c_ϱ jeder etwa vorhandenen Lösung $\Psi(x)$ die Gestalt

$$c_\varrho = \int_B \Psi \varphi_\varrho\, dx = -\frac{1}{\lambda_\varrho} \int_B g\Big(y, \sum_{(\nu)} c_\nu \varphi_\nu(y)\Big) \varphi_\varrho(y)\, dy.$$

Aus der Besselschen Ungleichung und der Annahme über g folgt also

$$\sum_{(\varrho)} (\lambda_\varrho c_\varrho)^2 \leqq \int_B \Big[g\Big(y, \sum_{(\nu)} c_\nu \varphi_\nu(y)\Big)\Big]^2 dy$$

$$\leqq \alpha^2 \int_B \Big(\sum_{(\nu)} c_\nu \varphi_\nu\Big)^2 dy = \alpha^2 \sum_{(\nu)} c_\nu^2.$$

Diese Ungleichung kann wegen $\alpha < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \ldots$ nur mit $c_\varrho = 0$ $(\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$ erfüllt sein. Wie behauptet ist daher $\Psi(x) \equiv 0$.

Jetzt kann Satz 6 leicht bewiesen werden. Aus der Voraussetzung

$$\left|\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}\right| \leqq \alpha, \qquad 0 < \alpha < \lambda_1$$

folgt

$$|f(x, u)| \leqq \alpha |u| + C_3$$

(C_3 konstant); somit existiert nach Satz 2 eine Lösung von Gleichung (1). Um zu erkennen, dass dies die einzige ist, bilde man wieder

$$g(x, u) = f(x, u + \psi(x)) - f(x, \psi(x))$$

$$= u \frac{\partial f(x, \vartheta u + \psi(x))}{\partial u}, \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

$$|g(x, u)| \leqq \alpha |u|.$$

$g(x, u)$ erfüllt somit die Annahme zu Hilfssatz 2, woraus gemäss der Vorbemerkung in § 8 die Eindeutigkeit folgt.

Genügt α nicht der Bedingung $\alpha < \lambda_1$, so braucht die Gleichung (1) nicht mehr eindeutig lösbar zu sein. Die genauere Lösungszahl von (1) ist in diesem Fall äquivalent mit der von endlich vielen transzendenten Gleichungen. Dies ergibt sich auf folgendem Wege:

Sei bei beliebigem $A \geqq \lambda_1$ jetzt

$$\left|\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}\right| \leqq A.$$

Es kann angenommen werden, dass unendlich viele Eigenwerte von K existieren; der entgegengesetzte Fall ist bereits auf S. 133 behandelt. Man bestimme die Zahl n durch die Forderung $\lambda_n \leqq A < \lambda_{n+1}$ und setze

$$K_n(x, y) = K(x, y) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu}.$$

K_n hat dann die Eigenwerte $\lambda_{n+1} \leqq \lambda_{n+2} \leqq \lambda_{n+3} \ldots$, und es ist $A < \lambda_{n+1}$. Nach Satz 6 besitzt daher bei beliebiger Wahl der reellen Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Gleichung

$$(37) \qquad \chi(x) + \int\limits_B K_n(x, y) f\left(y, \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu(y) + \chi(y)\right) dy = 0$$

genau eine Lösung $\chi(x) = \chi(x; a_1, a_2, \ldots a_n)$.

Jedes Lösungssystem $a_1, a_2, \ldots a_n$ der n transzendenten Gleichungen

$$(38) \qquad a_\varrho + \frac{1}{\lambda_\varrho} \int\limits_B f\left(y, \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu(y) + \chi(y)\right) \varphi_\varrho(y) dy = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots n)$$

führt, wie man durch Multiplikation mit $\varphi_\varrho(x)$ und Addition zu (37) sieht, auf eine Lösung

$$\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x) + \chi(x)$$

von Gleichung (1). Zu verschiedenen Wertesystemen $a_1, a_2, \ldots a_n$ gehören, da diese die Fourierkoeffizienten von $\psi(x)$ sind, verschiedene Funktionen $\psi(x)$. Umgekehrt gehört aber auch zu jeder Lösung $\psi(x)$ von (1) ein Lösungssystem von (37) und (38), nähmlich die Fourierkoeffizienten $c_1, c_2, \ldots c_n$ von $\psi(x)$ und die

Funktion $\chi = \psi - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu$. Zu verschiedenen ψ gehören verschiedene Systeme $c_1, \ldots c_n$, da ja die Gleichung (37) nur eine Lösung χ besitzt.

Somit ist die Frage nach der Anzahl der verschiedenen Lösungen von Gleichung (1) *äquivalent mit der nach der Anzahl der verschiedenen Lösungssysteme der n transzendenten Gleichungen* (38), *worin χ durch* (37) *eindeutig als Funktion von x und $a_1, \ldots a_n$ festgelegt ist.*

§ 10. Ein Approximationssatz.

Gelten für f die Annahmen von Satz 6, so ist die Gleichung (1) eindeutig lösbar. Es wird jetzt gezeigt, dass die nach dem Verfahren in § 1 gebildeten Näherungslösungen $\psi_m(x)$ gegen die Lösung $\psi(x)$ streben. Die Güte der Konvergenz findet ihren Ausdruck in dem

Approximationssatz: *Für K und f mögen die Voraussetzungen von Satz 6 gelten. Unter $c_1^{(m)}, \ldots c_m^{(m)}$ $(m > 1)$ werde das eindeutig bestimmte Lösungssystem der in § 1 betrachteten Näherungsgleichungen*

$$c_\varrho^{(m)} = -\frac{1}{\lambda_\varrho}\int\limits_B f\left(y, \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu^{(m)} \varphi_\mu(y)\right)\varphi_\varrho(y)\,dy \tag{13}$$

verstanden und

$$\psi_m(x) = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu^{(m)} \varphi_\nu(x)$$

gesetzt. Dann gibt es zwei von x und m unabhängige Konstanten C_9 und C_{10} so, dass der Unterschied zwischen der Lösung $\psi(x)$ der Gleichung (1) *und der Näherung $\psi_m(x)$ durch*

$$|\psi(x) - \psi_m(x)| \leqq C_9 \left\{\sum_{m+1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)^2}{\lambda_\nu^2}\right\}^{\frac{1}{2}} + C_{10}\frac{1}{\lambda_{m+1}}$$

abgeschätzt wird. Die berechenbaren Werte von C_9 und C_{10} werden im Laufe des Beweises angegeben.[15] $\psi_m(x)$ konvergiert somit gleichmässig gegen $\psi(x)$.

---

[15] Es sei ohne Beweis bemerkt, dass bei anderer Wahl der Konstanten C_9 der zweite Posten weggelassen werden kann. Freilich lässt sich dann die Konstante nicht mehr so einfach explicite angeben, wie im vorliegenden Fall.

Dass die Gleichungen (13) ein und nur ein Lösungssystem besitzen, folgt daraus, dass jedem solchen, wie bereits in § 1 Seite 017 bemerkt, genau eine Lösung $\psi_m(x)$ der Integralgleichung

$$\psi_m(x) + \int\limits_B \left(\sum_{\nu=1}^{m} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y)}{\lambda_\nu} \right) f(y, \psi_m(y))\, dy = 0$$

entspricht; diese genügt offenbar den Annahmen des Satzes 6, und es gibt daher nur eine Lösung $\psi_m(x)$.

Der Nachweis des Approximationssatzes wird so geführt, dass die Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (1) nochmals mit herauskommt.

