

ÜBER DIE ANNÄHERUNG ALGEBRAISCHER ZAHLEN DURCH PERIODISCHE ALGORITHMEN.

VON

KURT MAHLER

z. Zt. in KREFELD.

Herrn Prof. Dr. E. LANDAU zum 60. Geburtstag gewidmet.

In engem Anschluss an zwei klassische Arbeiten von Minkowski¹ werden in der vorliegenden Arbeit gewisse Algorithmen untersucht, durch die sich die Zahlen eines vorgegebenen algebraischen Zahlkörpers \mathfrak{K} vom Grad $n \geq 2$ über dem Körper \mathfrak{R} der rationalen Zahlen annähern lassen. Aus Gründen der Einfachheit und Durchsichtigkeit wird dabei das Problem in einer möglichst allgemeinen und symmetrischen Form gestellt und weder eine Zahl, noch eine Bewertung von \mathfrak{K} vor der andern ausgezeichnet.

Unter $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots$ seien die sämtlichen verschiedenen endlichen und unendlichen Primideale von \mathfrak{K} , unter $\Omega(\xi | \mathfrak{p})$ die zugehörigen Bewertungen verstanden; letztere denken wir so normiert, dass für $\xi \neq 0$

$$\prod_{\mathfrak{p}} \Omega(\xi | \mathfrak{p})^{g(\mathfrak{p})} = 1$$

ist, wo $g(\mathfrak{p})$ den Grad der perfekten Erweiterung von \mathfrak{K} in bezug auf $\Omega(\xi | \mathfrak{p})$ über der gleichen Erweiterung von \mathfrak{R} darstellt. Weiter bedeutet eine λ -Funktion $\lambda_0(\mathfrak{p})$, bzw. eine l -Funktion $l(\mathfrak{p})$ eine für jedes \mathfrak{p} eindeutig bestimmte positive Zahl, die nur für endlichviele \mathfrak{p} von 1 verschieden ist, an endlichen Primstellen als Funktionswert der zugehörigen Bewertung auftreten kann und die der Gleichung

$$\prod_{\mathfrak{p}} \lambda_0(\mathfrak{p})^{g(\mathfrak{p})} = \gamma^n, \text{ bzw. } \prod_{\mathfrak{p}} l(\mathfrak{p})^{g(\mathfrak{p})} = 1$$

¹ H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen, I, 293—315 und 357—371.

genügt; dabei ist $\gamma > 1$ eine gewisse Körperkonstante. Alle Ausdrücke

$$\lambda_k(\mathfrak{p}) = \lambda_0(\mathfrak{p})l(\mathfrak{p})^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

sind offenbar ebenfalls λ -Funktionen; sie bilden die (λ_0, l) -Folge.

In einer Reihe von Einzelsätzen wird gezeigt, dass jedem Element $\lambda_k(\mathfrak{p})$ einer solchen (λ_0, l) -Folge ein System

$$\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\}$$

von n Körperzahlen $\xi_{ki} \neq 0$ mit den folgenden Eigenschaften zugeordnet werden kann: a) Die Glieder $\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}$ von \mathfrak{S}_k sind linear unabhängig in bezug auf \mathfrak{K} . — b) Für jedes Primideal \mathfrak{p} gelten die Ungleichungen

$$\gamma^{-n} \lambda_k(\mathfrak{p}) \leq \Omega(\xi_{ki} | \mathfrak{p}) \leq \lambda_k(\mathfrak{p}) \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \dots \\ i = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}.$$

c) Die Quotienten $\frac{\xi_{ki}}{\xi_{kj}}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) liegen in einer endlichen, nur vom Körper abhängigen Menge. — d) Für jedes k gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix

$$U_k = (u_{ijk})_{i,j=1,2,\dots,n}$$

mit rationalen Elementen und nichtverschwindender Determinante, so dass

$$\xi_{k+1,i} = \sum_{j=1}^n u_{ijk} \xi_{kj} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \dots \\ i = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

ist. — e) Die »Matrixkette« U_0, U_1, U_2, \dots besteht aus nur endlichvielen verschiedenen Gliedern. — f) Ist für alle endlichen Primideale $l(\mathfrak{p}) \leq 1$, so liegen die Hauptnenner aller Elemente der Matrizes U_k unterhalb einer nur von \mathfrak{K} abhängigen Schranke; ist für alle endlichen Primstellen auch noch $\lambda_0(\mathfrak{p}) \leq 1$, so sind die Glieder ξ_{ki} jedes Systems \mathfrak{S}_k ganze Zahlen aus \mathfrak{K} . — g) Zur (λ_0, l) -Folge $\lambda_k(\mathfrak{p})$ gibt es dann und nur dann eine Systemfolge $\{\mathfrak{S}_k\}$ mit periodischer Matrixkette U_0, U_1, U_2, \dots , wenn eine Zahl $\varepsilon \neq 0$ aus \mathfrak{K} und eine natürliche Zahl K existieren, so dass an allen Primstellen

$$l(\mathfrak{p})^K = \Omega(\varepsilon | \mathfrak{p})$$

ist.

Eine willkürliche l -Funktion wird natürlich im allgemeinen keinem Gleichungssystem dieser Art genügen. Jedoch lässt sich durch eine einfache Anwendung der Dirichletschen Methode zeigen, dass auch im allgemeinen Fall sich

dieses Gleichungssystem wenigstens noch näherungsweise und zwar beliebig genau erfüllen lässt. Man kann also die Approximationsschärfe an den einzelnen Primstellen wenigstens angenähert vorschreiben, wenn man sich auf periodische Algorithmen beschränkt. Ein spezieller Fall des so erhaltenen Satzes lautet folgendermassen: »Der Körper \mathfrak{K} sei vom Grad $n \geq 2$ und nicht imaginär-quadratisch; je nachdem er reell oder imaginär ist, werde $\sigma = 1$ oder $\sigma = 2$ gesetzt. Für jede ganze Zahl ξ aus \mathfrak{K} bezeichne die Höhe $H(\xi)$ das Maximum der Absolutbeträge aller Konjugierten von ξ ; ferner sei $\delta > 0$ eine beliebig kleine positive Zahl. Dann existiert eine (λ_0, l) -Folge $\lambda_k(p)$ und eine zugehörige Folge von Systemen $\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) aus lauter ganzen Körperzahlen mit

$$|\xi_{ki}| \leq \Gamma H(\xi_{ki})^{-\frac{n-\sigma}{\sigma} + \delta}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} H(\xi_{ki}) = \infty,$$

wo $\Gamma > 0$ nicht von k und i abhängt, derart, dass die hierzu gehörige Matrixkette U_0, U_1, U_2, \dots von einer Stelle ab periodisch ist.»

Dieses Ergebnis ist im wesentlichen das bestmögliche; denn nach einem Satze der zweiten Minkowskischen Arbeit¹ kann $\delta = 0$ gewiss nur für spezielle Körper vom Grad $n \leq 6$ sein. —

Die Beweise in dieser Arbeit machen wesentlichen Gebrauch von dem Minkowskischen Satz über die sukzessiven Minima konvexer Körper², ferner von den klassischen Eigenschaften der algebraischen Zahlkörper und ihrer Einheiten und Ideale. Es sei auf die Analogie der Funktionen $l(p)$ mit den gewöhnlichen algebraischen Funktionen $f(x)$ einer Veränderlichen aufmerksam gemacht; genauer entspricht $\log l(p)$ der Ordnung des Verschwindens von $f(x)$ in den sämtlichen unendlich vielen Punkten der zugehörigen Riemannschen Fläche. Man kann demnach die l -Funktionen als Analoga der Divisoren in der Theorie der algebraischen Funktionen-Körper auffassen.

Kapitel I.

§ 1. Die normierten Bewertungen von \mathfrak{K} .

Im folgenden sei \mathfrak{K} ein endlicher algebraischer Zahlkörper vom Grad $n \geq 2$ über dem Körper \mathfrak{R} der rationalen Zahlen.

¹ Siehe Seite 109, Note 1.

² H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, § 53.

Dieser letztere Körper \mathfrak{K} besitzt bekanntlich¹ an nichtäquivalenten Bewertungen allein die *Absolutbetragbewertung* $|x|$, für die wir der Analogie halber auch

$$|x|_{p_\infty}$$

schreiben, indem wir ihr die unendliche Primzahl p_∞ zuordnen, weiter zu jeder natürlichen Primzahl p die *Henselsche p -adische Bewertung*

$$|x|_p \begin{cases} = 0 \text{ für } x = 0, \text{ und sonst} \\ = p^u \text{ mit dem ganzen rationalen } u, \text{ für das der gekürzte Bruch } p^u x \text{ zu } p \\ \text{teilerfremden Zähler und Nenner erhält,} \end{cases}$$

und schliesslich die *triviale Bewertung*

$$|x|_0 \begin{cases} = 0 \text{ für } x = 0, \\ = 1 \text{ für } x \neq 0. \end{cases}$$

Zwischen diesen Bewertungen besteht die *Vollständigkeitsrelation*

$$(1): \quad \prod_p |x|_p = |x|_0,$$

wo das Produkt über alle Primzahlen einschliesslich der unendlichen erstreckt wird.

Wird von \mathfrak{K} zu \mathfrak{K} übergegangen, so setzen sich die Bewertungen von \mathfrak{K} in solche von \mathfrak{K} fort, und zwar sind dabei im allgemeinen $|x|_{p_\infty}$ und $|x|_p$ mehrerer verschiedenen Fortsetzungen fähig, je nach dem Zerfallen von p_∞ und p in \mathfrak{K} .

Wir beginnen mit den Fortsetzungen von $|x|_{p_\infty}$. Von den n zu \mathfrak{K} konjugierten Körpern $\mathfrak{K}^{(1)}, \mathfrak{K}^{(2)}, \dots, \mathfrak{K}^{(n)}$ seien die r_1 ersten

$$\mathfrak{K}^{(1)}, \mathfrak{K}^{(2)}, \dots, \mathfrak{K}^{(r_1)}$$

reell, die $2r_2$ letzten ($r_1 + 2r_2 = n$) aber zu Paaren

$$\mathfrak{K}^{(h)}, \mathfrak{K}^{(h+r_2)} \quad (h = r_1 + 1, r_1 + 2, \dots, r_1 + r_2)$$

konjugiert komplex. Wie üblich ordnen wir jedem der reellen Körper $\mathfrak{K}^{(h)}$ ($h = 1, 2, \dots, r_1$) und jedem der komplexen Körperpaare $\mathfrak{K}^{(h)}, \mathfrak{K}^{(h+r_2)}$ ($h = r_1 + 1, r_1 + 2, \dots, r_1 + r_2$) je ein unendliches Primideal $\mathfrak{p}_\infty^{(h)}$ zu, bezeichnen ferner das zu einer Zahl ξ aus \mathfrak{K} konjugierte Element aus $\mathfrak{K}^{(h)}$ mit $\xi^{(h)}$. Dann definieren die $r_1 + r_2$ *Absolutbeträge*

$$\Omega(\xi \cdot \mathfrak{p}_\infty^{(h)}) = |\xi^{(h)}| \quad (h = 1, 2, \dots, r_1 + r_2)$$

¹ A. Ostrowski, Acta mathematica 41 (1918), 271—284.

gerade die *sämtlichen* nicht-äquivalenten Fortsetzungen von $|x|_{p_\infty}$ in \mathfrak{K} , und sie fallen für Zahlen aus \mathfrak{R} hiermit zusammen. Bedeutet $g(\mathfrak{p}_\infty^{(h)})$ den Grad der perfekten Erweiterung von \mathfrak{K} in bezug auf $\Omega(\xi | \mathfrak{p}_\infty^{(h)})$ über dem Körper der reellen Zahlen:

$$g(\mathfrak{p}_\infty^{(h)}) \begin{cases} = 1 \text{ für } h = 1, 2, \dots, r_1, \\ = 2 \text{ für } h = r_1 + 1, r_1 + 2, \dots, r_1 + r_2, \end{cases}$$

so dass also

$$\sum_{h=1}^{r_1+r_2} g(\mathfrak{p}_\infty^{(h)}) = n$$

ist, so besteht zwischen $|x|_{p_\infty}$ und diesen Fortsetzungen die Gleichung¹

$$(2): \quad |N(\xi)|_{p_\infty} = \prod_{h=1}^{r_1+r_2} \Omega(\xi | \mathfrak{p}_\infty^{(h)})^{g(\mathfrak{p}_\infty^{(h)})}.$$

