SOLUTION PRINCIPALE DE L'ÉQUATION LINÉAIRE AUX DIFFÉRENCES FINIES.

PAR

RODOLPHE RACLIS

à BUCAREST.

Table des matières.

CHAPITRE III.

Formules sommatoires.

CHAPITRE IV.

Théorèmes d'existance de la solution principale.

CHAPITRE V.

Propriétés de la solution principale.

Introduction.

On supposait depuis Démocrite, Épicure et Lucrèce que la matière est composée d'atomes, mais jusqu'à ces derniers temps, la structure discontinue de la matière était restée une simple hypothèse; grâce aux récentes recherches de Physique théorique et de Physique expérimentale, elle est devenue une réalité.

On est ainsi tout naturellement porté à élaborer une nouvelle théorie mathématique, propre à l'étude des phénomènes discontinus, de même que la théorie des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles est propre à l'étude des phénomènes continus de la Mécanique classique.

La nouvelle théorie est *le Calcul aux différences finies* dont le créateur et l'animateur est Niels Erik Nörlund. A la vérité, bien des géomètres se sont occupés de cette branche d'Analyse, parmi lesquels on peut citer Euler, Stir-

LING, LAGRANGE, LAPLACE, BOOLE; mais ces auteurs s'occupaient surtout des méthodes formelles. Plus récemment encore, POINCARÉ, GUICHARD, PICARD, APPELL, ont consacré de beaux travaux à cette théorie, mais c'est NÖRLUND, qui dans une suite de mémoires, aujourd'hui classiques, a mis le Calcul aux différences finies sur les bases de la théorie moderne des fonctions.[1]

Cette belle théorie pourrait se suffir à elle même, en dehors de ses applications; c'est sous ce jour, d'ailleurs, qu'elle a commencé à se développer, comme tant de théories mathématiques qui ont précédé les théories physiques.

Il est bon, toutefois, que le géomètre ait l'intuition que ses efforts ne vont pas en pure perte et que ses théories, comme le Calcul aux différences finies, deviendront le cadre des lois de l'univers physique.

C'est pour moi un agréable devoir de rappeler que ce travail trouve son origine dans les Leçons[2] de M. PICARD sur les équations fonctionnelles, que j'ai suivies à la Sorbonne en 1921. La méthode des approximations successives, que nous utilisons d'une façon systématique et qui impose le choix de la solution principale, c'est encore à M. PICARD, notre vénéré Maître, que nous la devons.

Plus tard, dans une séance du Séminaire Mathématique dirigé par M. HADAMARD au Collège de France, M. BOREL, après avoir fait l'analyse des travaux de M. NÖRLUND sur le Calcul aux différences finies, conseilla aux jeunes géomètres d'approfondir et de continuer la nouvelle théorie. Ce n'est pas seulement pour ce conseil que nous sommes redevable à M. BOREL; sa théorie de la sommation des séries divergentes est fondamentale dans notre travail pour la définition de la solution principale.

Dans la rédaction de ce travail, nous avons suivi les trois mémoires fondamentaux de M. NÖRLUND: Mémoire sur les polynomes de Bernoulli[3], Mémoire sur le calcul aux différences finies[4], Sur certaines équations aux différences finies.[5]

---

[1] Cf. N. E. NÖRLUND, *Sur l'état actuel de la théorie des équations aux différences finies*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 2e série, t. 44, 1920, pag. 174—192 et 200—220.

[2] Cf. ÉMILE PICARD, *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*, rédigées par Eugène Blanc, Gauthier Villars, Paris, 1928.

[3] Acta mathematica, T. 43, 1920, pag. 121—196.

[4] Acta mathematica, T. 44, 1922, pag. 71—212.

[5] Transactions of the American Mathematical Society, volume 25, number 1, January 1923, pag. 13—98.

Le présent travail est au fond une étude préparatoire, notre principal but étant la définition de la solution principale de l'équation aux différences finies, à coefficients asymptotiquement constants, et à laquelle nous consacrerons un autre mémoire.

Parmi les travaux se rattachant à nos recherches, je dois citer un mémoire de M. BOCHNER[1] et surtout un mémoire remarquable de HANS SPÄTH[2], dont la fin prématurée et tragique rappelle celle de EVARISTE GALOIS.

Désignons la moyenne entre les valeurs $\varphi(x+\alpha)$ et $\varphi(x)$, de poids k et 1, d'une fonction $\varphi(x)$, dans les points $x+\alpha$ et x, par le symbole $\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}}$,

$$\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} \varphi(x) = \frac{k\varphi(x+\alpha)+\varphi(x)}{k+1},$$

et suivant une notation classique, la différence du premier ordre, d'écart β, par le symbole $\overset{1}{\underset{\beta}{\triangle}}$,

$$\overset{1}{\underset{\beta}{\triangle}} \varphi(x) = \frac{\varphi(x+\beta)-\varphi(x)}{\beta}.$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; $k_1, k_2, \ldots, k_p$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ des nombres complexes quelconques, dont les k_i sont différents de -1; posons pour la moyenne du second ordre

$$\overset{2}{\underset{\alpha_1\alpha_2}{\wedge}} \varphi(x) = \overset{1}{\underset{\alpha_2}{\wedge}} (\overset{1}{\underset{\alpha_1}{\wedge}} \varphi(x)) = \frac{k_2 k_1 \varphi(x+\alpha_1+\alpha_2)+k_2\varphi(x+\alpha_2)+k_1\varphi(x+\alpha_1)+\varphi(x)}{(k_1+1)(k_2+1)},$$

et pour la différence du second ordre

$$\overset{2}{\underset{\beta_1\beta_2}{\triangle}} \varphi(x) = \overset{1}{\underset{\beta_2}{\triangle}} (\overset{1}{\underset{\beta_1}{\triangle}} \varphi(x)) = \frac{\varphi(x+\beta_1+\beta_2)-\varphi(x+\beta_2)-\varphi(x+\beta_1)+\varphi(x)}{\beta_1\beta_2},$$

pour la moyenne d'ordre p

$$\overset{p}{\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p}{\wedge}} \varphi(x) = \overset{1}{\underset{\alpha_p}{\wedge}} (\overset{p-1}{\underset{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}{\wedge}} \varphi(x)), \tag{1}$$

[1] *Hauptlösungen von Differenzengleichungen,* Acta mathematica, T. 51, 1928, pag. 1—21.

[2] *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen nichthomogener linearer Differenzengleichungen,* Acta mathematica, T. 51, 1928, pag. 134—199.

et la différence d'ordre q

$$\overset{q}{\underset{\beta_1 \cdots \beta_q}{\triangle}} \varphi(x) = \overset{1}{\underset{\beta_q}{\triangle}} \left(\overset{q-1}{\underset{\beta_1 \cdots \beta_{q-1}}{\triangle}} \varphi(x) \right). \tag{2}$$

En (1) les p opérations $\overset{1}{\underset{\alpha_i}{\bigwedge}}$ et en (2) les q opérations $\overset{1}{\underset{\beta_j}{\triangle}}$ peuvent être interverties d'une façon arbitraire; c'est ce qu'on voit facilement car pour (1), par exemple, on vérifie directement

$$\overset{2}{\underset{\alpha_1 \alpha_2}{\bigwedge}} \varphi(x) = \overset{1}{\underset{\alpha_2}{\bigwedge}} \left(\overset{1}{\underset{\alpha_1}{\bigwedge}} \varphi(x) \right) = \overset{1}{\underset{\alpha_1}{\bigwedge}} \left(\overset{1}{\underset{\alpha_2}{\bigwedge}} \varphi(x) \right) = \overset{2}{\underset{\alpha_2 \alpha_1}{\bigwedge}} \varphi(x),$$

qui montre que le produit symbolique $\overset{1}{\underset{\alpha_1}{\bigwedge}} \overset{1}{\underset{\alpha_2}{\bigwedge}}$ est commutatif; on montre ensuite, par induction complète, que dans le produit symbolique $\overset{1}{\underset{\alpha_1}{\bigwedge}} \overset{1}{\underset{\alpha_2}{\bigwedge}} \cdots \overset{1}{\underset{\alpha_p}{\bigwedge}}$, qui représente l'opération $\overset{p}{\underset{\alpha_1 \cdots \alpha_p}{\bigwedge}}$, on peut intervertir l'ordre des facteurs. La proposition établie montre que la fonction $f(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p)$, définie par

$$f(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p) = \overset{p}{\underset{\alpha_1 \cdots \alpha_p}{\bigwedge}} \varphi(x), \tag{1 bis}$$

est symétrique par rapport aux p couples de lettres $(\alpha_1, k_1), \ldots, (\alpha_p, k_p)$ et la fonction $g(x \mid \beta_1, \ldots, \beta_q)$, définie par

$$g(x \mid \beta_1, \ldots, \beta_q) = \overset{q}{\underset{\beta_1 \cdots \beta_q}{\triangle}} \varphi(x), \tag{2 bis}$$

est symétrique par rapport aux q lettres $\beta_1, \ldots, \beta_q$.

Désignons par $\overset{p,q}{\underset{\alpha_1 \cdots \alpha_p, \beta_1 \cdots \beta_q}{\bigwedge}}$ la moyenne d'ordre p de la différence d'ordre q,

$$\overset{p,q}{\underset{\alpha_1 \cdots \alpha_p, \beta_1 \cdots \beta_q}{\bigwedge}} \varphi(x) = \overset{p}{\underset{\alpha_1 \cdots \alpha_p}{\bigwedge}} \left(\overset{q}{\underset{\beta_1 \cdots \beta_q}{\triangle}} \varphi(x) \right), \tag{3}$$

ou plus brièvement encore, lorsqu'il n'y a aucune confusion à craindre, par

$$\overset{p,q}{\bigwedge} \varphi(x) = \overset{p}{\bigwedge} \left(\overset{q}{\triangle} \varphi(x) \right),$$

36—29764. *Acta mathematica*. 55. Imprimé le 8 août 1930.

en sous-entendant que la moyenne $\overset{p}{\wedge}$ porte sur les écarts α_i et les poids k_i et la différence $\overset{q}{\triangle}$ sur les écarts β_j. On a, par exemple,

$$\mathop{\wedge}\limits^{1,1}_{\alpha,\beta} \varphi(x) = \mathop{\wedge}\limits^{1}_{\alpha} (\mathop{\triangle}\limits^{1}_{\beta} \varphi(x)) = \mathop{\wedge}\limits^{1}_{\alpha} \left(\frac{\varphi(x+\beta)-\varphi(x)}{\beta}\right) =$$

$$= \frac{k\varphi(x+\alpha+\beta) - k\varphi(x+\alpha) + \varphi(x+\beta) - \varphi(x)}{\beta(k+1)} =$$

$$= \frac{k\varphi(x+\alpha+\beta) + \varphi(x+\beta) - (k\varphi(x+\alpha)+\varphi(x))}{(k+1)\beta} =$$

$$= \mathop{\triangle}\limits^{1}_{\beta} \left(\frac{k\varphi(x+\alpha)+\varphi(x)}{k+1}\right) = \mathop{\triangle}\limits^{1}_{\beta} (\mathop{\wedge}\limits^{1}_{\alpha} \varphi(x)).$$

La dernière relation montre que les deux opérations $\mathop{\wedge}\limits^{1}_{\alpha}$ et $\mathop{\triangle}\limits^{1}_{\beta}$, dont se compose l'opération $\mathop{\wedge}\limits^{1,1}_{\alpha,\beta}$, peuvent être interverties, ou encore que le produit symbolique $\mathop{\wedge}\limits^{1}_{\alpha} \mathop{\triangle}\limits^{1}_{\beta}$ est commutatif. On montre de proche en proche que deux quelconques des $(p+q)$ opérations dont se compose l'opération $\overset{p,q}{\wedge}$, peuvent être interverties. En particulier,

$$F(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q) = \mathop{\wedge}\limits^{p,q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p, \beta_1 \ldots \beta_q} \varphi(x) =$$

$$\mathop{\wedge}\limits^{p}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} (\mathop{\triangle}\limits^{q}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \varphi(x)) = \mathop{\triangle}\limits^{q}_{\beta_1 \ldots \beta_q} (\mathop{\wedge}\limits^{p}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \varphi(x)). \qquad (3 \text{ bis})$$

La proposition établie plus haut montre que la fonction $F(x)$ définie par (3 bis) est symétrique par rapport aux p couples de lettres $(\alpha_1, k_1), \ldots, (\alpha_p, k_p)$; elle est également symétrique par rapport aux q lettres $\beta_1, \ldots, \beta_q$.

On vérifie directement l'égalité

$$\mathop{\wedge}\limits^{2}_{\alpha_1 \alpha_2} \varphi(x) = \frac{1}{(k_1+1)(k_2+1)} \sum_{r_1=0}^{1} \sum_{r_2=0}^{1} k_1^{r_1} k_2^{r_2} \varphi(x + r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2),$$

et l'on montre, par induction complète, que

$$\overset{p}{\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\wedge}} \varphi(x) = \frac{1}{(k_1+1)\cdots(k_p+1)} \sum_{r_1=0}^{1} \cdots \sum_{r_p=0}^{1} k_1^{r_1} \cdots k_p^{r_p} \varphi(x + r_1\alpha_1 + \cdots + r_p\alpha_p). \quad (1 \text{ ter})$$

Tout pareillement on a

$$\overset{2}{\underset{\beta_1 \beta_2}{\triangle}} = \frac{1}{\beta_1 \beta_2} \sum_{s_1=0}^{1} \sum_{s_2=0}^{1} (-1)^{2-s_1-s_2} \varphi(x + s_1\beta_1 + s_2\beta_2),$$

et par induction complète on trouve

$$\overset{q}{\underset{\beta_1 \ldots \beta_q}{\triangle}} \varphi(x) = \frac{1}{\beta_1 \ldots \beta_q} \sum_{s_1=0}^{1} \cdots \sum_{s_q=0}^{1} (-1)^{q-s_1-\cdots-s_q} \varphi(x + s_1\beta_1 + \cdots + s_q\beta_q). \quad (2 \text{ ter})$$

Enfin, la fonction $F(x)$ définie par (3 bis), a pour expression

$$\overset{p,q}{\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p, \beta_1 \ldots \beta_q}{\wedge}} \varphi(x) = \frac{1}{(k_1+1)\cdots(k_p+1)} \frac{1}{\beta_1 \cdots \beta_q} \sum_{r_1=0}^{1} \cdots \sum_{r_p=0}^{1} \sum_{s_1=0}^{1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{s_q=0}^{1} k_1^{r_1} \cdots k_p^{r_p} (-1)^{q-s_1-\cdots-s_q} \varphi(x + r_1\alpha_1 + \cdots + r_p\alpha_p + s_1\beta_1 + \cdots + s_q\beta_q). \quad (3 \text{ ter})$$

En (1 ter), (2 ter) et (3 ter) on lit directement que les fonctions définies par les opérations $\overset{p}{\wedge}$, $\overset{q}{\triangle}$, $\overset{p,q}{\wedge}$ sont symétriques par rapport aux p couples de lettres $(\alpha_1, k_1), \ldots, (\alpha_p, k_p)$ et par rapport aux q lettres $\beta_1, \ldots, \beta_q$.

Lorsque les k_i sont égaux à l'unité, l'opération $\overset{p}{\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\wedge}}$ se réduit à l'opération $\overset{p}{\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\nabla}}$ et l'égalité (1 ter) devient

$$\overset{p}{\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\nabla}} \varphi(x) = 2^{-p} \Sigma \varphi(x + r_1\alpha_1 + \cdots + r_p\alpha_p),$$

où le signe Σ signifie qu'il faut donner aux r_i, de toutes les manières possibles, les valeurs 0 et 1 et de faire la somme des termes ainsi obtenus.

Supposons $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = \alpha$; $k_1 = k_2 = \cdots = k_p = k$; $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = \beta$; les formules (1 ter), (2 ter) et (3 ter) deviennent

$$\underset{\alpha\,\ldots\,\alpha}{\overset{p}{\wedge}}\varphi(x)=(k+1)^{-p}\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}k^{r}\,\varphi(x+r\alpha),$$

$$\underset{\beta\,\ldots\,\beta}{\overset{q}{\triangle}}\varphi(x)=\beta^{-q}\sum_{s=0}^{q}(-1)^{q-s}\binom{q}{s}\varphi(x+s\beta),$$

$$\underset{\alpha\,\ldots\,\alpha,\,\beta\,\ldots\,\beta}{\overset{p,\,q}{\wedge}}\varphi(x)=(k+1)^{-p}\beta^{-q}\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}\sum_{s=0}^{q}(-1)^{q-s}\binom{q}{s}\varphi(x+r\alpha+s\beta).$$

Nous nous donnons la fonction $\varphi(x)$ et nous nous proposons de définir et d'étudier la solution principale, au sens de Nörlund, de l'équation linéaire aux différences finies

$$\underset{\alpha_1\,\ldots\,\alpha_p,\,\beta_1\,\ldots\,\beta_q}{\overset{p,\,q}{\wedge}}F(x)=\varphi(x). \tag{4}$$

La solution dépend de x et des α_i, k_i et β_j; nous la désignons par $F^{(p,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q)$. Lorsque $\varphi(x)=(m+q)(m+q-1)\ldots(m+1)x^m$, l'équation (4) admet comme solution un polynome de degré $(m+q)$, déterminé à un polynome de degré $(q-1)$ près; parmi ces solutions polynomiales, nous choisirons convenablement un polynome que nous désignerons par $R_{m+q}^{(p,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots \beta_q)$; ce polynome est de degré $(m+q)$; nous dirons qu'il est d'ordre (p, q).

Lorsque $\varphi(x)$ est un polynome arbitraire de degré n, la solution principale de (4) est une somme de polynomes $R_\nu^{(p,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q)$, $\nu=0, 1, \ldots, n+q$ et lorsque $\varphi(x)$ est une fonction quelconque, la solution principale de (4) s'exprime encore, moyennant une formule sommatoire, à l'aide de ces mêmes polynomes.

Dans le premier Chapitre nous définissons et étudions les principales propriétés des polynomes $R_m^{(p)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p)$; dans le deuxième Chapitre nous définissons les polynomes $R_m^{(p,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q)$ à l'aide des polynomes Bernoulli-Nörlund $B_m^{(q)}(x\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q)$ et exposons les propriétés dont nous aurons à faire usage dans la suite.

Dans le troisième Chapitre nous établissons une formule sommatoire, en considérant successivement les trois opérations $\underset{\alpha}{\overset{1}{\wedge}}$, $\underset{\alpha_1\,\ldots\,\alpha_p}{\overset{p}{\wedge}}$, $\underset{\alpha_1\,\ldots\,\alpha_p,\,\beta_1\,\ldots\,\beta_q}{\overset{p,\,q}{\wedge}}$. Cette formule sommatoire donne le développement d'une fonction arbitraire en série de polynomes $R_\nu^{(p,q)}(x)$; nous déterminons aussi le terme complémentaire de ce développement sous forme d'intégrale définie. La méthode est la même lorsqu'on substitue aux trois opérations envisagées une opération linéaire quelonque $\bigwedge$.

Le quatrième Chapitre est consacré à la démonstration de l'existence de la solution principale $F^{(p,q)}(x)$; pour la définir, on prend pour point de départ la solution formelle donnée par la méthode des approximations successives, à la quelle on applique ensuite la méthode de sommation exponentielle de M. Borel. Avant le passage à la limite, il convient de transformer la solution formelle à l'aide de la formule sommatoire établie dans le Chapitre précédent.

Dans le cinquième Chapitre nous étudions la valeur asymptotique de la solution principale, pour les grandes valeures réelles et positives de la variable; nous utilisons sa valeur asymptotique pour déduire des nouveaux développements en série de la solution principale, développements convergents à volonté. On étudie ensuite les principales propriétés de la solution principale et on calcule ses dérivées. On a le résultat important suivant: la dérivée d'ordre $(m+q)$ de la solution principale tend vers une limite finie lorsque x tend vers l'infini; c'est une propriété caractéristique de la solution principale.

CHAPITRE I.

Polynomes $R_m^{(p)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p)$.

L'équation

$$\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} F(x) = x^m,$$

où m est un entier non négatif, admet comme solution un polynome unique de degré m et qui sera dit d'ordre p et que nous désignons par $R_m^{(p)}(x \mid \alpha_1, k_1, \ldots, \alpha_p, k_p)$.[1]

1. **Polynome du premier ordre.** Désignons par $R_m^{(1)}(x \mid \alpha, k)$ ou plus simplement par $R_m(x \mid \alpha, k)$ ou encore $R_m(x)$, le polynome qui satisfait à l'équation

$$\underset{\alpha}{\overset{1}{\bigwedge}} R_m(x) = x^m, \tag{1}$$

[1] Cf. mon *Mémoire sur les polynomes* $R_m^{(p)}(x)$, Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, T. 30, 1927.

c'est-à-dire

$$k R_m(x+\alpha)+R_m(x)=(k+1)\,x^m. \tag{1 bis}$$

On déduit par dérivation

$$\frac{d R_m(x)}{dx}=m R_{m-1}(x), \ldots, \qquad \frac{d^\nu R_m(x)}{dx^\nu}=m(m-1)\cdots(m-\nu+1)R_{m-\nu}(x),$$

et si l'on applique la formule de Taylor,

$$R_m(x+h)=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{h^\nu}{\nu!}\frac{d^\nu R_m(x)}{dx^\nu}=\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu}h^\nu R_{m-\nu}(x). \tag{2}$$

En particulier, pour $h=\alpha$, compte tenu de (1 bis),

$$x^m=R_m(x)+\frac{k}{k+1}\left(\binom{m}{1}\alpha R_{m-1}(x)+\right.$$
$$\left.+\binom{m}{2}\alpha^2 R_{m-2}(x)+\cdots+\binom{m}{m}\alpha^m R_0(x)\right). \tag{3}$$

La dernière égalité est une relation de récurrence entre les polynomes $R_\nu(x)$, $\nu=0, 1, \ldots, m$. On déduit pour les premières valeurs de m,

$$R_0(x\,|\,\alpha, k)=1, \qquad R_1(x\,|\,\alpha, k)=x-\frac{k}{k+1}\alpha$$

$$R_2(x\,|\,\alpha, k)=x^2-\frac{k}{k+1}(2\alpha R_1(x)+\alpha^2)=x^2-\frac{k}{k+1}\alpha(2x+\alpha)+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 2\alpha^2,$$

ce que l'on peut écrire encore

$$R_2(x\,|\,\alpha, k)=x^2-\frac{k\alpha}{k+1}\,\frac{(x+\alpha)^2-x^2}{\alpha}+\left(\frac{k\alpha}{k+1}\right)^2\frac{(x+2\alpha)^2-2(x+\alpha)^2+x^2}{\alpha^2}$$

et si l'on utilise le symbole $\overset{1}{\underset{\alpha}{\triangle}}$,

$$R_2(x\,|\,\alpha, k)=x^2-\frac{k\alpha}{k+1}\overset{1}{\underset{\alpha}{\triangle}}x^2+\left(\frac{k\alpha}{k+1}\right)^2\overset{2}{\underset{\alpha}{\triangle}}x^2=\sum_{\nu=0}^{2}\left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^\nu\overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}x^2.$$

Je dis qu'en général

$$R_m(x\,|\,\alpha, k) = \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} x^m. \tag{4}$$

En effet, la formule (4) est vraie pour $m=0, 1, 2$; supposons-la vraie jusqu'à $(m-1)$. La relation de récurrence (3) donne

$$\begin{aligned} R_m(x\,|\,\alpha, k) &= x^m - \frac{k}{k+1}\Bigg(\binom{m}{1}\alpha \sum_{\nu=0}^{m-1}\left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} x^{m-1} + \\ &\qquad + \binom{m}{2}\sum_{\nu=0}^{m-2}\left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} x^{m-2} + \cdots + \alpha^m\Bigg) = \\ &= x^m - \frac{k}{k+1}\sum_{\nu=0}^{m-1}\left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} \Bigg(\binom{m}{1}\alpha x^{m-1} + \binom{m}{2}\alpha^2 x^{m-2} + \cdots + \alpha^m\Bigg) = \\ &= x^m - \frac{k}{k+1}\sum_{\nu=0}^{m-1}\left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}\, \alpha\, \overset{1}{\underset{\alpha}{\triangle}} x^m = x^m + \sum_{\nu=0}^{m-1}\left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\nu+1} \overset{\nu+1}{\underset{\alpha}{\triangle}} x^m = \\ &= x^m + \sum_{\mu=1}^{m}\left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\mu} \overset{\mu}{\underset{\alpha}{\triangle}} x^m = \sum_{\nu=0}^{m}\left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} x^m. \qquad \text{c. q. f. d.} \end{aligned}$$

On voit sur la formule (4) que le polynome $R_m(x\,|\,\alpha, k)$ est homogène et de degré m par rapport à x et α; il est de degré m par rapport à $\frac{k}{k+1}$.

Soit $\varphi(x)$ un polynome arbitraire de degré m et considérons le polynome

$$F(x+h) = \varphi(x+R(h)) = \varphi(x)R_0(h) + \frac{\varphi^{(1)}(x)}{1}R_1(h) + \cdots + \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!}R_m(h). \tag{5}$$

Appliquons aux deux membres l'opération $\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}}$ par rapport à la variable h,

$$\begin{aligned} \overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} F(x+h) &= \varphi(x)\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} R_0(h) + \frac{\varphi^{(1)}(x)}{1}\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} R_1(h) + \cdots + \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!}\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} R_m(h) = \\ &= \varphi(x)\,1 + \frac{\varphi^{(1)}(x)}{1}h + \cdots + \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!}h^m = \varphi(x+h). \end{aligned}$$

Comme il y a un polynome unique qui satisfait à l'équation

$$\overset{1}{\underset{\alpha}{\bigwedge}} F(x) = \varphi(x), \tag{6}$$

il résulte que la solution de (6) est le polynome $F(x)$ tel que, sous forme symbolique,

$$F(x+h) = \varphi(x + R(h)),$$

où l'on convient de remplacer, après le développement de $\varphi(x+R(h))$, l'exposant par indice, $R^\nu(h)$ par $R_\nu(h)$. En particulier, pour $\varphi(x) = x^m$, l'équation (6) devient

$$R_m(x+h) = (x + R(h))^m,$$

qui n'est autre chose que la formule (2).

Considérons de nouveau le polynome (5) et appliquons aux deux membres l'opération $\overset{1}{\underset{\alpha}{\bigwedge}}$ par rapport à la variable x,

$$\overset{1}{\underset{\alpha}{\bigwedge}} F(x+h) = R_0(h) \overset{1}{\underset{\alpha}{\bigwedge}} \varphi(x) + \frac{R_1(h)}{1} \overset{1}{\underset{\alpha}{\bigwedge}} \varphi^{(1)}(x) + \cdots + \frac{R_m(h)}{m!} \overset{1}{\underset{\alpha}{\bigwedge}} \varphi^{(m)}(x);$$

mais le premier membre est égal à $\varphi(x+h)$ et l'on obtient ainsi la formule sommatoire

$$\varphi(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h)}{\nu!} \overset{1}{\underset{\alpha}{\bigwedge}} \varphi^{(\nu)}(x), \tag{7}$$

qui donne le développement d'un polynome arbitraire $\varphi(x)$ en série de polynomes $R_\nu(h)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$.