Man verstehe unter $\psi(x)$ irgend eine Lösung von Gleichung (1) mit den Fourierkoeffizienten $c_\nu = \int\limits_B \psi \varphi_\nu dx$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ und unter $c_1^{(m)}, \ldots c_m^{(m)}$ irgend ein Lösungssystem der Gleichungen (13). Jetzt werden die Gleichungen (13) bezüglich von den Gleichungen für die Fourierkoeffizienten

$$(7) \qquad c_\varrho = -\frac{1}{\lambda_\varrho} \int\limits_B f(y, \psi(y))\, \varphi_\varrho(y)\, dy$$

subtrahiert. Das ergibt

$$c_\varrho - c_\varrho^{(m)} = -\frac{1}{\lambda_\varrho} \int\limits_B [f(y, \psi(y)) - f(y, \psi_m(y))]\, \varphi_\varrho(y) dy, \quad (\varrho = 1, 2, \ldots m)$$

woraus nach der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{\varrho=1}^{m} \lambda_\varrho^2 (c_\varrho - c_\varrho^{(m)})^2 \leqq \int\limits_B [f(y, \psi(y)) - f(y, \psi_m(y))]^2 dy$$

folgt. Bezeichnet $\tilde{\psi}_m$ einen Mittelwert zwischen ψ und ψ_m, so ist gemäss der Annahme $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \leqq \alpha$

$$\begin{aligned} |f(y, \psi(y)) - f(y, \psi_m(y))| &= |\psi - \psi_m| \left| \frac{\partial f(y, \tilde{\psi}_m)}{\partial u} \right| \\ &\leqq |\psi - \psi_m|\, \alpha. \end{aligned}$$

Setzt man dies in die vorige Ungleichung ein, so folgt

$$\sum_{\varrho=1}^{m} \lambda_\varrho^2 (c_\varrho - c_\varrho^{(m)})^2 \leqq \alpha^2 \left(\sum_{\varrho=1}^{m} (c_\varrho - c_\varrho^{(m)})^2 + \sum_{\varrho=m+1}^{\infty} c_\varrho^2 \right),$$

und wegen $\alpha \leqq \lambda_\varrho \frac{\alpha}{\lambda_1}$ sowie $\alpha < \lambda_1$

$$\sum_{\varrho=1}^{m} \lambda_\varrho^2 (c_\varrho - c_\varrho^{(m)})^2 \leqq \frac{\alpha^2}{1 - \frac{\alpha^2}{\lambda_1^2}} \sum_{\varrho=m+1}^{\infty} c_\varrho^2. \tag{33}$$

Aus (7) und der Besselschen Ungleichung folgt

$$\sum_{\varrho=m+1}^{\infty} \lambda_\varrho^2 c_\varrho^2 \leqq \int_B f(y, \psi(y))^2 \, dy \tag{34}$$

und

$$\sum_{\varrho=m+1}^{\infty} c_\varrho^2 \leqq \frac{1}{\lambda_{m+1}^2} \int_B f(y, \psi(y))^2 \, dy. \tag{35}$$

Nun ist weiter nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi_m(x)| &\leqq \left| \sum_{\varrho=1}^{m} \lambda_\varrho (c_\varrho - c_\varrho^{(m)}) \frac{\varphi_\varrho(x)}{\lambda_\varrho} \right| + \left| \sum_{\varrho=m+1}^{\infty} \lambda_\varrho c_\varrho \frac{\varphi_\varrho(x)}{\lambda_\varrho} \right| \\ &\leqq \left\{ \sum_{\varrho=1}^{m} \lambda_\varrho^2 (c_\varrho - c_\varrho^{(m)})^2 \cdot \sum_{\varrho=1}^{m} \frac{\varphi_\varrho(x)^2}{\lambda_\varrho^2} \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{\varrho=m+1}^{\infty} (\lambda_\varrho c_\varrho)^2 \cdot \sum_{\varrho=m+1}^{\infty} \frac{\varphi_\varrho(x)^2}{\lambda_\varrho^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Hieraus, aus (33), (34) und (35) ergibt sich, wenn $K^{(2)}(x, y)$ den iterierten Kern zu K bezeichnet,

$$\begin{aligned} &|\psi(x) - \psi_m(x)| \leqq \\ &\leqq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \left\{ K^{(2)}(x, x) \frac{\alpha^2}{1 - \frac{\alpha^2}{\lambda_1^2}} \int_B f(y, \psi)^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_B f(y, \psi)^2 dy \sum_{\varrho=m+1}^{\infty} \frac{\varphi_\varrho(x)^2}{\lambda_\varrho^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{36}$$

Da die rechte Seite mit wachsendem m gleichmässig gegen Null strebt, folgt die Konvergenz von ψ_m gegen ψ, was natürlich die Eindeutigkeit nach sich zieht.

Die Voraussetzung $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \leqq \alpha$ hat nun

$$|f(x, u)| \leqq \alpha |u| + C_3$$

im Gefolge; dem entnimmt man wie in § 3 die Existenz einer nur von f und K abhängenden Konstanten C_{11}, die leicht berechnet werden kann, so dass

$$\int_B f(y, \psi_m(y))^2 \, dy \leqq C_{11}$$

ausfällt. Da ψ_m gleichmässig gegen ψ strebt, ist auch

$$\int_B f(y, \psi(y))^2 \, dy \leqq C_{11}.$$

Dies in (36) eingesetzt, ergibt die behauptete Abschätzung. Man erkennt, dass die Fehlergrenze um so grösser wird, je dichter α bei λ_1 liegt.

§ 11. Eine notwendige Bedingung für die Eindeutigkeit.

Die Untersuchungen dieses Paragraphen knüpfen an die Ergebnisse von § 6 an.

Die Funktion $f(x, u)$ und K genüge entweder der Voraussetzung zu Satz 1 oder 2. $f(x, u)$ besitze stetige Ableitungen nach u von so hoher Ordnung als gebraucht werden. Die Gleichung (1) hat ausser $\psi(x)$ sicher dann noch eine weitere Lösung, wenn die Gleichung (32) in § 8 eine von Null verschiedene Lösung besitzt. Die darin auftretende Funktion

$$g(x, u) = f(x, u + \psi(x)) - f(x, \psi(x))$$

genügt offenbar der Annahme zu Satz 1 oder 2, je nachdem dies für $f(x, u)$ gilt, und eine Lösung $\Psi(x)$ der Gleichung (32) kann daher nach dem Verfahren von § 1 bestimmt werden. Gemäss § 6 erteilt die Funktion $\chi(x) = -g(x, \Psi(x))$ dem Integral

$$I(\chi) = \int_B \int_B K(x, y)\, \chi(x)\, \chi(y)\, dx dy + 2 \int_B G\left(x, \int_B K(x, y)\, \chi(y)\, dy\right) dx$$

ein absolutes Minimum, wenn dabei

$$G(x, u) = \int_0^u g(x, v)\, dv$$

gesetzt ist. Da aus $\Psi(x) \equiv 0$ nun $\chi(x) \equiv 0$ und $I(\chi) = 0$ folgt, so ist gewiss dann eine nicht identisch verschwindende Lösung von Gleichung (32) vorhanden, wenn das absolute Minimum von $I(\chi)$ negativ ausfällt. Nach dem Rolleschen Satz hat man

$$G(x, u) = \frac{u^2}{2} \frac{\partial f(x, \psi(x))}{\partial u} + \frac{u^3}{3!} \frac{\partial^2 f(x, \vartheta u + \psi(x))}{\partial u^2}, \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

und also, wenn ε einen Parameter bedeutet,

$$I(\varepsilon\chi) = \varepsilon^2 \left\{ \int_B \int_B K(x, y)\, \chi(x)\, \chi(y)\, dx\, dy + \int_B \left(\int_B K(x, y)\, \chi(y)\, dy \right)^2 \frac{\partial f(x, \psi(x))}{\partial u} dx \right\}$$

$$+ \frac{\varepsilon^3}{3} \int_B \left(\int_B K(x, y)\, \chi(y)\, dy \right)^3 \frac{\partial^2 f\left(x, \vartheta \int_B K(x,y)\chi(y) dy + \psi(x)\right)}{\partial u^2} dx.$$

Somit hat $I(\chi)$ sicher dann ein negatives Minimum, wenn eine Funktion χ so gefunden werden kann, dass der Koeffizient von ε^2 kleiner als Null ausfällt. Es folgt:

Hinreichend für das Vorhandensein einer zweiten Lösung von Gleichung (1) *ist, dass die zweite Variation*

$$I_2(\chi) = \int_B \int_B K(x, y)\, \chi(y)\, dy \left(\chi(x) + \int_B K(x, y) \frac{\partial f(x, \psi(x))}{\partial u} \chi(y)\, dy \right) dx$$

durch geeignete Wahl von $\chi(x)$ negativ gemacht werden kann. Fällt sie dagegen stets grösser oder gleich Null aus und verschwindet für eine Funktion $\chi_0 \not\equiv 0$, so reicht

$$I_3(\chi_0) = \int_B \left(\int_B K(x, y)\, \chi_0(y)\, dy \right)^3 \frac{\partial^2 f(x, \psi(x))}{\partial u^2} dx \neq 0$$

aus. Man erkennt dies, wenn man in ε bis zu Gliedern vierter Ordnung geht.