Sei zweitens p eine natürliche Primzahl und $p = \prod_{i=1}^{\pi} \mathfrak{p}^{(i)e(\mathfrak{p}^{(i)})}$ ihre Primidealzerlegung in \mathfrak{K} ; dabei ist $e(\mathfrak{p}^{(i)})$ gleich der Ordnung des zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}^{(i)}$. Wir definieren die normierte *Henselsche $\mathfrak{p}^{(i)}$ -adische Bewertung* für $i = 1, 2, \dots, \pi$ durch

$$\Omega(\xi | \mathfrak{p}^{(i)}) \begin{cases} = 0 \text{ für } \xi = 0, \text{ und sonst} \\ = p^{u/e(\mathfrak{p}^{(i)})} \text{ mit dem ganzen rationalen } u, \text{ für das das gebrochene Ideal} \\ \quad \mathfrak{p}^{(i)u}(\xi) \text{ zu } \mathfrak{p}^{(i)} \text{ teilerfremden Zähler und Nenner erhält.} \end{cases}$$

Die so definierten π Bewertungen bilden die *sämtlichen* nicht-äquivalenten Fortsetzungen von $|x|_p$ in \mathfrak{K} , und sie fallen für Zahlen aus \mathfrak{R} hiermit zusammen. Bedeutet $g(\mathfrak{p}^{(i)})$ den Grad der perfekten Erweiterung von \mathfrak{K} in bezug auf $\Omega(\xi | \mathfrak{p}^{(i)})$ über dem Körper der p -adischen Zahlen, ist also

$$g(\mathfrak{p}^{(i)}) = e(\mathfrak{p}^{(i)})f(\mathfrak{p}^{(i)}),$$

wo $f(\mathfrak{p}^{(i)})$ den Grad von $\mathfrak{p}^{(i)}$, d. h. diejenige natürliche Zahl mit $N(\mathfrak{p}^{(i)}) = p^{f(\mathfrak{p}^{(i)})}$ bezeichnet, so wird

$$\sum_{i=1}^{\pi} g(\mathfrak{p}^{(i)}) = n.$$

Folglich besteht zwischen $|x|_p$ und seinen Fortsetzungen die Gleichung

¹ Wie üblich, bedeutet $N(\xi)$, bzw. $N(\mathfrak{a})$ die Norm einer Zahl oder eines Ideals aus \mathfrak{K} .

$$(3): \quad |N(\xi)|_p = \prod_{i=1}^{\pi} \Omega(\xi | p^{(i)})^{g(p^{(i)})}.$$

Endlich besitzt \mathfrak{K} noch die *triviale Bewertung*

$$\Omega(\xi | 0) \begin{cases} = 0 & \text{für } \xi = 0, \\ = 1 & \text{für } \xi \neq 0, \end{cases}$$

die die *einzig-mögliche* Fortsetzung von $|x|_0$ in \mathfrak{K} darstellt und hiermit durch die *triviale Beziehung*

$$(4): \quad |N(\xi)|_0 = \Omega(\xi | 0)$$

verknüpft ist. Nach dem bereits zitierten Satz von Ostrowski¹ ist jede weitere Bewertung von \mathfrak{K} zu einer der hier genannten äquivalent. Dies findet seinen Ausdruck in der *Vollständigkeitsrelation*

$$(5): \quad \prod_p \Omega(\xi | p)^{g(p)} = \Omega(\xi | 0),$$

in der das Produkt über alle unendlichen und endlichen Primideale zu erstrecken ist. Diese Relation folgt aus der entsprechenden Beziehung (1) für \mathfrak{K} mittels (2), (3) und (4).

§ 2. Einige Bezeichnungen und Definitionen.

Im folgenden bezeichnen wir die unendlichen Primideale von \mathfrak{K} in irgend einer Reihenfolge mit $q = q_1, q_2, \dots, q_{r_1+r_2}$, die endlichen mit $r = r_1, r_2, r_3, \dots$, während $p = p_1, p_2, p_3, \dots$, alle Primideale ohne Rücksicht auf Endlichkeit oder Unendlichkeit durchlaufe. Operationszeichen wie $\prod_p, \prod_q, \prod_r$ sollen über alle p , bzw. q , bzw. r erstreckt werden, dagegen z. B. $\prod_{p \neq p^*}$ nur über alle von p^* verschiedenen p . Der »Exponent« $g(p)$ von p sei wie in § 1 definiert; ferner bedeute wieder $p(r)$ die zu r gehörige natürliche Primzahl, $e(r)$ die Ordnung und $f(r)$ den Grad von r .

Unter einer \mathfrak{K} -Konstanten wird weiterhin jedes Symbol verstanden, das allein vom Körper \mathfrak{K} , nicht aber von anderen Veränderlichen abhängt. Demnach sind

¹ Siehe Seite 112, Note 1.

also n , r_1 und r_2 solche \mathfrak{K} -Konstanten, ferner die Körperdiskriminante d und die hieraus abgeleitete Zahl¹

$$\gamma = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} |d|^{1/2}.$$

Bedeutet weiter $h(\mathfrak{r})$ für jedes \mathfrak{r} die nichtnegative ganze rationale Zahl

$$h(\mathfrak{r}) = \left\lfloor \frac{e(\mathfrak{r}) \log \gamma^n}{\log p(\mathfrak{r})} \right\rfloor,$$

so dass $h(\mathfrak{r})$ wegen $e(\mathfrak{r}) \leq n$ höchstens für endlichviele \mathfrak{r} von Null verschieden ist, so stellen das ganze Ideal

$$\mathfrak{c} = \prod_{\mathfrak{r}} \mathfrak{r}^{h(\mathfrak{r})} \text{ und seine Norm } c = N(\mathfrak{c})$$

beide offenbar \mathfrak{K} -Konstanten dar.

Alle weiteren Überlegungen betreffen die Begriffe der λ -Funktion, der λ -Zahl und der λ -Basis.

Definition 1: Eine für jedes Primideal \mathfrak{p} von \mathfrak{K} eindeutig definierte positiv-reelle Zahl $\lambda(\mathfrak{p})$ heisse eine λ -Funktion, wenn ihre Werte an den einzelnen Primstellen folgende Eigenschaften besitzen:

- a: Die Funktionswerte $\lambda(\mathfrak{q})$ dürfen willkürliche positive Zahlen sein.
- b: Für endliche Primideale ist

$$\lambda(\mathfrak{r}) = p(\mathfrak{r})^{-r(\mathfrak{r})/e(\mathfrak{r})},$$

wo $r(\mathfrak{r})$ eine von \mathfrak{r} abhängige willkürliche ganze rationale Zahl bezeichnet.

c: $\lambda(\mathfrak{p})$ ist höchstens für endlichviele \mathfrak{p} von 1, $r(\mathfrak{r})$ also höchstens für endlichviele \mathfrak{r} von 0 verschieden.

- d: Es besteht die Beziehung²

$$\prod_{\mathfrak{p}} \lambda(\mathfrak{p})^{\sigma(\mathfrak{p})} = \gamma^n.$$

Auf Grund dieser Definition existieren alle drei Produkte

$$\mathcal{A}_1 = \prod_{\mathfrak{q}} \lambda(\mathfrak{q})^{\sigma(\mathfrak{q})}, \quad \mathcal{A}_2 = \prod_{\mathfrak{r}} \lambda(\mathfrak{r})^{\sigma(\mathfrak{r})}, \quad \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 = \prod_{\mathfrak{p}} \lambda(\mathfrak{p})^{\sigma(\mathfrak{p})} = \gamma^n,$$

¹ Nach H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, § 41 ist $\gamma > 1$; dies folgt auch leicht aus den späteren Ergebnissen.

² Diese Einschränkung ist nicht sehr wesentlich, vereinfacht aber alle weiteren Überlegungen bedeutend. Lässt man sie fallen, so kommt man doch nicht zu allgemeineren Ergebnissen.

ferner das gebrochene Ideal

$$\alpha = \prod_{\mathfrak{r}} \mathfrak{r}^{v(\mathfrak{r})}$$

aus \mathfrak{K} und seine Norm

$$N(\alpha) = \prod_{\mathfrak{r}} p(\mathfrak{r})^{v(\mathfrak{r})f(\mathfrak{r})} = A_2^{-1}.$$

Definition 2: Eine Zahl $\xi \neq 0$ aus \mathfrak{K} heisst λ -Zahl, wenn sie den sämtlichen Ungleichungen

$$\Omega(\xi | \mathfrak{p}) \leq \lambda(\mathfrak{p}) \quad (\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots)$$

genügt.

Definition 3: Ein System

$$\mathfrak{S} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

von n in bezug auf \mathfrak{K} linear-unabhängigen λ -Zahlen heisst eine λ -Basis.

Wir werden später beweisen, dass zu jeder λ -Funktion eine λ -Basis, also erst recht eine λ -Zahl existiert; die beiden letzten Definitionen sind also sinnvoll.

§ 3. Eigenschaften der λ -Zahlen.

Satz 1: Eine λ -Zahl ξ genügt den sämtlichen Ungleichungen

$$\Omega(\xi | \mathfrak{p}) \geq \gamma^{-n} \lambda(\mathfrak{p}) \quad (\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots).$$

Beweis: Da ξ nach Definition nicht verschwindet, so ist

$$\Omega(\xi | 0) = 1,$$

demnach auf Grund der Vollständigkeitsrelation (5)

$$\prod_{\mathfrak{p}} \Omega(\xi | \mathfrak{p})^{g(\mathfrak{p})} = 1$$

und folglich

$$\Omega(\xi | \mathfrak{p}^*) = \left\{ \Omega(\xi | \mathfrak{p}^*)^{g(\mathfrak{p}^*)-1} \prod_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^*} \Omega(\xi | \mathfrak{p})^{g(\mathfrak{p})} \right\}^{-1}$$

wenn \mathfrak{p}^* irgend ein Primideal von \mathfrak{K} bedeutet. Die einzelnen Faktoren der rechten Seite dieser Gleichung lassen sich gemäss Def. 2 nach unten abschätzen; wegen Def. 1, Forderung d , folgt dadurch

$$\Omega(\xi | \mathfrak{p}^*) \geq \left\{ \lambda(\mathfrak{p}^*)^{\sigma(\mathfrak{p}^*)-1} \prod_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^*} \lambda(\mathfrak{p})^{\sigma(\mathfrak{p})} \right\}^{-1} = \gamma^{-n} \lambda(\mathfrak{p}^*)$$

und damit die Behauptung.

Satz 2: *Ist ξ eine λ -Zahl, so ist*

$$(\xi) = \alpha \mathfrak{x},$$

wo \mathfrak{x} ein ganzes Ideal bedeutet, das in der \mathfrak{R} -Konstanten c aufgeht; die Norm von \mathfrak{x} ist demnach ein Teiler der \mathfrak{R} -Konstanten c .