Pour donner une application de la formule (7), considérons le polynome

$$\varphi(x) = R_{m+1}(x) - (x - \alpha) R_m(x).$$

On a

$$\overset{1}{\underset{\alpha}{\bigwedge}} \varphi(x) = \frac{\alpha}{k+1} R_m(x)$$

et (7) devient

$$R_{m+1}(x+h) - (x+h-\alpha) R_m(x+h) = \frac{\alpha}{k+1} \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} R_\nu(h) R_{m-\nu}(x).$$

Proposons-nous de calculer

$$\sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} B_\nu(h \mid \alpha) R_{m-\nu}(x \mid \alpha, k)$$

où $B_\nu(h \mid \alpha)$ est le polynome de Bernoulli; sous forme symbolique, le polynome donné s'écrit

$$\sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} (h+B)^\nu R_{m-\nu}(x \mid \alpha, k) = R_m(x+h+B \mid \alpha, k)$$

et si l'on applique l'opération $\overset{1}{\underset{\alpha}{\bigwedge}}$,

$$\overset{1}{\underset{\alpha}{\bigwedge}} R_m(x+h+B \mid \alpha, k) = (x+h+B)^m = B_m(x+h \mid \alpha).$$

D'autre part, le polynome

$$P(x+h) = B_m(x+h \mid \alpha) - \frac{m\alpha k}{k+1} R_{m-1}(x+h \mid \alpha, k)$$

satisfait à la même équation

$$\overset{1}{\underset{\alpha}{\bigwedge}} P(x+h) = B_m(x+h \mid \alpha)$$

et les deux polynomes sont identiques,

$$B_m(x+h \mid \alpha) - \frac{m\alpha k}{k+1} R_{m-1}(x+h \mid \alpha, k) = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} B_\nu(h \mid \alpha) R_{m-\nu}(x \mid \alpha, k).$$

Considérons enfin le polynome

$$\sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} E_\nu(h \mid \alpha) R_{m-\nu}(x \mid \alpha, k),$$

où $E_\nu(h \mid \alpha)$ est le polynome d'Euler; sous forme symbolique, le polynome donné s'écrit

$$\sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} \left(h + \frac{E-1}{2}\right)^\nu R_{m-\nu}(x \mid \alpha, k) = R_m\left(x+h+\frac{E-1}{2} \mid \alpha, k\right)$$

et si l'on applique l'opération $\overset{1}{\underset{\alpha}{\bigwedge}}$,

$$\overset{1}{\underset{\alpha}{\bigwedge}} R_m\left(x+h+\frac{E-1}{2} \mid \alpha, k\right) = \left(x+h+\frac{E-1}{2}\right)^m = E_m(x+h \mid \alpha).$$

Le polynome

$$P(x+h) = \frac{1+k}{1-k} E_m(x+h \mid \alpha) - \frac{2}{1-k} R_m(x+h \mid \alpha, k)$$

satisfait à la même équation

$$\bigwedge_{\alpha}^{1} P(x+h) = E_m(x+h \mid \alpha)$$

et les deux polynomes sont identiques,

$$E_m(x+h \mid \alpha) - \frac{2}{1+k} R_m(x+h \mid \alpha, k) = \frac{1-k}{1+k} \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} E_\nu(h \mid \alpha) R_{m-\nu}(x \mid \alpha, k).$$

Si l'on pose $R_\nu(0) = R_\nu$, les équations (2) et (3) deviennent en y faisant $x=0$,

$$R_m(h) = (h+R)^m, \tag{8}$$

$$R_m + \frac{k}{k+1}\left(\binom{m}{1} \alpha R_{m-1} + \binom{m}{2} \alpha^2 R_{m-2} + \cdots + \alpha^m\right) = 0, \tag{9}$$

ou encore

$$R_m + k(R+\alpha)^m = 0, \quad m>0, \quad R_0 = 1. \tag{9 bis}$$

On peut donc commencer par définir les nombres R_ν par la relation de récurrence (9) et définir ensuite le polynome $R_\nu(h)$ par l'équation (8). Pour les premières valeurs de m on a

$$R_0 = 1, \quad R_1 = -\frac{k\alpha}{k+1},$$

$$R_2 = \left(-\frac{k}{k+1} + 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)\alpha^2 = \alpha^2 \sum_{\nu=0}^{2} \left(\frac{-k}{k+1}\right)^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\nu-\mu} \binom{\nu}{\mu} \mu^2 =$$

$$= \alpha^2 \sum_{\nu=1}^{2} \left(\frac{k}{k+1}\right)^\nu \sum_{\mu=1}^{\nu} (-1)^\mu \binom{\nu}{\mu} \mu^2.$$

Je dis qu'en général

$$R_m = \alpha^m \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{-k}{k+1}\right)^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\nu-\mu} \binom{\nu}{\mu} \mu^m = \alpha^m \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{k}{k+1}\right)^\nu \sum_{\mu=1}^{\nu} (-1)^\mu \binom{\nu}{\mu} \mu^m. \tag{10}$$

Pour le montrer, on suit la même marche que celle utilisée pour établir la formule (4); on vérifie directement qu'elle est vraie pour $m=1, 2$; on suppose qu'elle est vraie pour $(m-1)$ et l'on déduit à l'aide de la formule de récurrence (9) qu'elle subsiste pour m.

Si l'on remplace en (5) les polynomes $R_\nu(h)$ par les expressions (4), on obtient

$$F(x+h) = \varphi(x) \sum_{\nu=0}^{0} \left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} 1 + \frac{\varphi^{(1)}(x)}{1} \sum_{\nu=0}^{1} \left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} h + \cdots +$$

$$+ \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!} \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} h^m = \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} \left(\varphi(x) + \frac{\varphi^{(1)}(x)}{1} h + \cdots +\right.$$

$$\left. + \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!} h^m\right) = \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} \varphi(x+h).$$

Il résulte que la solution $F(x)$ de l'équation (6) peut se mettre sous la forme remarquable

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{-k\alpha}{k+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} \varphi(x). \tag{11}$$

Considérons l'équation

$$\frac{1}{k} R_m\left(x+\alpha \mid \alpha, \frac{1}{k}\right) + R_m\left(x \mid \alpha, \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{k} + 1\right) x^m,$$

qui peut s'écrire, en changeant x en $-x$,

$$k(-1)^m R_m\left(\alpha - x - \alpha \mid \alpha, \frac{1}{k}\right) + (-1)^m R_m\left(\alpha - x \mid \alpha, \frac{1}{k}\right) = (k+1)\, x^m.$$

La dernière équation montre que le polynome $(-1)^m R_m\left(\alpha - x \mid \alpha, \frac{1}{k}\right)$ satisfait à la même équation que le polynome $R_m(x \mid \alpha, k)$, ils sont donc identiques

$$R_m(x \mid \alpha, k) = (-1)^m R_m\left(\alpha - x \mid \alpha, \frac{1}{k}\right).$$

Mais le polynome $R_m(x \mid \alpha, k)$ est homogène et de degré m par rapport à x et α,

$$R_m(x \mid \alpha, k) = R_m\left(x - \alpha \mid -\alpha, \frac{1}{k}\right). \tag{12}$$

Soit μ un entier positif et considérons le polynome

$$P(x) = \frac{1+k}{1-(-k)^{\mu}}\, \mu^m \sum_{\nu=0}^{\mu-1} (-k)^{\nu} R_m\left(\frac{x}{\mu} + \nu \frac{\alpha}{\mu} \mid \alpha, -(-k)^{\mu}\right).$$

On déduit

$$\frac{kP(x+\alpha)+P(x)}{k+1}=\frac{\mu^m}{1-(-k)^\mu}\left(R_m\left(\frac{x}{\mu}\,\middle|\,\alpha,-(-k)^\mu\right)-(-k)^\mu R_m\left(\frac{x}{\mu}+\alpha\,\middle|\,\alpha,-(-k)^\mu\right)\right)=$$

$$=\frac{\mu^m}{1-(-k)^\mu}(1-(-k)^\mu)\left(\frac{x}{\mu}\right)^m=x^m.$$

Le polynome $P(x)$ satisfait à la même équation que le polynome $R_m(x\,|\,\alpha,k)$, ils sont donc identiques et si l'on remplace dans cette identité x par μx, on obtient

$$\mu^{-m}R_m(\mu x\,|\,\alpha,k)=\frac{1+k}{1-(-k)^\mu}\sum_{\nu=0}^{\mu-1}(-k)^\nu R_m\left(x+\nu\frac{\alpha}{\mu}\,\middle|\,\alpha,-(-k)^\mu\right), \tag{13}$$

et lorsque μ est un entier positif impair

$$\mu^{-m}R_m(\mu x\,|\,\alpha,k)=\frac{1+k}{1+k^\mu}\sum_{\nu=0}^{\mu-1}(-k)^\nu R_m\left(x+\nu\frac{\alpha}{\mu}\,\middle|\,\alpha,k^\mu\right). \tag{14}$$

Si l'on remplace dans l'équation de définition

$$kR_m(x+\alpha)+R_m(x)=(k+1)\,x^m,$$

successivement x par $x+\alpha$, $x+2\alpha$, $\ldots$, $x+\mu\alpha$, on multiplie les équations obtenues par $-k$, k^2, $\ldots$, $(-k)^\mu$ et on ajoute les résultats, on obtient

$$\sum_{\nu=0}^{\mu}(-k)^\nu(x+\nu\alpha)^m=\frac{1}{k+1}\left[R_m(x)-(-k)^{\mu+1}R_m(x+\alpha+\mu\alpha)\right], \tag{14 bis}$$

relation, aux notations près, signalée par Darboux et qui, suivant les paroles de l'illustre géomètre »justifierait une étude plus détaillée de ces polynomes».[1]

2. **Polynomes d'ordre positif** p. Soit p un entier positif; par définition, le polynome $R_m^{(p)}(x\,|\,\alpha_1,k_1;\ldots;\alpha_p,k_p)$ que nous désignons aussi par $R_m^{(p)}(x)$, satisfait à l'équation

$$\mathop{\wedge}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}^{p}R_m^{(p)}(x)=x^m. \tag{15}$$

[1] Cf. pag. 310, *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3e série, t. 2, 1876.

Soit n un entier positif plus petit que p; l'équation de définition peut s'écrire encore

$$\mathop{\bigwedge}\limits_{\alpha_{n+1}\cdots\alpha_p}^{p-n} \mathop{\bigwedge}\limits_{\alpha_1\cdots\alpha_n}^{n} R_m^{(p)}(x) = x^m,$$

et comme l'équation

$$\mathop{\bigwedge}\limits_{\alpha_{n+1}\cdots\alpha_p}^{p-n} F(x) = x^m$$

admet la solution unique $R_m^{(p-n)}(x \mid \alpha_{n+1}, k_{n+1}; \ldots; \alpha_p, k_p)$, il résulte que l'on a

$$\mathop{\bigwedge}\limits_{\alpha_1\cdots\alpha_n}^{n} R_m^{(p)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p) = R_m^{(p-n)}(x \mid \alpha_{n+1}, k_{n+1}; \ldots; \alpha_p, k_p). \tag{15 bis}$$

L'équation (15) de définition est donc équivalente au système

$$\begin{aligned}
&\mathop{\bigwedge}\limits_{\alpha_1}^{1} R_m^{(1)}(x \mid \alpha_1, k_1) = x^m,\\
&\mathop{\bigwedge}\limits_{\alpha_2}^{1} R_m^{(2)}(x \mid \alpha_1, k_1; \alpha_2, k_2) = R_m^{(1)}(x \mid \alpha_1, k_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathop{\bigwedge}\limits_{\alpha_p}^{1} R_m^{(p)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p) = R_m^{(p-1)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p-1}, k_{p-1}).
\end{aligned} \tag{16}$$

On déduit par dérivation de (15)

$$\frac{d R_m^{(p)}(x)}{dx} = m R_{m-1}^{(p)}(x), \ldots, \frac{d^\nu R_m^{(p)}(x)}{dx^\nu} = m(m-1)\cdots(m-\nu+1) R_{m-\nu}^{(p)}(x),$$

et si l'on applique la formule de Taylor

$$R_m^{(p)}(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{h^\nu}{\nu!} \frac{d^\nu R_m^{(p)}(x)}{dx^\nu} = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} h^\nu R_{m-\nu}^{(p)}(x). \tag{17}$$

Pour $h = \alpha_p$, l'équation (17) devient, compte tenu de la dernière équation du système (16),

$$R_m^{(p)}(x) + \frac{k_p}{k_p+1}\left(\binom{m}{1}\alpha_p R_{m-1}^{(p)}(x) + \binom{m}{2}\alpha_p^2 R_{m-2}^{(p)}(x) + \cdots + \right.$$

$$\left. + \binom{m}{m}\alpha_p^m R_0^{(p)}(x)\right) = R_m^{(p-1)}(x), \qquad (18)$$

relation de récurrence analogue à (3).

De l'équation (11) et de la dernière équation du système (16) on déduit pour $R_m^{(p)}(x)$ la forme remarquable

$$R_m^{(p)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p) = \sum_{\nu=0}^{m}\left(\frac{-k_p\alpha_p}{k_p+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha_p}{\triangle}} R_m^{(p-1)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p-1}, k_{p-1}), \qquad (19)$$

et de proche en proche

$$R_m^{(p)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p) = \sum_{\nu_p=0}^{m} \cdots \sum_{\nu_1=0}^{m}\left(\frac{-k_p\alpha_p}{k_p+1}\right)^{\nu_p} \cdots \left(\frac{-k_1\alpha_1}{k_1+1}\right)^{\nu_1} \overset{\nu_p}{\underset{\alpha_p}{\triangle}} \cdots \overset{\nu_1}{\underset{\alpha_1}{\triangle}} x^m.$$

Mais les différences d'ordre plus grand que m de x^m sont identiquement nulles et la dernière formule devient

$$R_m^{(p)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p) = \sum \left(\frac{-k_p\alpha_p}{k_p+1}\right)^{\nu_p} \cdots \left(\frac{-k_1\alpha_1}{k_1+1}\right)^{\nu_1} \overset{\nu_p}{\underset{\alpha_p}{\triangle}} \cdots \overset{\nu_1}{\underset{\alpha_1}{\triangle}} x^m, \qquad (19 \text{ bis})$$

où le signe Σ s'étend à toutes les valeurs entières non négatives des ν_i dont la somme $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p \leq m$. Par exemple,

$$R_0^{(p)}(x) = 1, \qquad R_1^{(p)}(x) = x - \sum_{\nu=1}^{p}\frac{k_\nu\alpha_\nu}{k_\nu+1}.$$

On voit sur la formule (19 bis) que le polynome $R_m^{(p)}(x)$ est homogène et de degré m par rapport à x et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; il est symétrique par rapport aux α_ν et par rapport aux $\frac{k_\nu}{k_\nu+1}$; la formule (19) montre qu'il est de degré m par rapport à $\frac{k_p}{k_p+1}$.

Soit $\varphi(x)$ un polynome arbitraire de degré m et posons

$$F(x+h) = \varphi(x + R^{(p)}(h)) = \varphi(x) R_0^{(p)}(h) + \frac{\varphi^{(1)}(x)}{1} R_1^{(p)}(h) + \cdots + \\ + \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!} R_m^{(p)}(h). \tag{20}$$

Appliquons aux deux membres l'opération $\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}}$ par rapport à la variable h,

$$\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} F(x+h) = \varphi(x)\, 1 + \frac{\varphi^{(1)}(x)}{1} h + \cdots + \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!} h^m = \varphi(x+h).$$

Mais il existe un polynome unique $F(x)$ qui satisfait à l'équation

$$\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} F(x) = \varphi(x),$$

d'où il résulte que la solution de la dernière équation est le polynome $F(x)$ donné par (20). En particulier pour $\varphi(x) = x^m$, on a

$$R_m^{(p)}(x+h) = (x + R^{(p)}(h))^m,$$

qui est, sous forme symbolique, la formule (17). Si l'on applique maintenant l'opération $\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}}$ aux deux membres de (20) par rapport à la variable x, on a

$$\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} F(x+h) = R_0^{(p)}(h) \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} \varphi(x) + \frac{R_1^{(p)}(h)}{1!} \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} \varphi^{(1)}(x) + \cdots + \frac{R_m^{(p)}(h)}{m!} \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} \varphi^{(m)}(x).$$

Mais le premier membre est égal à $\varphi(x+h)$ et nous obtenons la formule sommatoire

$$\varphi(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!} \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} \varphi^{(\nu)}(x), \tag{21}$$

qui donne le développement d'un polynome arbitraire $\varphi(x+h)$, de degré m, en série de polynomes $R_\nu^{(p)}(h)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$. En changeant un peu les notations, (21) s'écrit encore

$$F(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{\overset{n}{\bigwedge}} F^{(\nu)}(x),$$

et si l'on pose $F(x) = R_m^{(p)}(x)$, $p > n$, compte tenu de l'équation (15 bis), on obtient

$$R_m^{(p)}(x+h\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p) = \sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu} R_\nu^{(n)}(h\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_n,\,k_n)\,.$$

$$.\, R_{m-\nu}^{(p-n)}(x\,|\,\alpha_{n+1},\,k_{n+1};\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p), \tag{22}$$

ou sous forme symbolique

$$R_m^{(p)}(x+h) = (R^{(n)}(h) + R^{(p-n)}(x))^m,$$

$$R_m^{(p)}(x+h) = R_m^{(p)}(h + R^{(p-n)}(x)),$$

relation qui montre que les polynomes $R_m^{(p)}(x)$ sont des polynomes d'interpolation.[1]

On déduit la relation plus générale

$$R_m^{(p)}(x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu) = (R^{(p_1)}(x_1) + R^{(p_2)}(x_2) + \cdots + R^{(p_\nu)}(x_\nu))^m,$$

où les entiers non négatifs p_i ont une somme

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_\nu = p.$$

En particulier pour $n = 1$,

$$R_m^{(p)}(x+h\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p) = \sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu} R_\nu^{(1)}(h\,|\,\alpha_1,\,k_1)\, R_{m-\nu}^{(p-1)}(x\,|\,\alpha_2,\,k_2;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p).$$

Si l'on pose $R_\nu^{(p)}(0\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p) = R_\nu^{(p)}(\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p)$ et l'on fait en (17) et (18) $x = 0$, on obtient

$$R_m^{(p)}(h) = (h + R^{(p)})^m, \tag{23}$$

$$R_m^{(p)} + \frac{k_p}{k_p + 1}\left(\binom{m}{1}\alpha_p R_{m-1}^{(p)} + \binom{m}{2}\alpha_p^2 R_{m-2}^{(p)} + \cdots + \binom{m}{m}\alpha_p^m R_0^{(p)}\right) = R_m^{(p-1)},$$

ou sous forme symbolique,

$$k_p(R^{(p)} + \alpha_p)^m + R_m^{(p)} = (k_p + 1)\, R_m^{(p-1)}. \tag{24}$$

On peut donc définir le polynome $R_m^{(p)}(h)$ par l'équation (23), après avoir déterminés les nombres $R_\nu^{(p)}$ par la relation de récurrence (24).

---

[1] Cf. René Lagrange, *Mémoire sur les suites de polynomes*, Acta mathematica, T. 51, 1928, pag. 201—309.

3. **Théorèmes de multiplication de l'argument.** Considérons l'équation

$$\frac{1}{k_1} R_m^{(p)}\left(x + \alpha_1 \,|\, \alpha_1, \frac{1}{k_1};\ \alpha_2, k_2;\ \ldots;\ \alpha_p, k_p\right) + R_m^{(p)}\left(x \,|\, \alpha_1, \frac{1}{k_1};\ \alpha_2, k_2;\ \ldots;\ \alpha_p, k_p\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{k_1} + 1\right) R_m^{(p-1)}(x \,|\, \alpha_2, k_2;\ \ldots;\ \alpha_p, k_p);$$

multiplions les deux membres par k_1 et changeons x en $-x$,

$$k_1 R_m^{(p)}\left(\alpha_1 - x - \alpha_1 \,|\, \alpha_1, \frac{1}{k_1};\ \alpha_2, k_2;\ \ldots;\ \alpha_p, k_p\right) + R_m^{(p)}\left(\alpha_1 - x \,|\, \alpha_1, \frac{1}{k_1};\ \alpha_2, k_2;\ \ldots;\ \alpha_p, k_p\right) =$$

$$= (k_1 + 1) R_m^{(p-1)}(-x \,|\, \alpha_2, k_2;\ \ldots;\ \alpha_p, k_p).$$

Mais le polynome au second membre est homogène et de degré m par rapport à x et $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et l'équation s'écrit encore

$$k_1 (-1)^m R_m^{(p)}\left(\alpha_1 - x - \alpha_1 \,|\, \alpha_1, \frac{1}{k_1};\ \alpha_2, k_2;\ \ldots;\ \alpha_p, k_p\right) +$$

$$+ (-1)^m R_m^{(p)}\left(\alpha_1 - x \,|\, \alpha_1, \frac{1}{k_1};\ \alpha_2, k_2;\ \ldots;\ \alpha_p, k_p\right) =$$

$$= (k_1 + 1) R_m^{(p-1)}(x \,|\, -\alpha_2, k_2;\ \ldots;\ -\alpha_p, k_p),$$

d'où l'on déduit l'identité

$$(-1)^m R_m^{(p)}\left(\alpha_1 - x \,|\, \alpha_1, \frac{1}{k_1};\ \alpha_2, k_2;\ \ldots;\ \alpha_p, k_p\right) =$$

$$= R_m^{(p)}(x \,|\, \alpha_1, k_1;\ -\alpha_2, k_2;\ \ldots;\ -\alpha_p, k_p),$$

car les deux polynomes satisfont à la même équation. On change x en $-x$, α_1 en $-\alpha_1$ et compte tenu de l'homogénéité de $R_m^{(p)}(x)$,

$$R_m^{(p)}\left(x - \alpha_1 \,|\, -\alpha_1, \frac{1}{k_1};\ \alpha_2, k_2;\ \ldots;\ \alpha_p, k_p\right) = R_m^{(p)}(x \,|\, \alpha_1, k_1;\ \ldots;\ \alpha_p, k_p). \tag{25}$$

Mais le polynome $R_m^{(p)}(x)$ est symétrique par rapport aux p couples de lettres $(\alpha_1, k_1), \ldots, (\alpha_p, k_p)$, donc

$$R_m^{(p)}\left(x - \alpha_1 - \alpha_2 \,|\, -\alpha_1, \frac{1}{k_1};\ -\alpha_2, \frac{1}{k_2};\ \alpha_3, k_3;\ \ldots;\ \alpha_p, k_p\right) = R_m^{(p)}(x \,|\, \alpha_1, k_1;\ \ldots;\ \alpha_p, k_p),$$

et si n est un entier plus petit que p,

$$R_m^{(p)}\left(x-\alpha_1-\cdots-\alpha_n \,|\, -\alpha_1, \frac{1}{k_1}; \ldots; -\alpha_n, \frac{1}{k_n}; \alpha_{n+1}, k_{n+1}; \ldots; \alpha_p, k_p\right) =$$
$$= R_m^{(p)}(x \,|\, \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p).$$

En particulier pour $n=p$, compte tenu de l'homogénéité de $R_m^{(p)}(x)$,

$$R_m^{(p)}\left(\alpha_1+\cdots+\alpha_p-x \,|\, \alpha_1, \frac{1}{k_1}; \ldots; \alpha_p, \frac{1}{k_p}\right) = (-1)^m R_m^{(p)}\left(x \,|\, \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\right). \quad (26)$$

Si l'on pose $x = \frac{1}{2}(\alpha_1+\cdots+\alpha_p)$ et ensuite $x=0$, on obtient

$$R_m^{(p)}\left(\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_p}{2} \,|\, \alpha_1, \frac{1}{k_1}; \ldots; \alpha_p, \frac{1}{k_p}\right) = (-1)^m R_m^{(p)}\left(\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_p}{2} \,|\, \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\right).$$

$$R_m^{(p)}\left(\alpha_1+\cdots+\alpha_p \,|\, \alpha_1, \frac{1}{k_1}; \ldots; \alpha_p, \frac{1}{k_p}\right) = (-1)^m R_m^{(p)}(\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p).$$

Soit μ un entier positif et considérons le polynome

$$P(x) = \frac{1+k_1}{1-(-k_1)^\mu} \mu^m \sum_{\nu=0}^{\mu-1} (-k_1)^\nu R_m^{(p)}\left(\frac{x+\nu\alpha_1}{\mu} \,|\, \alpha_1, -(-k_1)^\mu; \alpha_2, k_2; \ldots; \alpha_p, k_p\right).$$

On déduit d'abord

$$\frac{k_1 P(x+\alpha_1) + P(x)}{k_1+1} = R_m^{(p-1)}(x \,|\, \mu\alpha_2, k_2; \ldots; \mu\alpha_p, k_p),$$

et ensuite, l'identité

$$P(x) = R_m^{(p)}(x \,|\, \alpha_1, k_1; \mu\alpha_2, k_2; \ldots; \mu\alpha_p, k_p)$$

car les deux polynomes satisfont à la même équation; si l'on remplace x par μx, on a

$$\sum_{\nu=0}^{\mu-1} (-k_1)^\nu R_m^{(p)}\left(x+\nu\frac{\alpha_1}{\mu} \,|\, \alpha_1, -(-k_1)^\mu; \alpha_2, k_2; \ldots; \alpha_p, k_p\right) =$$
$$= \frac{1-(-k_1)^\mu}{1+k_1} R_m^{(p)}\left(x \,|\, \frac{\alpha_1}{\mu}, k_1; \alpha_2, k_2; \ldots; \alpha_p, k_p\right). \quad (27)$$

Soit n un entier positif plus petit que p et soient $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des entiers positifs quelconques; on déduit de (27), par symétrie,

$$\sum_{\nu_1=0}^{\mu_1-1} \cdots \sum_{\nu_n=0}^{\mu_n-1} (-k_1)^{\nu_1} \cdots (-k_n)^{\nu_n} R_m^{(p)}\Big(x + \nu_1 \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \cdots + \nu_n \frac{\alpha_n}{\mu_n} \,|\, \alpha_1, -(-k_1)^{\mu_1}; \ldots;$$
$$\alpha_n, -(-k_n)^{\mu_n}; \alpha_{n+1}, k_{n+1}; \ldots; \alpha_p, k_p\Big) =$$
$$= \frac{1-(-k_1)^{\mu_1}}{1+k_1} \cdots \frac{1-(-k_n)^{\mu_n}}{1+k_n} R_m^{(p)}\Big(x \,|\, \frac{\alpha_1}{\mu_1}, k_1; \ldots; \frac{\alpha_n}{\mu_n}, k_n;$$
$$\alpha_{n+1}, k_{n+1}; \ldots; \alpha_p, k_p\Big). \tag{28}$$

En (28) on a la formule de multiplication pour le polynome $R_m^{(p)}(x)$; lorsque les entiers μ_i sont impairs, (28) prend une forme plus simple déduit de (28) en remplaçant $-(-k_i)^{\mu_i}$ par $k_i^{\mu_i}$. Dans le cas particulier $n=p$ et $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_p=\mu$ où μ est impair, (28) devient

$$\sum_{\nu_1=0}^{\mu-1} \cdots \sum_{\nu_p=0}^{\mu-1} (-k_1)^{\nu_1} \cdots (-k_p)^{\nu_p} R_m^{(p)}\Big(x + \frac{\nu_1\alpha_1 + \cdots + \nu_p\alpha_p}{\mu} \,|\, \alpha_1, k_1^{\mu}; \ldots; \alpha_p, k_p^{\mu}\Big) =$$
$$= \mu^{-m} \frac{1+k_1^{\mu}}{1+k_1} \cdots \frac{1+k_p^{\mu}}{1+k_p} R_m^{(p)}(\mu x \,|\, \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p). \tag{29}$$

4. **Polynomes d'ordre négatif** $-p$. Posons, par définition,

$$R_m^{(0)}(x) = x^m.$$

Nous avons défini le polynome d'ordre positif p par l'équation

$$\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\wedge}} R_m^{(p)}(x) = x^m, \tag{15}$$

et nous convenons d'exprimer la dépendance entre les polynomes x^m et $R_m^{(p)}(x)$ aussi par l'équation

$$R_m^{(p)}(x) = \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{-p}{\wedge}} x^m. \tag{15 ter}$$

L'équation (15) exprime que le polynome x^m est le résultat de l'opération *directe* $\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\wedge}}$ appliquée au polynome $R_m^{(p)}(x)$, tandisque l'équation (15 ter) exprime que le polynome $R_m^{(p)}(x)$ est le résultat de l'opération *inverse* $\overset{-p}{\underset{\alpha_1 \dots \alpha_p}{\bigwedge}}$ appliquée au polynome x^m; au fond, l'équation (15 ter) n'est qu'une forme symbolique de l'équation (15) et elle pourrait servir à *définir* l'opération inverse $\overset{-p}{\underset{\alpha_1 \dots \alpha_p}{\bigwedge}}$.

En changeant dans la dernière équation p en $-p$, nous sommes tout naturellement conduits à définir le polynome d'ordre négatif $-p$, par l'équation

$$R_m^{(-p)}(x \mid \alpha_1, k_1; \dots; \alpha_p, k_p) = \overset{p}{\underset{\alpha_1 \dots \alpha_p}{\bigwedge}} x^m, \tag{30}$$

qui exprime que le polynome $R_m^{(-p)}(x)$ est le résultat de l'opération directe $\overset{p}{\underset{\alpha_1 \dots \alpha_p}{\bigwedge}}$ appliquée au polynome x^m. Le polynome $R_m^{(-p)}(x)$ est évidemment la solution polynomiale unique de l'équation (30); il est de degré m; homogène et de degré m par rapport à x et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$; symétrique par rapport aux p couples de lettres $(\alpha_1, k_1), \dots, (\alpha_p, k_p)$.