Verschwindet der Koeffizient von ε^3 auch noch, so geben in leicht ersichtlicher Weise höhere Glieder Aufschluss.

Bekanntlich genügt es, $I_2(\chi)$ durch eine stückweise stetige Funktion negativ zu machen.

Hat nun der Kern $K(x,y)\dfrac{\partial f(x,\psi(x))}{\partial u}$ den Eigenwert μ_1 und die zugehörige Eigenfunktion χ_1, das heisst, ist

$$\chi_1(x) = \mu_1 \int\limits_B K(x,y)\frac{\partial f(x,\psi(x))}{\partial u}\chi_1(y)\,dy,$$

so wird

$$I_2(\chi_1) = \left(1 + \frac{1}{\mu_1}\right)\int\limits_B\int\limits_B K(x,y)\,\chi_1(y)\,\chi_1(x)\,dy\,dx.$$

Ist nun $1 + \dfrac{1}{\mu_1} < 0$, so fällt $I_2(\chi_1)$ negativ aus, und es folgt:

Hinreichend dafür, dass Gleichung (1) *neben* $\psi(x)$ *noch eine weitere Lösung besitzt, ist, dass der Kern* $K(x,y)\dfrac{\partial f(x,\psi(x))}{\partial u}$ *einen der Ungleichung* $0 > \mu_1 > -1$ *genügenden Eigenwert hat.*[16] Diese Aussage ist gleichbedeutend mit: *Notwendig dafür, dass Gleichung* (1) *nur die Lösung* $\psi(x)$ *besitzt, ist, dass kein Eigenwert des Kerns* $K(x,y)\dfrac{\partial f(x,\psi(x))}{\partial u}$ *in das Intervall* $\langle -1, 0\rangle$ *hineinfällt.*

Der Zusammenhang mit der Variationsrechnung tritt besonders hervor, wenn der Kern die Greensche Funktion

$$K(x,y) = \begin{cases} x\left(\dfrac{-y}{\pi} + 1\right) & \text{für } x < y \\ y\left(\dfrac{-x}{\pi} + 1\right) & \text{für } x > y \end{cases} \quad \text{bedeutet} \quad (0 \leqq x \leqq \pi).$$

[16] Falls das System der Eigenfunktion von $K(x,y)$ vollständig ist, ist die genannte Bedingung auch notwendig dafür, dass $I_2(\chi) < 0$ ausfällt, denn dann hat man bei geeigneter Normierung der Eigenfunktionen χ_ν

$$I_2(\chi) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{\mu_\nu}\right)\left(\int\limits_B \frac{\chi_\nu(x)\,\chi(x)}{\mu_\nu^2\,\dfrac{\partial f(x,\psi(x))}{\partial u}}\,dx\right)^2.$$

Vrgl. E. Garbe, M. A. 76.

Die zweite und dritte Variation geht durch die Substitution

$$\eta(x) = \int_0^\pi K(x, y)\chi(y)\,dy, \quad \eta''(x) = -\chi(x)$$

in

$$I_2(\chi) = I_2^*(\eta) = \int_0^\pi \left(\eta'(x)^2 + \frac{\partial f(x, \psi(x))}{\partial u}\eta(x)^2\right)dx,$$

und

$$I_3(\chi) = I_3^*(\eta) = \int_0^\pi \eta^3(x)\,\frac{\partial^2 f(x, \psi(x))}{\partial u^2}\,dx$$

über.

Wie man weiss, kann I_2^* dann negativ gemacht werden, wenn die den Anfangsbedingungen $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = 1$ genügende Lösung der Jacobischen Differentialgleichung $\eta''(x) - \frac{\partial f(x, \psi(x))}{\partial u}\eta(x) = 0$ im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ mehr als eine Nullstelle hat.

Jetzt folge noch eine Anwendung: Es sei n ungerade, $a_1, \ldots a_n$ konstant und $a_n > 0$. Dann ist $f(x, u) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu u^\nu$ ein Polynom ungeraden Grades. Es wird nach nicht identisch verschwindenden Lösungen von

$$\psi(x) + \int_B K(x, y)\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \psi(y)^\nu\,dy = 0$$

($K(x, y)$ beschränkt, positiv definit.)

gefragt. Solche sind gewiss nicht immer vorhanden, wie unmittelbar aus Satz 5 mit $f = u^3$ folgt. Das vorliegende Kriterium liefert hingegen, dass eine von Null verschiedene Lösung stets dann vorhanden ist, wenn $a_1 < -\lambda_1$ ist. In der Tat, geht man von der Lösung $\psi(x) \equiv 0$ aus, so wird $\frac{\partial f(x, \psi(x))}{\partial u} = a_1$, und die charakteristische Integralgleichung

$$\chi(x) = a_1\mu \int_B K(x, y)\chi(y)\,dy$$

hat den Eigenwert $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{a_1}$, für den $0 > \mu_1 > -1$ gilt.

Somit ist neben der Lösung $\psi(x) \equiv 0$ noch eine weitere vorhanden.

III. ABSCHNITT.

Die mit einem Parameter versehene Integralgleichung.

§ 12. Kleine Werte des Parameters. Beweis von Satz 7.

Für das Folgende ist eine Abschätzung des Betrages der Lösung von Gleichung (1) erforderlich:

Hilfssatz 3. Es bezeichne $\bar{K}^2$ das Maximum von $\int\limits_B K(x,y)^2 dy$, und $\bar{B}$ den Flächeninhalt von B. Das stetige $f(x,u)$ sei beschränkt:

$$|f(x,u)| \leqq \bar{M}.$$

Dann gilt für jede Lösung von (1)

$$|\psi(x)| \leqq \bar{B}^{\frac{1}{2}} \bar{K} \bar{M}.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Schwarzschen Ungleichung

$$|\psi(x)| = \left| \int\limits_B K(x,y) f(y, \psi(y)) dy \right| \leqq \left\{ \int\limits_B K(x,y)^2 dy \cdot \int\limits_B f(y, \psi(y))^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Zum Nachweis des in der Einleitung ausgesprochenen Satzes 7 gehe man von dem gegebenen l aus und bezeichne das Maximum von $|f(x,u)|$ im Intervall $-l \leqq u \leqq l$, x in B, mit $M = M(l)$, dasjenige von $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|$ mit $M' = M'(l)$. Dann leistet die Zahl $\lambda_0 = \mathrm{Min}\left(\frac{\lambda_1}{2M'}, \frac{l}{2\bar{B}^{\frac{1}{2}}\bar{K}M}\right)$ das Gewünschte, wobei λ_1 wieder den kleinsten Eigenwert von K bedeutet, und $\bar{K}$ sowie $\bar{B}$ in Hilfssatz 3 erklärt sind. Um dies einzusehen wird unter $f_1(x,u)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften verstanden[17]:

I) $f_1(x,u)$ hat eine stetig partielle Ableitung $\frac{\partial f_1}{\partial u}$,

II) für $-l \leqq u \leqq l$ und alle x in B ist $f_1(x,u) = f(x,u)$,

III) für alle u und x in B ist $|f_1(x,u)| \leqq 2M(l)$,

IV) » » u und x in B » $\left|\frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u}\right| \leqq 2M'(l)$.