Beweis: Das gebrochene Hauptideal (ξ) besitze die Primideal-Zerlegung

$$(\xi) = \prod_{\mathfrak{r}} \mathfrak{r}^{j(\mathfrak{r})};$$

dabei sind die Exponenten $j(\mathfrak{r})$ gewisse, ausser von ξ noch von \mathfrak{r} abhängige ganze rationale Zahlen, von denen nur endlichviele nicht verschwinden. Nach Def. 2, bzw. nach Satz 1 ist nun

$$\gamma^{-n} \lambda(\mathfrak{r}) \leq \Omega(\xi | \mathfrak{r}) \leq \lambda(\mathfrak{r}) \quad (\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \dots),$$

also nach Definition der \mathfrak{p} -adischen Bewertungen und der Funktion $\lambda(\mathfrak{p})$

$$\gamma^{-n} p(\mathfrak{r})^{-\nu(\mathfrak{r})/e(\mathfrak{r})} \leq p(\mathfrak{r})^{-j(\mathfrak{r})/e(\mathfrak{r})} \leq p(\mathfrak{r})^{-\nu(\mathfrak{r})/e(\mathfrak{r})} \quad (\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \dots)$$

und folglich wegen der Ganzheit von $j(\mathfrak{r})$ und $\nu(\mathfrak{r})$

$$\nu(\mathfrak{r}) \leq j(\mathfrak{r}) \leq \nu(\mathfrak{r}) + \left[\frac{e(\mathfrak{r}) \log \gamma^n}{\log p(\mathfrak{r})} \right] = \nu(\mathfrak{r}) + h(\mathfrak{r}) \quad (\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \dots).$$

Demnach ist in der Tat α ein Teiler von (ξ) und (ξ) ein Teiler von αc , so dass die beiden Behauptungen folgen.

Satz 3: *Es gibt eine \mathfrak{R} -konstante endliche Menge M von Zahlen aus \mathfrak{R} mit der folgenden Eigenschaft: Existieren zur gleichen λ -Funktion $\lambda(\mathfrak{p})$ zwei (gleiche oder verschiedene) λ -Zahlen ξ_1 und ξ_2 , so liegt deren Quotient $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ in M .*

Beweis: Nach Satz 2 ist

$$(\xi_1) = \alpha \mathfrak{x}_1, \quad (\xi_2) = \alpha \mathfrak{x}_2,$$

wo \mathfrak{x}_1 und \mathfrak{x}_2 zwei ganze Ideale sind, die in c aufgehen. Demnach ist auch

$$c \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \right) = \frac{c}{\mathfrak{x}_2} \mathfrak{x}_1$$

ein ganzes Ideal und folglich

$$\eta = c \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

eine ganze Körperzahl. Nach Def. 2, bzw. nach Satz 1 ist aber

$$\Omega(\xi_1, \mathfrak{q}) \leq \lambda(\mathfrak{q}), \quad \Omega(\xi_2, \mathfrak{q}) \geq \gamma^{-n} \lambda(\mathfrak{q}) \quad (\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_{r_1+r_2}),$$

und demnach genügen die Konjugierten zu η den Ungleichungen

$$|\eta^{(h)}| = \Omega(\eta | \mathfrak{p}_\infty^{(h)}) \leq c \gamma^n \quad (h = 1, 2, \dots, r_1 + r_2)$$

und gehören daher einer endlichen, allein von \mathfrak{K} abhängigen Menge an. Indem wir η durch die \mathfrak{K} -Konstante c teilen, folgt die Behauptung.

Bemerkung: Der vorige Beweis gibt ein Mittel, um die Menge M zu bestimmen; sie bestehe etwa aus den Elementen

$$\mu_1 = 1, \mu_2, \dots, \mu_m.$$

Wenn nun ξ irgend eine zu $\lambda(\mathfrak{p})$ gehörige λ -Zahl ist, so müssen nach Satz 3 alle überhaupt hierzu existierenden λ -Zahlen in der Menge

$$\{\mu_1 \xi, \mu_2 \xi, \dots, \mu_m \xi\}$$

enthalten sein; insbesondere liegt also ihre Anzahl unter der \mathfrak{K} -Konstanten m .

§ 4. Eigenschaften der λ -Basen.

In dem vorigen Satz 3 ist insbesondere enthalten:

Satz 4: Ist $\mathfrak{S} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ eine λ -Basis, so gehören die Quotienten

$$\frac{\xi_2}{\xi_1}, \frac{\xi_3}{\xi_1}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_1}$$

der Menge M an¹.

Bemerkung: Aus der Anmerkung zu Satz 3 geht noch hervor, dass es höchstens m^n verschiedene λ -Basen zu $\lambda(\mathfrak{p})$ geben kann.

Satz 5: Das einer λ -Basis $\mathfrak{S} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ zugehörige Ideal

$$\mathfrak{s} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

besitzt die Gestalt

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \mathfrak{z}$$

¹ Hierin ist der Minkowskische Endlichkeitssatz aus der ersten Arbeit (Seite 109, Note 1) enthalten.

mit einem ganzen, in c aufgehenden Ideal \mathfrak{x} ; erst recht ist demnach

$$N(\mathfrak{s}) = N(\mathfrak{a})x,$$

wobei die ganze rationale Zahl $x = N(\mathfrak{x})$ ein Teiler von c ist.

Beweis: Nach Satz 2 hat man

$$(\xi_1) = \alpha \mathfrak{x}_1, (\xi_2) = \alpha \mathfrak{x}_2, \dots, (\xi_n) = \alpha \mathfrak{x}_n$$

mit gewissen n ganzen Idealen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_n$, die in c aufgehen; wegen

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_n)$$

folgt daher die Behauptung.

§ 5. Der Existenzsatz.

Satz 6: Zu jeder λ -Funktion $\lambda(\mathfrak{p})$ existiert zumindest eine λ -Basis $\mathfrak{S} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$.

Beweis: Sei $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ eine Basis von \mathfrak{a} ; die zu ihren Elementen konjugierten Zahlen seien wie in § 1 durch obere Indizes gekennzeichnet. Die Funktion

$$F(x_1, \dots, x_n) = \max_{h=1, 2, \dots, r_1+r_2} \left(\frac{|x_1 \alpha_1^{(h)} + \dots + x_n \alpha_n^{(h)}|}{\lambda(\mathfrak{p}_\infty^{(h)})} \right)$$

der reellen Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n besitzt offenbar die folgenden Eigenschaften:

$$F(0, \dots, 0) = 0, F(x_1, \dots, x_n) > 0 \text{ für } \sum_{j=1}^n x_j^2 > 0,$$

$$F(tx_1, \dots, tx_n) = |t| F(x_1, \dots, x_n) \text{ für reelles } t,$$

$$F(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \leq F(x_1, \dots, x_n) + F(y_1, \dots, y_n);$$

ferner besitzt der Bereich

$$F(x_1, \dots, x_n) \leq 1$$

den Inhalt¹

$$I = \frac{2^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2} \mathcal{A}_1}{|d|^{1/2} |N(\mathfrak{a})|} = 2^n \gamma^{n-1},$$

wie man ohne Mühe durch Ausintegrieren zeigt.

¹ Wegen dieser Integration siehe Geometrie der Zahlen, § 39 und 40.

Wendet man auf F den Minkowskischen Satz¹ über die sukzessiven Minima konvexer Körper an, so folgt die Existenz von n^2 ganzen rationalen Zahlen x_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), deren Determinante

$$x = |x_{ij}|_{i,j=1,2,\dots,n}$$

nicht verschwindet, während zugleich die hiermit gebildeten Funktionswerte

$$F_i = F(x_{i1}, \dots, x_{in}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

positiv sind und der Ungleichung

$$(6): \quad F_1 F_2 \dots F_n \leq \gamma^{-(n-1)}$$

genügen. Wir setzen

$$\xi_i = x_{i1}\alpha_1 + \dots + x_{in}\alpha_n \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und behaupten, dass $\mathfrak{S} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ eine λ -Basis darstellt.

In der Tat ist wegen $x \neq 0$ klar, dass die n Zahlen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ linear unabhängig in bezug auf R und folglich erst recht von Null verschieden sind. Es bleibt folglich nur noch übrig, zu zeigen, dass die Ungleichungen

$$(7): \quad \Omega(\xi_i | \mathfrak{q}) \leq \lambda(\mathfrak{q}) \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_{r_1+r_2} \end{array} \right)$$

und

$$(8): \quad \Omega(\xi_i | \mathfrak{r}) \leq \lambda(\mathfrak{r}) \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \dots \end{array} \right)$$

erfüllt werden. Die Ungleichungen (8) folgen sofort daraus, dass die ξ_i wegen der Ganzzahligkeit der Koeffizienten x_{ij} im Ideal \mathfrak{a} liegen. An Stelle von (7) erhält man dagegen auf Grund der Definition der Funktion $F(x_1, \dots, x_n)$ und der Zahlen F_i und ξ_i zunächst nur die Abschätzungen

$$(9): \quad \Omega(\xi_i | \mathfrak{q}) \leq F_i \lambda(\mathfrak{q}) \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_{r_1+r_2} \end{array} \right).$$

Wegen (8), bzw. (9) ist jedoch nach Definition von \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2

$$\prod_{\mathfrak{q}} \Omega(\xi_i | \mathfrak{q})^{g(\mathfrak{q})} \leq F_i^n \mathcal{A}_1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und

$$\prod_{\mathfrak{r}} \Omega(\xi_i | \mathfrak{r})^{g(\mathfrak{r})} \leq \mathcal{A}_2 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

¹ Siehe Seite 109, Note 1.

also

$$\prod_p \Omega(\xi_i | p)^{g(p)} \leq F_i^n A_1 A_2 = (\gamma F_i)^n \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

und da die linke Seite dieser Ungleichung wegen $\xi_i \neq 0$ auf Grund der Vollständigkeitsrelation (5) den Wert 1 hat, so folgt die Schranke

$$F_i \geq \gamma^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Schätzen wir jetzt beliebige $n - 1$ Faktoren der linken Seite von (6) vermöge dieser Abschätzung nach unten ab, so ergibt sich für den noch übrig bleibenden Faktor die obere Schranke

$$F_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und also wegen (9) in der Tat das noch zu beweisende Ungleichungssystem (7). Das Zahlensystem \mathfrak{S} ist also wirklich eine λ -Basis in bezug auf $\lambda(p)$.

§ 6. Beziehungen zwischen λ -Zahlen und λ -Basen.

Satz 7: *Zu jeder λ -Zahl η in bezug auf $\lambda(p)$ gibt es eine λ -Basis $\mathfrak{S}^* = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ in bezug auf dieselbe λ -Funktion, derart dass deren erstes Glied $\eta_1 = \eta$ ist.*

Beweis: Nach Satz 6 gibt es wenigstens eine λ -Basis $\mathfrak{S} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ in bezug auf $\lambda(p)$. Die n Elemente $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ derselben sind nach Definition 3 linear unabhängig in bezug auf \mathfrak{R} . Da nach Definition 2 auch $\eta \neq 0$ ist, so muss es also $n - 1$ der Zahlen ξ_i geben, etwa ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$, so dass auch

$$\eta_1 = \eta, \eta_2 = \xi_2, \dots, \eta_n = \xi_n$$

linear unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen werden. Die so definierten n Zahlen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ sind aber λ -Zahlen; folglich stellt $\mathfrak{S}^* = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ nach Def. 3 in der Tat eine λ -Basis dar.

Bemerkung: Durch den letzten Satz wird ein wesentlicher Teil der Theorie der λ -Basen auf die der λ -Zahlen zurückgeführt. Um zu einer willkürlich gegebenen λ -Funktion $\lambda(p)$ alle überhaupt existierenden λ -Basen zu erhalten, genügt es, eine einzige beliebige λ -Zahl ξ hierzu zu kennen: eine solche gibt es natürlich nach dem Existenzsatz. Man bildet mittels ξ alle m Zahlen

$$\mu_1 \xi, \mu_2 \xi, \dots, \mu_m \xi,$$

wo $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ die Elemente von M sind; sucht man jetzt unter diesen Zahlen alle Systeme von je n in bezug auf \mathfrak{R} linear unabhängigen λ -Zahlen aus, so kommt man gerade zu allen möglichen λ -Basen. — Es werde schliesslich noch bemerkt, dass jede Zahl ξ aus \mathfrak{K} , die nicht Null ist, eine λ -Zahl in bezug auf eine geeignete λ -Funktion darstellt; in der Tat genügt es, $\lambda(\mathfrak{p})$ durch

$$\lambda(\mathfrak{q}) = \gamma \Omega(\xi | \mathfrak{q}) \quad (\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_{r_1+r_2}),$$

$$\lambda(\mathfrak{r}) = \Omega(\xi | \mathfrak{r}) \quad (\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \dots)$$

zu definieren. Dagegen ist ein System von n linear unabhängigen Zahlen aus \mathfrak{K} natürlich im allgemeinen keine λ -Basis, was auch $\lambda(\mathfrak{p})$ sei.