Appliquons aux deux membres de (30) l'opération $\overset{1}{\underset{\alpha_{p+1}}{\bigwedge}}$,

$$\overset{1}{\underset{\alpha_{p+1}}{\bigwedge}} R_m^{(-p)}(x \mid \alpha_1, k_1; \dots; \alpha_p, k_p) = \overset{p+1}{\underset{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}}{\bigwedge}} x^m = R_m^{(-p-1)}(x \mid \alpha_1, k_1; \dots; \alpha_{p+1}, k_{p+1}),$$

et si l'on répète l'opération

$$\overset{n}{\underset{\alpha_{p+1} \dots \alpha_{p+n}}{\bigwedge}} R_m^{(-p)}(x \mid \alpha_1, k_1; \dots; \alpha_p, k_p) = R_m^{(-p-n)}(x \mid \alpha_1, k_1; \dots; \alpha_{p+n}, k_{p+n})$$

d'où il résulte que l'équation

$$\overset{n}{\underset{\alpha_1 \dots \alpha_n}{\bigwedge}} R_m^{(p)}(x \mid \alpha_1, k_1; \dots; \alpha_p, k_p) = R_m^{(p-n)}(x \mid \alpha_{n+1}, k_{n+1}; \dots; \alpha_p, k_p)$$

établie pour $n < p$, subsiste pour $n \geq p$ et prend, dans ce cas, la forme

$$\overset{n}{\underset{\alpha_1 \dots \alpha_n}{\bigwedge}} R_m^{(p)}(x \mid \alpha_1, k_1; \dots; \alpha_p, k_p) = \overset{n-p}{\underset{\alpha_{p+1} \dots \alpha_n}{\bigwedge}} \quad \overset{p}{\underset{\alpha_1 \dots \alpha_p}{\bigwedge}} R_m^{(p)}(x \mid \alpha_1, k_1; \dots; \alpha_p, k_p) =$$

$$= \overset{n-p}{\underset{\alpha_{p+1} \dots \alpha_n}{\bigwedge}} x^m = R_m^{(p-n)}(x \mid \alpha_{p+1}, k_{p+1}; \dots; \alpha_n, k_n).$$

En particulier, l'équation de définition (30) peut être remplacée par le système équivalent

$$
\begin{aligned}
R_m^{(-1)}(x \mid \alpha_1, k_1) &= \underset{\alpha_1}{\overset{1}{\bigwedge}} x^m, \\
R_m^{(-2)}(x \mid \alpha_1, k_1; \alpha_2, k_2) &= \underset{\alpha_2}{\overset{1}{\bigwedge}} R_m^{(-1)}(x \mid \alpha_1, k_1) \qquad (31) \\
&\dots\dots\dots \\
R_m^{(-p-1)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p+1}, k_{p+1}) &= \underset{\alpha_{p+1}}{\overset{1}{\bigwedge}} R_m^{(-p)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p).
\end{aligned}
$$

Reprenons l'équation (22) en modifiant un peu les notations, n et p étant deux entiers positifs

$$
R_m^{(n+p)}(x+h \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p+n}, k_{p+n}) = \\
= \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} R_\nu^{(p)}(h \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p)\, R_{m-\nu}^{(n)}(x \mid \alpha_{p+1}, k_{p+1}; \ldots; \alpha_{p+n}, k_{p+n}) \qquad (22 \text{ bis})
$$

et appliquons aux deux membres l'opération $\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p, \alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{2p}{\bigwedge}}$ par rapport à la variable h,

$$
R_m^{(-p+n)}(x+h \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p+n}, k_{p+n}) = \\
= \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} R_\nu^{(-p)}(h \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p)\, R_{m-\nu}^{(n)}(x \mid \alpha_{p+1}, k_{p+1}; \ldots; \alpha_{p+n}, k_{p+n}), \qquad (32)
$$

et si l'on applique aux deux membres de (32) l'opération $\underset{\alpha_{p+1} \ldots \alpha_{p+n}, \alpha_{p+1} \ldots \alpha_{p+n}}{\overset{2n}{\bigwedge}}$ par rapport à la variable x,

$$
R_m^{(-p-n)}(x+h \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p+n}, k_{p+n}) = \\
= \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} R_\nu^{(-p)}(h \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p)\, R_{m-\nu}^{(-n)}(x \mid \alpha_{p+1}, k_{p+1}; \ldots; \alpha_{p+n}, k_{p+n}). \qquad (33)
$$

Les formules (22 bis), (32) et (33) montrent que sous forme symbolique, l'équation

$$
R_m^{(p+n)}(x+h \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p+n}, k_{p+n}) = \\
= [R^{(p)}(h \mid \alpha_1; k_1, \ldots; \alpha_p, k_p) + R^{(n)}(x \mid \alpha_{p+1}; k_{p+1}; \ldots; \alpha_{p+n}, k_{p+n})]^m
$$

est vraie pour les valeurs *entières* de n et p, *positives* ou *négatives*.

Signalons quelques cas particuliers; faisons en (32) $n=0$,

$$R_m^{(-p)}(x+h\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p)=\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu}h^{m-\nu}R_\nu^{(-p)}(x\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p), \tag{34}$$

ou sous forme symbolique

$$R_m^{(-p)}(x+h\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p)=[h+R^{(-p)}(x\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p)]^m.$$

Faisons en (32) $n=p$, $\alpha_{p+1}=\alpha_1$, $k_{p+1}=k_1$, $\ldots$, $\alpha_{2p}=\alpha_p$, $k_{2p}=k_p$,

$$(x+h)^m=\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu}R_\nu^{(-p)}(h\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p)\,R_{m-\nu}^{(p)}(x\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p), \tag{35}$$

qui pour $h=0$ devient, en posant

$$R_\nu^{(-p)}(0\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p)=R_\nu^{(-p)}(\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p),$$

$$x^m=\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu}R_{m-\nu}^{(-p)}(\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p)\,R_\nu^{(p)}(x\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p), \tag{36}$$

qui est une relation de récurrence entre les polynomes $R_\nu^{(p)}(x)$ du même ordre positif p.

Si l'on pose $x=0$ et remplace h par x dans l'équation (35), on aura

$$x^m=\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu}R_{m-\nu}^{(p)}(\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p)\,R_\nu^{(-p)}(x\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p), \tag{37}$$

qui est une relation de récurrence entre les polynomes $R_\nu^{(-p)}(x)$, du même ordre négatif $-p$.

Les deux dernières équations montrent que le polynome $R_m^{(p)}(x|\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p)$ s'exprime à l'aide de x et des nombres $R_\nu^{(-p)}(\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p)$ exactement de la même manière que le polynome $R_m^{(-p)}(x\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p)$ s'exprime à l'aide de x et des nombres $R_\nu^{(p)}(\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p)$.

L'équation (34) montre que le polynome $R_m^{(-p)}(x)$ s'exprime à l'aide des nombres $R_\nu^{(-p)}$ de la même manière que le polynome $R_m^{(p)}(x)$ à l'aide des nombres $R_\nu^{(p)}$.

Pour $x=0$, (36) ou (37) devient une relation de récurrence entre les nombres $R_\nu^{(p)}$ et $R_\mu^{(-p)}$,

$$\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu} R_{m-\nu}^{(p)}(\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p)\, R_\nu^{(-p)}(\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p) = \begin{cases} 1, & m=0, \\ 0, & m>0. \end{cases} \tag{37 bis}$$

Si l'on tient compte des relations

$$\frac{d^\nu R_m^{(p)}(x)}{d x^\nu} = m(m-1)\ldots(m-\nu+1)\, R_{m-\nu}^{(p)}(x),$$

$$\frac{d^\nu R_m^{(-p)}(x)}{d x^\nu} = m(m-1)\ldots(m-\nu+1)\, R_{m-\nu}^{(-p)}(x),$$

les équations (36) et (37) deviennent

$$\sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(-p)}}{\nu!}\frac{d^\nu R_m^{(p)}(x)}{d x^\nu} = x^m, \qquad \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}}{\nu!}\frac{d^\nu R_m^{(-p)}(x)}{d x^\nu} = x^m,$$

relations qui montrent que le polynome $R_m^{(p)}(x)$, d'ordre positif ou négatif, est la solution rationnelle *unique* d'une équation différentielle à coefficients constants.

Si l'on applique l'opération $\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}}$ aux deux membres de (19 bis), on trouve que le polynome d'ordre négatif $(-p)$ satisfait à l'équation

$$x^m = \sum \left(\frac{-k_p \alpha_p}{k_p+1}\right)^{\alpha_p} \cdots \left(\frac{-k_1 \alpha_1}{k_1+1}\right)^{\alpha_1} \overset{\nu_p}{\underset{\alpha_p}{\triangle}} \cdots \overset{\nu_1}{\underset{\alpha_1}{\triangle}} R_m^{(-p)}(x \mid \alpha_1, k_1, \ldots, \alpha_p, k_p),$$

où le signe Σ s'étend aux valeurs entières non négatives des ν_i dont la somme

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p \leq m.$$

5. **Fonctions génératrices.** Soit $f(x)$ une fonction analytique holomorphe dans le voisinage de l'origine

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$$

et appliquons aux deux membres l'opération $\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}}$,

$$\bigwedge_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{p} f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} R_\nu^{(-p)}(x|\alpha_1, k_1, \ldots \alpha_p, k_p), \tag{38}$$

développement valable pour les valeurs suffisamment petites de x et des α_i. Nous avons en (38) la moyenne d'ordre p d'une fonction $f(x)$, exprimée à l'aide de ses dérivées. Dans le cas particulier $f(x) = e^{tx}$, (38) devient

$$\frac{k_1 e^{t\alpha_1} + 1}{k_1 + 1} \cdots \frac{k_p e^{t\alpha_p} + 1}{k_p + 1} e^{tx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(-p)}(x|\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p), \tag{39}$$

série convergente pour toutes les valeurs de x et t.

Nous avons au premier membre la fonction génératrice des polynomes $R_\nu^{(-p)}(x)$ d'ordre négatif $-p$. En particulier pour $x=0$, on obtient la fonction génératrice des nombres $R_\nu^{(-p)}$

$$\frac{k_1 e^{t\alpha_1} + 1}{k_1 + 1} \cdots \frac{k_p e^{t\alpha_p} + 1}{k_p + 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(-p)}(\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p). \tag{39 bis}$$

Je dis que la fonction génératrice des nombres $R_\nu^{(p)}$ est la réciproque de (39 bis), c'est-à-dire

$$\frac{k_1 + 1}{k_1 e^{t\alpha_1} + 1} \cdots \frac{k_p + 1}{k_p e^{t\alpha_p} + 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p)}(\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p), \tag{40 bis}$$

série convergente pour t suffisamment petit. En effet, multiplions les deux dernières équations

$$1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} R_\mu^{(-p)} R_{\nu-\mu}^{(p)}.$$

Compte tenu de (37 bis), le coefficient de $\frac{t^\nu}{\nu!}$ est égal à zéro pour $\nu > 1$, égal à l'unité pour $\nu=0$ et la formule (40 bis) est établie.

Si l'on multiplie (40 bis) par l'équation

$$e^{tx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} x^\nu,$$

on obtient au premier membre la fonction génératrice des polynomes $R_\nu^{(p)}(x)$ d'ordre positif p,

$$\frac{k_1+1}{k_1 e^{t\alpha_1}+1}\cdots\frac{k_p+1}{k_p e^{t\alpha_p}+1}e^{tx}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}x^\mu R^{(p)}_{\nu-\mu}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R^{(p)}_\nu(x\,|\,\alpha_1,k_1;\ldots;\alpha_p,k_p). \qquad (40)$$

On peut arriver plus directement à l'équation (40) en développant le premier membre, qui est une fonction holomorphe autour de l'origine, en série entière par rapport à la variable t,

$$\frac{k_1+1}{k_1 e^{t\alpha_1}+1}\cdots\frac{k_p+1}{k_p e^{t\alpha_p}+1}e^{tx}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}P_\nu(x).$$

On applique aux deux membres l'opération $\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p}{\overset{p}{\wedge}}$ par rapport à la variable x,

$$e^{tx}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p}{\overset{p}{\wedge}}P_\nu(x)$$

d'où l'on déduit par identification avec le développement en série entière de e^{tx},

$$\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p}{\overset{p}{\wedge}}P_\nu(x)=x^\nu, \qquad P_\nu(x)\equiv R^{(p)}_\nu(x\,|\,\alpha_1,k_1;\ldots;\alpha_p,k_p).$$

6. **Cas particulier.** Supposons $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p=\alpha$, $k_1=k_2=\cdots=k_p=k$ et désignons par $R^{(p)}_m(x\,|\,\alpha,k)$ et $R^{(-p)}_m(x\,|\,\alpha,k)$ les polynomes d'ordre positif p ou négatif $-p$, dans ce cas particulier. Les fonctions génératrices (39) et (40) deviennent

$$\left(\frac{k e^{t\alpha}+1}{k+1}\right)^p e^{tx}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R^{(-p)}_\nu(x\,|\,\alpha,k) \qquad (41)$$

$$\left(\frac{k+1}{k e^{t\alpha}+1}\right)^p e^{tx}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R^{(p)}_\nu(x\,|\,\alpha,k). \qquad (42)$$

Dérivons (42) par rapport à t

$$x\left(\frac{k+1}{k e^{t\alpha}+1}\right)^p e^{tx}-\frac{p\,\alpha\,k}{k+1}\left(\frac{k+1}{k e^{t\alpha}+1}\right)^{p+1}e^{t(x+\alpha)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R^{(p)}_{\nu+1}(x),$$

$$x\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R_\nu^{(p)}(x)-\frac{p\alpha k}{k+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R_\nu^{(p+1)}(x+\alpha)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R_{\nu+1}^{(p)}(x),$$

d'où l'on déduit par identification

$$x R_\nu^{(p)}(x)-\frac{p\alpha k}{k+1}R_\nu^{(p+1)}(x+\alpha)=R_{\nu+1}^{(p)}(x),$$

ou encore, compte tenu de

$$k R_\nu^{(p+1)}(x+\alpha)+R_\nu^{(p+1)}(x)=(k+1)R_\nu^{(p)}(x),$$

$$R_\nu^{(p+1)}(x)=\frac{k+1}{p\alpha}\left[R_{\nu+1}^{(p)}(x)-(x-p\alpha)R_\nu^{(p)}(x)\right]. \tag{43}$$

Pour $p=1$ et $p=2$ on a

$$R_\nu^{(2)}(x)=\frac{k+1}{\alpha}\left[R_{\nu+1}^{(1)}(x)-(x-\alpha)R_\nu^{(1)}(x)\right]=\frac{k+1}{\alpha}\sum_{s=0}^{1}\frac{(-1)^{1-s}}{s!}R_{\nu+s}^{(1)}(x)D_x^s(x-\alpha),$$

$$\begin{aligned}R_\nu^{(3)}(x)&=\frac{k+1}{2\alpha}\left[R_{\nu+1}^{(2)}(x)-(x-2\alpha)R_\nu^{(2)}(x)\right]=\\&=\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^2\frac{1}{2!}\left[R_{\nu+2}^{(1)}(x)-(2x-3\alpha)R_{\nu+1}^{(1)}(x)+(x-\alpha)(x-2\alpha)R_\nu^{(1)}(x)\right]=\\&=\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^2\frac{1}{2!}\sum_{s=0}^{2}\frac{(-1)^{2-s}}{s!}R_{\nu+s}^{(1)}(x)D_x^s(x-\alpha)(x-2\alpha).\end{aligned}$$

Je dis qu'en général,

$$R_\nu^{(p+1)}(x)=\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^p\frac{1}{p!}\sum_{s=0}^{p}\frac{(-1)^{p-s}}{s!}R_{\nu+s}^{(1)}(x)D_x^s(x-\alpha)\cdots(x-p\alpha). \tag{44}$$

En effet, (44) est vraie pour $p=1$ et $p=2$; supposons-la vraie jusqu'à $(p-1)$; (43) donne

$$R_\nu^{(p+1)}(x)=\frac{k+1}{p\alpha}\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^{p-1}\frac{1}{(p-1)!}\sum_{s=0}^{p-1}\frac{(-1)^{p-1-s}}{s!}\cdot$$

$$\cdot\left[R_{\nu+1+s}^{(1)}(x)-(x-p\alpha)R_{\nu+s}^{(1)}(x)\right]D_x^s(x-\alpha)\cdots(x-p\alpha+\alpha),$$

et si l'on groupe les termes

$$R_\nu^{(p+1)}(x) = \left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^p \frac{1}{p!} \sum_{s=0}^{p} \frac{(-1)^{p-s}}{s!} R_{\nu+s}^{(1)}(x) \,.$$
$$.\,[(x-p\,\alpha)\,D_x^s\,(x-\alpha)\cdots(x-p\,\alpha+\alpha)+s\,D_x^{s-1}\,(x-\alpha)\cdots(x-p\,\alpha+\alpha)]$$

et compte tenu de la formule de Leibniz

$$R_\nu^{(p+1)}(x) = \left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^p \frac{1}{p!} \sum_{s=0}^{p} \frac{(-1)^{p-s}}{s!} R_{\nu+s}^{(s)}(x)\, D_x^s\,(x-\alpha)\cdots(x-p\,\alpha). \quad \text{c. q. f. d.}$$

La formule (44) montre que le polynome $R_\nu^{(p+1)}(x)$ est une somme linéaire de polynomes du premier ordre $R_{\nu+s}^{(1)}(x)$, $s=0, 1, \ldots, p$.

Une autre expression remarquable de $R_m^{(p+1)}(x)$ se déduit de (19),

$$R_m^{(p+1)}(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{-k\,\alpha}{k+1}\right)^\nu \binom{\nu+p}{p} \mathop{\triangle}_{\alpha}^{\nu} x^m. \tag{45}$$

En effet, (45) est vraie pour $p=0$, car elle se réduit à (4); en la supposant vraie pour p, la formule (19) donne

$$R_m^{(p+2)}(x) = \sum_{r=0}^{m} \left(\frac{-k\,\alpha}{k+1}\right)^r \mathop{\triangle}_{\alpha}^{r} \sum_{s=0}^{m} \left(\frac{-k\,\alpha}{k+1}\right)^s \binom{s+p}{p} \mathop{\triangle}_{\alpha}^{s} x^m =$$
$$= \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} \left(\frac{-k\,\alpha}{k+1}\right)^{r+s} \binom{s+p}{p} \mathop{\triangle}_{\alpha}^{r+s} x^m,$$

et si l'on pose $r+s=\nu$, le coefficient de $\left(\frac{-k\,\alpha}{k+1}\right)^\nu$ est

$$\sum_{s=0}^{\nu} \binom{s+p}{p} = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{s+p}{s} = \binom{\nu+p+1}{\nu} = \binom{\nu+p+1}{p+1},$$

$$R_m^{(p+2)}(x) = \sum_{s=0}^{m} \left(\frac{-k\,\alpha}{k+1}\right)^\nu \binom{\nu+p+1}{p+1} \mathop{\triangle}_{\alpha}^{\nu} x^m. \quad \text{c. q. f. d.}$$

Dérivons maintenant la fonction génératrice (41) des polynomes d'ordre négatif,

$$x\left(\frac{k\,e^{t\alpha}+1}{k+1}\right)^p e^{tx} + p\left(\frac{k\,e^{t\alpha}+1}{k+1}\right)^{p-1} \frac{k\alpha}{k+1}\, e^{t(x+\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_{\nu+1}^{(-p)}(x),$$

$$x\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R_\nu^{(-p)}(x)+\frac{p\alpha k}{k+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R_\nu^{(-p+1)}(x+\alpha)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R_{\nu+1}^{(-p)}(x),$$

$$x\,R_\nu^{(-p)}(x)+\frac{p\alpha k}{k+1}R_\nu^{(-p+1)}(x+\alpha)=R_{\nu+1}^{(-p)}(x).$$

D'autre part, la dernière équation du système (31) peut s'écrire encore

$$k\,R_\nu^{(-p+1)}(x+\alpha)+R_\nu^{(-p+1)}(x)=(k+1)\,R_\nu^{(-p)}(x)$$

et si l'on élimine $R_\nu^{(-p+1)}(x+\alpha)$ entre les deux dernières équations

$$R_\nu^{(-p+1)}(x)=\frac{k+1}{-p\alpha}\left[R_{\nu+1}^{(-p)}(x)-(x+p\alpha)\,R_\nu^{(-p)}(x)\right]. \tag{46}$$

La formule (46) se déduit de (43) par le changement de p en $-p$. Pour $p=1$ et $p=2$, on a

$$R_\nu^{(0)}(x)=\frac{k+1}{-\alpha}\left[R_{\nu+1}^{(-1)}(x)-(x+\alpha)\,R_\nu^{(-1)}(x)\right],$$

$$R_\nu^{(-1)}(x)=\frac{k+1}{-2\alpha}\left[R_{\nu+1}^{(-2)}(x)-(x+2\alpha)\,R_\nu^{(-2)}(x)\right]$$

et si l'on élimine $R_\nu^{(-1)}(x)$ et $R_{\nu+1}^{(-1)}(x)$,

$$x^\nu=\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^2\frac{1}{2!}\left[R_{\nu+2}^{(-2)}(x)-(2x+3\alpha)\,R_{\nu+1}^{(-2)}(x)+(x+\alpha)(x+2\alpha)\,R_\nu^{(-2)}(x)\right],$$

$$x^\nu=\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^2\frac{1}{2!}\sum_{s=0}^{2}\frac{(-1)^s}{s!}R_{\nu+s}^{(-2)}(x)\,D_x^s(x+\alpha)(x+2\alpha).$$

Je dis qu'en général

$$x^\nu=\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^p\frac{1}{p!}\sum_{s=0}^{p}\frac{(-1)^s}{s!}R_{\nu+s}^{(-p)}(x)\,D_x^s(x+\alpha)\cdots(x+p\alpha). \tag{47}$$

La formule est vraie pour $p=1$ et $p=2$; supposons la vraie jusqu'à p et remplaçons en (47) le polynome $R_{\nu+s}^{(-p)}(x)$ par son expression déduite de (46),

$$R_{\nu+s}^{(-p)}(x)=\frac{k+1}{-(p+1)\alpha}\left[R_{\nu+s+1}^{(-p-1)}(x)-(x+p\alpha+\alpha)\,R_{\nu+s}^{(-p-1)}(x)\right].$$

(47) devient

$$x^\nu = \left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^{p+1} \frac{1}{(p+1)!} \sum_{s=0}^{p} \frac{(-1)^{s+1}}{s!} \cdot$$

$$\cdot \left[R_{\nu+s+1}^{(-p-1)}(x) - (x+p\,\alpha+\alpha)\, R_{\nu+s}^{(-p-1)}(x)\right] D_x^s (x+\alpha)\cdots(x+p\,\alpha)$$

et si l'on groupe les termes

$$x^\nu = \left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^{p+1} \frac{1}{(p+1)!} \Bigg((x+\alpha)\cdots(x+p\,\alpha+\alpha)\, R_\nu^{(-p-1)}(x) +$$

$$+ \frac{(-1)^{p+1}}{p!} R_{\nu+p+1}^{(-p-1)}(x)\, D_x^p (x+\alpha)\cdots(x+p\,\alpha) + \sum_{s=0}^{p-1} \frac{(-1)^{s+1}}{(s+1)!} R_{\nu+s+1}^{(-p-1)}(x) \cdot$$

$$\cdot \left[(s+1)\, D_x^s (x+\alpha)\cdots(x+p\alpha) + (x+p\alpha+\alpha)\, D_x^{s+1} (x+\alpha)\cdots(x+p\,\alpha)\right]\Bigg)\cdot$$

La dernière parenthèse est égale à $D_x^{s+1}(x+\alpha)\cdots(x+p\,\alpha+\alpha)$,

$$x^\nu = \left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^{p+1} \frac{1}{(p+1)!} \sum_{s=0}^{p+1} \frac{(-1)^s}{s!} R_{\nu+s}^{(-p-1)}(x)\, D_x^s (x+\alpha)\cdots(x+p\alpha+\alpha). \quad \text{c. q. f. d.}$$

La formule (47) est une relation de récurrence entre les polynomes du même ordre négatif $-p$.

On établit de la même manière la formule plus générale

$$R_\nu^{(-p)}(x) = \left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^q \frac{p!}{(p+q)!} \sum_{s=0}^{q} \frac{(-1)^s}{s!} R_{\nu+s}^{(-p-q)}(x)\, D_x^s (x+p\alpha+\alpha)\cdots(x+p\alpha+q\alpha), \tag{48}$$

qui donne le polynome d'ordre négatif $-p$ en fonction des polynomes d'ordre $-p-q$ et qui se réduit, pour $p=0$, à (47).

7. **Polynomes d'ordre continu.** Désignons par p une variable continue, réelle ou complexe et considérons la fonction

$$\left(\frac{k+1}{k\,e^{t\alpha}+1}\right)^p,$$

qui est holomorphe autour du point $t=0$; son développement en série entière est de la forme

$$\left(\frac{k+1}{k\,e^{t\alpha}+1}\right)^p = 1 + \frac{a_1}{1!}\,t + \frac{a_2}{2!}\,t^2 + \cdots + \frac{a_\nu}{\nu!}\,t^\nu + \cdots,$$

les coefficients a_i étant des fonctions de α, k et p. Multiplions-la par la série

$$e^{tx} = 1 + \frac{x}{1}\,t + \frac{x^2}{2!}\,t^2 + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu!}\,t^\nu + \cdots$$

On obtient un développement de la forme

$$\left(\frac{k+1}{k\,e^{t\alpha}+1}\right)^p e^{tx} = 1 + \frac{t}{1}\,R_1^{(p)}(x) + \frac{t^2}{2!}\,R_2^{(p)}(x) + \cdots + \frac{t^\nu}{\nu!}\,R_\nu^{(p)}(x) + \cdots \tag{49}$$

dans lequel $R_\nu^{(p)}(x)$ est le polynome de degré ν

$$R_\nu^{(p)}(x \mid \alpha, k) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} a_\mu\, x^{\nu-\mu};$$

ce polynome sera dit, par définition, polynome de degré ν et d'ordre continu p. Dérivons les deux membres de (49) par rapport à x,

$$t\left(\frac{k+1}{k\,e^{t\alpha}+1}\right)^p e^{tx} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!}\,\frac{d\,R_\nu^{(p)}(x)}{dx},$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu+1}}{\nu!}\,R_\nu^{(p)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\,\frac{d\,R_{\nu+1}^{(p)}(x)}{dx}$$

et par identification

$$\frac{d\,R_{\nu+1}^{(p)}(x)}{dx} = (\nu+1)\,R_\nu^{(p)}(x). \tag{50}$$

Considérons l'identité

$$k\left(\frac{k+1}{k\,e^{t\alpha}+1}\right)^{p+1} e^{t(x+\alpha)} + \left(\frac{k+1}{k\,e^{t\alpha}+1}\right)^{p+1} e^{tx} = (k+1)\left(\frac{k+1}{k\,e^{t\alpha}+1}\right)^p e^{tx}$$

et en développant

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!}\,k\,R_\nu^{(p+1)}(x+\alpha) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!}\,R_\nu^{(p+1)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!}\,(k+1)\,R_\nu^{(p)}(x)$$

et par conséquent

$$k\,R_\nu^{(p+1)}(x+\alpha)+R_\nu^{(p+1)}(x)=(k+1)\,R_\nu^{(p)}(x). \tag{51}$$

Les deux équations (50) et (51) montrent que les deux propriétés fondamentales du polynome d'ordre positif subsistent pour le polynome d'ordre continu.

Si l'on dérive (49) par rapport à t, compte tenu de (51), on obtient

$$R_\nu^{(p+1)}(x)=\frac{k+1}{p\alpha}\left[R_{\nu+1}^{(p)}(x)-(x-p\alpha)\,R_\nu^{(p)}(x)\right], \tag{52}$$

relation identique à (43).