[17] f_1 kann genau wie in Anmerkung 10 S. 145 konstruiert werden.

Zufolge von IV) ist

$$\frac{\partial}{\partial u}(\lambda f_1(x, u)) \leqq |\lambda| \, 2M' < \lambda_1 \text{ für } |\lambda| \leqq \lambda_0.$$

Auf Grund hiervon und nach I) liefert also Satz 6, dass die Gleichung

$$\psi(x) + \lambda \int_B K(x, y) f_1(y, \psi(y)) \, dy = 0 \tag{37}$$

eine und nur eine Lösung $\psi(y)$ besitzt. Für dieselbe gilt nach Hilfssatz 3 in Rücksicht auf III)

$$|\psi(x)| \leqq \bar{B}^{\frac{1}{2}} \bar{K} |\lambda| \, 2\bar{M} \leqq l,$$

falls $|\lambda| \leqq \lambda_0$ ist. Die Eigenschaft II) lehrt nun, dass $\psi(x)$ auch der Gleichung

$$\psi(x) + \lambda \int_B K(x, y) f(y, \psi(y)) \, dy = 0 \tag{9}$$

genügt. Es ist aber auch die einzige Lösung, die ganz dem Intervall $-l \leqq \psi \leqq l$ angehört, denn andernfalls hätte, wieder wegen II), Gleichung (37) mehr als eine Lösung.

Damit ist Satz 7 bewiesen.

Da, wie bereits in der Einleitung hervorgehoben, hieraus folgt, dass, falls mehrere Lösungen vorhanden sind, davon nur eine bei abnehmendem λ dem Betrage nach beschränkt bleiben kann, so liefert Hilfssatz 3 unmittelbar die Folgerung:

Ist $f(x, u)$ beschränkt, so hat Gleichung (9) *bei hinreichend kleinem λ eine und nur eine Lösung.*

Als Beispiel für das Auftreten von mehr als einer Lösung bei beliebig kleinem λ betrachte man die Gleichung

$$\psi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) (\psi(y)^2 + 1) \, dy = 0$$

mit dem in § 5 eingeführten Kern $K(x, y) = \alpha(x) \alpha(y)$.

Wie dort sind dann die Lösungen

$$\psi_1(x) = \xi_1 \alpha(x), \quad \psi_2(x) = \xi_2 \alpha(x),$$

wo

$$\xi_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda^2 \int\limits_0^1 \alpha^3 dy \int\limits_0^1 \alpha\, dy}}{2\lambda \int\limits_0^1 \alpha^3 dy}$$

als Wurzeln der Gleichung (23) in § 5 erhalten werden. Es bestätigt sich, dass das Maximum des Betrages von $\psi_1(x)$ bei zur Null abnehmendem λ gegen Null strebt, während das von $\psi_2(x)$ über alle Grenzen wächst.

§ 13. Fortsetzung der Lösung bei wachsendem Parameter. Anwendung der Schmidtschen Theorie.

In diesem und dem folgenden Paragraphen wird die Kenntnis der Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen von E. Schmidt vorausgesetzt. Von der Funktion $f(x, u)$ wird jetzt angenommen, dass sie in eine beständig konvergente Potenzreihe

$$f(x, u) = b_0(x) + b_1(x)u + b_2(x)u^2 + \cdots$$

entwickelbar ist, wobei die Koefficienten $b_\nu(x)$ stetige Funktionen von x in B sind. Es ist nicht schwer, diese Annahme durch allgemeinere zu ersetzen; es genügt, dass die auftretenden Integralpotenzreihen nach Schmidt regulär konvergent sind. Der Einfachheit halber sei an der oben genannten Voraussetzung festgehalten.

Für einen gewissen Wert $\lambda = \lambda_0$ besitze die Gleichung

$$(9) \qquad \psi(x) + \lambda \int\limits_B K(x, y) f(y, \psi(y))\, dy = 0$$

eine Lösung $\psi_0 = \psi_0(x, \lambda_0)$, deren Verhalten bei Abänderung von λ untersucht werden soll. Hierzu setze man $\lambda = \lambda_0 + v$ und $\psi = \psi_0 + u$. Dann geht (9) in die Gleichung über

$$\psi_0 + u + (\lambda_0 + v) \int\limits_B K(x, y) f(y, \psi_0 + u)\, dy = 0,$$

welche für hinreichend kleine konstante v nach u aufzulösen ist. Subtrahiert man von ihr (9), so ergibt sich

$$u + \lambda_0 \int_B K(x,y)\,[f(y,\psi_0+u) - f(y,\psi_0)]\,dy + v \int_B K(x,y) f(y,\psi_0+u)\,dy = 0,$$

$$u + \lambda_0 \int_B K(x,y) \frac{\partial f(y,\psi_0)}{\partial u} u\,dy + v \int_B K(x,y) \left[f(y,\psi_0) + u \frac{\partial f(y,\psi_0)}{\partial u}\right] dy$$

$$+ (\lambda_0 + v) \int_B K(x,y) \left[\frac{u^2}{2!} \frac{\partial^2 f(y,\psi_0)}{\partial u^2} + \frac{u^3}{3!} \frac{\partial^3 f(y,\psi_0)}{\partial u^3} + \cdots\right] dy = 0. \tag{38}$$

Dieser Ausdruck stellt offenbar eine regulär konvergente Integralpotenzreihe dar, die für $u=0$, $v=0$ verschwindet. Für das Verhalten der Lösungen bei kleinem v sind zunächst die linearen Glieder ausschlaggebend, und zwar gilt nach Schmidt[18]:

Wird die Gleichung

$$\varphi(x) + \lambda_0 \int_B K(x,y) \frac{\partial f(y,\psi_0)}{\partial u} \varphi(y)\,dy = 0 \tag{39}$$

nur durch $\varphi(x) \equiv 0$ erfüllt, so gibt es zwei Grössen u_0, v_0 derart, dass die Gleichung (38) für $|v| \leqq v_0$ genau eine Lösung hat, für welche $|u| \leqq u_0$ ist.[19] Diese muss natürlich reell sein, da die komplexen Lösungen paarweise auftreten.

Somit hat auch die Gleichung (9) für $|\lambda - \lambda_0| \leqq v_0$ genau eine Lösung, für die $|\psi(x,\lambda) - \psi(x,\lambda_0)| \leqq u_0$ gilt. Die Ausgangslösung kann daher stetig fortgesetzt werden, solange λ kein Eigenwert von (39) ist.

Bei der Änderung von λ kann, wie das Beispiel des vorangehenden Paragraphen zeigt, das Maximum von $|\psi(x,\lambda)|$ über alle Grenzen wachsen. Um diesen Fall auszuschliessen, setze man nun weiter voraus, was für die Anwendung im Folgenden genügt, dass $|f|$ beschränkt sei. Dann ist nach § 12 die Gleichung (9) bei hinreichend kleinem λ eindeutig lösbar.

---

[18] l. c. § 5.

[19] Der Fall, dass $\dfrac{\partial f(y,\psi_0(y))}{\partial u}$ identisch verschwindet, ist darin enthalten. Dann hat nämlich die Gleichung (37) bei Schmidt bereits die Gestalt (4), auf welche alle weiteren Schlüsse Bezug haben. Man beachte, dass der Kern der linearen Integralgleichung (39) bereits in § 11 bei der Frage nach dem Vorhandensein mehrerer Lösungen eine Rolle spielte.