Kapitel II.

§ 7. Bezeichnungen und Definitionen.

Die bisherigen Überlegungen gingen von einer einzelnen λ -Funktion aus und betrafen Eigenschaften der zugehörigen λ -Zahlen und λ -Basen. In diesem Kapitel sollen statt dessen Beziehungen zwischen solchen Zahlen und Basen betrachtet werden, die zu verschiedenen Funktionen gehören. Dabei werden wir die auftretenden λ -Funktionen von einander durch geeignete Indizes unterscheiden und der Klarheit halber z. B. eine zu der λ -Funktion $\lambda_k(\mathfrak{p})$ gehörige λ -Zahl, bzw. λ -Basis als eine λ_k -Zahl, bzw. λ_k -Basis bezeichnen.

Definition 4: Eine für jedes Primideal \mathfrak{p} von \mathfrak{K} eindeutig definierte positiv-reelle Zahl $l(\mathfrak{p})$ heisse eine l -Funktion, wenn ihre Werte an den einzelnen Primstellen folgende Eigenschaften besitzen:

- a: Die Funktionswerte $l(\mathfrak{q})$ dürfen willkürliche positive Zahlen sein.
- b: Für endliche Primideale ist

$$l(\mathfrak{r}) = \rho(\mathfrak{r})^{-\varrho(\mathfrak{r})/e(\mathfrak{r})},$$

wo $\varrho(\mathfrak{r})$ eine von \mathfrak{r} abhängige willkürliche ganze rationale Zahl bezeichnet.

c: $l(\mathfrak{p})$ ist höchstens für endlichviele \mathfrak{p} von 1, $\varrho(\mathfrak{r})$ also höchstens für endlichviele \mathfrak{r} von 0 verschieden.

- d: Es besteht die Beziehung

$$\prod_{\mathfrak{p}} l(\mathfrak{p})^{\sigma(\mathfrak{p})} = 1.$$

Gemäss dieser Definition bilden offenbar die l -Funktionen bei Multiplikation eine Abelsche Gruppe. Ferner ist das Produkt einer λ -Funktion mit einer l -Funktion wieder eine λ -Funktion, der Quotient zweier λ -Funktionen aber eine l -Funktion.

Definition 5: Ist $\lambda_0(\mathfrak{p})$ eine λ -Funktion und $l(\mathfrak{p})$ eine l -Funktion, so heisse die Folge der λ -Funktionen

$$\lambda_k(\mathfrak{p}) = \lambda_0(\mathfrak{p})l(\mathfrak{p})^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

die (λ_0, l) -Folge.

Entsprechend zu bisher sei etwa für alle \mathfrak{r}

$$\lambda_0(\mathfrak{r}) = p(\mathfrak{r})^{-v_0(\mathfrak{r})/e(\mathfrak{r})} \quad \text{und} \quad l(\mathfrak{r}) = p(\mathfrak{r})^{-\varrho(\mathfrak{r})/e(\mathfrak{r})}$$

und folglich

$$\lambda_k(\mathfrak{r}) = p(\mathfrak{r})^{-v_k(\mathfrak{r})/e(\mathfrak{r})} \quad \text{mit} \quad v_k(\mathfrak{r}) = v_0(\mathfrak{r}) + k\varrho(\mathfrak{r}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Zur Abkürzung und analog der früheren Bezeichnung setzen wir

$$a_k = \prod_{\mathfrak{r}} r^{v_k(\mathfrak{r})} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad \text{und} \quad b = \prod_{\mathfrak{r}} r^{\varrho(\mathfrak{r})},$$

so dass also

$$a_k = a_0 b^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

wird. Ferner denken wir jeder einzelnen Funktion $\lambda_k(\mathfrak{p})$ der (λ_0, l) -Folge auf Grund des Existenzsatzes 6 eine λ_k -Basis

$$\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

willkürlich, aber fest zugeordnet.

Definition 6: Das System $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$ aller dieser Basen heisse eine zur (λ_0, l) -Folge gehörige Basiskette.

§ 8. Endlichkeit der Übergangsmatrizes.

Satz 8: Seien

$$\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_{k+1} = \{\xi_{k+11}, \xi_{k+12}, \dots, \xi_{k+1n}\}$$

zwei aufeinander folgende Glieder einer zur (λ_0, l) -Folge gehörigen Basiskette. Dann liegen die Quotienten

$$\eta_{ijk} = \frac{\xi_{k+1i}}{\xi_{kj}} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

in einer endlichen Menge $N(l)$, die allein vom Körper \mathfrak{K} und der Wahl der l -Funktion $l(\mathfrak{p})$ abhängt.

Beweis: Nach Satz 2 ist für alle Indexwerte i, j, k

$$(\xi_{kj}) = a b^k \mathfrak{x}_{kj} \text{ und } (\xi_{k+1i}) = a b^{k+1} \mathfrak{x}_{k+1i},$$

wo \mathfrak{x}_{kj} und \mathfrak{x}_{k+1i} ganze, in \mathfrak{c} aufgehende Ideale sind, folglich

$$(\eta_{ijk}) = \frac{b \mathfrak{x}_{k+1i}}{\mathfrak{x}_{kj}},$$

und also liegt η_{ijk} in dem gebrochenen Ideal $\frac{b}{c}$. Ferner ist nach Def. 2, bzw. nach Satz 1

$$\Omega(\xi_{k+1i}|q) \leq \lambda_0(q) l(q)^{k+1} \text{ und } \Omega(\xi_{kj}|q) \geq \gamma^{-n} \lambda_0(q) l(q)^k$$

und daher

$$|\eta_{ijk}^{(h)}| = \Omega\left(\frac{\xi_{k+1i}}{\xi_{kj}} \middle| \mathfrak{p}_\infty^{(h)}\right) \leq \gamma^n l(\mathfrak{p}_\infty^{(h)}) \quad (h = 1, 2, \dots, r_1 + r_2).$$

Aus diesen beiden Eigenschaften von η_{ijk} folgt die Behauptung. —

Nach Def. 3 sind die Elemente der beiden Basen

$$\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\} \text{ und } \mathfrak{S}_{k+1} = \{\xi_{k+11}, \xi_{k+12}, \dots, \xi_{k+1n}\}$$

jedesmal linear unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen. Auf Grund bekannter Körpereigenschaften muss es demnach eindeutig festgelegte Matrizes

$$U_k = (u_{ijk})_{i,j=1,2,\dots,n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

aus rationalen Elementen u_{ijk} und mit nichtverschwindender Determinante

$$u_k = |u_{ijk}|_{i,j=1,2,\dots,n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

geben, so dass

$$\xi_{k+1i} = \sum_{j=1}^n u_{ijk} \xi_{kj} \quad \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \dots \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right)$$

ist.

Definition 7: U_k heisse die Übergangsmatrix von \mathfrak{S}_k zu \mathfrak{S}_{k+1} , die Folge U_0, U_1, \dots eine zur (λ_0, l) -Folge gehörige Matrixkette.

Satz 9: Die Matrizes U_0, U_1, U_2, \dots einer zur (λ_0, l) -Folge gehörigen Matrixkette liegen alle in einer endlichen Menge $\Pi(l)$, die nur vom Körper \mathfrak{K} und der Wahl der l -Funktion $l(\mathfrak{p})$ abhängt.

Beweis: Nach Definition von U_k ist

$$(10): \quad \frac{\xi_{k+1i}}{\xi_{k1}} = \sum_{j=1}^n u_{ijk} \frac{\xi_{kj}}{\xi_{k1}}.$$

Da die n Zahlen

$$\frac{\xi_{k1}}{\xi_{k1}}, \frac{\xi_{k2}}{\xi_{k1}}, \dots, \frac{\xi_{kn}}{\xi_{k1}}$$

für jeden Wert von k linear unabhängig in bezug auf \mathfrak{R} sind, so bestimmt jedes Gleichungssystem (10) zu gegebenen Quotienten

$$\frac{\xi_{kj}}{\xi_{k1}} \quad \text{und} \quad \frac{\xi_{k+1i}}{\xi_{k1}}$$

die rationale Matrix U_k auf eindeutige Weise. Weiter liegen nach Satz 4 die Zahlen $\frac{\xi_{kj}}{\xi_{k1}}$ in M und nach Satz 8 die Zahlen $\frac{\xi_{k+1i}}{\xi_{k1}}$ in $N(l)$ und es entstehen daher nur endlichviele verschiedene Gleichungssysteme (10); deren Anzahl hängt dabei allein von \mathfrak{R} und der Wahl von $l(p)$ ab. Also folgt die Behauptung.

Bemerkung: Dieser Beweis ergibt noch, dass die Anzahl der Elemente von $\Pi(l)$ nicht grösser als $mN(l)$ ist, wo $N(l)$ die Anzahl der verschiedenen Zahlen aus $N(l)$ bedeutet.

§ 9. Weitere Eigenschaften der Übergangsmatrizes.

Die Glieder u_{ijk} von U_k sind nach Konstruktion rationale Zahlen. Sie lassen sich daher als Brüche

$$u_{ijk} = \frac{v_{ijk}}{v_k}$$

mit dem gemeinsamen Hauptnenner $v_k \geq 1$ schreiben; dieser Nenner und die Zähler v_{ijk} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) sind alsdann zu einander teilerfremde ganze rationale Zahlen.

Satz 10: Sei $b(l)$ die kleinste natürliche Zahl, so dass

$$b(l) \frac{b}{c}$$

ein ganzes Ideal ist. Dann geht der Hauptnenner v_k der Elemente u_{ijk} von U_k in $b(l)$ auf.

Beweis: Offenbar ist

$$(b(l)) = \frac{cb^*}{b},$$

wo b^* ein gewisses ganzes Ideal bezeichnet. Auf Grund von Satz 2 wird also

$$(b(l)\xi_{k+1i}) = \frac{cb^*}{b} \cdot a b^{k+1} \xi_{k+1i} = b^* \xi_{k+1i} a b^k c,$$

wobei ξ_{k+1i} das gleiche ganze Ideal wie beim Beweis des vorigen Satzes bedeutet. Andererseits ist nach Satz 5

$$\mathfrak{s}_k = (\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}) = a b^k \mathfrak{z}_k$$

mit einem ganzen Ideal \mathfrak{z}_k , das in c aufgeht. Folglich ist \mathfrak{s}_k ein Teiler von $ab^k c$ und erst recht ein Teiler des Hauptideals $(b(l)\xi_{k+1i})$. Die Zahl $b(l)\xi_{k+1i}$ liegt daher in \mathfrak{s}_k und besitzt somit eine Darstellung

$$b(l)\xi_{k+1i} = \sum_{j=1}^n w_{ijk} \xi_{kj}$$

mit gewissen ganzen rationalen Koeffizienten w_{ijk} . Eine solche Formel gilt für alle Indexwerte $i = 1, 2, \dots, n$; indem wir die Koeffizienten

$$b(l), w_{ijk} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

durch ihren grössten gemeinsamen Teiler dividieren, folgt wegen der Eindeutigkeit von U_k gerade die Behauptung.

Bemerkung: Machen wir die Annahme, dass das der Funktion $l(p)$ zugeordnete Ideal

$$b = \prod_{\mathfrak{r}} \mathfrak{r}^{q(\mathfrak{r})}$$

ganz ist, so ergibt sich aus Satz 10, dass der Hauptnenner v_k der Elemente von U_k in der \mathfrak{R} -Konstanten c aufgeht.