Remplaçons en (52) p successivement par $p-1$, $p-2,\ldots$; on déduit

$$R_\nu^{(p+1)}(x)=\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^q\frac{1}{p(p-1)\cdots(p+1-q)}\cdot$$

$$\cdot\sum_{s=0}^{q}\frac{(-1)^{q-s}}{s!}\,R_{\nu+s}^{(p+1-q)}(x)\,D_x^s\,(x-p\alpha)\cdots(x-p\alpha+q\alpha-\alpha), \tag{53}$$

où p est une variable continue et q un entier positif.

Faisons en (52), tendre x vers zéro,

$$R_{\nu+1}^{(p)}=\frac{p\alpha}{k+1}\,R_\nu^{(p+1)}-p\alpha\,R_\nu^{(p)}. \tag{54}$$

On a $R_0^{(p)}=1$ et (54) donne de proche en proche

$$R_1^{(p)}=-\frac{k}{k+1}\,p\alpha,\qquad R_2^{(p)}=-\frac{p\alpha}{k+1}\,\frac{k}{k+1}(p+1)\,\alpha+p\alpha\,\frac{k}{k+1}\,p\alpha,\ldots$$

Ces relations montrent que $R_\nu^{(p)}(x)$ est un polynome de degré ν en p.

CHAPITRE II.

Polynomes $R_m^{(p,q)}(x\,|\,\alpha_1,k_1;\ldots;\alpha_p,k_p\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q)$.

8. **Polynomes d'ordre positif** (p,q). Soit $B_m^{(q)}(x\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q)$ le polynome Bernoulli-Nörlund de degré m et d'ordre q et considérons l'équation

$$\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p}{\overset{p}{\wedge}}F(x)=B_m^{(q)}(x\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q). \tag{55}$$

Il existe un polynome unique qui satisfait à cette équation; nous le désignons par $R_m^{(p,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q)$ ou encore par $R_m^{(p,q)}(x)$; il est de degré m et sera dit d'ordre (p, q).

Si l'on applique, aux deux membres de (55), l'opération $\underset{\beta_1 \ldots \beta_q}{\overset{q}{\triangle}}$, on a

$$\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p, \beta_1 \ldots \beta_q}{\overset{p,q}{\wedge}} F(x) = m(m-1)\cdots(m-q+1)\,x^{m-q}. \tag{55 bis}$$

La solution polynomiale de (55 bis) est déterminée à un polynome de degré $(q-1)$ près et il convient de définir $R_m^{(p,q)}(x)$ par l'équation (55) ou par le système équivalent d'équations

$$\underset{\alpha_1}{\overset{1}{\wedge}} R_m^{(1,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q) = B_m^{(q)}(x\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q),$$

$$\underset{\alpha_2}{\overset{1}{\wedge}} R_m^{(2,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \alpha_2, k_2\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q) = R_m^{(1,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q), \tag{56}$$

. . . .

$$\underset{\alpha_p}{\overset{1}{\wedge}} R_m^{(p,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots \beta_q) = R_m^{(p-1,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p-1}, k_{p-1}\,|\,\beta_1, \ldots \beta_q).$$

Si l'on pose $R_m^{(0,q)}(x) = B_m^{(q)}(x)$, les équations (56) s'écrivent

$$\underset{\alpha_i}{\overset{1}{\wedge}} R_m^{(i,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_i, k_i\,|\,\beta_1, \ldots \beta_q) = R_m^{(i-1,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{i-1}, k_{i-1}\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q),$$
$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

On déduit par dérivation de (55)

$$\frac{d\,R_m^{(p,q)}(x)}{dx} = m\,R_{m-1}^{(p,q)}(x), \ldots, \qquad \frac{d^\nu R_m^{(p,q)}(x)}{dx^\nu} = m(m-1)\cdots(m-\nu+1)\,R_{m-\nu}^{(p,q)}(x)$$

et si l'on applique la formule de Taylor

$$R_m^{(p,q)}(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{h^\nu}{\nu!}\frac{d^\nu R_m^{(p,q)}(x)}{dx^\nu} = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} h^\nu R_{m-\nu}^{(p,q)}(x). \tag{57}$$

Pour $h = \alpha_p$, compte tenu de la dernière équation (56),

$$R_m^{(p,q)}(x) + \frac{k_p}{k_p+1}\left(\binom{m}{1}\alpha_p R_{m-1}^{(p,q)}(x) + \cdots + \binom{m}{m}\alpha_p^m R_0^{(p,q)}(x)\right) = R_m^{(p-1,q)}(x). \tag{58}$$

C'est une relation de récurrence avec laquelle on peut calculer les polynomes d'ordre (p, q) lorsqu'on connaît les polynomes d'ordre $(p-1, q)$.

De l'équation (11) et de la dernière équation (56) on déduit

$$R_m^{(p,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{-k_p \alpha_p}{k_p+1}\right)^{\nu} \overset{\nu}{\underset{\alpha_p}{\triangle}} R_m^{(p-1,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p-1}, k_{p-1} \mid \beta_1, \ldots, \beta_q)$$

et de proche en proche

$$R_m^{(p,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q) =$$

$$= \sum \left(\frac{-k_p \alpha_p}{k_p+1}\right)^{\nu_p} \cdots \left(\frac{-k_1 \alpha_1}{k_1+1}\right)^{\nu_1} \overset{\nu_p}{\underset{\alpha_p}{\triangle}} \cdots \overset{\nu_1}{\underset{\alpha_1}{\triangle}} B_m^{(q)}(x \mid \beta_1, \ldots, \beta_q), \tag{59}$$

où le signe Σ s'étend à toutes les valeurs entières non négatives des ν_i dont la somme

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p \leq m.$$

Par exemple,

$$R_0^{(p,q)}(x) = 1, \quad R_1^{(p,q)}(x) = B_1^{(q)}(x) - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{k_\nu \alpha_\nu}{k_\nu+1} = x - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{q} \beta_\nu - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{k_\nu \alpha_\nu}{k_\nu+1}.$$

Le polynome $B_m^{(q)}(x \mid \beta_1, \ldots, \beta_q)$ est homogène et de degré m par rapport aux variables $x, \beta_1, \ldots, \beta_q$; il est symétrique par rapport aux $\beta_1, \ldots, \beta_q$. L'équation (59) montre que le polynome $R_m^{(p,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q)$ est homogène et de degré m par rapport aux variables $x, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q$; il est symétrique par rapport aux p couples de lettres $(\alpha_1, k_1), \ldots, (\alpha_p, k_p)$ et par rapport aux q lettres $\beta_1, \ldots, \beta_q$; il est de degré m par rapport aux $\dfrac{k_\nu}{k_\nu+1}$.

Soit $\varphi(x)$ un polynome de degré $(m+q)$ et posons

$$F(x+h) = \varphi(x + R^{(p,q)}(h)) = \varphi(x) R_0^{(p,q)} +$$

$$+ \frac{\varphi^{(1)}(x)}{1} R_1^{(p,q)}(h) + \cdots + \frac{\varphi^{(m+q)}(x)}{(m+q)!} R_{m+q}^{(p,q)}(h). \tag{60}$$

Appliquons aux deux membres l'opération $\overset{p}{\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\bigwedge}}$ par rapport à la variable h,

$$\mathop{\bigwedge}\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_p}^{p} F(x+h)=\varphi(x)B_0^{(q)}(h)+\frac{\varphi^{(1)}(x)}{1}B_1^{(q)}(h)+\cdots+$$
$$+\frac{\varphi^{(q)}(x)}{q!}B_q^{(q)}(h)+\cdots+\frac{\varphi^{(m+q)}(x)}{(m+q)!}B_{m+q}^{(q)}(h)=\varphi(x+B^{(q)}(h)), \qquad (61)$$

et ensuite l'opération $\mathop{\triangle}\limits_{\beta_1\ldots\beta_q}^{q}$, toujours par rapport à la variable h; en tenant compte de

$$\mathop{\triangle}\limits_{\beta_1\ldots\beta_q}^{q} B_\nu^{(q)}(h)=0 \text{ pour } \nu\leq q-1, \qquad \mathop{\triangle}\limits_{\beta_1\ldots\beta_q}^{q} B_\nu^{(q)}(h)=\frac{\nu!}{(\nu-q)!}h^{\nu-q} \text{ pour } \nu\geq q,$$

on a

$$\mathop{\bigwedge}\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\beta_1\ldots\beta_q}^{p,q} F(x+h)=\varphi^{(q)}(x)\,1+\frac{\varphi^{(q+1)}(x)}{1}h+\cdots+\frac{\varphi^{(m+q)}(x)}{m!}h^m=\varphi^{(q)}(x+h). \qquad (62)$$

Les trois dernières équations s'écrivent, sous forme symbolique,

$$F(x+h)=\varphi(x+R^{(p,q)}(h)), \qquad \mathop{\bigwedge}\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_p}^{p} F(x+h)=\varphi(x+B^{(q)}(h)),$$
$$\mathop{\bigwedge}\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\beta_1\ldots q_q}^{p,q} F(x+h)=\varphi^{(q)}(x+h).$$

Il existe un polynome unique qui satisfait à l'équation (61); c'est le polynome donné par (60) et qui satisfait à (62). Appliquons maintenant, à (60), l'opération $\mathop{\bigwedge}\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\beta_1\ldots\beta_q}^{p,q}$, que nous désignons pour abréger aussi par $\mathop{\bigwedge}\limits^{p,q}$, par rapport à la variable x,

$$\mathop{\bigwedge}\limits_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\beta_1\ldots\beta_q}^{p,q} F(x+h)=R_0^{(p,q)}(h)\mathop{\bigwedge}\limits^{p,q}\varphi(x)+$$
$$+\frac{R_1^{(p,q)}(h)}{1!}\mathop{\bigwedge}\limits^{p,q}\varphi^{(1)}(x)+\cdots+\frac{R_{m+q}^{(p,q)}(h)}{(m+q)!}\mathop{\bigwedge}\limits^{p,q}\varphi^{(m+q)}(x).$$

Mais le premier membre est égal, en vertu de (62), à $\varphi^{(q)}(x+h)$ et nous obtenons la formule sommatoire

$$\varphi^{(q)}(x+h)=\sum_{\nu=0}^{m+q}\frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!}\mathop{\bigwedge}\limits^{p,q}\varphi^{(\nu)}(x), \qquad (63)$$

qui donne le développement d'un polynome $\varphi^{(q)}(x+h)$ de degré m, en série de polynomes $R_\nu^{(p,q)}(h)$, $\nu=0, 1, \ldots, m+q$.

On peut arriver plus directement à (63) en partant de (58), qui s'écrit sous forme symbolique

$$k_p\,(R^{(p,q)}(h)+\alpha_p)^m+R_m^{(p,q)}(h)=(k_p+1)\,R_m^{(p-1,q)}(h),$$

d'où l'on déduit, $\varphi(x)$ étant un polynome de degré $(m+q)$,

$$k_p\,\varphi\,(R^{(p,q)}(h)+\alpha_p+x)+\varphi\,(R^{(p,q)}(h)+x)=(k_p+1)\,\varphi\,(R^{(p-1,q)}(h)+x)$$

et si l'on développe

$$\sum_{\nu=0}^{m+q}\frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!}\underset{\alpha_p}{\overset{1}{\bigwedge}}\varphi^{(\nu)}(x)=\sum_{\nu=0}^{m+q}\frac{R_\nu^{(p-1,q)}(h)}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(x).$$

On applique successivement, aux deux membres, les opérations $\underset{\alpha_{p-1}}{\overset{1}{\bigwedge}},\ldots,\underset{\alpha_1}{\overset{1}{\bigwedge}}$ et ensuite les opérations $\underset{\beta_q}{\overset{1}{\triangle}},\ldots,\underset{\beta_1}{\overset{1}{\triangle}}$, par rapport à la variable x,

$$\sum_{\nu=0}^{m+q}\frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!}\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}}\varphi^{(\nu)}(x)=\sum_{\nu=0}^{m+q}\frac{B_\nu^{(q)}(h)}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(x),$$

$$\sum_{\nu=0}^{m+q}\frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!}\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\beta_1\ldots,\,\beta_q}{\overset{p,q}{\bigwedge}}\varphi^{(\nu)}(x)=\varphi^{(q)}(x+h).$$

Si l'on pose $\varphi(x)=R_{m+q}^{(p+r,q+s)}(x\,|\,\alpha_1,k_1;\ldots;\alpha_{p+r},k_{p+r}\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_{q+s})$, on a

$$\varphi^{(\nu)}(x)=(m+q)(m+q-1)\cdots(m+q-\nu+1)\,R_{m+q-\nu}^{(p+r,q+s)}(x),$$

$$\varphi^{(q)}(x)=(m+q)(m+q-1)\cdots(m+1)\,R_m^{(p+r,q+s)}(x),$$

$$\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\beta_1\ldots\beta_q}{\overset{p,q}{\bigwedge}}\varphi^{(\nu)}(x)=(m+q)(m+q-1)\cdots(m-\nu+1)\,.$$

$$.\,R_{m-\nu}^{(r,s)}(x\,|\,\alpha_{p+1},k_{p+1};\ldots;\alpha_{p+r},k_{p+r}\,|\,\beta_{q+1},\ldots,\beta_{q+s})\qquad\text{pour }\nu\leq m;$$

pour $m<\nu\leq m+q$, le premier membre est identiquement égal à zéro et (63) devient

$$(m+q)\cdots(m+1)\,R_m^{(p+r,q+s)}(x+h)=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!}(m+q)\cdots(m-\nu+1)\,R_{m-\nu}^{(r,s)}(x)$$

ou encore

$$R_m^{(p+r,q+s)}(x+h\,|\,\alpha_1,k_1;\ldots;\alpha_{p+r},k_{p+r}\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_{q+s})=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu}R_\nu^{(p,q)}(h\,|\,\alpha_1,k_1;\ldots;\alpha_p,k_p\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q)\,.$$

$$.\,R_{m-\nu}^{(r,s)}(x\,|\,\alpha_{p+1},k_{p+1};\ldots;\alpha_{p+r},k_{p+r}\,|\,\beta_{q+1},\ldots,\beta_{q+s}). \tag{64}$$

La dernière relation montre que les polynomes $R_m^{(p,q)}(x)$ sont des polynomes d'interpolation; sous forme symbolique, elle s'écrit

$$R_m^{(p+r,q+s)}(x+h)=[R^{(p,q)}(h)+R^{(r,s)}(x)]^m$$

d'où l'on déduit la relation plus générale

$$R_m^{(p,q)}(x_1+x_2+\cdots+x_\nu)=(R^{(p_1,q_1)}(x_1)+R^{(p_2,q_2)}(x_2)+\cdots+R^{(p_\nu,q_\nu)}(x_\nu))^m$$

où les p_i et q_j sont des entiers non négatifs qui satisfont aux égalités

$$p_1+p_2+\cdots+p_\nu=p,\qquad q_1+q_2+\cdots+q_\nu=q.$$

9. **Théorèmes de multiplication de l'argument.** Considérons l'équation

$$\frac{1}{k_1}R_m^{(1,q)}\left(x+\alpha_1\,|\,\alpha_1,\frac{1}{k_1}\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q\right)+R_m^{(1,q)}\left(x\,|\,\alpha_1,\frac{1}{k_1}\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{k_1}+1\right)B_m^{(q)}(x\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q);$$

multiplions les deux membres par k_1 et changeons x en $-x$,

$$k_1R_m^{(1,q)}\left(\alpha_1-x-\alpha_1\,|\,\alpha_1,\frac{1}{k_1}\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q\right)+R_m^{(1,q)}\left(\alpha_1-x\,|\,\alpha_1,\frac{1}{k_1}\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q\right)=$$

$$=(k_1+1)B_m^{(q)}(-x\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q).$$

Mais le polynome au second membre est homogène et de degré m par rapport à x et $\beta_1,\ldots,\beta_q$; la dernière équation s'écrit encore

$$k_1(-1)^mR_m^{(1,q)}\left(\alpha_1-x-\alpha_1\,|\,\alpha_1,\frac{1}{k_1}\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q\right)+$$

$$+(-1)^mR_m^{(1,q)}\left(\alpha_1-x\,|\,\alpha_1,\frac{1}{k_1}\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q\right)=(k_1+1)B_m^{(q)}(x\,|\,-\beta_1,\ldots,-\beta_q);$$

elle montre que le polynome $(-1)^m R_m^{(1,q)}\left(\alpha_1 - x \mid \alpha_1, \frac{1}{k_2} \mid \beta_1, \ldots, \beta_q\right)$ satisfait à la même équation que le polynome $R_m^{(1,q)}(x \mid \alpha_1, k_1 \mid -\beta_1, \ldots, -\beta_q)$, ils sont donc identiques,

$$(-1)^m R_m^{(1,q)}\left(\alpha_1 - x \mid \alpha_1, \frac{1}{k_1} \mid \beta_1, \ldots, \beta_q\right) = R_m^{(1,q)}(x \mid \alpha_1, k_1 \mid -\beta_1, \ldots, -\beta_q),$$

$$R_m^{(1,q)}\left(x - \alpha_1 \mid -\alpha_1, \frac{1}{k_1} \mid \beta_1, \ldots, \beta_q\right) = R_m^{(1,q)}(x \mid \alpha_1, k_1 \mid \beta_1, \ldots, \beta_q).$$

Considérons maintenant l'équation

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_p} R_m^{(p,q)}&\left(x + \alpha_p \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, \frac{1}{k_p} \mid \beta_1, \ldots, \beta_p\right) + \\ &+ R_m^{(p,q)}\left(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, \frac{1}{k_p} \mid \beta_1, \ldots, \beta_q\right) = \\ &= \left(\frac{1}{k_p} + 1\right) R_m^{(p-1,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p-1}, k_{p-1} \mid \beta_1, \ldots, \beta_q),\end{aligned}$$

que l'on peut écrire encore, le polynome au second membre étant homogène et degré m par rapport à x, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta_1, \ldots, \beta_q$,

$$\begin{aligned}k_p(-1)^m R_m^{(p,q)}&\left(\alpha_p - x - \alpha_p \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, \frac{1}{k_p} \mid \beta_1, \ldots, \beta_p\right) + \\ &+ (-1)^m R_m^{(p,q)}\left(\alpha_p - x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, \frac{1}{k_p} \mid \beta_1, \ldots, \beta_q\right) = \\ &= (k_p + 1) R_m^{(p-1,q)}(x \mid -\alpha_1, k_1; \ldots; -\alpha_{p-1}, k_{p-1} \mid -\beta_1, \ldots, -\beta_q),\end{aligned}$$

équation qui montre que les polynomes

$$(-1)^m R_m^{(p,q)}\left(\alpha_p - x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, \frac{1}{k_p} \mid \beta_1, \ldots, \beta_q\right)$$

et

$$R_m^{(p,q)}(x \mid -\alpha_1, k_1; \ldots; -\alpha_{p-1}, k_{p-1}; \alpha_p, k_p \mid -\beta_1, \ldots, -\beta_q)$$

sont identiques, car ils satisfont à la même équation. On déduit

$$R_m^{(p,q)}\left(x - \alpha_p \mid \alpha_1, k_1; \ldots; -\alpha_p, \frac{1}{k_p} \mid \beta_1, \ldots, \beta_q\right) = R_m^{(p,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q).$$

Mais le polynome $R_m^{(p,q)}(x)$ est symétrique par rapport aux p couples de lettres $(\alpha_1, k_1), \ldots, (\alpha_p, k_p)$,

$$R_m^{(p+r,q)}\left(x-\alpha_1-\cdots-\alpha_p \,|\, -\alpha_1, \frac{1}{k_1}; \ldots; -\alpha_p, \frac{k}{k_p}; \alpha_{p+1}, k_{p+1}; \ldots; \alpha_{p+r}, k_{p+r} \,|\, \beta_1, \ldots \beta_q\right) =$$
$$= R_m^{(p+r,q)}(x \,|\, \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p+r}, k_{p+r} \,|\, \beta_1, \ldots, \beta_q). \qquad (65)$$

D'autre part le polynome $B_m^{(q+s)}(x \,|\, \beta_1, \ldots, \beta_{q+s})$ satisfait à la relation

$$B_m^{(q+s)}(x-\beta_1-\cdots-\beta_q \,|\, -\beta_1, \ldots, -\beta_q, \beta_{q+1}, \ldots, \beta_{q+s}) = B_m^{(q+s)}(x \,|\, \beta_1, \ldots, \beta_{q+s}).$$

On déduit, des deux dernières équations, la formule générale

$$R_m^{(p+r,q+s)}\left(x-\alpha_1-\cdots-\alpha_p-\beta_1-\cdots-\beta_q \,|\, -\alpha_1, \frac{1}{k_1}; \ldots; -\alpha_p, \frac{1}{k_p};\right.$$
$$\left.\alpha_{p+1}, k_{p+1}; \ldots; \alpha_{p+r}, k_{p+r}, \,|\, -\beta_1, \ldots, -\beta_q, \beta_{q+1}, \ldots, \beta_{q+s}\right) =$$
$$= R_m^{(p+r,q+s)}(x \,|\, \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p+r}, k_{p+r} \,|\, \beta_1, \ldots, \beta_{q+s}), \qquad (66)$$

qui pour $r=s=0$ se réduit à

$$R_m^{(p,q)}\left(\alpha_1+\cdots+\alpha_p+\beta_1+\cdots+\beta_q-x \,|\, \alpha_1, \frac{1}{k_1}; \ldots; \alpha_p, \frac{1}{k_p} \,|\, \beta_1, \ldots, \beta_q\right) =$$
$$= (-1)^m R_m^{(p,q)}(x \,|\, \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \,|\, \beta_1, \ldots, \beta_q). \qquad (67)$$

Pour $x = \frac{1}{2}(\alpha_1+\cdots+\alpha_p+\beta_1+\cdots+\beta_q)$ l'équation (67) se réduit à

$$R_m^{(p,q)}\left(\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_p+\beta_1+\cdots+\beta_q}{2} \,|\, \alpha_1, \frac{1}{k_1}; \ldots; \alpha_p, \frac{1}{k_p} \,|\, \beta_1, \ldots, \beta_q\right) =$$
$$= (-1)^m R_m^{(p,q)}\left(\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_p+\beta_1+\cdots+\beta_q}{2} \,|\, \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \,|\, \beta_1, \ldots, \beta_q\right).$$

Soit μ un entier positif et considérons le polynome

$$P(x) = \frac{1+k_1}{1-(-k_1)^\mu}\mu^m \cdot$$
$$\cdot \sum_{s=0}^{\mu-1} (-k_1)^s R_m^{(p,q)}\left(\frac{x+s\alpha_1}{\mu} \,|\, \alpha_1, -(-k_1)^\mu; \alpha_2, k_2; \ldots; \alpha_p, k_p \,|\, \beta_1, \ldots, \beta_q\right).$$

On déduit

$$\frac{k_1 P(x+\alpha_1)+P(x)}{k_1+1}=\frac{\mu^m}{1-(-k_1)^\mu}\cdot$$

$$\cdot\left(R_m^{(p,q)}\left(\frac{x}{\mu}\,|\,\alpha_1, -(-k_1)^\mu; \alpha_2, k_2; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots \beta_q\right) -\right.$$

$$\left.-(-k_1)^\mu R_m^{(p,q)}\left(\frac{x}{\mu}+\alpha_1\right)\right)=$$

$$=\frac{\mu^m}{1-(-k_1)^\mu}[1-(-k_1)^\mu]\,R_m^{(p-1,q)}\left(\frac{x}{\mu}\,|\,\alpha_2, k_2; \ldots; \alpha_p, k_q\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q\right)=$$

$$=R_m^{(p-1,q)}(x\,|\,\mu\alpha_2, k_2; \ldots; \mu\alpha_p, k_p\,|\,\mu\beta_1, \ldots, \mu\beta_q).$$

Le polynome $P(x)$ satisfait à la même équation que le polynome

$$R_m^{(p,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \mu\alpha_2, k_2; \ldots; \mu\alpha_p, k_p\,|\,\mu\beta_1, \ldots, \mu\beta_q)$$

et ils sont identiques; si l'on remplace x par μx, on a finalement

$$\sum_{s=0}^{\mu-1}(-k_1)^s R_m^{(p,q)}\left(x+s\frac{\alpha_1}{\mu}\,|\,\alpha_1, -(-k_1)^\mu; \alpha_2, k_2; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q\right)=$$

$$=\frac{1-(-k_1)^\mu}{1+k_1}R_m^{(p,q)}\left(x\,|\,\frac{\alpha_1}{\mu}, k_1; \alpha_2, k_2; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q\right). \tag{68}$$

Si μ est un entier positif impair, (68) prend une forme plus simple obtenue en remplaçant $-(-k_1)^\mu$ par k_1^μ.