Unter λ^* werde die obere (untere) Grenze derjenigen λ-Werte verstanden, für welche die stetige Fortsetzung von $\psi(x, \lambda)$ eindeutig möglich ist, das heisst oberhalb (unterhalb) λ^* gibt es in beliebiger Nachbarschaft Werte für λ, zu denen entweder gar keine oder mehr als eine zu $\psi(x, \lambda^*)$ benachbarte Lösung gehört.

λ^* kann $+\infty$ oder o oder $-\infty$ sein. (Zum Beispiel $+\infty$ bei monoton wachsendem f.) Ist λ^* endlich, so verstehe man unter $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \ldots$ eine solche Folge, die gegen λ^* strebt. Dann sind nach Hilfssatz 3 die Funktionen $\psi(x, \lambda^{(\nu)})$ gleichmässig beschränkt und gleichgradig stetig, was wie in § 1 Seite 134 eingesehen wird. Somit gibt es eine Teilfolge, die gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $\psi^*(x)$ konvergiert, und es ist offenbar

$$\psi^*(x) + \lambda^* \int_B K(x, y) f(y, \psi^*(y))\, dy = 0.$$

Die mit $\lambda_0 = \lambda^*$ und $\psi_0 = \psi^*$ gebildete Gleichung (39) muss daher eine nicht identisch verschwindende Lösung φ haben, da sich $\psi(x, \lambda)$ ja sonst über λ^* hinaus eindeutig fortsetzen liesse. Damit ist der erste Teil von Satz 8 bewiesen, nämlich, dass eine Änderung der Lösungszahl nur an einer solchen Stelle λ_0 eintreten kann, an welcher (39) eine von Null verschiedene Lösung $\varphi(x)$ hat.

Über das Verhalten der Lösungen in der Umgebung von λ_0 gibt die Schmidtsche Theorie weiteren Aufschluss.[20] Es sei nur der Fall näher untersucht, dass λ_0 einfacher Eigenwert von (39) ist. Er tritt gewiss ein, wenn der Kern die Greensche Funktion

$$K(x, y) = \begin{cases} x\left(\dfrac{-y}{\pi} + 1\right) & \text{für } x < y \\ y\left(\dfrac{-x}{\pi} + 1\right) & \text{für } x > y \end{cases} \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

ist, da dann die Differentialgleichung

$$\varphi''(x) - \lambda_0 \frac{\partial f(x, \psi_0(x))}{\partial u} \varphi(x) = 0$$

nur eine zur Randbedingung $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\pi) = 0$ gehörige normierte Lösung besitzt, was in üblicher Weise erschlossen wird.

---

[20] l. c. § 8.

Man hat jetzt die Verzweigungsgleichung aufzustellen; sie ist von der Form

$$0 = \sum_{m=2}^{\infty} L_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \sum_{\mu=1}^{\infty} v^\mu A_{m\mu},$$

wo ξ die Unbekannte bedeutet und L_m, $A_{m\mu}$ gewisse Konstanten sind. Ist nun L_n der erste von Null verschiedene Koeffizient in der ersten Summe, so hat die Gleichung (38) und somit auch (9) genau n Lösungen, für welche $|\psi(x, \lambda) - \psi(x, \lambda_0)| \leqq u_0$ gilt, wenn $|\lambda - \lambda_0| \leqq v_0$ ist, die jedoch mehrfach zu zählen sind, wenn ξ mehrfache Lösung ist. Komplexe Lösungen treten dabei paarweise auf. Soll daher bei λ_0 eine Änderung in der Anzahl der reellen Lösungen stattfinden, so ist dies nur so möglich, dass eine gerade Anzahl von komplexen Lösungen bei λ_0 ins reelle Gebiet übertritt, oder umgekehrt. Dies ist die zweite Aussage von Satz 8.

Freilich braucht nicht an jeder derartigen Stelle λ_0 eine Änderung der Lösungszahl einzutreten. Kriterien, ob und in welcher Art eine solche stattfindet, sind leicht zu geben.[21]

Es sei

$$A_{01} \neq 0; \quad L_2 = L_3 = \cdots = L_{n-1} = 0, \quad L_n \neq 0.$$

Dann hat die Verzweigungsgleichung die Form

$$\xi^n (L_n + \xi L_{n+1} + \cdots) = -v(A_{01} + \xi A_{11} + \cdots).$$

Da die in Frage kommenden Lösungen ξ mit v gegen Null konvergieren[22], so ergibt sich

$$\xi = \sqrt[n]{\frac{-A_{01}}{L_n} v}\,(1 + \eta(v)),$$

wobei $\lim_{v \to 0} \eta(v) = 0$ ist.

Daraus folgt, dass die Verzweigungsgleichung genau so viele reelle Nullstellen hat, als $\sqrt[n]{\frac{-A_{01}}{L_n} v}$ reelle Werte besitzt. Denn die n Lösungen der

[21] Untersuchungen über die Änderung einer Lösung der Randwertaufgabe in der Umgebung einer Ausgangslösung $\psi_0(x)$ finden sich bei Iglisch: »Lösungsfelder von $\Delta u = f(u)$«. M. A. 101. Jedoch werden dort anstelle des Parameters λ die Randwerte als veränderlich betrachtet.

[22] Schmidt l. c. § 9.

Verzweigungsgleichung liegen bei genügend kleinem v in beliebig kleinen Kreisen um die n Werte von $\sqrt[n]{\frac{-A_{01}}{L_n}v}$. Ist also ein solcher Wert reell, so muss auch das zugehörige ξ reell sein, weil ja mit ξ auch dessen konjugierte Nullstelle ist. Man hat also, da zu rellen ξ und nur zu diese reellen Lösungen von (38) gehören, folgendes Kriterium:

1) *n gerade.*

Haben A_{01} und L_n entgegengesetztes Vorzeichen, so treten bei wachsendem λ an der Stelle λ_0 zwei neue reelle Lösungen von (9) hinzu, die stetig aus $\psi(x, \lambda_0)$ hervorgehen.

Haben dagegen A_{01} und L_n gleiches Zeichen, so verschwinden bei λ_0 zwei Lösungen, die stetig in $\psi(x, \lambda_0)$ hineinrücken.

2) *n ungerade.*

Beim Durchgang von λ durch λ_0 gibt es eine und nur eine Lösung $\psi(x, \lambda)$ in der Nachbarschaft von $\psi(x, \lambda_0)$. Im zweiten Falle tritt also keine Änderung der Lösungsanzahl ein. Es sei nochmals hervorgehoben, dass sich die Resultate nur auf Lösungen in der Umgebung der betrachteten Ausgangslösung $\psi(x, \lambda_0)$ beziehen. Gehören zu λ_0 mehrere Lösungen $\psi(x, \lambda_0)$, für die (39) eine normierte Lösung hat, so ist die vorangehende Untersuchung für jede anzustellen.

Ähnlich behandelt man den Fall, in dem $A_{01} = 0$ ist. Ist zunächst $A_{11} \neq 0$ und $L_2 \neq 0$, so betrachte man die Gleichung

$$L_2\xi^2 + A_{11}v\xi + A_{02}v^2 = 0. \tag{40}$$

Schlägt man um ihre Wurzeln

$$\xi_{12} = v\frac{-A_{11} \pm \sqrt{A_{11}^2 - 4L_2A_{02}}}{2L_2}$$

Kreise von Radius $k|v|$, die sich nicht schneiden, wenn ξ_1 und ξ_2 verschieden sind, dagegen für $\xi_1 = \xi_2$ zusammenfallen, so errechnet man leicht, dass auf deren Peripherie bei genügend kleinem k der absolute Betrag der linken Seite von (40) den der von (40) zur Verzweigungsgleichung fehlenden Gliedern übersteigt. Nach dem Rouchéschen Satz folgt also, dass in jedem dieser Kreise ebensoviele Nullstellen der Verzweigungsgleichung liegen, als (40) dort hat.