Satz 11: Die Elemente der Matrix U_k genügen den Ungleichungen

$$|u_{ijk}| \leq C \max_q l(q) \quad \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \dots \\ i, j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right),$$

wo C eine positive \mathfrak{R} -Konstante bezeichnet.

Bemerkung: Auf den Beweis dieses Satzes kann verzichtet werden, da er im folgenden nicht verwendet wird. Offenbar folgt Satz 9 aus ihm und Satz 10 auf triviale Weise.

Satz 12: Die Determinante u_k der Übergangsmatrix U_k besitzt den Wert

$$u_k = \mp N(\mathfrak{b}) \frac{x_{k+1}}{x_k},$$

wo x_k und x_{k+1} zwei in der \mathfrak{R} -Konstanten c aufgehende natürliche Zahlen sind.

Beweis: Es ist nach bekannten Normensätzen

$$u_k = \mp N\left(\frac{\mathfrak{s}_{k+1}}{\mathfrak{s}_k}\right),$$

wo \mathfrak{s}_k und entsprechenderweise \mathfrak{s}_{k+1} wie beim Beweis von Satz 10 definiert ist; mittels Satz 5 folgt daraus die Behauptung.

§ 10. Der Periodizitätssatz.

Definition 8: Die l -Funktion $l(\mathfrak{p})$ heisse *singulär*, wenn eine natürliche Zahl K und eine Zahl $\varepsilon \neq 0$ aus \mathfrak{R} existiert, so dass für alle \mathfrak{p}

$$l(\mathfrak{p})^K = \Omega(\varepsilon|\mathfrak{p})$$

ist.

Definition 9: Eine zur (λ_0, l) -Folge gehörige Matrixkette U_0, U_1, U_2, \dots heisse *periodisch*, wenn es eine natürliche Zahl a gibt, so dass für alle genügend grossen Indizes k

$$U_{k+a} = U_k$$

ist.

Satz 13: Zur (λ_0, l) -Folge

$$\lambda_k(\mathfrak{p}) = \lambda_0(\mathfrak{p})l(\mathfrak{p})^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

gibt es dann und nur dann eine periodische Matrixkette U_0, U_1, U_2, \dots , wenn $l(\mathfrak{p})$ eine singuläre l -Funktion ist.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass die Bedingung der Singularität von $l(\mathfrak{p})$ hinreicht, und danach, dass sie auch notwendig ist.

a: Sei $l(\mathfrak{p})$ singulär, also nach Def. 8 für alle \mathfrak{p}

$$l(\mathfrak{p})^K = \Omega(\varepsilon|\mathfrak{p}),$$

wo K eine natürliche Zahl und $\varepsilon \neq 0$ eine Zahl aus \mathfrak{K} bedeutet. Der Index k werde auf die Form

$$k = k_0 + k_1 K$$

gebracht, wo k_0 eine der Zahlen $0, 1, \dots, K-1$ und k_1 eine nichtnegative ganze rationale Zahl ist; diese Darstellung ist eindeutig. Alsdann sei

$$\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\}$$

für $k_1 = 0$ eine willkürliche λ_k -Basis, dagegen für $k_1 \geq 1$ das durch

$$\xi_{ki} = \varepsilon^{k_1} \xi_{k_0 i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

definierte Zahlssystem. Gemäss dieser Definition sind offenbar für jedes k die Elemente von \mathfrak{S}_k linear unabhängig in bezug auf \mathfrak{K} ; da ausserdem an sämtlichen Primstellen \mathfrak{p}

$$\Omega(\xi_{ki} | \mathfrak{p}) = \Omega(\varepsilon | \mathfrak{p})^{k_1} \Omega(\xi_{k_0 i} | \mathfrak{p}) = l(\mathfrak{p})^{k_1 K} \Omega(\xi_{k_0 i} | \mathfrak{p}) \leq l(\mathfrak{p})^{k_1 K} \lambda_{k_0}(\mathfrak{p}) = \lambda_k(\mathfrak{p})$$

ist, so stellt \mathfrak{S}_k für jeden Indexwert eine λ_k -Basis und somit $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$ eine Basiskette in bezug auf die (λ_0, l) -Folge dar. Die hierzu gehörige Matrixkette U_0, U_1, U_2, \dots hat die Periodizitätseigenschaft

$$U_{k+K} = U_k,$$

denn nach Definition von \mathfrak{S}_k ist

$$\xi_{k+K, i} = \varepsilon \xi_{ki}, \quad \xi_{k+K+1, i} = \varepsilon \xi_{k+1, i}.$$

Also folgt die erste Hälfte von Satz 13.

b: Die Matrixkette U_0, U_1, U_2, \dots sei periodisch; es gebe also eine natürliche Zahl a , so dass für alle genügend grossen Indizes k

$$(11): \quad U_{k+a} = U_k$$

ist. Unter

$$W_k = (w_{ijk})_{i, j=1, 2, \dots, n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

werde die Produktmatrix

$$W_k = U_{k+a-1} U_{k+a-2} \dots U_{k+1} U_k$$

verstanden; demnach ist für jedes k

$$\check{\xi}_{k+a, i} = \sum_{j=1}^n w_{ijk} \check{\xi}_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Wegen (11) muss offenbar für alle genügend grossen Indizes auch

$$W_{k+a} = W_k$$

sein; denn die Faktoren von W_{k+a} stimmen mit denen von W_k der Reihe nach überein. Es gibt somit eine natürliche Zahl x_0 , so dass für alle natürlichen Zahlen $x \geq x_0$ die Matrix W_{ax} den konstanten Wert

$$W = (w_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$$

hat, der von x nicht mehr abhängt; entsprechenderweise ist auch

$$\xi_{a(x+1),i} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \xi_{ax,j} \quad (x = x_0, x_0 + 1, x_0 + 2, \dots).$$

Bedeutet allgemeiner x' eine willkürliche natürliche Zahl und

$$W^{x'} = (w_{ij}^{(x')})_{i,j=1,2,\dots,n}$$

die x' -te Potenz von W , so ist für $x \geq x_0$ und jedes x'

$$\xi_{a(x+x'),i} = \sum_{j=1}^n w_{ij}^{(x')} \xi_{ax,j}.$$

Nun liegen aber nach Satz 4 für jedes k alle Quotienten

$$\frac{\xi_{k1}}{\xi_{k1}}, \frac{\xi_{k2}}{\xi_{k1}}, \dots, \frac{\xi_{kn}}{\xi_{k1}}$$

in der endlichen Menge M . Folglich gibt es zwei natürliche Zahlen $\bar{x} \geq x_0$ und \bar{x}' , so dass für $i = 1, 2, \dots, n$ gleichzeitig

$$\xi_{a(\bar{x}+\bar{x}'),i} = \varepsilon \xi_{a\bar{x},i}$$

ist, und zwar muss dabei ε als Quotient von λ -Zahlen eine von Null verschiedene Zahl aus \mathfrak{K} sein. Wir setzen zur Abkürzung

$$a\bar{x} = k_0, \quad a\bar{x}' = K, \quad W^{\bar{x}'} = (z_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n},$$

so dass $K \geq 1$ ist, und haben dann

$$\xi_{k_0+K,i} = \varepsilon \xi_{k_0,i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ferner

$$\xi_{k_0+(k_1+1)K,i} = \sum_{j=1}^n z_{ij} \xi_{k_0+k_1K,j} \quad \left(\begin{array}{l} k_1 = 0, 1, 2, \dots \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right)$$

und somit durch Schluss von k_1 auf $k_1 + 1$:

$$\xi_{k_0+k_1K, i} = \varepsilon^{k_1} \xi_{k_0, i} \quad \left(\begin{array}{l} k_1 = 0, 1, 2, \dots \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right),$$

also für jedes Primideal \mathfrak{p}

$$\Omega(\xi_{k_0+k_1K, i} | \mathfrak{p}) = \Omega(\varepsilon | \mathfrak{p})^{k_1} \Omega(\xi_{k_0, i} | \mathfrak{p}).$$

Andererseits hat man nach Def. 2, Satz 1 und Def. 5

$$\gamma^{-n} \lambda_{k_0}(\mathfrak{p}) l(\mathfrak{p})^{k_1 K} \leq \Omega(\xi_{k_0+k_1K} | \mathfrak{p}) \leq \lambda_{k_0}(\mathfrak{p}) l(\mathfrak{p})^{k_1 K},$$

folglich

$$\gamma^{-n/k_1} \lambda_{k_0}(\mathfrak{p})^{1/k_1} l(\mathfrak{p})^K \leq \Omega(\varepsilon | \mathfrak{p}) \Omega(\xi_{k_0, i} | \mathfrak{p})^{1/k_1} \leq \lambda_{k_0}(\mathfrak{p})^{1/k_1} l(\mathfrak{p})^K,$$

und wenn k_1 über alle Grenzen wächst:

$$l(\mathfrak{p})^K = \Omega(\varepsilon | \mathfrak{p}) \quad (\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots),$$

so dass auch die zweite Hälfte von Satz 13 folgt.

§ 11. Zusätze zum Periodizitätssatz.

Satz 13 besagt zwar, dass für singuläres $l(\mathfrak{p})$ zur (λ_0, l) -Folge mindestens eine periodische Matrixkette gehört, nicht aber, dass jede zugehörige Kette periodisch ist. Dies ist in der Tat falsch. Denn ist $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ eine beliebige Folge aus lauter Gliedern ∓ 1 , so stellt offenbar mit U_0, U_1, U_2, \dots gleichzeitig auch $\tau_0 U_0, \tau_1 U_1, \tau_2 U_2, \dots$ eine Matrixkette in bezug auf die gleiche (λ_0, l) -Folge dar; durch geeignete Wahl der Vorzeichen lässt sich aber immer erreichen, dass diese zweite Folge nicht periodisch ist.

Weniger trivial sind die beiden folgenden Aussagen:

Satz 14: *Ist \mathfrak{K} imaginär-quadratisch, so gibt es zu jeder (λ_0, l) -Folge eine periodische Matrixkette.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass jede l -Funktion $l(\mathfrak{p})$ von \mathfrak{K} singulär ist. Sei H die Klassenanzahl von \mathfrak{K} , \mathfrak{b} das zu $l(\mathfrak{p})$ gehörige Ideal. Es gibt hierzu eine Zahl $\beta \neq 0$ aus \mathfrak{K} mit $(\beta) = \mathfrak{b}^H$, da \mathfrak{b}^H der Hauptklasse angehört. Offenbar ist für alle \mathfrak{r}

$$l(\mathfrak{r})^H = \Omega(\beta | \mathfrak{r}).$$

Da \mathfrak{K} nur ein einziges unendliches Primideal \mathfrak{p}_∞ und zwar mit $g(\mathfrak{p}_\infty) = 2$ besitzt, so ist ferner nach der Vollständigkeitsrelation (5)

$$\Omega(\beta | p_\alpha)^2 \prod_r \Omega(\beta | r)^{g(r)} = 1$$

und entsprechend hierzu nach Def. 4, Forderung d

$$l(p_\alpha)^2 \prod_r l(r)^{g(r)} = 1.$$

Also muss auch noch

$$l(p_\alpha)^H = \Omega(\beta | p_\alpha)$$

sein, und somit ist $l(p)$ in der Tat singular und zwar mit $K = H$, $\varepsilon = \beta$.

Satz 15: *Ist \mathfrak{K} nicht imaginär-quadratisch und $n \geq 2$, so gibt es (λ_0, l) -Folgen, zu denen keine einzige periodische Matrixkette existiert.*

Beweis: Der Körper \mathfrak{K} hat mindestens zwei verschiedene unendliche Primstellen; auf Grund von Def. 4 ist es daher möglich, eine l -Funktion $l(p)$ anzugeben, die an einer unendlichen Primstelle einen willkürlich vorgeschriebenen Wert σ annimmt. Nehmen wir für σ eine beliebige transzendente Zahl, so kann aber $l(p)$ gewiss nicht singular sein, denn die Absolutbeträge sämtlicher Konjugierten einer jeden Zahl aus \mathfrak{K} sind algebraisch. Also folgt die Behauptung.