Soit n un entier positif plus petit ou égal à p et soient $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des entiers positifs impairs; on déduit de (68), par symétrie,

$$\sum_{s_1=0}^{\mu_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{\mu_n-1}(-k_1)^{s_1}\cdots(-k_n)^{s_n}R_m^{(p,q)}\left(x+s_1\frac{\alpha_1}{\mu_1}+\cdots+s_n\frac{\alpha_n}{\mu_n}\,|\,\alpha_1, k_1^{\mu_1}; \ldots;\right.$$

$$\left.\alpha_n, k_n^{\mu_n}; \alpha_{n+1}, k_{n+1}; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q\right)=$$

$$=\frac{1+k_1^{\mu_1}}{1+k_1}\cdots\frac{1+k_n^{\mu_n}}{1+k_n}R_m^{(p,q)}\left(x\,|\,\frac{\alpha_1}{\mu_1}, k_1; \ldots; \frac{\alpha_n}{\mu_n}, k_n; \alpha_{n+1}, k_{n+1}; \ldots;\right.$$

$$\left.\alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q\right). \tag{69}$$

Mais le polynome $B_m^{(q)}(x\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q)$ satisfait à l'équation

$$\sum_{t_1=0}^{\nu_1-1}\cdots\sum_{t_r=0}^{\nu_r-1} B_m^{(q)}\left(x+t_1\frac{\beta_1}{\nu_1}+\cdots+t_r\frac{\beta_r}{\nu_r}\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q\right)=$$

$$=\nu_1\cdots\nu_r B_m^{(q)}\left(x\,|\,\frac{\beta_1}{\nu_1},\ldots,\frac{\beta_r}{\nu_r},\beta_{r+1},\ldots,\beta_q\right),$$

où r est un entier positif plus petit que ou égal à q et $\nu_1,\ldots,\nu_r$ des entiers positifs quelconques. Des deux dernières équations on déduit la formule plus générale

$$\sum_{s_1=0}^{\mu_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{\mu_n-1}\sum_{t_1=0}^{\nu_1-1}\cdots\sum_{t_r=0}^{\nu_r-1}(-k_1)^{s_1}\cdots(-k_n)^{s_n} R_m^{(p,q)}\left(x+s_1\frac{\alpha_1}{\mu_1}+\cdots+s_n\frac{\alpha_n}{\mu_n}+\right.$$

$$\left.+t_1\frac{\beta_1}{\nu_1}+\cdots+t_r\frac{\beta_r}{\nu_r}\,|\,\alpha_1,k_1^{\mu_1};\ldots;\alpha_n,k_n^{\mu_n};\alpha_{n+1},k_{n+1};\ldots;\alpha_p,k_p\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q\right)=$$

$$=\frac{1+k_1^{\mu_1}}{1+k_1}\cdots\frac{1+k_n^{\mu_n}}{1+k_n}\nu_1\ldots\nu_r R_m^{(p,q)}\left(x\,|\,\frac{\alpha_1}{\mu_1},k_1;\ldots;\frac{\alpha_n}{\mu_n},k_n;\alpha_{n+1},k_{n+1};\ldots;\right.$$

$$\left.\alpha_p,k_p\,|\,\frac{\beta_1}{\nu_1},\ldots,\frac{\beta_r}{\nu_r},\beta_{r+1},\ldots,\beta_q\right). \tag{70}$$

Nous avons en (70) la formule générale de multiplication de l'argument pour le polynome $R_m^{(p,q)}(x)$. Si les entiers positifs μ_i sont quelconques, on obtient une autre formule déduite de (70) en remplaçant les $k_i^{\mu_i}$ par $-(-k_i)^{\mu_i}$. Supposons $n=p$, $r=q$, $\mu_1=\cdots=\mu_p=\nu_1=\cdots=\nu_q=\mu$, μ impair; (70) devient

$$\sum_{s_1=0}^{\mu-1}\cdots\sum_{s_p=0}^{\mu-1}\sum_{t_1=0}^{\mu-1}\cdots\sum_{t_q=0}^{\mu-1}(-k_1)^{s_1}\cdots(-k_p)^{s_p}\,.$$

$$.\,R_m^{(p,q)}\left(x+\frac{s_1\alpha_1+\cdots+s_p\alpha_p+t_1\beta_1+\cdots+t_q\beta_q}{\mu}\,|\,\alpha_1,k_1^{\mu};\ldots;\alpha_p,k_p^{\mu}\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q\right)=$$

$$=\frac{1+k_1^{\mu}}{1+k_1}\cdots\frac{1+k_p^{\mu}}{1+k_p}\mu^q R_m^{(p,q)}\left(x\,|\,\frac{\alpha_1}{\mu},k_1;\ldots;\frac{\alpha_p}{\mu},k_p\,|\,\frac{\beta_1}{\mu},\ldots,\frac{\beta_q}{\mu}\right)=$$

$$=\frac{1+k_1^{\mu}}{1+k_1}\cdots\frac{1+k_p^{\mu}}{1+k_p}\mu^{q-m} R_m^{(p,q)}(\mu x\,|\,\alpha_1,k_1;\ldots;\alpha_p,k_p\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q). \tag{71}$$

10. **Polynomes d'ordre négatif.** Posons, par définition,

$$R^{(0,q)}(x\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q)=B_m^{(q)}(x\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q).$$

Le polynome d'ordre positif $R_m^{(p,q)}(x)$ a été défini par l'équation

$$\overset{p}{\underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}{\bigwedge}} R_m^{(p,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q) = B_m^{(q)}(x \mid \beta_1, \ldots, \beta_q)$$

et nous convenons d'exprimer la dépendance entre les polynomes $R_m^{(p,q)}(x)$ et $B_m^{(q)}(x)$ aussi par l'équation

$$R_m^{(p,q)}(x) = \overset{-p}{\underset{\alpha_1,\ldots\alpha_p}{\bigwedge}} B_m^{(q)}(x),$$

où $\overset{-p}{\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p}{\bigwedge}}$ est le symbole de l'opération inverse de l'opération $\overset{p}{\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p}{\bigwedge}}$. Nous sommes ainsi tout naturellement conduits à définir le polynome d'ordre $(-p, q)$ par l'équation

$$R_m^{(-p,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q) = \overset{p}{\underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}{\bigwedge}} B_m^{(q)}(x \mid \beta_1, \ldots, \beta_q). \tag{72}$$

Le polynome d'ordre $(p, -q)$ sera défini par l'équation

$$\overset{p}{\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p}{\bigwedge}} R_m^{(p,-q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q) = B_m^{(-q)}(x \mid \beta_1, \ldots, \beta_q), \tag{73}$$

et le polynome d'ordre $(-p, -q)$ par l'équation

$$R_m^{(-p,-q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q) = \overset{p}{\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p}{\bigwedge}} B_m^{(-q)}(x \mid \beta_1, \ldots, \beta_q) =$$

$$= \overset{p}{\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p}{\bigwedge}} \overset{q}{\underset{\beta_1\ldots\beta_q}{\triangle}} \frac{m!}{(m+q)!} x^{m+q} = \frac{m!}{(m+q)!} \overset{p,q}{\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\beta_1\ldots\beta_q}{\bigwedge}} x^{m+q}. \tag{74}$$

Si l'on applique aux deux membres de (72) l'opération $\overset{1}{\underset{\alpha_{p+1}}{\bigwedge}}$, on a

$$\overset{1}{\underset{\alpha_{p+1}}{\bigwedge}} R_m^{(-p,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q) = \overset{p+1}{\underset{\alpha_1\ldots\alpha_{p+1}}{\bigwedge}} B_m^{(q)}(x \mid \beta_1, \ldots, \beta_q) =$$

$$= R_m^{(-p-1,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p+1}, k_{p+1} \mid \beta_1, \ldots, \beta_q)$$

et l'équation (72) peut être remplacée par le système équivalent

$$R_m^{(-i-1,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{i+1}, k_{i+1} \mid \beta_1, \ldots, \beta_q) =$$

$$= \overset{1}{\underset{\alpha_{i+1}}{\bigwedge}} R^{(-i,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_i, k_i \mid \beta_1, \ldots, \beta_q), \quad i = 0, 1, \ldots, p. \tag{75}$$

Si l'on répète l'opération, on trouve que l'équation

$$\bigwedge_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{n} R_m^{(p,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q) = R_m^{(p-n,q)}(x\,|\,\alpha_{n+1}, k_{n+1}; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots \beta_q),$$

établie pour $p<n$, subsiste pour $p \geq n$ et prend, dans ce cas, la forme

$$\bigwedge_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{n} R_m^{(p,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q) = \bigwedge_{\alpha_{n+1}\ldots\alpha_p}^{n-p} \bigwedge_{\alpha_1\ldots\alpha_p}^{p} R_m^{(p,q)}(x) =$$

$$= \bigwedge_{\alpha_{n+1}\ldots\alpha_p}^{n-p} B_m^{(q)}(x) = R_m^{(p-n,q)}(x\,|\,\alpha_{n+1}, k_{n+1}; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q). \qquad (76)$$

Les formules (75) et (76) sont vraies aussi pour q entier négatif; c'est ce qu'on voit en répétant les mêmes opérations, mais à partir de (73), de même que le système (56) subsiste pour q entier négatif.

Considérons maintenant l'équation (64) où p, q, r, s sont des entiers positifs et appliquons aux deux membres les opérations

$$\bigwedge_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\alpha_1\ldots\alpha_p}^{2p}, \quad \underset{\beta_1\ldots\beta_q,\beta_1\ldots\beta_q}{\overset{2q}{\triangle}}, \quad \bigwedge_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\alpha_1\ldots\alpha_p}^{2p} \underset{\beta_1\ldots\beta_q,\beta_1\ldots\beta_q}{\overset{2q}{\triangle}}$$

par rapport à la variable h; on obtient

$$R_m^{(-p+r,q+s)}(x+h\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p+r}, k_{p+r}\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_{q+s}) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} R_\nu^{(-p,q)}(h\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q)\,.$$

$$.\,R_{m-\nu}^{(r,s)}(x\,|\,\alpha_{p+1}, k_{p+1}; \ldots; \alpha_{p+r}, k_{p+r}\,|\,\beta_{q+1}, \ldots, \beta_{q+s}),$$

que l'on peut écrire plus brièvement encore

$$R_m^{(-p+r,q+s)}(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} R_\nu^{(-p,q)}(h)\, R_{m-\nu}^{(r,s)}(x).$$

La deuxième opération donne

$$R_m^{(p+r,-q+s)}(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} R_\nu^{(p,-q)}(h)\, R_{m-\nu}^{(r,s)}(x),$$

et la troisième

$$R_m^{(-p+r,\,-q+s)}(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} R_\nu^{(-p,\,-q)}(h)\, R_{m-\nu}^{(r,\,s)}(x).$$

Si l'on applique maintenant les mêmes opérations à (64), mais par rapport à la variable x, on obtient trois équations analogues, dans lesquelles p et q sont positifs et r et s positifs ou négatifs. Toutes ces équations montrent au fond que la formule (64) est vraie pour les valeurs *entières positives* ou *négatives* des p, q, r, s; elle comprend un grand nombre des cas particuliers; par exemple pour $r=s=0$ et p, q négatifs

$$R_m^{(-p,\,-q)}(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} x^{m-\nu} R_\nu^{(-p,\,-q)}(h). \tag{77}$$

Pour $p=-r$, $q=-s$ et $\alpha_{p+1}=\alpha_1$, $k_{p+1}=k_1; \ldots; \alpha_{2p}=\alpha_p$, $k_{2p}=k_p$, on a

$$(x+h)^m = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} R_\nu^{(p,\,q)}(h)\, R_{m-\nu}^{(-p,\,-q)}(x) \tag{78}$$

qui est une relation de récurrence entre les polynomes du même ordre (p, q) ou $(-p, -q)$. En (77) et (78), chacun des entiers p, q est positif ou négatif; (78) montre qu'il y a réciprocité entre les polynomes $R_\nu^{(p,\,q)}(x)$ et $R_\nu^{(-p,\,-q)}(x)$. Si l'on remplace en (78),

$$\frac{d^\nu R_m^{(-p,\,-q)}(x)}{dx^\nu} = m(m-1)\cdots(m-\nu+1)\, R_{m-\nu}^{(-p,\,-q)}(x),$$

on a

$$\sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p,\,q)}(h)}{\nu!} \frac{d^\nu R_m^{(-p,\,-q)}(x)}{dx^\nu} = (x+h)^m,$$

et par réciprocité

$$\sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(-p,\,-q)}(h)}{\nu!} \frac{d^\nu R_m^{(p,\,q)}(x)}{dx^\nu} = (x+h)^m.$$

Les dernières relations montrent que le polynome $R_m^{(p,\,q)}(x)$ satisfait à une équation différentielle à coefficients constants, p et q étant des entiers positifs ou négatifs.

11. **Fonctions génératrices.** Soit $f(x)$ une fonction analytique, holomorphe autour de l'origine,

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{q-1}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^{\nu}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(q+\nu)}(0)}{\nu!}\frac{\nu!}{(\nu+q)!}x^{q+\nu}.$$

Si l'on applique aux deux membres l'opération $\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\beta_1\ldots\beta_q}{\overset{p,\,q}{\bigwedge}}$, on a

$$\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\beta_1\ldots\beta_q}{\overset{p,\,q}{\bigwedge}} f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(q+\nu)}(0)}{\nu!}R_{\nu}^{(-p,\,-q)}(x\,|\,\alpha_1,k_1;\ldots;\alpha_p,k_p\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q)$$

développement valable pour les valeurs suffisamment petites de x et des α_i et β_j. Pour $f(x)=e^{tx}$, on obtient la fonction génératrice des polynomes d'ordre négatif $(-p,-q)$,

$$\frac{k_1e^{t\alpha_1}+1}{k_1+1}\cdots\frac{k_pe^{t\alpha_p}+1}{k_p+1}\frac{e^{t\beta_1}-1}{\beta_1}\cdots\frac{e^{t\beta_q}-1}{\beta_q}\frac{e^{tx}}{t^q}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu}}{\nu!}R_{\nu}^{(-p,\,-q)}(x\,|\,\alpha_1,k_1;\ldots;\alpha_p,k_p\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q),\qquad(79)$$

série convergente pour toutes les valeurs de t et x. La fonction génératrice des polynomes d'ordre positif (p,q) est la réciproque de (79), c'est-à-dire

$$\frac{k_1+1}{k_1e^{t\alpha_1}+1}\cdots\frac{k_p+1}{k_pe^{t\alpha_p}+1}\frac{\beta_1}{e^{t\beta_1}-1}\cdots\frac{\beta_q}{e^{t\beta_q}-1}t^qe^{th}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu}}{\nu!}R_{\nu}^{(p,\,q)}(h\,|\,\alpha_1,k_1;\ldots;\alpha_p,k_p\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q),\qquad(79\text{ bis})$$

série convergente pour t suffisamment petit. En effet, multiplions les deux dernières équations,

$$e^{t(x+h)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu}}{\nu!}\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}R_{\mu}^{(p,\,q)}(h)\,R_{\nu-\mu}^{(-p,\,-q)}(x).$$

En vertu de (78), le coefficient de $\frac{t^{\nu}}{\nu!}$ est égal à $(x+h)^{\nu}$ et la vérification est faite.

Pour avoir la fonction génératrice des polynomes $R_m^{(-p,\,q)}(x)$, partons de

$$\frac{\beta_1}{e^{t\beta_1}-1}\cdots\frac{\beta_q}{e^{t\beta_q}-1}t^qe^{tx}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu}}{\nu!}B_{\nu}^{(q)}(x\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q),$$

série convergente pour t suffisamment petit, et appliquons aux deux membres l'opération $\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\wedge}}$ par rapport à x,

$$\frac{k_1 e^{t\alpha_1}+1}{k_1+1} \cdots \frac{k_p e^{t\alpha_p}+1}{k_p+1} \frac{\beta_1}{e^{t\beta_1}-1} \cdots \frac{\beta_q}{e^{t\beta_q}-1} t^q e^{tx} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(-p,\,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q). \quad (80)$$

On déduit comme plus haut

$$\frac{k_1+1}{k_1 e^{t\alpha_1}+1} \cdots \frac{k_p+1}{k_p e^{t\alpha_p}+1} \frac{e^{t\beta_1}-1}{\beta_1} \cdots \frac{e^{t\beta_q}-1}{\beta_q} \frac{e^{tx}}{t^q} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p,\,-q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q). \quad (80 \text{ bis})$$

12. **Cas particulier.** Supposons $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_q = \omega$, $k_1 = \cdots = k_p = k$ et désignons par $R_m^{(p,\,q)}(x \mid \omega, k)$ notre polynome dans ce cas particulier. Les quatre dernières fonctions génératrices deviennent

$$\left(\frac{k e^{t\omega}+1}{k+1}\right)^p \left(\frac{e^{t\omega}-1}{t\omega}\right)^q e^{tx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(-p,\,-q)}(x \mid \omega, k), \quad (81)$$

$$\left(\frac{k+1}{k e^{t\omega}+1}\right)^p \left(\frac{t\omega}{e^{t\omega}-1}\right)^q e^{tx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p,\,q)}(x \mid \omega, k), \quad (82)$$

$$\left(\frac{k e^{t\omega}+1}{k+1}\right)^p \left(\frac{t\omega}{e^{t\omega}-1}\right)^q e^{tx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(-p,\,q)}(x \mid \omega, k), \quad (83)$$

$$\left(\frac{k+1}{k e^{t\omega}+1}\right)^p \left(\frac{e^{t\omega}-1}{t\omega}\right)^q e^{tx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p,\,-q)}(x \mid \omega, k), \quad (84)$$

Les équations (81), (83) et (84) se déduisent de (82) en y remplaçant (p, q) par $(-p, -q)$, $(-p, q)$ et $(p, -q)$ respectivement.

Dérivons (82) par rapport à t,

$$x\left(\frac{k+1}{k\,e^{t\omega}+1}\right)^p\left(\frac{t\,\omega}{e^{t\omega}-1}\right)^q e^{tx}-\frac{p\,k\,\omega}{k+1}\left(\frac{k+1}{k\,e^{t\omega}+1}\right)^{p+1}\left(\frac{t\,\omega}{e^{t\omega}-1}\right)^q e^{t(x+\omega)}+$$

$$+\frac{q}{t}\left(\frac{k+1}{k\,e^{t\omega}+1}\right)^p\left(\frac{t\,\omega}{e^{t\omega}-1}\right)^q e^{tx}-$$

$$-\frac{q}{t}\left(\frac{k+1}{k\,e^{t\omega}+1}\right)^p\left(\frac{t\,\omega}{e^{t\omega}-1}\right)^{q+1} e^{t(x+\omega)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R_{\nu+1}^{(p,q)}(x).$$

On déduit, compte tenu de (82),

$$x\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R_\nu^{(p,q)}(x)-\frac{p\,k\,\omega}{k+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R_\nu^{(p+1,q)}(x+\omega)+$$

$$+\frac{q}{t}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R_\nu^{(p,q)}(x)-\frac{q}{t}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R_\nu^{(p,q+1)}(x+\omega)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}R_{\nu+1}^{(p,q)}(x).$$

Égalons les coefficients de $\frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$ aux deux membres,

$$\nu\,x\,R_{\nu-1}^{(p,q)}(x)-\frac{\nu\,p\,k\,\omega}{k+1}R_{\nu-1}^{(p+1,q)}(x+\omega)+q\,R_\nu^{(p,q)}(x)-q\,R_\nu^{(p,q+1)}(x+\omega)=\nu\,R_\nu^{(p,q)}(x).$$

Mais

$$k\,R_{\nu-1}^{(p+1,q)}(x+\omega)+R_{\nu-1}^{(p+1,q)}(x)=(k+1)\,R_{\nu-1}^{(p,q)}(x),$$

$$R_\nu^{(p,q+1)}(x+\omega)-R_\nu^{(p,q+1)}(x)=\nu\,\omega\,R_{\nu-1}^{(p,q)}(x),$$

et la dernière équation devient

$$\nu\,(x-p\,\omega-q\,\omega)\,R_{\nu-1}^{(p,q)}(x)+\frac{\nu\,p\,\omega}{k+1}R_{\nu-1}^{(p+1,q)}(x)+(q-\nu)\,R_\nu^{(p,q)}(x)-q\,R_\nu^{(p,q+1)}(x)=0. \qquad (85)$$

Comme vérification, la formule (85) se réduit pour $q=0$ à (43) et pour $p=0$ à[1]

$$\nu\,(x-q\,\omega)\,B_{\nu-1}^{(q)}(x)+(q-\nu)\,B_\nu^{(q)}(x)-q\,B_\nu^{(q+1)}(x)=0.$$

Une expression remarquable du polynome $R_m^{(p,q)}(x\mid\omega,k)$ se déduit de (59),

$$R_m^{(p+1,q)}(x\mid\omega,k)=\sum_{\nu=0}^{m}\left(\frac{-k\,\omega}{k+1}\right)^\nu\binom{\nu+p}{p}\mathop{\triangle}_{\omega}^{\nu}B_m^{(q)}(x\mid\omega).$$

[1] *Mémoire sur les polynomes de Bernoulli*, pag. 186, formule (2).

La démonstration est identique à celle utilisée pour établir la formule (45) à partir de (19). Mais

$$\overset{\nu}{\underset{\omega}{\triangle}} B_m^{(q)}(x \mid \omega) = m(m-1)\cdots(m-\nu+1)\, B_{m-\nu}^{(q-\nu)}(x \mid \omega)$$

et la dernière formule devient

$$R_m^{(p+1,q)}(x \mid \omega, k) = \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{-k\omega}{k+1}\right)^{\nu} \binom{\nu+p}{p} m(m-1)\cdots(m-\nu+1)\, B_{m-\nu}^{(q-\nu)}(x \mid \omega). \tag{86}$$

En général, en (86) figurent à la fois les polynomes de Bernoulli d'ordre positif et négatif; remplaçons en (86) q par $(q+1)$ et tenons compte de

$$B_{m-\nu}^{(q+1-\nu)}(x \mid \omega) = \frac{(m-\nu)!}{(q-\nu)!} \frac{d^{q-m}(x-\omega)(x-2\omega)\cdots(x-(q-\nu)\omega)}{dx^{q-m}},$$

égalité valable pour $m \leq q$[1]; dans ce cas, (86) devient

$$R_m^{(p+1,q+1)}(x \mid \omega, k) = m! \frac{d^{q-m}}{dx^{q-m}} \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{-k\omega}{k+1}\right)^{\nu} \binom{\nu+p}{p} \cdot \frac{(x-\omega)(x-2\omega)\cdots(x-(q-\nu)\omega)}{(q-\nu)!}. \tag{87}$$

En particulier pour $m = q$,

$$R_q^{(p+1,q+1)}(x \mid \omega, k) = q! \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{-k\omega}{k+1}\right)^{\nu} \binom{\nu+p}{p} \frac{(x-\omega)(x-2\omega)\cdots(x-(q-\nu)\omega)}{(q-\nu)!}.$$

13. **Polynomes d'ordre continu.** Désignons par p et q deux variables continues, réelles ou complexes, et soit la fonction, holomorphe autour de l'origine,

$$\left(\frac{k+1}{k e^{t\omega}+1}\right)^{p} \left(\frac{e^{t\omega}}{e^{t\omega}-1}\right)^{q}.$$

Son développement en série entière est de la forme

$$1 + \frac{a_1}{1!} t + \frac{a_2}{2!} t^2 + \cdots + \frac{a_\nu}{\nu!} t^\nu + \cdots$$

[1] *Mémoire sur les polynomes de Bernoulli,* pag. 187.

dans laquelle les coefficients a_i dépendent de k, ω, p et q; en la multipliant par la série

$$e^{tx} = 1 + \frac{x}{1} t + \frac{x^2}{2!} t^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!} t^n + \cdots$$

on obtient

$$\left(\frac{k+1}{k e^{t\omega}+1}\right)^p \left(\frac{e^{t\omega}}{e^{t\omega}-1}\right)^q e^{tx} = 1 + \frac{t}{1} R_1^{(p,q)}(x \mid \omega, k) + \cdots + \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p,q)}(x \mid \omega, k) + \cdots \tag{88}$$

avec

$$R_\nu^{(p,q)}(x \mid \omega, k) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} a_\mu x^{\nu-\mu}. \tag{89}$$

Ce polynome de degré ν ainsi déterminé sera dit, par définition, polynome de degré ν et d'ordre continu (p, q). Si l'on dérive (89) par rapport à x,

$$\frac{d R_\nu^{(p,q)}(x \mid \omega, k)}{dx} = \nu \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{\mu} a_\mu x^{\nu-1-\mu} = \nu R_{\nu-1}^{(p,q)}(x \mid \omega, k). \tag{90}$$

On a l'identité

$$k \left(\frac{k+1}{k e^{t\omega}+1}\right)^{p+1} \left(\frac{t\omega}{e^{t\omega}-1}\right)^q e^{t(x+\omega)} + \left(\frac{k+1}{k e^{t\omega}+1}\right)^{p+1} \left(\frac{t\omega}{e^{t\omega}-1}\right)^q e^{tx} =$$

$$= (k+1) \left(\frac{k+1}{k e^{t\omega}+1}\right)^p \left(\frac{t\omega}{e^{t\omega}-1}\right)^q e^{tx},$$

ou encore,

$$k \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p+1,q)}(x+\omega) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p+1,q)}(x) = (k+1) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p,q)}(x)$$

et en identifiant

$$k R_\nu^{(p+1,q)}(x+\omega) + R_\nu^{(p+1,q)}(x) = (k+1) R_\nu^{(p,q)}(x). \tag{91}$$

Considérons encore l'identité

$$\left(\frac{k+1}{k e^{t\omega}+1}\right)^p \left(\frac{t\omega}{e^{t\omega}-1}\right)^{q+1} e^{t(x+\omega)} - \left(\frac{k+1}{k e^{t\omega}+1}\right)^p \left(\frac{t\omega}{e^{t\omega}-1}\right)^{q+1} e^{tx} =$$

$$= t\omega \left(\frac{k+1}{k e^{t\omega}+1}\right)^p \left(\frac{t\omega}{e^{t\omega}-1}\right)^q e^{tx}$$

et en développant

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p,q+1)}(x+\omega) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p,q+1)}(x) = t\,\omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p,q)}(x),$$

d'où l'on déduit par identification

$$R_\nu^{(p,q+1)}(x+\omega) - R_\nu^{(p,q+1)}(x) = \nu\,\omega\, R_{\nu-1}^{(p,q)}(x). \tag{92}$$

Les équations (90), (91) et (92) montrent que le polynome $R_m^{(p,q)}(x)$ d'ordre continu possède les propriétés fondamentales du polynome d'ordre entier, positif ou négatif.

La relation de récurrence (85) a été déduite de (82) en supposant que p et q sont des entiers positifs. Si l'on reprend le calcul à partir de (88), on trouve que (85) subsiste lorsque p et q sont des variables continues.

CHAPITRE III.

Formules sommatoires.[1]

14. **Opération $\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}}$ et première formule sommatoire.** Lorsque $\varphi(x)$ est un polynome de degré m, nous avons trouvé

$$\varphi(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h\,|\,\alpha, k)}{\nu!} \overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} \varphi^{(\nu)}(x). \tag{7}$$

Supposons maintenant que $\varphi(x)$ est une fonction différente d'un polynome et proposons-nous de trouver l'expression du terme reste; on suppose que $\varphi(x)$ admet une dérivée d'ordre $(m+1)$, qui reste continue pour les valeurs de la variable qui entrent en considération. Soit l'intégrale

$$I_{m+1}(z) = \int_h^z \frac{R_m(h-t+z)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{93}$$

Une intégration par parties donne

[1] J'ai exposé les principaux résultats de ce Chapitre dans une Note, *Une formule sommatoire*, Comptes Rendus, T. 189, 1929, pag. 433—436.

$$I_{m+1}(z)-I_m(z)=\frac{R_m(h)}{m!}\varphi^{(m)}(x+z)-\frac{\varphi^{(m)}(x+h)}{m!}R_m(z).$$

Appliquons aux deux membres l'opération $\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}}$ par rapport à la variable z,

$$\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} I_{m+1}(z)-\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} I_m(z)=\frac{R_m(h)}{m!}\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}}\varphi^{(m)}(x+z)-\frac{\varphi^{(m)}(x+h)}{m!}z^m.$$

Faisons $m=1,2,\ldots$ et ajoutons les résultats

$$\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} I_{m+1}(z)-\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} I_1(z)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{R_\nu(h)}{\nu!}\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}}\varphi^{(\nu)}(x+z)-\sum_{\nu=1}^{m}\frac{z^\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(z+h).$$

Mais

$$I_1(z)=\int_h^z\varphi'(x+t)\,dt=\varphi(x+z)-\varphi(x+h),\qquad \overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} I_1(z)=\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}}\varphi(x+z)-\varphi(x+h),$$

et la dernière équation devient

$$\varphi(x+h)=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu(h)}{\nu!}\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}}\varphi^{(\nu)}(x+z)-\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} I_{m+1}(z)-\sum_{\nu=1}^{m}\frac{z^\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(x+h).$$

Si l'on pose

$$T_{m+1}=-\left(\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} I_{m+1}(z)\right)_{z=0}\tag{94}$$

et l'on fait $z=0$ dans la dernière équation, on trouve la formule sommatoire

$$\varphi(x+h)=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu(h)}{\nu!}\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}}\varphi^{(\nu)}(x)+T_{m+1},\tag{95}$$

qui donne le développement d'une fonction arbitraire $\varphi(x)$ en série de polynomes $R_\nu(h)$, $\nu=0,1,\ldots$, l'expression du terme reste étant donnée par (93) et (94). Il est utile de faire remarquer qu'en (93) les variables α, k, h, z, réelles ou complexes, ne sont soumises à aucune restriction.

En nous reportant à la formule (1 ter), *Introduction*,

$$\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}} f(x)=\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{1}k^r f(x+r\alpha),$$

on peut écrire

$$T_{m+1} = -\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{1}\int_{h}^{r\alpha}\frac{k^r R_m(h-t+r\alpha)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{94 bis}$$

Si l'on décompose l'intégrale $\int_{h}^{r\alpha}$ en $\int_{h}^{0}+\int_{0}^{r\alpha}$, on a encore

$$T_{m+1} = \int_{0}^{h}\varphi^{(m+1)}(x+t)\left(\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{1}\frac{k^r R_m(h-t+r\alpha)}{m!}\right)dt -$$

$$-\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{1}\int_{0}^{r\alpha}\frac{k^r R_m(h-t+r\alpha)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt,$$

$$T_{m+1} = \int_{0}^{h}\frac{(h-t)^m}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt - \frac{k}{k+1}\int_{0}^{\alpha}\frac{R_m(h-t+\alpha)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{94 ter}$$

Supposons maintenant que α, h et x sont réels, α positif et $0 \leq h < \alpha$. Désignons par $\overset{*}{R}_m(x)$ la fonction définie pour une valeur réelle x quelconque par l'équation

$$\underset{\alpha}{\overset{1}{\bigwedge}}\overset{*}{R}_m(x) = 0, \tag{96}$$

et qui dans l'intervalle $0 \leq x < \alpha$ est identiquement égale au polynome $R_m(x)$,

$$\overset{*}{R}_m(x) = R_m(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x < \alpha. \tag{96 bis}$$

Considérons de nouveau l'expression (94 bis) du terme complémentaire T_{m+1}; lorsque t varie de h à $r\alpha$, $h-t+r\alpha$ varie de $r\alpha$ à h et comme r est égal à 0 ou 1, il résulte que $0 \leq h-t+r\alpha \leq \alpha$ et l'on peut remplacer en (94 bis) le polynome $R_m(h-t+r\alpha)$ par la fonction $\overset{*}{R}_m(h-t+r\alpha)$,

$$T_{m+1} = -\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{1}\int_{h}^{r\alpha}\frac{k^r \overset{*}{R}_m(h-t+r\alpha)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{97}$$

Décomposons l'intégrale en deux intégrales $\int_{h}^{0}+\int_{0}^{r\alpha}$,

$$T_{m+1}=\int_0^h \frac{\varphi^{(m+1)}(x+t)}{m!}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{1} k^r \overset{*}{R}_m(h-t+r\alpha)\right)dt-$$

$$-\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{1}\int_0^{r\alpha}\frac{k^r\overset{*}{R}_m(h-t+r\alpha)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt,$$

$$T_{m+1}=\int_0^h\frac{\varphi^{(m+1)}(x+t)}{m!}\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}}\overset{*}{R}_m(h-t)\,dt-\frac{k}{k+1}\int_0^{\alpha}\frac{\overset{*}{R}_m(h-t+\alpha)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)dt.$$

Mais en vertu de (96),

$$\overset{1}{\underset{\alpha}{\wedge}}\overset{*}{R}_m(h-t)=0,\qquad -k\overset{*}{R}_m(h-t+\alpha)=\overset{*}{R}_m(h-t),$$

$$T_{m+1}=-\frac{k}{k+1}\int_0^{\alpha}\frac{\overset{*}{R}_m(h-t+\alpha)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt, \tag{97 bis}$$

$$T_{m+1}=\frac{1}{k+1}\int_0^{\alpha}\frac{\overset{*}{R}_m(h-t)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{97 ter}$$

Pour trouver une nouvelle forme du terme T_{m+1}, cherchons la valeur asymptotique de la fonction $\overset{*}{R}_m(x)$ pour les grandes valeurs réelles et négatives de x. Si l'on remplace en (96) x par $x-\alpha$, on a

$$\overset{*}{R}_m(x-\alpha)=-k\overset{*}{R}_m(x),$$

et de proche en proche, s étant un entier positif,

$$\overset{*}{R}_m(x-s\alpha)=(-k)^s\overset{*}{R}_m(x). \tag{98}$$

Faisons tendre s vers l'infini; $R_m(x-s\alpha)$ reste borné ou tend vers zéro suivant que le module de k est égal ou plus petit que l'unité. D'une façon plus précise, pour les grandes valeurs réelles et positives de t, on a

$$|\overset{*}{R}_m(-t)|<C_1 \text{ pour } |k|=1,\quad |\overset{*}{R}_m(-t)|<C_2|k|^{\frac{t}{\alpha}} \text{ pour } |k|<1, \tag{99}$$

C_1 et C_2 étant deux constantes.