Daraus ergibt sich: Es sei $L_2 \neq 0$, $A_{01} = 0$, $A_{11} \neq 0$.

Ist $A_{11}^2 - 4L_2A_{02} > 0$, *so hat Gleichung* (9) *in der zweiseitigen Umgebung von* λ_0 *genau zwei reelle Lösungen, die für* $\lambda = \lambda_0$ *stetig in die Doppellösung* $\psi(x, \lambda_0)$ *hineinrücken.*

Ist $A_{11}^2 - 4L_2A_{02} < 0$, *so hat Gleichung* (9) *in der Umgebung von* λ_0 *keine reelle Lösung; nur für* $\lambda = \lambda_0$ *tritt die Doppellösung* $\psi(x, \lambda_0)$ *auf.*

Es bleibt der Fall $A_{11}^2 - 4L_2A_{02} = 0$.

Die Verzweigungsgleichung hat die Gestalt

$$L_2\left(\xi + \frac{A_{11}}{2L_2}v\right)^2 = -(L_3\xi^3 + A_{21}v\xi^2 + A_{12}v^2\xi + A_{03}v^3 + L_4\xi^4 + \cdots).$$

Nach dem Vorangehenden gilt für ihre Lösungen $|\xi^{(1)}|, |\xi^{(2)}| \leqq$ konst. $|v|$. In Rücksicht darauf folgt aus der vorstehenden Gleichung

$$\xi^{(1)} = \frac{-A_{11}}{2L_2}v + \eta_1(v), \quad \xi^{(2)} = \frac{-A_{11}}{2L_2}v + \eta_2(v),$$

wobei $|\eta_1|, |\eta_2| \leqq$ konst. $|v|^{\frac{3}{2}}$ ist. Setzt man diese Ausdrücke in die rechte Seite ein, so findet sich für η_1 bezw. η_2

$$v^{\frac{3}{2}}\left[\frac{-1}{L_2}\left(L_3\left(\frac{-A_{11}}{2L_2}\right)^3 + A_{21}\left(\frac{-A_{11}}{2L_2}\right)^2 + A_{12}\left(\frac{-A_{11}}{2L_2}\right) + A_{03}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left(1 + \begin{cases}\eta_1^*(v)\\ \eta_2^*(v)\end{cases}\right)$$

mit $\lim\limits_{v\to 0}\eta_1^* = 0$, $\lim\limits_{v\to 0}\eta_2^* = 0$, falls der Ausdruck in der eckigen Klammer von Null verschieden ausfällt. Daher liegen die beiden Nullstellen $\xi^{(1)}$ und $\xi^{(2)}$, immer bei genügend kleinem v, in 2 sich nicht schneidenden Kreisen um die Punkte

$$-\frac{A_{11}}{2L_2}v \pm \sqrt{v^3\left[\frac{-1}{L_2}\left(L_3\left(\frac{-A_{11}}{2L_2}\right)^3 + A_{21}\left(\frac{-A_{11}}{2L_2}\right)^2 + A_{12}\left(\frac{-A_{11}}{2L_2}\right) + A_{03}\right)\right]}.$$

Daraus schliesst man jetzt: Ist der Ausdruck

$$\left[\frac{-1}{L_2}\left(L_3\left(\frac{-A_{11}}{2L_2}\right)^3 + A_{21}\left(\frac{-A_{11}}{2L_2}\right)^2 + A_{12}\left(\frac{-A_{11}}{2L_2}\right) + A_{03}\right)\right]$$

positiv, so treten bei wachsendem λ an der Stelle λ_0 zwei neue reelle Lösungen von (9) auf. Ist er dagegen negativ, so verschwinden 2 Lösungen.

Verschwindet der fragliche Ausdruck jedoch, so müssen zur Diskussion höhere Glieder herangezogen werden, was nicht näher ausgeführt werden soll.

Die nächste Annahme:

$$A_{01} = 0, \; A_{11} \neq 0; \; L_2 = L_3 = \cdots = L_{n-1} = 0, \; L_n \neq 0$$

führt zu andersartigen Ergebnissen als bisher. Durch dieselbe Anwendung des Rouchéschen Satzes wie im vorigen Fall ergibt sich, dass die n Nullstellen der Verzweigungsgleichung in sich nicht schneidenden Kreisen um die n Wurzeln von

$$L_n \xi^n + A_{11} v \xi = 0$$

liegen. Sie hat also stets mindestens eine reelle Nullstelle, nämlich die im Kreise um $\xi = 0$ liegende. Die übrigen liegen bei den Punkten $\left(\frac{-A_{11}}{L_n} v\right)^{\frac{1}{n-1}}$, und sind also gleichzeitig mit diesen reell oder nicht. Es folgt:

Ist

$$A_{01} = 0, \; A_{11} \neq 0; \; L_2 = L_3 = \cdots = L_{n-1} = 0, \; L_n \neq 0, \qquad n > 2,$$

so hat Gleichung (9) *in einer beiderseitigen Umgebung der Stelle* λ_0 *mindestens eine sich stetig mit* λ *ändernde reelle Lösung* $\psi(x, \lambda)$.

Ist n *gerade, so kommt dazu genau noch eine, die für* $\lambda = \lambda_0$ *mit* $\psi(x, \lambda_0)$ *zusammenfällt. Es tritt also keine Änderung der Lösungsanzahl ein. Ist aber* n *ungerade, so teilt sich die Lösung* $\psi(x, \lambda_0)$ *an der Stelle* $\lambda = \lambda_0$ *in drei Lösungen, und zwar kommen bei wachsendem* λ *zwei neue hinzu, falls* $\frac{A_{11}}{L_n} < 0$ *ist, hingegen verschwinden zwei, falls* $\frac{A_{11}}{L_n} > 0$ *ist.*

Diese Resultate mögen genügen. Man erhält daraus wenigstens einen qualitativen Überblick über die Änderung des Lösungsverlaufes mit λ.

§ 14. Über die Koeffizienten der Verzweigungsgleichung.

Um die Ergebnisse für das Folgende nutzbar zu machen, sollen jetzt L_2, L_3 und A_{01} auf eine einfachere Gestalt gebracht werden. Hierzu ist ein näheres Eingehen auf die Verzweigungsgleichung erforderlich. Zur Aufstellung derselben hat man nach Schmidt folgendermassen zu verfahren:

Neben der Gleichung (39) wird noch die transponierte

$$\chi(x) + \lambda_0 \int_B K(y, x) \frac{\partial f(x, \psi_0(x))}{\partial u} \chi(y)\, dy = 0 \tag{41}$$

betrachtet. Sie hat genau eine bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmte normierte Lösung[23]

$$\chi(x) = \sigma \frac{\partial f(x, \psi_0(x))}{\partial u} \varphi(x), \quad \left(\sigma^2 = \frac{1}{\int\limits_B \left(\frac{\partial f}{\partial u}\varphi\right)^2 dx}\right),$$

wie man durch Multiplikation von (39) mit $\frac{\partial f(x, \psi_0(x))}{\partial u}$ erkennt. Das Zeichen von σ kann dabei willkürlich festgesetzt werden, ist im Verlauf der Rechnung jedoch beizubehalten. Nun wähle man zwei stetige Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ so, dass

$$\int\limits_B \chi(x)p(x)dx \neq 0 \quad \text{und} \quad \int\limits_B \varphi(x)q(x)dx \neq 0$$

ausfällt, zum Beispiel $p = \chi$, $q = \varphi$. Dann verschwindet der Kern

$$E(x, y) = \lambda_0 K(x, y) \frac{\partial f(y, \psi_0(y))}{\partial u} - \chi(x)\varphi(y)$$

nicht identisch, wenn nicht $K(x, y)$ in das Produkt von einer Funktion von x allein und einer von y allein zerfällt, welcher Fall in § 1 bereits erledigt ist, und hat keine Nullösungen mehr.