Kapitel III.

§ 12. Bezeichnung und Fragestellung.

Nachdem im vorigen Kapitel die Frage entschieden wurde, wann eine Matrixkette in bezug auf eine (λ_0, l) -Folge periodisch sein kann, sollen von jetzt ab nur noch periodische Matrixketten betrachtet und ihr Zusammenhang mit Diophantischen Approximationen untersucht werden. Der Kürze halber benutzen wir dabei folgende Bezeichnung:

Definition 10: *Eine zur (λ_0, l) -Folge gehörige Basiskette $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$ heisse periodisch, wenn die zugehörige Matrixkette periodisch ist.*

Sei $\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\}$ das allgemeine Glied einer solchen periodischen Basiskette. Ist gemäss Satz 13 und Def. 8

$$l(p)^K = \Omega(\varepsilon | p)$$

und wird wieder k auf die Form

$$k = k_0 + k_1 K \quad \left(\begin{array}{l} k_0, k_1 \text{ ganz rational} \\ 0 \leq k_0 \leq K - 1 \end{array} \right)$$

gebracht, so genügen die Elemente von \mathfrak{S}_k an allen Primstellen \mathfrak{p} den Ungleichungen

$$\gamma^{-n} \lambda_{k_0}(\mathfrak{p}) \Omega(\varepsilon | \mathfrak{p})^{k_1} \leq \Omega(\xi_{ki} | \mathfrak{p}) \leq \lambda_{k_0}(\mathfrak{p}) \Omega(\varepsilon | \mathfrak{p})^{k_1}.$$

Demnach hängt für $k \rightarrow \infty$ das asymptotische Verhalten sämtlicher Bewertungen der ξ_{ki} ab von der Grösse der verschiedenen Bewertungen von ε . Daher wird es nun unser nächstes Ziel sein, Angaben über die Möglichkeiten der Zahlenfolge

$$\{\Omega(\varepsilon | \mathfrak{p})\}_{\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots}$$

zu gewinnen, wenn $\varepsilon \neq 0$ in \mathfrak{K} liegt.

Ein wichtiges Resultat in dieser Richtung stammt bereits von Minkowski; er bestimmte alle Körper, in denen es eine Einheit ε mit

$$\Omega(\varepsilon | \mathfrak{q}_1) < 1, \quad \Omega(\varepsilon | \mathfrak{q}_2) = \Omega(\varepsilon | \mathfrak{q}_3) = \dots = \Omega(\varepsilon | \mathfrak{q}_{r_1+r_2}) > 1$$

gibt und fand, dass nur gewisse sechs Klassen von Körpern und zwar von den Graden $n = 2, 3, 4$ und 6 diese Eigenschaft haben.¹ Allein in diesen Zahlkörpern gibt es demnach periodische Basisketten $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \dots$, deren Glieder $\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\}$ aus ganzen Zahlen ξ_{ki} aus \mathfrak{K} bestehen, derart, dass für $k \rightarrow \infty$

$$\Omega(\xi_{ki} | \mathfrak{q}_1) \leq \text{const.} \left(\max_{\mathfrak{q}} \Omega(\xi_{ki} | \mathfrak{q}) \right)^{\frac{n-g(\mathfrak{q}_1)}{g(\mathfrak{q}_1)}}, \quad \max_{\mathfrak{q}} \Omega(\xi_{ki} | \mathfrak{q}) \rightarrow \infty$$

ist; eine gewisse Konjugierte sämtlicher ξ_{ki} strebt also möglichst schnell gegen Null, während die übrigen Konjugierten möglichst langsam und notwendigerweise von gleicher Grössenordnung gegen Unendlich wachsen.

Wir werden zeigen, dass ein nur wenig schwächeres Ergebnis für jeden Zahlkörper \mathfrak{K} mit $n \geq 2$ gilt; dabei werden wir aber im Gegensatz zu Minkowski keine Bewertung von \mathfrak{K} vor der anderen auszeichnen, ganz entsprechend wie schon bisher. Dadurch wird es möglich, zu einem sehr allgemeinen Resultat zu gelangen.

§ 13. Ein Existenzsatz.

Satz 16: Sei $l(\mathfrak{p})$ eine willkürliche l -Funktion von \mathfrak{K} und $\mathfrak{P} > 0$ eine beliebig kleine Zahl. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon \neq 0$ aus \mathfrak{K} und eine natürliche Zahl K , derart, dass an allen endlichen Primstellen

¹ Siehe die zweite Arbeit Seite 109, Note 1.

$$\Omega(\varepsilon | \mathfrak{r}) = l(\mathfrak{r})^K$$

und an allen unendlichen Primstellen

$$e^{-\vartheta} l(\mathfrak{q})^K \leq \Omega(\varepsilon | \mathfrak{q}) \leq e^{+\vartheta} l(\mathfrak{q})^K$$

ist.

Beweis: Sei H die Klassenanzahl von \mathfrak{K} , \mathfrak{b} das der Funktion $l(\mathfrak{p})$ zugeordnete Ideal, $\beta \neq 0$ eine Körperzahl mit $(\beta) = \mathfrak{b}^H$, und $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{r_1+r_2-1}$ ein System unabhängiger erzeugender Einheiten von \mathfrak{K} . Unter $x, x_1, x_2, \dots, x_{r_1+r_2-1}$ verstehen wir $r_1 + r_2$ ganze rationale Veränderliche, und wir setzen für jedes Primideal \mathfrak{p}

$$\Phi(\mathfrak{p}) = x \left(\log \Omega(\beta | \mathfrak{p}) - H \log l(\mathfrak{p}) \right) + \sum_{h=1}^{r_1+r_2-1} x_h \log \Omega(\eta_h | \mathfrak{p}).$$

Da offenbar für alle endlichen Primideale \mathfrak{r}

$$\Omega(\beta | \mathfrak{r}) = l(\mathfrak{r})^H, \quad \Omega(\eta_1 | \mathfrak{r}) = \Omega(\eta_2 | \mathfrak{r}) = \dots = \Omega(\eta_{r_1+r_2-1} | \mathfrak{r}) = 1$$

ist, so gelten die Gleichungen

$$(12): \quad \Phi(\mathfrak{r}) = 0 \quad (\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \dots).$$

Weiter ist wegen der Vollständigkeitsrelation (5)

$$\prod_{\mathfrak{p}} \Omega(\beta | \mathfrak{p})^{g(\mathfrak{p})} = \prod_{\mathfrak{p}} \Omega(\eta_1 | \mathfrak{p})^{g(\mathfrak{p})} = \dots = \prod_{\mathfrak{p}} \Omega(\eta_{r_1+r_2-1} | \mathfrak{p})^{g(\mathfrak{p})} = 1,$$

und nach Definition der l -Funktionen

$$\prod_{\mathfrak{p}} l(\mathfrak{p})^{g(\mathfrak{p})} = 1,$$

also auch

$$\sum_{\mathfrak{p}} g(\mathfrak{p}) \Phi(\mathfrak{p}) = 0$$

und wegen (12)

$$(13): \quad \sum_{\mathfrak{q}} g(\mathfrak{q}) \Phi(\mathfrak{q}) = 0.$$

Die $r_1 + r_2 - 1$ Funktionswerte

$$\Phi(\mathfrak{q}_1), \Phi(\mathfrak{q}_2), \dots, \Phi(\mathfrak{q}_{r_1+r_2-1})$$

stellen offenbar ebensoviele Linearformen mit reellen Koeffizienten in den $r_1 + r_2$ Veränderlichen $x, x_1, \dots, x_{r_1+r_2-1}$ dar. Mittels des Dirichletschen Schubfach-

schlusses lässt sich daher auf bekannte Weise¹ zeigen, dass zu jedem noch so kleinen $\mathcal{J} > 0$ immer diese Veränderlichen als solche ganzen rationalen Zahlen, die nicht alle Null sind, gewählt werden können, so dass gleichzeitig

$$|\mathcal{O}(q_h)| \leq \frac{\mathcal{J}}{n} \quad (h = 1, 2, \dots, r_1 + r_2 - 1),$$

wegen (13) also erst recht

$$(14): \quad |\mathcal{O}(q)| \leq \mathcal{J} \quad (q = q_1, q_2, \dots, q_{r_1+r_2})$$

ist.

Es sind nun zwei Fälle möglich. Erstens kann es geschehen, dass die sämtlichen Zahlen

$$(15): \quad \log \Omega(\beta|q) - H \log l(q) \quad (q = q_1, q_2, \dots, q_{r_1+r_2})$$

verschwinden. Dann ist aber für alle p

$$\Omega(\beta|p) = l(p)^H$$

und die Behauptung in evidenten Weise mit $\varepsilon = \beta$, $K = H$ erfüllt. Zweitens sei wenigstens eine der Zahlen (15) von Null verschieden. Wenn alsdann $x = 0$ wäre, so ergäben sich aus (14) die Ungleichungen

$$\left| \sum_{h=1}^{r_1+r_2-1} x_h \log \Omega(\eta_h|q) \right| \leq \mathcal{J} \quad (q = q_1, q_2, \dots, q_{r_1+r_2}),$$

so dass für hinreichend kleines \mathcal{J} wegen der Unabhängigkeit der Einheiten η_h alle Zahlen x_h verschwinden müssten, was offenbar falsch ist. Da aber ohne Einschränkung der Allgemeinheit \mathcal{J} durch jede kleinere positive Zahl ersetzt werden darf, so können wir demnach immer erreichen, dass $x \neq 0$ und sogar $x > 0$ ist. Setzen wir dann

$$\varepsilon = \beta^x \eta_1^{x_1} \dots \eta_{r_1+r_2-1}^{x_{r_1+r_2-1}}, \quad K = xH,$$

so ist $K \geq 1$, und auch in diesem Fall ist die Behauptung zutreffend, wie aus der Definition von \mathcal{O} und aus (12) und (14) folgt.

§ 14. Der Approximationssatz.

Aus dem letzten Satz können wir jetzt das folgende, schon angekündigte Resultat ableiten:

¹ Siehe z. B. das erste Kapitel von H. Minkowski, Diophantische Approximationen.

Satz 17: Sei \mathfrak{K} ein algebraischer Zahlkörper vom Grad $n \geq 2$, $l(\mathfrak{p})$ eine willkürliche l -Funktion und $\lambda_0(\mathfrak{p})$ eine λ -Funktion von \mathfrak{K} , ferner $\mathfrak{g} > 0$ eine beliebig kleine Zahl. Dann gibt es eine singuläre l -Funktion $l^*(\mathfrak{p})$, zu der (λ_0, l^*) -Folge eine periodische Basiskette $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$ mit dem allgemeinen Element $\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\}$ und eine natürliche Zahl K , derart, dass für alle Indizes k und für alle unendlichen und endlichen Primideale die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \gamma^{-n} \lambda_0(\mathfrak{q})(e^{-\mathfrak{g}} l(\mathfrak{q})^K)^k &\leq \Omega(\xi_{ki} | \mathfrak{q}) \leq \lambda_0(\mathfrak{q})(e^{\mathfrak{g}} l(\mathfrak{q})^K)^k \\ \gamma^{-n} \lambda_0(\mathfrak{r}) l(\mathfrak{r})^{Kk} &\leq \Omega(\xi_{ki} | \mathfrak{r}) \leq \lambda_0(\mathfrak{r}) l(\mathfrak{r})^{Kk} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

bestehen.

Beweis: Zur Funktion $l(\mathfrak{p})$ und zur Zahl \mathfrak{g} werde eine Körperzahl $\varepsilon \neq 0$ gemäss Satz 16 ausgewählt und alsdann die l -Funktion $l^*(\mathfrak{p})$ durch

$$l^*(\mathfrak{p}) = \Omega(\varepsilon | \mathfrak{p}) \quad (\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots)$$

definiert; sie ist nach Def. 8 also singulär. Folglich existiert nach Satz 13 zur (λ_0, l^*) -Folge eine periodische Basiskette $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$; wenden wir auf deren Glieder die durch Def. 2 und Satz 1 gelieferten Ungleichungen an, so folgt nach den Schranken für die verschiedenen Bewertungen von ε aus Satz 16 die Behauptung.