Supposons que la dérivée $\varphi^{(m+1)}(t)$ reste continue pour $t \geq a$ et que l'intégrale

$$\int_0^\infty \overset{*}{R}_m(-t)\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt$$

converge. L'intégrale est en particulier absolument convergente si

$$1^\circ \quad \lim_{x\to\infty} x^{1+\varepsilon}\varphi^{(m+1)}(x) = 0 \qquad \text{pour } |k| = 1, \tag{100}$$

$$2^\circ \quad \lim_{x\to\infty} x^{1+\varepsilon}|k|^{\frac{x}{\alpha}}\varphi^{(m+1)}(x) = 0 \qquad \text{pour } |k| < 1, \tag{101}$$

ε étant positif mais arbitrairement petit; la condition 2° a en particulier lieu lorsque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi^{(m+1)}(x)}{x^n} = 0,$$

n étant positif et arbitrairement grand.

En effet, on déduit des conditions 1° et 2°:

$$|\varphi^{(m+1)}(x)| < \frac{M_1}{x^{1+\varepsilon}}, \qquad |k| = 1,$$

$$|\varphi^{(m+1)}(x)| < \frac{M_2}{x^{1+\varepsilon}|k|^{\frac{x}{\alpha}}}, \quad |k| < 1.$$

$$1^\circ \quad \left|\int_0^\infty \overset{*}{R}_m(-t)\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt\right| < M_1\int_0^\infty \frac{C_1}{(x+t)^{1+\varepsilon}}\,dt = \frac{M_1 C_1}{\varepsilon}\frac{1}{x^\varepsilon}, \tag{100 bis}$$

$$2^\circ \quad \left|\int_0^\infty \overset{*}{R}_m(-t)\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt\right| < M_2\int_0^\infty \frac{C_2|k|^{\frac{t}{\alpha}}\,dt}{(x+t)^{1+\varepsilon}|k|^{\frac{t+x}{\alpha}}} =$$

$$= \frac{M_2 C_2}{|k|^{\frac{x}{\alpha}}}\int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^{1+\varepsilon}} = \frac{M_2 C_2}{|k|^{\frac{x}{\alpha}}}\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{x^\varepsilon}. \tag{101 bis}$$

Ceci posé, décomposons l'intégrale (97) en deux intégrales $\int\limits_h^\infty + \int\limits_\infty^{r\alpha}$ et faisons dans la seconde le changement de variable $t = u + r\alpha$,

$$T_{m+1} = -\int\limits_h^\infty \frac{\varphi^{(m+1)}(x+t)}{m!} \underset{\alpha}{\overset{1}{\wedge}} \overset{*}{R}_m(h-t)\,dt -$$

$$- \frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{1} \int\limits_\infty^0 \frac{k^r \overset{*}{R}_m(h-u)}{m!}\,\varphi^{(m+1)}(x+u+r\alpha)\,du,$$

$$T_{m+1} = \int\limits_0^\infty \frac{\overset{*}{R}_m(h-t)}{m!} \underset{\alpha}{\overset{1}{\wedge}} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{102}$$

La formule sommatoire (95) devient

$$\varphi(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h)}{\nu!} \underset{\alpha}{\overset{1}{\wedge}} \varphi^{(\nu)}(x) + \int\limits_0^\infty \frac{\overset{*}{R}_m(h-t)}{m!} \underset{\alpha}{\overset{1}{\wedge}} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt, \tag{103}$$

et si l'on remplace $\varphi(x)$ par $e^{-\eta x}$, $\eta > 0$, on trouve

$$\frac{k+1}{ke^{-\eta\alpha}+1}\,e^{-\eta h} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-\eta)^\nu}{\nu!} R_\nu(h) + (-\eta)^{m+1} \int\limits_0^\infty \frac{\overset{*}{R}_m(h-t)}{m!} e^{-\eta t}\,dt. \tag{104}$$

Au premier membre on a la fonction génératrice des polynomes $R_\nu(x \mid \alpha, k)$ et au second nombre l'expression du terme reste.

Si l'on fait en (40) $t = -\eta$ et $p = 1$, on trouve

$$\frac{k+1}{ke^{-\eta\alpha}+1}\,e^{-\eta h} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^\nu}{\nu!} R_\nu(h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-\eta)^\nu}{\nu!} R_\nu(h) +$$

$$+ (-\eta)^{m+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^\nu}{(\nu+m+1)!} R_{\nu+m+1}(h).$$

On déduit des deux dernières équations

$$\int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}_m(h-t)}{m!} e^{-\eta t}\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^\nu}{(\nu+m+1)!} R_{\nu+m+1}(h)$$

et si l'on dérive les deux membres n fois par rapport à η,

$$\int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}_m(h-t)}{m!} t^n e^{-\eta t}\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^\nu}{(\nu+m+1+n)!} \frac{(n+\nu)!}{\nu!} R_{\nu+m+1+n}(h). \tag{105}$$

Pour $|k|<1$, l'intégrale au premier membre converge pour $\eta\geq 0$; pour $|k|=1$, l'intégrale converge pour $\eta>0$ et diverge pour $\eta=0$; dans tous les cas, l'intégrale représente pour $\eta>0$, une fonction analytique de η, holomorphe dans le point $\eta=0$ et[1]

$$\lim_{\eta\to 0} \int_0^\infty \overset{*}{R}_m(h-t)\, t^n e^{-\eta t}\,dt = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} R_{m+n+1}(h). \tag{106}$$

15. **Opération $\overset{p}{\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p}{\bigwedge}}$ et deuxième formule sommatoire.** Lorsque $\varphi(x)$ est un polynome de degré m, nous avons trouvé

$$\varphi(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}(h\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p)}{\nu!} \overset{p}{\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p}{\bigwedge}} \varphi^{(\nu)}(x) \tag{21}$$

et proposons-nous de trouver l'expression du terme reste lorsque $\varphi(x)$, supposée différente d'un polynome, admet une dérivée d'ordre $(m+1)$ qui reste continue pour les valeurs de la variable qui entrent en considération. Soit l'intégrale

$$I_{m+1}(z) = \int_h^z \frac{R_m^{(p)}(h-t+z)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{107}$$

Une intégration par parties donne

$$I_{m+1}(z) - I_m(z) = \frac{R_m^{(p)}(h)}{m!} \varphi^{(m)}(x+z) - \frac{\varphi^{(m)}(x+h)}{m!} R_m^{(p)}(z),$$

[1] *Sur certaines équations aux différences finies,* pag. 32

et si l'on applique aux deux membres l'opération $\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}}$ par rapport à la variable z,

$$\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} I_{m+1}(z) - \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} I_m(z) = \frac{R_m^{(p)}(h)}{m!} \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} \varphi^{(m)}(x+z) - \frac{\varphi^{(m)}(z+h)}{m!} z^m.$$

On déduit en faisant $m = 1, 2, \ldots$ et en ajoutant les résultats,

$$\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} I_{m+1}(z) - \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} I_1(z) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!} \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} \varphi^{(\nu)}(x+z) - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{z^\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x+h).$$

Mais

$$I_1(z) = \int_h^z \varphi'(x+t)\,dt = \varphi(x+z) - \varphi(x+h), \qquad \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} I_1(z) = \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} \varphi(x+z) - \varphi(x+h),$$

et la dernière équation s'écrit

$$\varphi(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!} \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} \varphi^{(\nu)}(x+z) - \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} I_{m+1}(z) - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{z^\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x+h).$$

Faisons tendre z vers zéro et posons

$$T_{m+1} = -\left(\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} I_{m+1}(z) \right)_{z=0}. \tag{108}$$

Nous obtenons la formule sommatoire

$$\varphi(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!} \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} \varphi^{(\nu)}(x) + T_{m+1}, \tag{109}$$

qui donne le développement d'une fonction arbitraire en série de polynomes $R_\nu^{(p)}(h)$, l'expression du terme reste étant donnée par (107) et (108). En (109), les variables α_i, k_i, h et x, réelles ou complexes, ne sont soumises à aucune restriction.

On a, formule (1 ter), *Introduction*, en posant $\Omega = r_1\alpha_1 + \cdots + r_p\alpha_p$,

$$\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} f(x) = \frac{1}{k_1+1} \cdots \frac{1}{k_p+1} \sum_{r_1=0}^{1} \cdots \sum_{r_p=0}^{1} k_1^{r_1} \ldots k_p^{r_p} f(x+\Omega),$$

et (108) devient

$$T_{m+1} = -\frac{1}{k_1+1}\cdots\frac{1}{k_p+1}\sum_{r_1=0}^{1}\cdots\sum_{r_p=0}^{1} k_1^{r_1}\dots k_p^{r_p}\,.$$

$$\cdot\int_h^{\Omega}\frac{R_m^{(p)}(h-t+\Omega)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \qquad (108\text{ bis})$$

Décomposons l'intégrale $\int_h^{\Omega}$ en deux intégrales $\int_h^0 + \int_0^{\Omega}$; la première intégrale est égale à

$$-\int_h^0\frac{\varphi^{(m+1)}(x+t)}{m!}\underset{\alpha_1\dots\alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} R_m^{(p)}(h-t)\,dt = \int_0^h\frac{(h-t)^m}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt$$

et (108) devient

$$T_{m+1} = \int_0^h\frac{(h-t)^m}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt - \frac{1}{k_1+1}\cdots\frac{1}{k_p+1}\sum_{r_1=0}^{1}\cdots\sum_{r_p=0}^{1} k_1^{r_1}\dots k_p^{r_p}\,.$$

$$\cdot\int_0^{\Omega}\frac{R_m^{(p)}(h-t+\Omega)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \qquad (108\text{ ter})$$

Je dis que le second terme au second membre est égal à

$$-\sum_{\mu=1}^{p}\frac{k_\mu}{k_\mu+1}\int_0^{\alpha_\mu}\frac{R_m^{(\mu)}(h-t+\alpha_\mu)}{m!}\underset{\alpha_1\dots\alpha_{\mu-1}}{\overset{\mu-1}{\bigwedge}}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

En effet, la proposition est vraie pour $p=1$, car on a dans ce cas la formule (95 ter). Supposons-la vraie jusqu'à p et montrons qu'elle subsiste pour $(p+1)$. Décomposons l'intégrale

$$\int_0^{r_1\alpha_1+\dots+r_{p+1}\alpha_{p+1}} = \int_0^{r_1\alpha_1} + \int_{r_1\alpha_1}^{r_1\alpha_1+\dots+r_{p+1}\alpha_{p+1}}$$

et faisons dans la seconde le changement de variable $t=u+r_1\alpha_1$

$$\frac{1}{k_1+1}\sum_{r_1=0}^{1} k_1^{r_1}\Bigg(\frac{1}{k_2+1}\cdots\frac{1}{k_{p+1}+1}\sum_{r_2=0}^{1}\cdots\sum_{r_{p+1}=0}^{1} k_2^{r_2}\dots k_{p+1}^{r_{p+1}}\cdot$$

$$\cdot\Bigg(\int_0^{r_1\alpha_1} R_m^{(p+1)}(h-t+r_1\alpha_1+\cdots+r_{p+1}\alpha_{p+1})\frac{\varphi^{(m+1)}(x+t)}{m!}\,dt+$$

$$+\int_0^{r_2\alpha_2+\cdots+r_{p+1}\alpha_{p+1}} R_m^{(p+1)}(h-u+r_2\alpha_2+\cdots+r_{p+1}\alpha_{p+1})\frac{\varphi^{(m+1)}(x+u+r_1\alpha_1)}{m!}\,du\Bigg)\Bigg)=$$

$$=\frac{k_1}{k_1+1}\int_0^{\alpha_1}\frac{R_m^{(1)}(h-t+\alpha_1)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{k_1+1}\sum_{r_1=0}^{1} k_1^{r_1}\sum_{\mu=2}^{p+1}\frac{k_\mu}{k_\mu+1}\int_0^{\alpha_\mu}\frac{R_m^{(\mu)}(h-t+\alpha_\mu)}{m!}\bigwedge_{\alpha_2\dots\alpha_{\mu-1}}^{\mu-2}\varphi^{(m+1)}(x+r_1\alpha_1+t)\,dt=$$

$$=\frac{k_1}{k_1+1}\int_0^{\alpha_1}\frac{R_m^{(1)}(h-t+\alpha_1)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt+$$

$$+\sum_{\mu=2}^{p+1}\frac{k_\mu}{k_\mu+1}\int_0^{\alpha_\mu}\frac{R_m^{(\mu)}(h-t+\alpha_\mu)}{m!}\bigwedge_{\alpha_2\dots\alpha_{\mu-1}}^{\mu-2}\ \bigwedge_{\alpha_1}^{1}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{p+1}\frac{k_\mu}{k_\mu+1}\int_0^{\alpha_\mu}\frac{R_m^{(\mu)}(h-t+\alpha_\mu\,|\,\alpha_1,k_1;\dots;\alpha_\mu,k_\mu)}{m!}\bigwedge_{\alpha_1\dots\alpha_{\mu-1}}^{\mu-1}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

c. q. f. d.

La formule (108 ter) devient

$$T_{m+1}=\int_0^{h}\frac{(h-t)^m}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt-$$

$$-\sum_{\mu=1}^{p}\frac{k_\mu}{k_\mu+1}\int_0^{\alpha_\mu}\frac{R_m^{(\mu)}(h-t+\alpha_\mu)}{m!}\bigwedge_{\alpha_1\dots\alpha_{\mu-1}}^{\mu-1}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \qquad \text{(108 quater)}$$

Supposons maintenant que les α_i, h et x sont réels, les α_i positifs et $0 \leq h < \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$. Désignons par $\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x)$ la fonction définie pour une valeur réelle x quelconque par l'équation

$$\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x) = 0, \tag{110}$$

et qui dans l'intervalle $0 \leq x < \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$ est identiquement égale au polynome $R_m^{(p)}(x)$,

$$\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x) = R_m^{(p)}(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x < \alpha_1 + \cdots + \alpha_p. \tag{110 bis}$$

La fonction $\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x)$ satisfait à l'équation

$$\underset{\alpha_p}{\overset{1}{\bigwedge}} \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x) = \overset{*}{R}{}_m^{(p-1)}(x), \tag{110 ter}$$

car cette égalité a lieu, en vertu des propriétés (16) du polynome $R_m^{(p)}(x)$, dans l'intervalle $0 \leq x < \alpha_1 + \cdots + \alpha_{p-1}$. Si l'on applique aux deux membres l'opération $\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}{\overset{p-1}{\bigwedge}}$, on trouve

$$\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\bigwedge}} \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x) = \underset{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}}{\overset{p-1}{\bigwedge}} \overset{*}{R}{}_m^{(p-1)}(x)$$

et les deux membres sont identiquement nuls en vertu de la définition (110); l'égalité a donc lieu pour toute valeur réelle de x. On déduit, n étant un entier plus petit que p,

$$\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{\overset{n}{\bigwedge}} \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x \mid \alpha_1, k_1, \ldots; \alpha_p, k_p) = \overset{*}{R}{}_m^{(p-n)}(x \mid \alpha_{n+1}, k_{n+1}; \ldots; \alpha_p, k_p).$$

Reprenons l'expression (108 bis) du terme complémentaire T_{m+1}; lorsque t varie de h à Ω, $h - t + \Omega$ varie de Ω à h et reste dans l'intervalle $0 \leq h - t + \Omega \leq \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$. On peut donc remplacer le polynome $R_m^{(p)}(h - t + \Omega)$ par la fonction $\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h - t + \Omega)$ et si l'on décompose l'intégrale $\int_h^\Omega = \int_h^0 + \int_0^\Omega$,

$$T_{m+1} = -\int_h^0 \frac{\varphi^{(m+1)}(x+t)}{m!} \bigwedge_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{p} \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{k_1+1} \cdots \frac{1}{k_p+1} \sum_{r_1=0}^{1} \cdots \sum_{r_p=0}^{1} k_1^{r_1} \ldots k_p^{r_p} \int_0^{\Omega} \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t+\Omega)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Le premier terme au second membre est nul en vertu de (110),

$$T_{m+1} = -\frac{1}{k_1+1} \cdots \frac{1}{k_p+1} \sum_{r_1=0}^{1} \cdots \sum_{r_p=0}^{1} k_1^{r_1} \ldots k_p^{r_p} \int_0^{\Omega} \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t+\Omega)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \qquad (111)$$

Je dis qu'on a encore

$$T_{m+1} = -\sum_{\mu=1}^{p} \frac{k_\mu}{k_\mu+1} \int_0^{\alpha_\mu} \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(\mu)}(h-t+\alpha_\mu)}{m!} \bigwedge_{\alpha_1 \ldots \alpha_{\mu-1}}^{\mu-1} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \qquad (112)$$

La formule est vraie pour $p=1$, car elle se réduit dans ce cas à (97 bis); on suppose qu'elle est vraie pour p et on montre ensuite qu'elle subsiste pour $(p+1)$, en répétant le raisonnement utilisé pour établir la formule (108 quater).

Lorsque les k_i sont égaux à l'unité, la fonction $\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x)$ se réduit à la fonction $\overset{*}{E}{}_m^{(p)}(x)$ d'Euler-Nörlund et notre formule (112) à la formule (16) de M. Nörlund.[1]

Pour déduire une nouvelle expression du terme complémentaire T_{m+1}, cherchons la valeur asymptotique de la fonction $\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x)$ pour les grandes valeurs réelles et négatives de x.

De l'équation (110 ter) on déduit, en remplaçant x par $x-\alpha_p$,

$$\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x-\alpha_p) = -k_p \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x) + (k_p+1) \overset{*}{R}{}_m^{(p-1)}(x-\alpha_p).$$

On répète l'opération s fois et on déduit par induction complète pour $p \geqq 2$,

$$\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x-s\alpha_p) = (-k_p)^s \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x) + (k_p+1) \sum_{\sigma=1}^{s} (-k_p)^{s-\sigma} \overset{*}{R}{}_m^{(p-1)}(x-\sigma\alpha_p). \qquad (113)$$

[1] *Sur certaines équations aux différences finies*, pag. 22.

Considérons d'abord le cas particulier $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \alpha$, $k_1 = \cdots = k_p = k$; de (98) et (113) on déduit successivement

$$\overset{*}{R}{}_m^{(2)}(x - s\alpha) = (-k)^s \overset{*}{R}{}_m^{(2)}(x) + (k+1) \sum_{\sigma=1}^{s} (-k)^{s-\sigma} (-k)^\sigma \overset{*}{R}{}_m^{(1)}(x) =$$

$$= (-k)^s [\overset{*}{R}{}_m^{(2)}(x) + (k+1) s \overset{*}{R}{}_m^{(1)}(x)], \tag{114}$$

$$\overset{*}{R}{}_m^{(3)}(x - s\alpha) = (-k)^s \overset{*}{R}{}_m^{(3)}(x) + (k+1) \sum_{\sigma=1}^{s} (-k)^{s-\sigma} (-k)^\sigma [\overset{*}{R}{}_m^{(2)}(x) + (k+1)\sigma \overset{*}{R}{}_m^{(1)}(x)] =$$

$$= (-k)^s [\overset{*}{R}{}_m^{(3)}(x) + (k+1) s \overset{*}{R}{}_m^{(2)}(x) + (k+1)^2 \frac{(s+1)s}{2} \overset{*}{R}{}_m^{(1)}(x)], \tag{114 bis}$$

et par induction complète

$$\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x - s\alpha) = (-k)^s \sum_{\mu=0}^{p-1} (k+1)^\mu \binom{s-1+\mu}{\mu} \overset{*}{R}{}_m^{(p-\mu)}(x). \tag{115}$$

Le rapport

$$\frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x - s\alpha)}{(-k)^s}$$

est un polynome de degré $(p-1)$ par rapport à la variable s; on déduit

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x - s\alpha)}{s^{p-1}(-k)^s} = \frac{(k+1)^{p-1}}{(p-1)!} \overset{*}{R}{}_m^{(1)}(x). \tag{116}$$

Lorsque le module de k est égal à l'unité, on déduit pour les grandes valeurs réelles et positives de t, C étant une constante,

$$|\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(-t)| < C t^{p-1}. \tag{117}$$

On montre par induction complète que cette même inégalité a lieu lorsque les α_i d'une part et les k_i d'autre part, sont différents, mais $|k_i| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Supposons en second lieu que tous les k_i sont, en module, plus petits que l'unité. On peut toujours supposer, par raison de symétrie, que les α_i sont numérotés de manière à avoir

$$|k_1|^{\frac{1}{\alpha_1}} \leq |k_2|^{\frac{1}{\alpha_2}} \leq \cdots \leq |k_p|^{\frac{1}{\alpha_p}}. \tag{118}$$

L'égalité (98) donne

$$|\overset{*}{R}{}_m^{(1)}(-t)| < C_{1,0}|k_1|^{\frac{t}{\alpha_1}}.$$

De (113) on déduit de même

$$\overset{*}{R}{}_m^{(2)}(x-s\alpha_2) = (-k_2)^s \overset{*}{R}{}_m^{(2)}(x) + (k_2+1)\sum_{\sigma=1}^{s}(-k_2)^{s-\sigma}\overset{*}{R}{}_m^{(1)}(x-\sigma\alpha_2),$$

$$|\overset{*}{R}{}_m^{(2)}(x-s\alpha_2)| < |k_2|^s |\overset{*}{R}{}_m^{(2)}(x)| + C_1\sum_{\sigma=1}^{s}|k_2|^{s-\sigma}|k_1|^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sigma}.$$

et compte tenu de (118),

$$|\overset{*}{R}{}_m^{(2)}(x-s\alpha_2)| < |k_2|^s C_2 + C_1|k_2|^s s,$$

$$|\overset{*}{R}{}_m^{(2)}(-t)| < (C_{2,0}+C_{2,1}t)|k_2|^{\frac{t}{\alpha_2}}.$$

Par induction complète on arrive finalement à l'inegalité

$$|\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(-t)| < |k_p|^{\frac{t}{\alpha_p}}\sum_{\mu=0}^{p-1}C_{p,\mu}t^{\mu}, \tag{119}$$

où les $C_{p,\mu}$ sont des constantes par rapport à la variable t. En particulier,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(-t)|}{t^{p-1}|k_p|^{\frac{t}{\alpha_p}}} = C_{p,p-1}. \tag{120}$$

Il reste à considérer le cas général; on suppose $|k_1| = |k_2| = \cdots = |k_{p'}| = 1$, $|k_{p'+i}| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, p-p'$, où p' peut avoir l'une des valeurs $1, 2, \ldots, p$. Les formules (117) et (113) donnent

$$|\overset{*}{R}{}_m^{(p')}(-t)| < Ct^{p'-1},$$

$$\overset{*}{R}{}_m^{(p'+1)}(x-s\alpha_{p'+1}) = (-k_{p'+1})^s\overset{*}{R}{}_m^{(p'+1)}(x) + (k_{p'+1}+1)\sum_{\sigma=1}^{s}(-k_{p'+1})^{s-\sigma}\overset{*}{R}{}_m^{(p')}(x-\sigma\alpha_{p'+1}).$$

Posons pour abréger l'écriture $\alpha_{p'+1} = \alpha$, $k_{p'+1} = k$, $-h = \left|\frac{1}{k}\right|$, $p'-1 = n$. On déduit de (117) qu'on peut déterminer un nombre N tel que $|\overset{*}{R}{}_m^{(n+1)}(-\sigma\alpha)| < C(\sigma\alpha)^n$ pur $\sigma \geq N$; la dernière formule devient

$$\overset{*}{R}{}_m^{(p'+1)}(-s\alpha) = (-k)^s[\overset{*}{R}{}_m^{(p'+1)}(0) + (k+1)\sum_{\sigma=1}^{N-1}(-k)^{-\sigma}\overset{*}{R}{}_m^{(n+1)}(-\sigma\alpha)] +$$
$$+ (-k)^s(k+1)\sum_{\sigma=N}^{s}(-k)^{-\sigma}\overset{*}{R}{}_m^{(n+1)}(-\sigma\alpha).$$

Lorsque s augmente indéfiniment, le premier terme au second membre tend vers zéro. D'autre part, un calcul analogue à celui utilisé pour établir la formule (14 bis) donne

$$\left|\sum_{\sigma=N}^{s}(-k)^{-\sigma}\overset{*}{R}{}_m^{(n+1)}(-\sigma\alpha)\right| < C\sum_{\sigma=N}^{s}(-h)^{\sigma}(\sigma\alpha)^n =$$
$$= \frac{C}{h+1}[R_n^{(1)}(N\alpha|\alpha, h) + h(-h)^{s-N}R_n^{(1)}(s\alpha+\alpha\,|\,\alpha, h)].$$

Pour les grandes valeurs de s, le polynome $R_n^{(1)}(s\alpha+\alpha\,|\,\alpha, h)$ est asymptotiquement égal à $\alpha^n(s+1)^n$; si l'on fait donc dans l'avant dernière équation tendre s vers l'infini, on trouve

$$|\overset{*}{R}{}_m^{(p'+1)}(-t)| < Ct^{p'-1},$$

c'est-à-dire que la fonction $|\overset{*}{R}{}_m^{(p'+1)}(-t)|$ satisfait à la même inégalité que la fonction $|\overset{*}{R}{}_m^{(p')}(-t)|$; si l'on répète le raisonnement, on trouve finalement

$$|\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(-t)| < Ct^{p'-1}. \tag{121}$$

Pour déduire une nouvelle forme du terme complémentaire T_{m+1}, supposons que l'intégrale

$$\int_0^\infty \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(-t)\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt$$

converge. L'intégrale est en particulier absolument convergente si

$$1^\circ \quad \lim_{x\to\infty} x^{p'+\varepsilon}\varphi^{(m+1)}(x) = 0, \tag{122}$$

p' étant le nombre des k_i situés sur le cercle unité, les autres k_i, en nombre $p-p'$ étant supposés se trouver à l'intérieur du cercle;

$$2^\circ \quad \lim_{x\to\infty} x^{p+\varepsilon}|k_p|^{\frac{x}{\alpha_p}}\varphi^{(m+1)}(x) = 0, \tag{122 bis}$$

lorsque $p'=0$; dans les deux cas, ε est un nombre positif, mais arbitrairement petit. La condition 2° a en particulier lieu lorsque

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi^{(m+1)}(x)}{x^n}=0,$$

n étant un entier positif, arbitrairement grand.