$\overline{E}(x, y)$ bezeichne die zugehörige Resolvente. Die Gleichung (38) kann jetzt auf die Form gebracht werden

$$u(x) + \int\limits_B E(x, y)u(y)dy = -\chi(x)\xi + \int\limits_B K(x, y)\Theta(y)dy,$$

worin $\xi = \int\limits_B \varphi(y)u(y)dy$ und

$$(42) \qquad \Theta = -v\left[f(y, \psi_0) + u\frac{\partial f(y, \psi_0)}{\partial u}\right] - (\lambda_0 + v)\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{u(y)^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu f(y, \psi_0)}{\partial u^\nu}$$

bedeutet. Durch Auflösen ergibt sich

---

[23] Nach Anm. 19 braucht $\frac{\partial f(x, \psi_0(x))}{\partial u} \equiv 0$ nicht mehr berücksichtigt zu werden.

$$u(x) = -\xi\left(\chi(x) + \int_B \bar{E}(x,y)\chi(y)dy\right) + \int_B \left(K(x,y) + \int_B \bar{E}(x,z)K(z,y)dz\right)\Theta(y)dy. \tag{43}$$

Darin hat man sich in $\Theta(y)$ der Reihe nach für u die Glieder von 1., 2., u. s. w. Ordnung eingesetzt zu denken. Die Verzweigungsgleichung folgt daraus durch Multiplikation mit $\varphi(x)$ und Integration nach x. Der so entstandene Ausdruck kann nach dem Vorgang von Iglisch[24] vereinfacht werden. Es bezeichne $w(x)$ eine in B stetige Funktion. $W(x)$ wird durch

$$W(x) = w(x) + \int_B \bar{E}(x,y)w(y)dy$$

erklärt. Dann ist

$$w(x) = W(x) + \int_B E(x,y)W(y)dy,$$

$$w(x) + \chi(x)\int_B \varphi(y)W(y)dy = W(x) + \lambda_0 \int_B K(x,y)\frac{\partial f(y,\psi(y))}{\partial u} W(y)dy. \tag{44}$$

Da diese lineare Integralgleichung in W nur dann lösbar ist, wenn die linke Seite zu χ orthogonal ist, muss

$$\int_B w(x)\chi(x)dx = -\int_B \varphi(x)W(x)dx \quad \text{sein.} \tag{45}$$

Wendet man diese Beziehung mit $w = \chi$ an, so erhält man

$$1 = -\int_B \varphi(x)W(x)dx \quad \text{mit} \tag{46}$$

$$W(x) = \chi(x) + \int_B \bar{E}(x,y)\chi(y)dy.$$

---

[24] l. c. § 6.

Daraus folgt aber, dass die linke Seite von (44) identisch verschwindet, also $W(x) = \text{const.}\ \varphi(x)$ ist. Die Konstante ergibt sich aus (46) zu -1. Somit kann (43) mit der Abkürzung

$$\mathfrak{K}(x, y) = K(x, y) + \int_B \bar{E}(x, z) K(z, y) dz$$

in Rücksicht auf (42), wenn nur diejenigen Glieder explicit aufgeschrieben sind, die zu L_2, L_3 und A_{01} einen Beitrag liefern, auf die Form gebracht werden

$$u(x) = \xi\varphi(x) - v \int_B \mathfrak{K}(x, y) f(y, \psi_0(y))\, dy -$$
$$- \lambda_0 \int_B \mathfrak{K}(x, y) \left[\frac{\partial^2 f(y, \psi_0)}{\partial u^2} \frac{u(y)^2}{2} + \frac{\partial^3 f(y, \psi_0)}{\partial u^3} \frac{u(y)^3}{6}\right] dy + \cdots.$$

Führt man jetzt die in ξ und v linearen Glieder in die höheren Grades ein, so findet sich

$$u(x) = \xi\varphi - v \int_B \mathfrak{K}(x, y) f(y, \psi_0)\, dy \tag{47}$$
$$- \frac{\lambda_0}{2} \xi^2 \int_B \mathfrak{K}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \varphi^2 dy - \frac{\lambda_0}{6} \xi^3 \int_B \mathfrak{K}(x, y) \frac{\partial^3 f}{\partial u^3} \varphi^3 dy + \cdots.$$

Wählt man in (45)

$$w(x) = K(x, y),$$

und also $W(x) = \mathfrak{K}(x, y)$, so folgt

$$\int_B K(x, y) \chi(x)\, dx = - \int_B \varphi(x) \mathfrak{K}(x, y)\, dx,$$

und gemäss (39)

$$\sigma \int_B K(x, y) \frac{\partial f(x, \psi_0(x))}{\partial u} \varphi(x)\, dx = \frac{-\sigma}{\lambda_0} \varphi(y).$$

Hieraus nach der Bedeutung von χ

$$\frac{\sigma}{\lambda_0} \varphi(y) = \int_B \varphi(x) \mathfrak{K}(x, y)\, dx.$$

Die Verzweigungsgleichung erhält man aus (47) durch Multiplikation mit $\varphi(x)$ und Integration nach x. In Rücksicht auf das zuletzt gefundene Resultat und auf $\int\limits_B u\varphi\,dx = \xi$ ergibt sich

$$0 = \frac{1}{2}\xi^2 \int\limits_B \varphi^3 \frac{\partial^2 f(y,\psi_0)}{\partial u^2}\,dy + \frac{1}{6}\xi^3 \int\limits_B \varphi^4 \frac{\partial^3 f}{\partial u^3}\,dy + L_4\xi^4 + \cdots$$

$$+ \frac{v}{\lambda_0}\int\limits_B \varphi(y) f(y,\psi_0(y))\,dy + A_{11}v\xi + \cdots.$$

Es ist also $L_2 = \frac{1}{2}\int\limits_B \varphi^3 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,dy,\ L_3 = \frac{1}{6}\int\limits_B \varphi^4 \frac{\partial^3 f}{\partial u^3}\,dy.$

Der Koeffizient $A_{01} = \frac{1}{\lambda_0}\int\limits_B \varphi(y) f(y,\psi_0(y))\,dy$ kann auch in der Form $A_{01} = \frac{1}{\lambda_0\sigma}\int\limits_B \chi(x)\,\psi_0(x)\,dx$ geschrieben werden, wie sich durch Multiplikation von (39) mit $\sigma f(x,\psi_0(x))$, von (9) mit $\chi = \sigma \frac{\partial f(x,\psi_0(x))}{\partial u}\varphi(x)$ und Integration nach x ergibt. Das Vorzeichen der normierten Funktion χ ist dabei durch das von φ und σ festgelegt.

Das erste Ergebnis S. 166 zum Beispiel kann jetzt so formuliert werden:

Ist $\int\limits_B \varphi^3 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,dy \neq 0$ und $\int\limits_B \varphi(y) f(y,\psi_0)\,dy \neq 0$, so treten an der Stelle λ_0 zwei neue Lösungen auf, wenn diese beiden Grössen entgegengesetztes Zeichen haben, und es verschwinden zwei, wenn sie gleiches Zeichen haben.

Dass diese Fälle tatsächlich eintreten können, wird aus dem folgenden Paragraphen ersichtlich.

§ 15. Anwendung auf die Gleichung der erzwungenen Schwingung.

In diesem Paragraphen werden die allgemeinen Ergebnisse auf die spezielle Gleichung

(48)
$$\psi(x) + \lambda \int_0^\pi K(x, y) \sin(-\psi(y) + g(y))\, dy = 0$$

angewandt, wo $g(x)$ für $0 \leqq x \leqq \pi$ stetig ist, und $K(x, y)$ die Greensche Funktion $K = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2}$ bedeutet.