§. 15. Zwei Anwendungen des Approximationssatzes.

Definition 11: Für jede ganze Zahl ξ aus \mathfrak{K} werde

$$H(\xi) = \max_q \Omega(\xi | \mathfrak{q})$$

gesetzt und die Höhe von ξ genannt.

Satz 18: Sei \mathfrak{K} ein algebraischer Zahlkörper mit mindestens zwei verschiedenen unendlichen Primidealen und $\delta > 0$ eine beliebig kleine Zahl. Dann gibt es eine periodische Basiskette $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$, deren allgemeines Element $\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\}$ aus ganzen Körperzahlen besteht, die für $k \rightarrow \infty$ und $i = 1, 2, \dots, n$ den Forderungen

$$\Omega(\xi_{ki} | \mathfrak{q}_i) \leq \Gamma H(\xi_{ki})^{-\frac{n-g(\mathfrak{q}_i)}{g(\mathfrak{q}_i)} + \delta}, \quad H(\xi_{ki}) \rightarrow \infty$$

genügen, wo $\Gamma > 0$ nicht von k oder i abhängt.

Beweis: Der letzte Satz werde angewandt mit

$$l(q_1) = e^{-\frac{n-g(q_1)}{g(q_1)}}, \quad l(q_2) = l(q_3) = \dots = l(q_{r_1+r_2}) = c, \quad l(r) = 1 \text{ für alle } r$$

und

$$\lambda_0(q_1) = \lambda_0(q_2) = \dots = \lambda_0(q_{r_1+r_2}) = \gamma, \quad \lambda_0(r) = 1 \text{ für alle } r.$$

Beide Spezialisierungen sind offenbar wegen $\sum_q g(q) = n$ nach Def. 1 und 4 erlaubt.

Bedeutete jetzt $l^*(p)$ die zu \mathfrak{P} , $l(p)$ und $\lambda_0(p)$ gehörige singuläre l -Funktion, $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$ die zur (λ_0, l^*) -Folge gehörige periodische Basiskette mit allgemeinem Glied $\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\}$ und K die zugehörige natürliche Zahl. Dann ist an den endlichen Primstellen

$$\Omega(\xi_{ki} | r) \leq \lambda_0(r) l(r)^{Kk} = 1,$$

und also sind alle ξ_{ki} in der Tat ganze Körperzahlen. Weiter hat man an den unendlichen Primstellen

$$\Omega(\xi_{ki} | q_1) \leq \lambda_0(q_1) (e^{\mathfrak{P}} l(q_1)^K)^k = \gamma \left(e^{\mathfrak{P} - \frac{n-g(q_1)}{g(q_1)} K} \right)^k,$$

bzw.

$$\Omega(\xi_{ki} | q_h) \geq \gamma^{-n} \lambda_0(q_h) (e^{-\mathfrak{P}} l(q_h)^K)^k = \gamma^{-(n-1)} (e^{-\mathfrak{P} + K})^k \quad (h = 2, 3, \dots, n),$$

und falls \mathfrak{P} schon genügend klein und k genügend gross ist, demnach

$$H(\xi_{ki}) \geq \gamma^{-(n-1)} (e^{-\mathfrak{P} + K})^k.$$

Aus dieser und der vorletzten Ungleichung ergibt sich leicht die Behauptung, indem man \mathfrak{P} als eine geeignete Funktion von δ wählt.

Satz 19: Sei \mathbb{K} ein algebraischer Zahlkörper vom Grad $n \geq 2$ und $\delta > 0$ eine beliebig kleine Zahl. Dann gibt es eine periodische Basiskette $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$, deren allgemeines Element $\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\}$ aus ganzen Körperzahlen besteht, die für $k \rightarrow \infty$ und $i = 1, 2, \dots, n$ den Forderungen

$$\Omega(\xi_{ki} | r_1) \leq \mathcal{A} H(\xi_{ki})^{-\frac{n}{g(r_1)} + \delta}, \quad H(\xi_{ki}) \rightarrow \infty$$

genügen, wo $\mathcal{A} > 0$ nicht von k oder i abhängt.

Beweis: Diesmal wenden wir Satz 17 an mit

$$l(q_1) = l(q_2) = \dots = l(q_{r_1+r_2}) = e^{g(r_1)}, \quad l(r_1) = e^{-n}, \quad l(r_2) = l(r_3) = \dots = 1$$

und

$$\lambda_0(q_1) = \lambda_0(q_2) = \dots = \lambda_0(q_{r_1+r_2}) = \gamma, \quad \lambda_0(r) = 1 \text{ für alle } r.$$

Auch diese Spezialisierungen sind offenbar wieder zulässig. Bedeute nun $l^*(p)$ die zu \mathcal{P} , $l(p)$ und $\lambda_0(p)$ gehörige singuläre l -Funktion, $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$ die zur (λ_0, l^*) -Folge gehörige periodische Matrixkette mit dem allgemeinen Glied $\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\}$ und K die zugehörige natürliche Zahl. Dann ist an den endlichen Primstellen

$$\Omega(\xi_{ki} | \mathfrak{r}) \leq \lambda_0(\mathfrak{r}) l(\mathfrak{r})^{Kk} = \begin{cases} e^{-nK} & \text{für } \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1, \\ 1 & \text{für } \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4, \dots \end{cases}$$

und also sind insbesondere wieder alle ξ_{ki} ganz. Weiter hat man

$$H(\xi_{ki}) = \max_q \Omega(\xi_{ki} | q) \geq \gamma^{-n} \lambda_0(q) (e^{-\mathcal{P}} l(q)^K)^k = \gamma^{-(n-1)} (e^{-\mathcal{P} + g(\mathfrak{r}_1)K})^k.$$

Indem man jetzt \mathcal{P} wieder als eine geeignete Funktion von δ wählt, folgt aus dieser und der vorigen Ungleichung die Behauptung. —

Die beiden letzten Sätze bringen die angekündigte Verallgemeinerung des Minkowskischen Satzes. Aus dem letzteren geht hervor, dass Satz 18 im allgemeinen nicht wesentlich verschärft werden kann. In wieweit sich Satz 19 verbessern lässt, d. h. für welche Körper bei diesem Satz δ durch Null ersetzt werden darf und also die schärferen Formeln

$$\Omega(\xi_{ki} | \mathfrak{r}_1) \leq \text{const. } H(\xi_{ki})^{-\frac{n}{g(\mathfrak{r}_1)}}, \quad H(\xi_{ki}) \rightarrow \infty$$

bei geeigneten periodischen Basisketten noch gelten können, habe ich bisher noch nicht entschieden.

Krefeld, im Herbst 1936.

Anhang.

1.) Um die allgemeinen Überlegungen der vorliegenden Arbeit verständlicher zu machen, sollen für einen speziellen kubischen Zahlkörper periodische Algorithmen mit den durch die beiden letzten Sätze gegebenen Eigenschaften explizit konstruiert werden.

Unter $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\lambda)$ werde der durch die Gleichung

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

definierte Körper verstanden. Offenbar ist \mathfrak{K} im Körper $\mathfrak{f} = \mathfrak{K}(\mathcal{P})$ der siebten Einheitswurzeln enthalten, der durch die Gleichung

$$\mathcal{P}^6 + \mathcal{P}^5 + \mathcal{P}^4 + \mathcal{P}^3 + \mathcal{P}^2 + \mathcal{P} + 1 = 0$$

erzeugt wird; zwischen λ und ϑ besteht dabei etwa die Beziehung

$$\lambda = \vartheta + \vartheta^6 = \vartheta + \frac{1}{\vartheta}.$$

Da bekanntlich die Zahlen

$$1, \vartheta, \vartheta^2, \vartheta^3, \vartheta^4, \vartheta^5$$

eine Basis von \mathfrak{f} darstellen, so besitzt \mathfrak{K} die Basis

$$1, \lambda, \lambda^2$$

und folglich die Diskriminante

$$d = + 4\vartheta.$$

Da ferner \mathfrak{K} offenbar total-reell und also $r_2 = 0$ ist, so wird

$$\gamma = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} |d|^{1/2} = 7.$$

2.) Um die Reihenfolge der drei zu \mathfrak{K} konjugierten Körper $\mathfrak{K}^{(1)}$, $\mathfrak{K}^{(2)}$, $\mathfrak{K}^{(3)}$ und damit die drei zugehörigen Absolutbetrag-Bewertungen

$$\Omega(\xi | \mathfrak{p}_\infty^{(h)}) \quad (h = 1, 2, 3)$$

festzulegen, werde ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\lambda^{(h)} = 2 \cos \frac{2h\pi}{7} \quad (h = 1, 2, 3)$$

angenommen; vermöge der Basisdarstellung

$$\xi = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 \quad (a_0, a_1, a_2 \text{ in } \mathfrak{K})$$

sind dadurch gleichzeitig die Konjugierten

$$\xi^{(h)} = a_0 + a_1\lambda^{(h)} + a_2\lambda^{(h)2} \quad (h = 1, 2, 3)$$

jeder Körperzahl ξ festgelegt. Der Kürze halber sei noch $q_1 = \mathfrak{p}_\infty^{(1)}$, $q_2 = \mathfrak{p}_\infty^{(2)}$, $q_3 = \mathfrak{p}_\infty^{(3)}$, während unter $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \dots$ die endlichen Primideale von \mathfrak{K} in irgend einer Reihenfolge verstanden seien.

Offenbar ist

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 1;$$

die drei Zahlen $\lambda, \lambda - 1$ und $\lambda + 2$ aus \mathfrak{K} sind also Einheiten des Körpers und gewiss keine Einheitswurzeln. Von ihnen sind λ und $\lambda - 1$ sogar unabhängige

Einheiten. Denn bestimmt man die dekadischen Logarithmen der zugehörigen Bewertungen¹, so erhält man

$$\begin{aligned} \log \Omega(\lambda|q_1) &= + 0,0959; & \log \Omega(\lambda|q_2) &= - 0,3516; & \log \Omega(\lambda|q_3) &= + 0,2557, \\ \log \Omega(\lambda - 1|q_2) &= - 0,6074; & \log \Omega(\lambda - 1|q_2) &= + 0,1599; & \log \Omega(\lambda - 1|q_3) &= + 0,4475, \end{aligned}$$

und hier ist jede der drei Determinanten, die man bilden kann, evidenterweise von Null verschieden.