En effet, on déduit des conditions 1° et 2°:

$$|\varphi^{(m+1)}(x)|<\frac{M_1}{x^{p'+\varepsilon}},\qquad p'>0,$$

$$|\varphi^{(m+1)}(x)|<\frac{M_2}{x^{p+\varepsilon}|k_p|^{\frac{x}{\alpha_p}}},\qquad p'=0.$$

$$1^\circ\quad\left|\int_0^\infty \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(-t)\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt\right|<M_1\int_0^\infty\frac{Ct^{p'-1}\,dt}{(x+t)^{p'+\varepsilon}}<$$

$$<M_1 C\int_0^\infty\frac{dt}{(x+t)^{1+\varepsilon}}=\frac{M_1 C}{\varepsilon}\frac{1}{x^\varepsilon}.$$

$$2^\circ\quad\left|\int_0^\infty \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(-t)\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt\right|<M_2\int_0^\infty\frac{Ct^{p-1}|k_p|^{\frac{t}{\alpha_p}}}{(t+x)^{p+\varepsilon}|k_p|^{\frac{t+x}{\alpha_p}}}\,dt<$$

$$<\frac{M_2 C}{|k_p|^{\frac{x}{\alpha_p}}}\int_0^\infty\frac{dt}{(x+t)^{1+\varepsilon}}=\frac{M_2 C}{|k_p|^{\frac{x}{\alpha_p}}}\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{x^\varepsilon}.$$

Ceci posé, décomposons l'intégrale (111) en deux intégrales $\int_0^\infty+\int_\infty^\Omega$ et faisons dans la seconde le changement de variable $t=u+\Omega$,

$$T_{m+1}=-\int_0^\infty\frac{\varphi^{(m+1)}(x+t)}{m!}\bigwedge_{\alpha_1\ldots\alpha_p}^{p}\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)\,dt-$$

$$-\int_\infty^0\frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-u)}{m!}\bigwedge_{\alpha_1\ldots\alpha_p}^{p}\varphi^{(m+1)}(x+u)\,du.$$

La première intégrale est nulle en vertu de l'équation de définition $\bigwedge\limits_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{p} \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(x) = 0$, et il reste finalement

$$T_{m+1} = \int\limits_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!} \bigwedge\limits_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{p} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{123}$$

La formule sommatoire (109) devient

$$\varphi(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!} \bigwedge\limits_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{p} \varphi^{(\nu)}(x) + \int\limits_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!} \bigwedge\limits_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{p} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{124}$$

Remplaçons $\varphi(x)$ par $e^{-\eta x}$, $\eta > 0$,

$$\frac{k_1+1}{k_1 e^{-\eta\alpha_1}+1} \cdots \frac{k_p+1}{k_p e^{-\eta\alpha_p}+1} e^{-\eta h} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-\eta)^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p)}(h) + (-\eta)^{m+1} \int\limits_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!} e^{-\eta t}\,dt.$$

Nous avons au premier membre la fonction génératrice des polynomes $R_\nu^{(p)}(h|\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p)$ et au second membre, l'expression du terme reste.

Si l'on fait en (40) $t = -\eta$, on a

$$\frac{k_1+1}{k_1 e^{-\eta\alpha_1}+1} \cdots \frac{k_p+1}{k_p e^{-\eta\alpha_p}+1} e^{-\eta h} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p)}(h) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-\eta)^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p)}(h) + (-\eta)^{m+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^\nu}{(\nu+m+1)!} R_{\nu+m+1}^{(p)}(h),$$

et compte tenu des deux dernières équations

$$\int\limits_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!} e^{-\eta t}\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^\nu}{(\nu+m+1)!} R_{\nu+m+1}^{(p)}(h),$$

et si l'on dérive les deux membres, n fois par rapport à la variable η,

$$\int\limits_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!} t^n e^{-\eta t}\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^\nu}{(\nu+m+1+n)!} \frac{(n+\nu)!}{\nu!} R_{\nu+m+1+n}^{(p)}(h).$$

Pour $|k_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$, l'intégrale au premier membre converge pour $\eta \geq 0$; lorsqu'il y a des k_i situés sur le cercle unité, l'intégrale au premier membre converge pour $\eta > 0$ et diverge pour $\eta = 0$; dans tous les cas, l'intégrale représente pour $\eta > 0$ une fonction analytique de η, holomorphe dans le point $\eta = 0$ et

$$\lim_{\eta \to 0} \int_0^\infty \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)\, t^n e^{-\eta t}\, dt = \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!} R_{m+n+1}^{(p)}(h). \tag{125}$$

16. **Opération $\overset{p,\,q}{\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p,\, \beta_1 \ldots \beta_q}{\bigwedge}}$ et troisième formule sommatoire.** Lorsque $\varphi(x)$ est un polynome de degré $(m+q)$, nous avons trouvé

$$\varphi^{(q)}(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m+q} \frac{R_\nu^{(p,\,q)}(h)}{\nu!} \overset{p,\,q}{\bigwedge} \varphi^{(\nu)}(x). \tag{63}$$

Nous nous proposons de trouver l'expression du terme complémentaire lorsque $\varphi(x)$, supposée différente d'un polynome, admet une dérivée d'ordre $(m+1)$, qui reste continue pour les valeurs de la variable qui entrent en considération. Partons de l'intégrale

$$I_{m+1}(z) = \int_h^z \frac{R_{m+q}^{(p,\,q)}(h-t+z)}{(m+q)!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\, dt, \tag{126}$$

et intégrons par parties:

$$I_{m+1}(z) - I_m(z) = \frac{R_{m+q}^{(p,\,q)}(h)}{(m+q)!} \varphi^{(m)}(x+z) - \frac{\varphi^{(m)}(x+h)}{(m+q)!} R_{m+q}^{(p,\,q)}(z).$$

Appliquons aux deux membres l'opération $\overset{p,\,q}{\bigwedge}$ par rapport à la variable z,

$$\overset{p,\,q}{\bigwedge} I_{m+1}(z) - \overset{p,\,q}{\bigwedge} I_m(z) = \frac{R_{m+q}^{(p,\,q)}(h)}{(m+q)!} \overset{p,\,q}{\bigwedge} \varphi^{(m)}(x+z) - \frac{\varphi^{(m)}(x+h)}{m!} z^m.$$

Faisons $m = 1, 2, \ldots$ et ajoutons les résultats

$$\overset{p,\,q}{\bigwedge} I_{m+1}(z) - \overset{p,\,q}{\bigwedge} I_1(z) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{R_{\nu+q}^{(p,\,q)}(h)}{(\nu+q)!} \overset{p,\,q}{\bigwedge} \varphi^{(\nu)}(x+z) - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{z^\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x+h).$$

Calculons $I_1(z)$,

$$I_1(z) = \int_h^z \frac{R_q^{(p,q)}(h-t+z)}{q!} \varphi'(x+t)\,dt = \frac{R_q^{(p,q)}(h)}{q!}\varphi(x+z) -$$

$$-\frac{\varphi(x+h)}{q!} R_q^{(p,q)}(z) + \int_h^z \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h-t+z)}{(q-1)!}\varphi(x+t)\,dt,$$

$$\overset{p,q}{\bigwedge} I_1(z) = \frac{R_q^{(p,q)}(h)}{q!} \overset{p,q}{\bigwedge} \varphi(x+z) - \varphi(x+h) +$$

$$+ \overset{p,q}{\bigwedge} \int_h^z \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h-t+z)}{(q-1)!}\varphi(x+t)\,dt.$$

Posons

$$T_{m+1} = -\Big(\overset{p,q}{\bigwedge} I_{m+1}(z)\Big)_{z=0}, \tag{126 bis}$$

$$\tau_q = -\left(\overset{p,q}{\bigwedge} \int_h^z \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h-t+z)}{(q-1)!}\varphi(x+t)\,dt\right)_{z=0}, \tag{127}$$

éliminons $\overset{p,q}{\bigwedge} I_1(z)$ et faisons ensuite $z=0$; on trouve la formule sommatoire

$$\varphi(x+h) + \tau_q = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_{\nu+q}^{(p,q)}(h)}{(\nu+q)!} \overset{p,q}{\bigwedge} \varphi^{(\nu)}(x) + T_{m+1}, \tag{128}$$

qui donne le développement d'une fonction arbitraire en série de polynomes $R_\nu^{(p,q)}(h)$; les termes complémentaires sont donnés par (126) et (127). En (128), les variables α_i, k_i, β_j, h et x ne sont soumises à aucune restriction. Si l'on pose

$$\Omega = r_1\alpha_1 + \cdots + r_p\alpha_p + s_1\beta_1 + \cdots + s_q\beta_q,$$

on a formule (3 ter), *Introduction*,

$$\overset{p,q}{\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\beta_1\ldots\beta_q}{\bigwedge}} f(x) = \frac{1}{(k_1+1)\cdots(k_p+1)}\,\frac{1}{\beta_1\ldots\beta_q}\,\cdot$$

$$\cdot \sum_{r_1=0}^{1} \cdots \sum_{s_q=0}^{1} k_1^{r_1}\cdots k_p^{r_p}(-1)^{q-s_1-\cdots-s_q} f(x+\Omega),$$

que nous conviendrons d'écrire plus brièvement

$$\bigwedge_{\alpha_1 \ldots \alpha_p, \beta_1 \ldots \beta_q}^{p, q} f(x) = \Sigma f(x + \Omega).$$

Avec cette convention, les termes complémentaires τ_q et T_{m+1} s'écrivent encore

$$\tau_q = -\sum \int_h^{\Omega} \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h - t + \Omega)}{(q-1)!} \varphi(x + t)\, dt, \tag{129}$$

$$T_{m+1} = -\sum \int_h^{\Omega} \frac{R_{m+q}^{(p,q)}(h - t + \Omega)}{(m+q)!} \varphi^{(m+1)}(x + t)\, dt. \tag{130}$$

Décomposons l'intégrale $\int_h^{\Omega} = \int_h^0 + \int_0^{\Omega}$,

$$-\tau_q = \int_h^0 \frac{\varphi(x + t)}{(q-1)!} (\Sigma R_{q-1}^{(p,q)}(h - t + \Omega))\, dt + \sum \int_0^{\Omega} \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h - t + \Omega)}{(q-1)!} \varphi(x + t)\, dt,$$

$$- T_{m+1} = \int_h^0 \varphi^{(m+1)}(x + t) \left(\sum \frac{R_{m+q}^{(p,q)}(h - t + \Omega)}{(m+q)!} \right) dt +$$

$$+ \sum \int_0^{\Omega} \frac{R_{m+q}^{(p,q)}(h - t + \Omega)}{(m+q)!} \varphi^{(m+1)}(x + t)\, dt.$$

Mais

$$\bigwedge^{p,q} R_{q-1}^{(p,q)}(h - t) = 0, \qquad \bigwedge^{p,q} \frac{R_{m+q}^{(p,q)}(h - t)}{(m+q)!} = \frac{(h-t)^m}{m!}$$

et les dernières équations deviennent

$$\tau_q = -\sum \int_0^{\Omega} \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h - t + \Omega)}{(q-1)!} \varphi(x + t)\, dt, \tag{129 bis}$$

$$T_{m+1} = \int_0^h \frac{(h-t)^m}{m!} \varphi^{(m+1)}(x + t)\, dt - \sum \int_0^{\Omega} \frac{R_{m+q}^{(p,q)}(h - t + \Omega)}{(m+q)!} \varphi^{(m+1)}(x + t)\, dt. \tag{130 bis}$$

Reprenons l'expression (127) du terme complémentaire τ_q en posant $\varphi(x) = f^{(q)}(x)$. Soit

$$J_q(z) = \int_h^z \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h-t+z)}{(q-1)!} f^{(q)}(x+t)\,dt = J_{q-1}(z) + \\ + \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h)}{(q-1)!} f^{(q-1)}(x+z) - \frac{f^{(q-1)}(x+h)}{(q-1)!} R_{q-1}^{(p,q)}(z).$$

Faisons $q = 2, 3, \ldots$ et ajoutons les résultats

$$J_q(z) - J_1(z) = \sum_{\nu=1}^{q-1} \frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!} f^{(\nu)}(x+z) - \sum_{\nu=1}^{q-1} \frac{f^{(\nu)}(x+h)}{\nu!} R_\nu^{(p,q)}(z).$$

$$J_1(z) = \int_h^z f'(x+t)\,dt = f(x+z) - f(x+h),$$

$$J_q(z) = \sum_{\nu=0}^{q-1} \frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!} f^{(\nu)}(x+z) - \sum_{\nu=0}^{q-1} \frac{f^{(\nu)}(x+h)}{\nu!} R_\nu^{(p,q)}(z).$$

Appliquons aux deux membres l'opération $\overset{p,q}{\bigwedge}$ par rapport à la variable z; on a $\overset{p,q}{\bigwedge} R_\nu^{(p,q)}(z) = 0$ pour $\nu = 0, 1, \ldots, q-1$ et il reste

$$\tau_q = -\left(\overset{p,q}{\bigwedge} J_q(z)\right)_{z=0} = -\sum_{\nu=0}^{q-1} \frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!} \overset{p,q}{\bigwedge} f^{(\nu)}(x). \tag{131}$$

La formule sommatoire (128) devient

$$f^{(q)}(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m+q} \frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!} \overset{p,q}{\bigwedge} f^{(\nu)}(x) + T_{m+1}. \tag{132}$$

On a

$$\underset{\beta_1 \cdots \beta_q}{\overset{q}{\triangle}} f^{(\nu)}(x) = \int_0^1 dt_1 \cdots \int_0^1 \varphi^{(\nu)}(x + t_1\beta_1 + \cdots + t_q\beta_q)\,dt_q,$$

et la formule (131) s'écrit encore

$$\tau_q = -\sum_{\nu=0}^{q-1} \frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!} \overset{p}{\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\bigwedge}} \int_0^1 dt_1 \ldots \int_0^1 \varphi^{(\nu)}(x + t_1\beta_1 + \cdots + t_q\beta_q)\, dt_q. \qquad (131 \text{ bis})$$

Je dis qu'en (130 bis), le second terme au second membre est égal à

$$\sum \int_0^\Omega \frac{R_{m+q}^{(p,q)}(h - t + \Omega)}{(m+q)!} \varphi^{(m+1)}(x + t)\, dt =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{p} \frac{k_\mu}{k_\mu + 1} \int_0^{\alpha_\mu} \frac{R_{m+q}^{(p,q)}(h - t + \alpha_\mu)}{(m+q)!} \overset{\mu-1,\, q}{\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_{\mu-1},\, \beta_1 \ldots \beta_q}{\bigwedge}} \varphi^{(m+1)}(x + t)\, dt +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{q} \frac{1}{\beta_\nu} \int_0^{\beta_\nu} \frac{B_{m+\nu}^{(\nu)}(h - t + \beta_\nu)}{(m+\nu)!} \overset{\nu-1}{\underset{\beta_1 \ldots \beta_{\nu-1}}{\triangle}} \varphi^{(m+1)}(x + t)\, dt. \qquad (133)$$

La formule a été établie dans le cas $q = 0$, formule (108 quater); pour $q = 1$, on décompose l'intégrale $\int_0^\Omega = \int_0^{s_1\beta_1} + \int_{s_1\beta_1}^{\Omega}$ et on fait dans la seconde, le changement de variable $t = u + s_1\beta_1$. On pose

$$\Omega' = r_1\alpha_1 + \cdots + r_p\alpha_p, \qquad \sum{}' = \frac{1}{k_1 + 1} \cdots \frac{1}{k_p + 1} \sum_{r_1=0}^{1} \cdots \sum_{r_p=0}^{1} k_1^{r_1} \cdots k_p^{r_p}.$$

$$\sum \int_0^\Omega \frac{R_{m+1}^{(p,1)}(h - t + \Omega)}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(x + t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\beta_1} \sum_{s_1=0}^{1} (-1)^{1-s_1} \sum{}' \Biggl(\int_0^{s_1\beta_1} \frac{R_{m+1}^{(p,1)}(h - t + \Omega)}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(x + t)\, dt +$$

$$+ \int_0^{\Omega'} \frac{R_{m+1}^{(p,1)}(h - u + \Omega')}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(x + u + s_1\beta_1)\, du \Biggr) =$$

$$= \frac{1}{\beta_1} \int_0^{\beta_1} \frac{B_{m+1}^{(1)}(h - t + \beta_1)}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(x + t)\, dt +$$

$$+ \sum{}' \int_0^{\Omega'} \frac{R_{m+1}^{(p,1)}(h - u + \Omega')}{(m+1)!} \overset{1}{\underset{\beta_1}{\triangle}} \varphi^{(m+1)}(x + u)\, du.$$

Il suffit de remplacer le second terme par l'expression déduite de (108 quater) et la formule est établie dans le cas $(p, 1)$; on montre ensuite, par induction complète, en répétant le même raisonnement, que la formule (133) est exacte; en effet, on suppose que la formule est vraie dans le cas (p, q) et on considère le cas $(p, q+1)$; on décompose l'intégrale $\int\limits_0^{\Omega}$ en deux intégrales $\int\limits_0^{s_1\beta_1}$ et $\int\limits_{s_1\beta_1}^{\Omega}$ et on fait dans la seconde le changement de variable $u = t + s_1\beta_1$ (on a désigné par Ω la somme $\Omega = r_1\alpha_1 + \cdots + r_p\alpha_p + s_1\beta_1 + \cdots + s_{q+1}\beta_{q+1}$); on trouve finalement que la formule subsiste dans le cas $(p, q+1)$, elle est donc générale.

Supposons maintenant que les α_i, β_j, h et x sont réels, les α_i et β_j positifs et

$$0 \leq h < \alpha_1 + \cdots + \alpha_p + \beta_1 + \cdots + \beta_q.$$

Désignons par $\overset{*}{R}{}_m^{(p,q)}(x)$ la fonction définie pour une valeur réelle x quelconque par l'équation

$$\overset{p,q}{\bigwedge} \overset{*}{R}{}_m^{(p,q)}(x) = 0, \tag{134}$$

et qui dans l'intervalle $0 \leq x < \alpha_1 + \cdots + \alpha_p + \beta_1 + \cdots + \beta_q$ est identiquement égale au polynome $R_m^{(p,q)}(x)$,

$$\overset{*}{R}{}_m^{(p,q)}(x) = R_m^{(p,q)}(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x < \alpha_1 + \cdots + \alpha_p + \beta_1 + \cdots + \beta_q. \tag{134 bis}$$

La fonction $\overset{*}{R}{}_m^{(p,q)}(x)$ satisfait à l'équation

$$\underset{\alpha_p}{\overset{1}{\bigwedge}} \overset{*}{R}{}_m^{(p,q)}(x) = R_m^{(p-1,q)}(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_{p-1}, k_{q-1} \mid \beta_1, \ldots, \beta_q) \tag{134 ter}$$

car cette égalité a lieu, en vertu des propriétés (56) du polynome $R_m^{(p,q)}(x)$, dans l'intervalle $0 \leq x < \alpha_1 + \cdots + \alpha_p + \beta_1 + \cdots + \beta_q$; si on applique aux deux membres l'opération $\overset{p-1,q}{\bigwedge}$, on trouve

$$\overset{p,q}{\bigwedge} \overset{*}{R}{}_m^{(p,q)}(x) = \overset{p-1,q}{\bigwedge} \overset{*}{R}{}_m^{(p-1,q)}(x)$$

et les deux membres sont identiquement nuls en vertu de la définition (134); l'égalité (134 ter) a donc lieu pour toute valeur réelle de x. On déduit, r et s étant des entiers plus petits que p et q respectivement,

$$\bigwedge_{\alpha_1\ldots\alpha_r,\,\beta_1\ldots\beta_s}^{r,s} \overset{*}{R}{}^{(p,q)}_{m+s}(x\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_q) =$$

$$= \frac{(m+s)!}{m!}\overset{*}{R}{}^{(p-r,\,q-s)}_{m}(x\,|\,\alpha_{r+1},\,k_{r+1};\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p\,|\,\beta_{s+1},\ldots,\beta_q).$$

Considérons de nouveau l'expression (130) du terme complémentaire T_{m+1}; lorsque t varie de h à Ω, $h-t+\Omega$ varie de Ω à h et reste dans l'intervalle

$$0 \le h-t+\Omega < \alpha_1+\cdots+\alpha_p+\beta_1+\cdots+\beta_q.$$

On peut donc remplacer en (130) le polynome ordinaire $R^{(p,q)}_{m+q}(h-t+\Omega)$ par la fonction $\overset{*}{R}{}^{(p,q)}_{m+q}(h-t+\Omega)$ et si l'on décompose l'intégrale $\int\limits_h^\Omega$ en deux intégrales $\int\limits_h^0 + \int\limits_0^\Omega$,

$$T_{m+1} = -\int\limits_h^0 \frac{\varphi^{(m+1)}(x+t)}{(m+q)!}\left(\Sigma\,\overset{*}{R}{}^{(p,q)}_{m+q}(h-t+\Omega)\right)dt -$$

$$-\sum\int\limits_0^\Omega \frac{\overset{*}{R}{}^{(p,q)}_{m+q}(h-t+\Omega)}{(m+q)!}\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Mais

$$\Sigma\,\overset{*}{R}{}^{(p,q)}_{m+q}(h-t+\Omega) = \bigwedge^{p,q}\overset{*}{R}{}^{(p,q)}_{m+q}(h-t) = 0$$

et il reste finalement

$$T_{m+1} = -\sum\int\limits_0^\Omega \frac{\overset{*}{R}{}^{(p,q)}_{m+q}(h-t+\Omega)}{(m+q)!}\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{135}$$

Je dis qu'on a encore

$$T_{m+1} = -\sum_{\mu=1}^{p}\frac{k_\mu}{k_\mu+1}\int\limits_0^{\alpha_\mu}\frac{\overset{*}{R}{}^{(\mu,q)}_{m+q}(h-t+\alpha_\mu)}{(m+q)!}\bigwedge_{\alpha_1\ldots\alpha_{\mu-1},\,\beta_1\ldots\beta_q}^{\mu-1,\,q}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{\beta_\nu}\int\limits_0^{\beta_\nu}\frac{\overset{*}{B}{}^{(\nu)}_{m+\nu}(h-t+\beta_\nu)}{(m+\nu)!}\underset{\beta_1\ldots\beta_{\nu-1}}{\overset{\nu-1}{\triangle}}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{135 bis}$$

En effet, elle est vraie pour $q=0$, car elle se réduit dans ce cas à (112); pour montrer qu'elle est générale, on procède par induction complète; on suppose qu'elle est vraie pour (p, q); on considère ensuite le cas $(p, q+1)$, on décompose l'intégrale $\int\limits_0^{\Omega}$ en deux intégrales $\int\limits_0^{s_1\beta_1} + \int\limits_{s_1\beta_1}^{\Omega}$ (on a posé $\Omega = r_1\alpha_1 + \cdots + r_p\alpha_p + s_1\beta_1 + \cdots + s_{q+1}\beta_{q+1}$), on fait dans la seconde le changement de variable $u = t + s_1\beta_1$ et on trouve que la formule subsiste pour le cas $(p, q+1)$; c'est au fond exactement le même raisonnement que celui utilisé pour établir la formule (133).

Lorsque $p=0$, la fonction $\overset{*}{R}{}_m^{(p,\,q)}(x)$ se réduit à la fonction de Bernoulli-Nörlund et notre formule (135 bis) à la formule (13) de M. Nörlund.[1]

Pour déduire des nouvelles expressions pour les termes complémentaires τ_q et T_{m+1}, cherchons la valeur asymptotique de la fonction $\overset{*}{R}{}_m^{(p,\,q)}(x)$ pour les grandes valeurs réelles et négatives de x. On a[2]

$$|\overset{*}{B}{}_m^{(q)}(-t)| < Ct^{q-1}.$$

Si l'on désigne par p' le nombre des k_i situés sur le cercle unité, les autres k_i, au nombre de $(p-p')$ étant supposés se trouver à l'intérieur, et si l'on répète le raisonnement utilisé pour établir l'inégalité (121), on trouve

$$|\overset{*}{R}{}_m^{(p,\,q)}(-t)| < Ct^{p'+q-1}. \tag{136}$$

Supposons que l'intégrale

$$\int\limits_0^{\infty} \overset{*}{R}{}_m^{(p,\,q)}(-t)\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt$$

converge; elle est en particulier absolument convergente si

$$\lim_{x\to\infty} x^{p'+q+\varepsilon}\,\varphi^{(m+1)}(x) = 0, \tag{137}$$

ε étant arbitrairement petit, mais positif. En effet, on déduit

[1] *Sur certaines équations aux différences finies*, pag. 41.

[2] *Sur certaines équations aux différences finies*, pag. 40.

$$|\varphi^{(m+1)}(x)| < \frac{M}{x^{p'+q+\varepsilon}}$$

$$\left|\int_0^\infty \overset{*}{R}{}_m^{(p,q)}(-t)\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt\right| < M\int_0^\infty \frac{C\,t^{p'+q-1}}{(x+t)^{p'+q+\varepsilon}}\,dt <$$

$$< M\,C\int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^{1+\varepsilon}} = \frac{M\,C}{\varepsilon}\,\frac{1}{x^\varepsilon}\,.$$

Considérons de nouveau l'intégrale (135), décomposons-la en deux intégrales $\int_0^\infty + \int_\infty^\Omega$ et faisons dans la seconde le changement de variable $t = u + \Omega$,

$$T_{m+1} = -\int_0^\infty \frac{\varphi^{(m+1)}(x+t)}{(m+q)!}\Big(\overset{p,q}{\wedge}\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)\Big)\,dt -$$

$$-\int_\infty^0 \frac{\overset{*}{R}{}_{m+1}^{(p,q)}(h-u)}{(m+q)!}\overset{p,q}{\wedge}\varphi^{(m+1)}(x+u)\,du.$$

Mais dans la première intégrale la parenthèse est identiquement nulle et il reste

$$T_{m+1} = \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!}\overset{p,q}{\wedge}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{138}$$

Considérons aussi l'expression (129 bis) de τ_q et supposons que l'intégrale

$$\int_0^\infty R_{q-1}^{(p,q)}(-t)\,\varphi(x+t)\,dt$$

a un sens; on montre comme plus haut que l'intrégrale est absolument convergente si

$$\lim_{x\to\infty} x^{q+\varepsilon}\varphi(x) = 0;$$

décomposons l'intégrale $\int_0^\Omega = \int_0^\infty + \int_\infty^\Omega$ et faisons dans la seconde le changement de variable $t = u + \Omega$,

$$\tau_q = -\int_0^\infty \frac{\varphi(x+t)}{(q-1)!}\left(\Sigma R_{q-1}^{(p,q)}(h-t+\Omega)\right)dt - \int_\infty^0 \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h-u)}{(q-1)!}\left(\Sigma \varphi(x+u+\Omega)\right)du =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\varphi(x+t)}{(q-1)!}\left(\overset{p,q}{\triangle} R_{q-1}^{(p,q)}(h-t)\right)dt + \int_0^\infty \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h-t)}{(q-1)!} \overset{p,q}{\triangle} \varphi(x+t)\,dt.$$

Mais $R_{q-1}^{(p,q)}(h-t)$ est un polynome de degré $(q-1)$ et $\overset{p,q}{\triangle} R_{q-1}^{(p,q)}(h-t) = 0$; il reste

$$\tau_q = \int_0^\infty \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h-t)}{(q-1)!} \overset{p,q}{\triangle} \varphi(x+t)\,dt. \tag{139}$$

La formule sommatoire (128) devient, compte tenu de (138) et (139),

$$\varphi(x+h) + \int_0^\infty \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h-t)}{(q-1)!} \overset{p,q}{\triangle} \varphi(x+t)\,dt = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_{\nu+q}^{(p,q)}(h)}{(\nu+q)!} \overset{p,q}{\triangle} \varphi^{(\nu)}(x) +$$
$$+ \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!} \overset{p,q}{\triangle} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt, \tag{140}$$

et la formule sommatoire (132) devient

$$f^{(q)}(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m+q} \frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!} \overset{p,q}{\triangle} f^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!} \overset{p,q}{\triangle} f^{(m+q+1)}(x+t)\,dt. \tag{140 bis}$$

Remplaçons en (140 bis) $f(x)$ par $e^{-\eta x}$, $\eta > 0$; on obtient en divisant par $e^{-\eta x}$,

$$\frac{k_1+1}{k_1 e^{-\eta\alpha_1}+1} \cdots \frac{k_p+1}{k_p e^{-\eta\alpha_p}+1} \frac{\beta_1}{1-e^{-\eta\beta_1}} \cdots \frac{\beta_q}{1-e^{-\eta\beta_q}} \eta^q e^{-\eta h} =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{m+q} \frac{(-\eta)^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p,q)}(h) + (-\eta)^{m+q+1} \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!} e^{-\eta t}\,dt. \tag{141}$$

Dans le premier membre on a la fonction génératrice des polynomes $R_\nu^{(p,q)}(h)$ et dans le second, l'expression du terme reste.