Die für $\lambda < \lambda_1 = 1$ eindeutig bestimmte Lösung $\psi(x)$ wird nach dem Approximationssatz (§ 10) durch die Funktionen

$$\psi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu^{(m)} \sin \nu x$$

gleichmässig angenähert, wobei die $c_\nu^{(m)}$ vermöge der Gleichung (13) bestimmt werden. Also:

$$c_\varrho^{(m)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{-\lambda}{\varrho^2} \int_0^\pi \sin\left(g(y) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu^{(m)} \sin \mu y\right) \sin \varrho y \, dy. \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots m)$$

Als Fehlerabschätzung findet man zufolge von

$$K^{(2)}(x, x) \leqq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \leqq \frac{2}{\pi} \frac{4}{3}; \quad \int_0^\pi f(x, \psi_0(x))^2 \, dx \leqq \lambda^2 \pi;$$

$$\sum_{\varrho=m+1}^{\infty} \frac{\varphi_\varrho^2}{\lambda_\varrho^2} \leqq \frac{2}{\pi} \sum_{\varrho=m+1}^{\infty} \frac{1}{\varrho^4} \leqq \frac{2}{3\pi} \frac{1}{m^3} \quad \text{nach (36)}$$

$$|\psi - \psi_m| \leqq \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda \left(\frac{2\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Sie ist von $g(x)$ unabhängig.

Wählt man jetzt für $g(x) = \beta \sin x$, so wird die erste der Näherungsgleichungen

$$C_1^{(1)} - \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^\pi \sin[C_1^{(1)} \sin y] \sin y \, dy = -\beta,$$

wobei

$$C_1^{(1)} = -\beta + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, c_1^{(1)}$$

gesetzt ist. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, C_1^{(1)}$ ist dabei der Fourierkoeffizient der ersten Näherung

$$\Psi_1(x) = -\beta \sin x + \psi_1(x)$$

der ursprünglichen Gleichung

$$\Psi(x) - \lambda \int_0^\pi K(x, y) \sin \Psi(y)\, dy = -\beta \sin x. \tag{11}$$

Dies ist das Resultat von Hamel.[25]

Wie in der Einleitung hervorgehoben, wächst mit λ die Lösungszahl von (48) über alle Grenzen, falls $g(x)$ stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat, und $g(0) = g(\pi) = 0$ ist. Es kann jedoch auch vorkommen, dass Lösungen an einer Stelle λ_0 wieder verschwinden. Dies ergibt sich aus den Resultaten von § 13. Eine Änderung der Lösungszahl kann danach nur an einer solchen Stelle λ_0 stattfinden, für welche eine Lösung $\psi_0(x)$ von (48) derart existiert, dass die Gleichung (39), die im vorliegenden Falle mit $\Psi_0(x) = g(x) - \psi_0(x)$ die Form

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_0^\pi K(x, y) \cos(\Psi_0(y))\, \varphi(y)\, dy = 0 \tag{49}$$

annimmt, eine nicht identisch verschwindende Lösung $\varphi(x)$ besitzt.

Wenn durchweg $|\Psi_0| < \frac{\pi}{2}$ gilt, so ist die Gleichung (49) äquivalent mit

$$\chi(x) - \lambda_0 \int_0^\pi \sqrt{\cos \Psi_0(x)}\, K(x, y) \sqrt{\cos \Psi_0(y)}\, \chi(y)\, dy = 0,$$

wobei $\chi(x) = \sqrt{\cos \Psi_0(x)}\, \varphi(x)$ gesetzt ist. Die Eigenwerte und die normierten, mit dem richtigen Vorzeichen versehenen Eigenfunktionen χ dieser Gleichung

---

[25] l. c. § 2. Man beachte $2 \int_0^\pi \sin[C_1^{(1)} \sin y] \sin y\, dy = \int_0^{2\pi} \sin[C_1^{(1)} \sin y] \sin y\, dy$.

konvergieren bekanntlich gleichmässig gegen die des Kerns $K(x, y)$, wenn $\Psi_0(x)$ gleichmässig gegen Null geht.[26] Somit hat also (49) einen Eigenwert $\lambda_0 > 0$ und die zugehörige normierte Eigenfunktion $\varphi(x)$ der Gestalt

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x + \vartheta(x), \tag{50}$$

wobei $\vartheta(x)$ mit $\Psi_0(x)$ gleichmässig nach Null strebt.

Man gehe jetzt von einem $\Psi_0(x)$ aus $\left(|\Psi_0| < \frac{\pi}{2}\right)$ und bezeichne mit λ_0 den kleinsten Eigenwert der zugehörigen Gleichung (49). Setzt man

$$\psi_0(x) = -\lambda_0 \int_0^\pi K(x, y) \sin \Psi_0(y)\, dy$$

und

$$g(x) = \Psi_0(x) + \psi_0(x),$$

so hat die mit diesem $g(x)$ gebildete Gleichung (48) für $\lambda = \lambda_0$ die Lösung $\psi_0(x)$, für welche die Gleichung (49) eine Lösung $\varphi(x)$ der Form (50) hat.

Ausschlaggebend für die Änderung der Lösungszahl von (48) sind nun nach § 14 zunächst die Integrale

$$L_2 = \frac{-1}{2} \int_0^\pi \varphi(y)^3 \sin \Psi_0(y)\, dy$$

und

$$A_{01} = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^\pi \varphi(y) \sin \Psi_0(y)\, dy.$$

Auf Grund von (50) überlegt man sich nun leicht, dass $\Psi_0(x)$ so gewählt werden kann, dass $L_2 \neq 0$ und $A_{01} \neq 0$ ausfallen und entweder gleiches oder auch entgegengesetztes Zeichen haben. Daraus folgt nach § 13 S. 166: *Es kommt für gewisse Funktionen* $g(x)$ *sowohl vor, dass an der Stelle* $\lambda = \lambda_0$ *eine Lösung* $\psi(x, \lambda_0)$ *der Gleichung* (48) *neu auftritt, die sich dort in zwei verzweigt, als auch, dass für* $\lambda = \lambda_0$ *zwei solche in* $\psi(x, \lambda_0)$ *zusammenrücken und dort verschwinden.*

---

[26] Zum Beispiel Hilbert-Courant: Methoden der mathematischen Physik. Kapitel III. § 8. 4.

Endlich überzeugt man sich davon, dass auch der Fall $L_2 = 0$ eintreten kann. Wählt man nämlich die Funktion $\Psi_0(x)$ der Bedingung $\Psi_0(x) = \Psi_0(\pi - x)$ gemäss, so hat die Gleichung (49), die ja mit

$$\varphi''(x) + \lambda_0 \cos \Psi_0(x)\, \varphi(x) = 0; \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\pi) = 0$$

äquivalent ist, zugleich mit $\varphi(x)$ die Lösung $\varphi(\pi - x)$, wie man durch Einsetzen sieht. Da die Eigenwerte einfach sind, folgt also mit konstantem c

$$\varphi(x) = c\varphi(\pi - x) \quad \text{und} \quad \varphi'(x) = -c\varphi'(\pi - x);$$
$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = c\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -c\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Ist daher $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, so wird $\varphi(x) = \varphi(\pi - x)$; ist dagegen $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, so fällt gewiss $\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$ aus und es ist $\varphi(x) = -\varphi(\pi - x)$.

Aus den obenstehenden Formeln ist jetzt ersichtlich, dass $L_2 = 0$ stets dann eintritt, wenn $\Psi_0(x) = \Psi_0(\pi - x)$ und $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ist. Dieser Fall tritt zum Beispiel für diejenige Eigenfunktion $\varphi(x)$ ein, die bei genügend kleinem $\Psi_0(x)$ von der Gestalt

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x + \vartheta(x) \qquad (\vartheta(x) \to 0)$$

ist, da dann nicht $\varphi(x) = \varphi(\pi - x)$ sein kann.

Über die Änderung der Lösungszahl an einer solchen Stelle λ_0 geben die Resultate von § 13 näheren Aufschluss, doch soll darauf nicht mehr eingegangen werden.