3.) Nach dem schon mehrfach erwähnten Satz von Minkowski gibt es keine periodische Basiskette $\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \xi_{k3}\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) mit

$$\Omega(\xi_{ki}|q_i) \leq \text{const. } H(\xi_{ki})^{-2}, \quad H(\xi_{ki}) = \max_{h=2,3} \Omega(\xi_{ki}|q_h) \rightarrow \infty \text{ für } k \rightarrow \infty;$$

ersetzt man dagegen den Exponenten -2 durch $-2 + \delta$, wo δ eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, so gibt es solche Ketten nach Satz 18. Man gelangt zu diesen, indem man Einheiten

$$\varepsilon = \lambda^x (\lambda - 1)^y$$

mit ganzen rationalen Exponenten x und y ($x^2 + y^2 > 0$) bestimmt, für die die beiden Zahlen

$$\log \Omega(\varepsilon|q_2) = - 0,3516x + 0,1599y \quad \text{und} \quad \log \Omega(\varepsilon|q_3) = + 0,2557x + 0,4475y$$

einander möglichst gleich sind, d. h. die Zahl

$$\log \Omega(\varepsilon|q_3) - \log \Omega(\varepsilon|q_2) = 0,6073x + 0,2876y$$

möglichst kleinen Absolutbetrag hat. Nimmt man $x = -1, y = 2$, so wird gerade

$$\log \Omega(\varepsilon|q_1) = - 1,3107; \quad \log \Omega(\varepsilon|q_2) = + 0,6714; \quad \log \Omega(\varepsilon|q_3) = + 0,6393,$$

also

$$\Omega(\varepsilon|q_1) \leq H(\varepsilon)^{-2 + \frac{1}{20}}.$$

Wegen $\gamma = 7$ ist es nun erlaubt, die Annahme

$$\lambda_0(p) = \begin{cases} 7 & \text{für } p = q_1, q_2, q_3 \\ 1 & \text{für } p = r_1, r_2, r_3, \dots \end{cases}; \quad \mathfrak{S}_0 = \{\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}\} = \{1, \lambda, \lambda^2\}$$

¹ Da es bei allen folgenden Rechnungen nur auf die Verhältnisse der Logarithmen ankommt, so ist es aus Bequemlichkeitsgründen angebracht, Logarithmen zur Basis 10 statt natürlicher Logarithmen zu verwenden.

zu machen; ferner können wir

$$l(p) = \Omega(\varepsilon p)$$

setzen und kommen dann also zu der periodischen Basiskette

$$\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \xi_{k3}\} = \{\varepsilon^k, \varepsilon^k \lambda, \varepsilon^k \lambda^2\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

mit

$$\Omega(\xi_{ki} | q_i) \leq \text{const. } H(\xi_{ki})^{-2 + \frac{1}{20}}.$$

Wegen

$$\varepsilon = \lambda^{-1}(\lambda - 1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda - 4$$

lauten die Übergangsgleichungen hierfür:

$$\xi_{k+11} = -4\xi_{k1} + 2\xi_{k2} + \xi_{k3}; \quad \xi_{k+12} = \xi_{k1} - 2\xi_{k2} + \xi_{k3}; \quad \xi_{k+13} = \xi_{k1} + 3\xi_{k2} - 3\xi_{k3}.$$

Ein noch bedeutend schärferer Algorithmus lässt sich übrigens gewinnen, indem man $\varepsilon = \lambda^{-9}(\lambda - 1)^{19}$ wählt; die Ausführung bleibe dem Leser überlassen.

4.) Als weiteres Beispiel werde die zum Primideal

$$r_1 = (\lambda + 3)$$

gehörige Henselsche r_1 -adische Bewertung betrachtet. Dass r_1 in der Tat ein Primideal und zwar ein Hauptideal ist, ergibt sich aus der Gleichung

$$N(r_1) = (\lambda^{(1)} + 3)(\lambda^{(2)} + 3)(\lambda^{(3)} + 3) = 27 + 9(-1) + 3(-2) + 1 = 13.$$

Es ist offenbar

$$\log \Omega(\lambda + 3 | q_1) = +0,6281; \quad \log \Omega(\lambda + 3 | q_2) = +0,4074; \quad \log \Omega(\lambda + 3 | q_3) = +0,0785.$$

Um zu einem möglichst guten Approximations-Algorithmus in bezug auf dieses Primideal zu kommen, müssen wir ganze rationale Zahlen x, y, z , die nicht alle gleich Null sind, finden, für die die Absolutbeträge von

$$\varepsilon = \lambda^x(\lambda - 1)^y(\lambda + 3)^z,$$

d. h. die drei Ausdrücke

$$\log \Omega(\varepsilon | q_1) = +0,0959x - 0,6074y + 0,6281z,$$

$$\log \Omega(\varepsilon | q_2) = -0,3516x + 0,1599y + 0,4074z,$$

$$\log \Omega(\varepsilon | q_3) = +0,2557x + 0,4475y + 0,0785z$$

möglichst wenig von einander verschiedene Zahlwerte haben. Eine einfache

Rechnung zeigt, dass die kleinen Zahlen $x = 2$, $y = 3$, $z = 6$ dies leisten, denn dann ist für die Zahl $\varepsilon = \lambda^2(\lambda - 1)^3(\lambda + 3)^6$:

$$\log \Omega(\varepsilon | q_1) = + 2,1382; \quad \log \Omega(\varepsilon | q_2) = + 3,2209; \quad \log \Omega(\varepsilon | q_3) = + 2,3269.$$

Ausserdem bekommt man natürlich

$$\log \Omega(\varepsilon | r_1) = - 6 \log 13 = - 6,6836.$$

Wählen wir also $\lambda_0(p)$, $l(p)$ und \mathfrak{S}_0 wie im vorigen Paragraphen, also auch

$$\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \xi_{k3}\} = \{\varepsilon^k, \varepsilon^k \lambda, \varepsilon^k \lambda^2\}$$

und setzen wir wieder

$$H(\xi_{ki}) = \max_{h=1,2,3} \Omega(\xi_{ki}, p_x^{(h)}),$$

so strebt diese Höhe mit wachsendem k gegen $+\infty$ und es wird zugleich

$$\Omega(\xi_{ki} | r_1) \leq \text{const. } H(\xi_{ki})^{-3+1/7}.$$

Wegen

$$\varepsilon = \lambda^2(\lambda - 1)^3(\lambda + 3)^6 = 48\lambda^2 + 141\lambda - 113$$

lauten die Übergangsgleichungen zwischen den auf einander folgenden Basen:

$$\xi_{k+11} = - 113\xi_{k1} + 141\xi_{k2} + 48\xi_{k3}; \quad \xi_{k+12} = 48\xi_{k1} - 17\xi_{k2} + 93\xi_{k3};$$

$$\xi_{k+13} = 93\xi_{k1} + 234\xi_{k2} - 110\xi_{k3}.$$

5.) Es werde noch ein weiteres Primideal, nämlich

$$r_2 = (\lambda - 2)$$

erwähnt, für das man zu trivialen Ergebnissen gelangt. Es ist nämlich

$$(\lambda - 2)^3 = - 7(\lambda - 1)^2,$$

also

$$r_2^3 = (7),$$

und folglich kann man diesmal

$$\varepsilon = 7$$

setzen. Bei gleicher Wahl von $\lambda_0(p)$, $l(p)$ und \mathfrak{S}_0 wie bisher wird

$$\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \xi_{k3}\} = \{7^k, 7^k \lambda, 7^k \lambda^2\},$$

und man hat $\xi_{k+1,i} = 7\xi_{ki}$ ($i = 1, 2, 3$) und

$$\Omega(\xi_{ki} | r_2) \leq \text{const. } H(\xi_{ki})^{-1},$$

wo die Höhe $H(\xi_{ki})$ wie im vorigen Paragraphen definiert ist. Zum Unterschied von den bisherigen Ergebnissen bekommt man also diesmal ein extrem scharfes Approximationsgesetz. Dies wird offenbar in jedem Zahlkörper \mathfrak{K} bei einer r -adischen Bewertung der Fall sein, wenn die zugehörige natürliche Primzahl eine reine Potenz von r ist. —

6.) Ich möchte diesen Anhang mit einer Bemerkung schliessen, die zwar nicht gerade tief ist, aber vielleicht als Verallgemeinerung der Ergebnisse dieser Arbeit ein wenig Interesse hat. Dabei beschränke ich mich wieder auf die Betrachtung der Approximation in bezug auf eine einzelne der $r_1 + r_2$ Absolutbetragbewertungen, etwa in bezug auf $\Omega(\xi | q_1)$, und setze dabei $r_1 + r_2 \geq 2$ voraus. Zu jedem noch so kleinen $\delta > 0$ lässt sich dann, wie wir im dritten Kapitel sahen, eine Zahl $\varepsilon \neq 0$ aus \mathfrak{K} mit

$$N(\varepsilon) = \bar{r} - 1, \quad \Omega(\varepsilon | q_1) < 1$$

und

$$\Omega(\varepsilon | q_1) \leq \left\{ \max_{h=2, 3, \dots, n} \Omega(\varepsilon | q_h) \right\}^{-\frac{n-g(q_1)}{g(q_1)} + \delta}$$

angeben. Sei nun $\omega_1, \dots, \omega_n$ eine willkürliche Basis von \mathfrak{K} und \mathfrak{S}_k für die Indizes $k = 0, 1, 2, \dots$ das Zahlssystem

$$\mathfrak{S}_k = \{\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}\} = \{\varepsilon^k \omega_1, \varepsilon^k \omega_2, \dots, \varepsilon^k \omega_n\}.$$

Seine n Elemente sind linear unabhängig in bezug auf \mathfrak{K} und genügen den Ungleichungen

$$\Omega(\xi_{ki} | q_1) \leq \text{const. } H(\xi_{ki})^{-\frac{n-g(q_1)}{g(q_1)} + \delta} \quad \text{mit } H(\xi_{ki}) = \max_{h=1, 2, \dots, n} \Omega(\xi_{ki} | q_h)$$

für alle i und für $k \rightarrow \infty$. Es gelten von k unabhängige Beziehungen

$$\xi_{k+i} = \sum_{j=1}^n u_{ij} \xi_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und zwar ist dabei

$$U = (u_{ij})_{i,j=1, 2, \dots, n}$$

eine Matrix aus lauter ganzen rationalen Elementen, deren Determinante den

Wert $\neq 1$ hat, da ε eine Einheit von \mathfrak{R} darstellt. Eine solche Matrix U lässt sich aber bekanntlich als ein endliches Produkt

$$U = E_{d-1} E_{d-2} \dots E_1 E_0$$

von sog. Elementarmatrizes schreiben; hierunter verstehen wir Matrizes von einer der drei Gestalten

$$\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \mp 1 & & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

bzw. hieraus durch Indexwechsel hervorgehende analoge Matrizes. Sei allgemein zur Abkürzung

$$E_{kd+l} = (e_{kd+l, ij})_{i, j=1, 2, \dots, n} = E_l \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \dots \\ l = 0, 1, \dots, d-1 \end{pmatrix},$$

ferner T_0 die Einheitsmatrix und für $x = 1, 2, 3, \dots$

$$T_x = E_{x-1} E_{x-2} \dots E_1 E_0 = (t_{x, ij})_{i, j=1, 2, \dots, n},$$

also

$$T_{kd+l} = E_{l-1} E_{l-2} \dots E_1 E_0 U^k \text{ und } T_{kd} = U^k.$$

Wird jetzt eine Folge von Zahlssystemen

$$\mathfrak{T}_x = \{\tau_{x1}, \tau_{x2}, \dots, \tau_{xn}\} \text{ mit } \tau_{xi} = \sum_{j=1}^n t_{x, ij} \omega_j$$

definiert, so dass also $\mathfrak{T}_{kd} = \mathfrak{S}_k$ ist, so bestehen die sich mit der Periode d wiederholenden Übergangstransformationen

$$(A): \quad \tau_{x+1, i} = \sum_{j=1}^n e_{x, ij} \tau_{xj},$$

und es ist ferner leicht einzusehen, dass für $k \rightarrow \infty$ Ungleichungen

$$(B): \quad \Omega(\tau_{xi} | q_1) \leq \text{const. } H(\tau_{xi})^{-\frac{n-g(q_1)}{g(q_1)} + \delta}$$

erfüllt sind.

Damit ist also gezeigt, dass es für jeden Zahlkörper mit $r_1 + r_2 \geq 2$ stets verallgemeinerte Basisfolgen $\mathfrak{I}_0, \mathfrak{I}_1, \dots$ gibt, deren Glieder auseinander durch die sich periodisch wiederholenden Transformationen (A) hervorgehen, wobei obendrein diese Transformationen durch Elementarmatrizes erzeugt sind, während andererseits die Glieder der einzelnen Basen \mathfrak{I}_x in bezug auf \mathfrak{K} linear unabhängige ganze Zahlen aus \mathfrak{O} sind, die den bis auf den Zuwachs δ im Exponenten extrem guten Ungleichungen (B) genügen. Für einen reell-quadratischen Zahlkörper kann z. B. sogar $\delta = 0$ genommen werden; alsdann ist in diesem Ergebnis gerade die Aussage enthalten, dass sich eine reell quadratische Irrationalzahl in einen periodischen regelmässigen Kettenbruch entwickeln lässt.

Krefeld, Februar 1937.

Kurt Mahler.