Remplaçons maintenant dans la formule (79 bis) t par $-\eta$,

$$\frac{k_1+1}{k_1 e^{-\eta\alpha_1}+1}\cdots\frac{k_p+1}{k_p e^{-\eta\alpha_p}+1}\,\frac{\beta_1}{1-e^{-\eta\beta_1}}\cdots\frac{\beta_q}{1-e^{-\eta\beta_q}}\eta^q e^{-\eta h}=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{m+q}\frac{(-\eta)^\nu}{\nu!}R_\nu^{(p,q)}(h)+(-\eta)^{m+q+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-\eta)^\nu}{(\nu+m+q+1)!}R^{(p,q)}_{\nu+m+q+1}(h).$$

On déduit des deux dernières équations

$$\int_0^\infty\frac{\overset{*}{R}{}^{(p,q)}_{m+q}(h-t)}{(m+q)!}e^{-\eta t}dt=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-\eta)^\nu}{(\nu+m+q+1)!}R^{(p,q)}_{\nu+m+q+1}(h)$$

et si l'on dérive les deux membres n fois par rapport à la variable η,

$$\int_0^\infty\frac{\overset{*}{R}{}^{(p,q)}_{m+q}(h-t)}{(m+q)!}t^n e^{-\eta t}dt=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-\eta)^\nu}{(\nu+n+m+q+1)!}\,\frac{(n+\nu)!}{\nu!}\,R^{(p,q)}_{\nu+n+m+q+1}(h).$$

L'intégrale au premier membre converge pour $\eta>0$ et diverge pour $\eta=0$; dans tous les cas, l'intégrale représente pour $\eta>0$, une fonction analytique de η, holomorphe dans le point $\eta=0$ et

$$\lim_{\eta\to0}\int_0^\infty\overset{*}{R}{}^{(p,q)}_{m+q}(h-t)\,t^n e^{-\eta t}dt=\frac{(m+q)!\;n!}{(m+q+n+1)!}R^{(p,q)}_{m+q+n+1}(h).$$

17. **Remarques.** 1°. On peut établir, comme plus haut, une formule sommatoire plus générale, en utilisant à la place des opérations $\overset{1}{\wedge}$, $\overset{p}{\wedge}$, $\overset{p,q}{\wedge}$, une opération $\wedge$ linéaire quelconque, c'est-à-dire satisfaisant à la seule condition

$$\wedge(af(x)+bg(x))=a\wedge f(x)+b\wedge g(x),$$

où a et b sont deux constantes, $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions arbitraires.

2°. Les trois formules sommatoires peuvent servir à décider de la convergence de certaines séries simples ou multiples.

Nous ne développons pas ici ces deux remarques, pour nous tenir strictement à notre sujet.

CHAPITRE IV.

Théorèmes d'existence de la solution principale.

18. **Opération $\overset{1}{\wedge}$ et première équation.** Lorsque $\varphi(x)$ est un polynome de degré m, nous avons trouvé pour la solution de l'équation

$$\mathop{\bigwedge}_{\alpha}^{1} F(x) = \varphi(x), \tag{141}$$

le polynome (5)

$$F(x+h) = \varphi(x+R(h)) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x).$$

Nous allons supposer maintenant que $\varphi(x)$ est une fonction différente d'un polynome; l'équation (141) admet une infinité de solutions; parmi cette infinité de solutions, nous allons fixer l'attention sur la solution donnée par la méthode des approximations successives. Nous commençons par chercher une solution formelle

$$F(x) = F_0(x) + k F_1(x) + \cdots + k^n F_n(x) + \cdots$$

On déduit par identification

$$F(x) = (k+1) \sum_{r=0}^{\infty} (-k)^r \varphi(x+r\alpha). \tag{142}$$

Pour décider de la convergence de la série (142), il faut faire des hypothèses sur α, k et la fonction $\varphi(x)$.

Supposons d'abord $\alpha > 0$ et $|k| < 1$; on suppose que $\varphi(x)$ admet une dérivée d'ordre $(m+1)$ qui reste continue pour $x \geq a$ et qui satisfait à la condition

$$\lim_{x \to \infty} x^{1+\varepsilon} |k|^{\frac{x}{\alpha}} \varphi^{(m+1)}(x) = 0, \tag{101}$$

ε étant positif, mais arbitrairement petit; la condition (101) a en particulier lieu lorsque

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi^{(m+1)}(x)}{x^n} = 0,$$

n étant positif, mais arbitrairement grand.

La fonction $F(x)$ est définie par (142) ou par la limite

$$F(x) = \lim_{\mu \to \infty} (k+1) \sum_{r=0}^{\mu-1} (-k)^r \varphi(x+r\alpha). \tag{142 bis}$$

Transformons la somme (142 bis) à l'aide de la formule sommatoire (95), le terme complémentaire ayant l'expression (97 ter). Supposons, pour simplifier l'écriture, que μ est un entier positif impair; on a

$$(k+1)\bigwedge_{\alpha}^{1}\sum_{r=0}^{\mu-1}(-k)^r f(x+r\alpha)=k^\mu f(x+\mu\alpha)+f(x).$$

La formule (95) devient

$$(k+1)\sum_{r=0}^{\mu-1}(-k)^r\varphi(x+h+r\alpha)=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu(h)}{\nu!}(k^\mu\varphi^{(\nu)}(x+\mu\alpha)+\varphi^{(\nu)}(x))+$$

$$+\int_0^\alpha\frac{\overset{*}{R}_m(h-t)}{m!}\sum_{r=0}^{\mu-1}(-k)^r\varphi^{(m+1)}(x+t+r\alpha)\,dt. \tag{143}$$

La dernière intégrale est encore égale à

$$\int_0^{\mu\alpha}\frac{\overset{*}{R}_m(h-t)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Montrons que la somme

$$\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu(h)}{\nu!}k^\mu\varphi^{(\nu)}(x+\mu\alpha)$$

tend uniformément vers zéro lorsque μ tend vers l'infini, si

$$\lim_{x\to\infty}x^\varepsilon|k|^{\frac{x}{\alpha}}\varphi^{(\nu)}(x)=0,\qquad \nu=0,\ 1,\ldots,\ m. \tag{144}$$

Les conditions (101) et (144) ont en particulier lieu lorsque

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi^{(\nu)}(x)}{x^n}=0,\qquad \nu=0,\ 1,\ldots,\ m+1, \tag{144 bis}$$

n étant positif et arbitrairement grand.

En effet, de la condition (144) on déduit

$$|k|^{\frac{x}{\alpha}}|\varphi^{(\nu)}(x)|<\frac{M}{x^\varepsilon}$$

$$|k^\mu\varphi^{(\nu)}(x+\mu\alpha)|=|k|^{-\frac{x}{\alpha}}|k|^{\frac{y}{\alpha}}|\varphi^{(\nu)}(y)|<\frac{M|k|^{-\frac{x}{\alpha}}}{y^\varepsilon}$$

et lorsque μ tend vers l'infini, c'est-à-dire $y=x+\mu\alpha$ tend vers l'infini, $k^\mu\varphi^{(\nu)}(x+\mu\alpha)$ tend vers zéro et la proposition est établie. On a donc finalement

$$F(x+h) = \lim_{\mu \to \infty} (k+1) \sum_{r=0}^{\mu-1} (-k)^r \varphi(x+h+r\alpha) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h \mid \alpha, k)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x) +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}_m(h-t \mid \alpha, k)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{145}$$

La dernière intégrale a évidemment un sens, comme il résulte de (101 bis).

La fonction $F(x)$ ainsi définie et que nous allons désigner par $F^{(1)}(x \mid \alpha, k)$ ou encore par $F(x \mid \alpha, k)$, s'appelle la solution principale de l'équation (141); c'est une fonction continue de x, dans un intervalle fini quelconque $a \leq x \leq b$, car la convergence de (145) a lieu uniformément.

Suppons en second lieu $\alpha > 0$, $k = e^{i\varkappa}$, mais $k \neq -1$; on suppose que $\varphi(x)$ admet une dérivée d'ordre $(m+1)$ qui reste continue pour $x \geq a$ et qui satisfait à la condition

$$\lim_{x \to \infty} x^{1+\varepsilon} \varphi^{(m+1)}(x) = 0, \tag{100}$$

ε étant positif, mais arbitrairement petit.

La série (142) est dans ce cas, en général, divergente. Il paraît naturel de poser $k = \varrho e^{i\varkappa}$, avec $0 < \varrho < 1$ et nous sommes ramenés au cas précédent. Nous définissons ainsi la fonction $F_\varrho(x+h)$ par l'équation (145),

$$F_\varrho(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h \mid \alpha, \varrho e^{i\varkappa})}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}_m(h-t \mid \alpha, \varrho e^{i\varkappa})}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Elle dépend de ϱ; il reste à prouver que $F_\varrho(x+h)$ tend vers une limite lorsque ϱ tend vers $+1$ et cette limite sera dite, par définition, solution principale de l'équation (141) pour $k = e^{i\varkappa}$; nous utilisons au fond la méthode de M. Borel pour la sommation d'une série divergente.

On peut écrire

$$F_\varrho(x+h \mid \alpha, \varrho e^{i\varkappa}) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h \mid \alpha, \varrho e^{i\varkappa})}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x) +$$

$$+ \lim_{r \to \infty} \int_0^{r\alpha+\alpha} \frac{\overset{*}{R}_m(h-t \mid \alpha, \varrho e^{i\varkappa})}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

La dernière intégrale se décompose on $(r+1)$ intégrales,

$$\int_0^{r\alpha+\alpha} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{2\alpha} + \cdots + \int_{r\alpha}^{r\alpha+\alpha}.$$

Faisons dans la deuxième intégrale le changement de variable $t = u + \alpha$, dans la troisième intégrale le changement de variable $t = u + 2\alpha$ et ainsi de suite:

$$\int_{\alpha}^{2\alpha} \overset{*}{R}_m(h-t)\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt = \int_0^{\alpha} \overset{*}{R}_m(h-u-\alpha)\,\varphi^{(m+1)}(x+u+\alpha)\,du =$$

$$= \int_0^{\alpha} \overset{*}{R}_m(h-u)(-k)\,\varphi^{(m+1)}(x+u+\alpha)\,du,$$

$$\int_{r\alpha}^{r\alpha+\alpha} \overset{*}{R}_m(h-t)\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt = \int_0^{\alpha} \overset{*}{R}_m(h-u)(-k)^r\,\varphi^{(m+1)}(x+u+r\alpha)\,du,$$

$$\int_0^{r\alpha+\alpha} \overset{*}{R}_m(h-t)\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\alpha} \overset{*}{R}_m(h-u)\left[\varphi^{(m+1)}(x+u) - k\,\varphi^{(m+1)}(x+u+\alpha) + \cdots + (-k)^r\,\varphi^{(m+1)}(x+u+r\alpha)\right] du.$$

La condition (100) montre que la série entière par rapport à ϱ

$$\varphi^{(m+1)}(x+u) - \varrho e^{i\varkappa}\,\varphi^{(m+1)}(x+u+\alpha) + \cdots + (-\varrho e^{i\varkappa})^r\,\varphi^{(m+1)}(x+u+r\alpha) + \cdots$$

est uniformément et absolument convergente pour $\varrho \leq 1$. On déduit du théorème d'Abel

$$\lim_{\varrho\to 1}\left[\varphi^{(m+1)}(x+u) - \varrho e^{i\varkappa}\,\varphi^{(m+1)}(x+u+\alpha) + \cdots + (-\varrho e^{i\varkappa})^r\,\varphi^{(m+1)}(x+u+r\alpha) + \cdots\right] =$$

$$= \varphi^{(m+1)}(x) - e^{i\varkappa}\,\varphi^{(m+1)}(x+u+\alpha) + \cdots + (-e^{i\varkappa})^r\,\varphi^{(m+1)}(x+u+r\alpha) + \cdots$$

ce que l'on peut écrire

$$\lim_{\varrho\to 1}\lim_{r\to\infty}\left[\varphi^{(m+1)}(x+u) - \varrho e^{i\varkappa}\,\varphi^{(m+1)}(x+u+\alpha) + \cdots + (-\varrho e^{i\varkappa})^r\,\varphi^{(m+1)}(x+u+r\alpha)\right] =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\lim_{\varrho\to 1}\left[\varphi^{(m+1)}(x+u) - \varrho e^{i\varkappa}\,\varphi^{(m+1)}(x+u+\alpha) + \cdots + (-\varrho e^{i\varkappa})^r\,\varphi^{(m+1)}(x+u+r\alpha)\right].$$

La convergence étant uniforme, on peut intégrer terme à terme, d'où l'on déduit

$$\lim_{\varrho\to 1}\lim_{r\to\infty}\int_0^{\alpha}\frac{R_m(h-t\mid\alpha,\,\varrho e^{ix})}{m!}[\varphi^{(m+1)}(x+t)-\varrho e^{ix}\varphi^{(m+1)}(x+t+\alpha)+\cdots$$
$$+(-\varrho e^{ix})^r\varphi^{(m+1)}(x+t+r\alpha)]\,dt=$$
$$=\lim_{r\to\infty}\int_0^{\alpha}\frac{\overset{*}{R}_m(h-t\mid\alpha,\,e^{ix})}{m!}[\varphi^{(m+1)}(x+t)-e^{ix}\varphi^{(m+1)}(x+t+\alpha)+\cdots$$
$$+(-e^{ix})^r\varphi^{(m+1)}(x+t+r\alpha)]\,dt=$$
$$=\lim_{r\to\infty}\int_0^{r\alpha+\alpha}\frac{\overset{*}{R}_m(h-t\mid\alpha,\,e^{ix})}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt=\int_0^{\infty}\frac{\overset{*}{R}_m(h-t\mid\alpha,\,e^{ix})}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

L'intégrale au second membre a évidemment un sens, comme nous l'avons montré plus haut, (100 bis). La solution principale $F(x+h\mid\alpha,\,e^{ix})$ est par conséquent

$$F(x+h\mid\alpha,\,e^{ix})=\lim_{\varrho\to 1}F_\varrho(x+h\mid\alpha,\,\varrho e^{ix})=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu(h\mid\alpha,\,e^{ix})}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(x)+$$
$$+\int_0^{\infty}\frac{\overset{*}{R}_m(h-t\mid\alpha,\,e^{ix})}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{146}$$

Nous sommes arrivés à la solution principale (146) en partant de la solution formelle (142), divergente en général, que nous avons sommée en introduisant le facteur de convergence $a_r=(-\varrho)^r$, $\varrho<1$ et en faisant ensuite tendre ϱ vers $+1$, par valeurs réelles et croissantes. On peut arriver au même résultat en utilisant toute autre méthode de sommation, par exemple la méthode exponentielle; on pose $a_r=e^{-\eta(x+r\alpha)}$, $\eta>0$ et on fait ensuite tendre η vers zéro par valeurs positives et décroissantes.

Posons donc $\alpha>0$, $k=e^{ix}$, $\eta>0$,

$$F_\eta(x+h)=(k+1)\sum_{r=0}^{\infty}(-k)^r\varphi(x+h+r\alpha)e^{-\eta(x+h+r\alpha)}. \tag{147}$$

De l'hypothèse (100) on déduit

$$\lim_{x\to\infty}\varphi^{(m+1)}(x)=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\varphi^{(m+1-\nu)}(x)}{x^\nu}=0,\quad \nu=1,2,\ldots,m+1$$

et en particulier

$$\lim \frac{\varphi(x)}{x^{m+1}} = 0.$$

La série (147) est donc convergente pour $\eta > 0$. Remplaçons en (143) $\varphi(x)$ par $\varphi(x)e^{-\eta x}$,

$$(k+1)\sum_{r=0}^{\mu-1}(-k)^r \varphi(x+h+r\alpha)\, e^{-\eta(x+h+r\alpha)} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h)}{\nu!}\left[D_x^\nu k^\mu \varphi(x+\mu\alpha)\, e^{-\eta(x+\mu\alpha)} + D_x^\nu \varphi(x)\, e^{-\eta x}\right] +$$

$$+ \int_0^{\mu\alpha} \frac{\overset{*}{R}_m(h-t)}{m!} D_x^{m+1} \varphi(x+t)\, e^{-\eta(x+t)}\, dt.$$

Laissons η fixe et faisons tendre μ vers l'infini,

$$\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h)}{\nu!} k^\mu D_x^\nu \varphi(x+\mu\alpha)\, e^{-\eta(x+\mu\alpha)} = \lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h)}{\nu!} \cdot$$

$$\cdot\, k^\mu \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} (-\eta)^s \varphi^{(\nu-s)}(x+\mu\alpha)\, e^{-\eta(x+\mu\alpha)} = 0,$$

car

$$\lim_{t\to\infty} \varphi^{(\nu-s)}(t)\, e^{-\eta t} = \lim_{t\to\infty} t^{m+1-\nu+s} e^{-\eta t} = 0.$$

On a donc

$$F_\eta(x+h) = \lim_{\mu\to\infty} (k+1) \sum_{r=0}^{\mu-1} (-k)^r \varphi(x+r\alpha)\, e^{-\eta(x+r\alpha)} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h)}{\nu!} \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} (-\eta)^s \varphi^{(\nu-s)}(x)\, e^{-\eta x} +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}_m(h-t)}{m!} \sum_{s=0}^{m+1} \binom{m+1}{s} (-\eta)^s \varphi^{(m+1-s)}(x+t)\, e^{-\eta(x+t)}\, dt.$$

Si l'on pose

$$I_s(\eta) = \binom{m+1}{s} \frac{(-\eta)^s}{m!} \int_0^\infty \overset{*}{R}_m(h-t)\, \varphi^{(m+1-s)}(x+t)\, e^{-\eta(x+t)}\, dt$$

et l'on fait tendre η vers zéro, on a pour la solution principale $F(x+h)$,

$$F(x+h \mid \alpha, e^{i\varkappa}) = \lim_{\eta \to 0} F_\eta(x+h \mid \alpha, e^{i\varkappa}) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x) +$$

$$+ \lim_{\eta \to 0} \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}_m(h-t)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t) e^{-\eta(x+t)} dt + \lim_{\eta \to 0} \sum_{s=1}^{m+1} I_s(\eta).$$

Nous allons montrer que $I_s(\eta)$ tend vers zéro avec η si $s \geqq 1$; considérons à cet effet l'intégrale

$$\psi(z) = \int_z^\infty \overset{*}{R}_m(h-t) e^{-\eta t} dt.$$

On décompose l'intégrale en une somme d'intégrales $\int_z^{z+\alpha} + \int_{z+\alpha}^{z+2\alpha} + \cdots$ et l'on fait le changement de variable $t = z + u$,

$$\psi(z) = e^{-\eta z} \int_0^\alpha \overset{*}{R}_m(h-z-u) e^{-\eta u} du + e^{-\eta z} \int_\alpha^{2\alpha} \overset{*}{R}_m(h-z-u) e^{-\eta u} du + \cdots$$

$$\psi(z) = e^{-\eta z} \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_{\mu\alpha}^{\mu\alpha+\alpha} \overset{*}{R}_m(h-z+u) e^{-\eta u} du.$$

On fait dans l'intégrale le changement de variable $t+\mu\alpha = u$ et l'on remplace $\overset{*}{R}_m(h-z-t-\mu\alpha)$ par $(-k)^\mu \overset{*}{R}_m(h-z-t)$, formule (98),

$$\psi(z) = e^{-\eta z} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-k e^{-\eta\alpha})^\mu \int_0^\alpha \overset{*}{R}_m(h-z-t) e^{-\eta t} dt,$$

$$\psi(z) = \frac{e^{-\eta z}}{1 + k e^{-\eta\alpha}} \int_0^\alpha \overset{*}{R}_m(h-z-t) e^{-\eta t} dt.$$

Faisons tendre η vers zéro,

$$\lim_{\eta \to 0} \psi(z) = \frac{1}{k+1} \int_0^\alpha \overset{*}{R}_m(h-z-t) dt = \frac{\overset{*}{R}_{m+1}(h-z)}{m+1}.$$

Quant z augmente indéfiniment, $\overset{*}{R}_m(h-z-t)$ reste borné, donc

$$|\psi(z)| < Ce^{-\eta z}.$$

En particulier lorsque η reste fixe et z augmente indéfiniment, le produit $z^r\psi(z)$ tend vers zéro, quelque soit r.

De l'expression de $\psi(z)$ on déduit que sa différentielle est égale à

$$d\psi(z) = -\overset{*}{R}_m(h-z)\,e^{-\eta z}\,dz.$$

Soit s l'un des entiers $1, 2, \ldots, m+1$ et intégrons par parties $I_s(\eta)$,

$$I_s(\eta) = -\binom{m+1}{s}\frac{(-\eta)^s}{m!}e^{-\eta x}\int\limits_0^\infty \varphi^{(m+1-s)}(x+t)\,d\psi(t) =$$

$$= -\binom{m+1}{s}\frac{(-\eta)^s}{m!}e^{-\eta x}\left[\varphi^{(m+1-s)}(x+t)\,\psi(t)\right]_0^\infty +$$

$$+\binom{m+1}{s}\frac{(-\eta)^s}{m!}e^{-\eta x}\int\limits_0^\infty \varphi^{(m+2-s)}(x+t)\,\psi(t)\,dt.$$

Il résulte de l'hypothèse (100) que pour t suffisamment grand on a

$$|\varphi^{(m+1-s)}(x+t)| < Mt^s.$$

Le produit $t^s\psi(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini et $\psi(0)$ est fini, donc

$$I_s(\eta) = \binom{m+1}{s}\frac{(-\eta)^s}{m!}e^{-\eta x}\varphi^{(m+1-s)}(x)\,\psi(0) +$$

$$+\binom{m+1}{s}\frac{(-\eta)^s}{m!}e^{-\eta x}\int\limits_0^\infty \varphi^{(m+2-s)}(x+t)\,\psi(t)\,dt.$$

Dans la dernière intégrale on fait le changement de variable $x+t=u$,

$$\left|e^{-\eta x}\int\limits_0^\infty \varphi^{(m+2-s)}(x+t)\,\psi(t)\,dt\right| < C\int\limits_x^\infty |\varphi^{(m+2-s)}(u)|\,e^{-\eta u}\,du.$$

Nous avons vu que

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\varphi^{(m+2-s)}(u)}{u^{s-1}}=0,$$

ce qui veut dire que ε étant choisi arbitrairement petit, on peut déterminer N suffisamment grand pour avoir

$$|\varphi^{(m+2-s)}(u)|<\varepsilon u^{s-1} \text{ lorsque } u>N.$$

On a donc

$$\int_x^\infty |\varphi^{(m+2-s)}(u)|\,e^{-\eta u}\,du<\int_x^N|\varphi^{(m+2-s)}(u)|\,du+\varepsilon\int_N^\infty u^{s-1}\,e^{-\eta u}\,du.$$

On pose dans la dernière intégrale $\eta u=t$,

$$\varepsilon\int_N^\infty u^{s-1}\,e^{-\eta u}\,du<\varepsilon\int_0^\infty u^{s-1}\,e^{-\eta u}\,du=\frac{\varepsilon}{\eta^s}\int_0^\infty t^{s-1}\,e^{-t}\,dt.$$

Finalement

$$|I_s(\eta)|<\eta^s\binom{m+1}{s}\frac{1}{m!}|e^{-\eta x}\varphi^{(m+1-s)}(x)\,\psi(0)|+\eta^s\binom{m+1}{s}\frac{C}{m!}\int_x^N|\varphi^{(m+2-s)}(u)|\,du+$$
$$+\varepsilon\binom{m+1}{s}\frac{C}{m!}\int_0^\infty t^{s-1}\,e^{-t}\,dt.$$

ε pouvant être choisi arbitrairement petit, on déduit que $I_s(\eta)$ tend uniformément vers zéro avec η, ce qu'il fallait démontrer.

Il reste à considérer

$$\lim_{\eta\to 0}\int_0^\infty \overset{*}{R}_m(h-t)\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,e^{-\eta(x+t)}\,dt.$$

Posons à cet effet,

$$f(z)=\int_z^\infty \overset{*}{R}_m(h-t)\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

L'intégrale converge uniformément car on a

$$\int_{r\alpha}^{r\alpha+s\alpha+\alpha}\overset{*}{R}_m(h-t)\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt=\int_0^\alpha \overset{*}{R}_m(h-t)\sum_{\nu=r}^{r+s}(-k)^\nu\,\varphi^{(m+1)}(x+t+\nu\alpha)\,dt,$$

et la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-k)^{\nu} \varphi^{(m+1)}(x+\nu\alpha)$$

converge uniformément lorsque x varie dans un intervalle fini quelconque $a \leq x \leq b$.

L'intégrale $I_0(\eta)$ peut s'écrire

$$I_0(\eta) = \int_0^{\infty} \frac{\overset{*}{R}_m(h-t)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\, e^{-\eta(x+t)}\, d\, t = -\frac{e^{-\eta x}}{m!} \int_0^{\infty} e^{-\eta t}\, d f(t) =$$

$$= -\frac{e^{-\eta x}}{m!} \left[e^{-\eta t} f(t)\right]_0^{\infty} - \eta \frac{e^{-\eta x}}{m!} \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-\eta t}\, d\, t = \frac{e^{-\eta x}}{m!} f(0) - \eta \frac{e^{-\eta x}}{m!} \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-\eta t}\, d\, t.$$

La fonction $f(z)$ tend uniformément vers zéro lorsque z tend vers l'infini; on peut donc trouver un nombre N suffisamment grand tel que

$$|f(t)| < \varepsilon \text{ pour } t > N.$$

$$\left| \eta \frac{e^{-\eta x}}{m!} \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-\eta t}\, d\, t \right| < \eta \frac{e^{-\eta x}}{m!} \int_0^{N} |f(t)|\, d\, t + \frac{\varepsilon}{m!} e^{-\eta(x+N)}.$$

ε pouvant être choisi arbitrairement petit, la dernière inégalité montre que $I_0(\eta)$ tend uniformément vers $\frac{f(0)}{m!}$ lorsque η tend vers zéro. On a donc finalement, pour la solution principale

$$F(x+h \mid \alpha, e^{i\varkappa}) = \lim_{\eta \to 0} F_\eta(x+h \mid \alpha, e^{i\varkappa}) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu(h \mid \alpha, e^{i\varkappa})}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x) +$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{\overset{*}{R}_m(h-t \mid \alpha, e^{i\varkappa})}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\, d\, t,$$

et nous retrouvons l'expression (146).

La méthode de sommation exponentielle, proposée par M. Nörlund pour la définition de la solution principale de ses équations et qui consiste à introduire le facteur de convergence $e^{-\eta x}$ est, au fond, équivalente à la méthode que nous proposons et qui consiste à introduire le facteur de convergence $a_r = (-\varrho)^r$; la dernière méthode a l'avantage de donner lieu, comme on a vu plus haut, à des calculs de beaucoup plus simples.

19. **Opération $\overset{p}{\wedge}$ et deuxième équation.** Lorsque $\varphi(x)$ est un polynome de degré m, nous avons trouvé pour la solution de l'équation

$$\underset{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\overset{p}{\wedge}} F(x) = \varphi(x), \tag{148}$$

le polynome (20)

$$F(x+h) = \varphi(x + R^{(p)}(h)) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x).$$

Supposons maintenant que $\varphi(x)$ est une fonction différente d'un polynome; l'équation (148) admet une infinité de solutions, parmi lesquelles nous allons fixer l'attention sur la solution donnée par la méthode des approximations successives. On commence par chercher une solution formelle, série entière par rapport aux variables $k_1, k_2, \ldots, k_p$; on déduit par identification

$$F(x) = (k_1 + 1) \cdots (k_p + 1) \sum (-k_1)^{r_1} \cdots (-k_p)^{r_p} \varphi(x + r_1\alpha_1 + \cdots + r_p\alpha_p), \tag{149}$$

où le signe Σ s'étend à toutes les valeurs entières non négatives des r_i. Pour décider de la convergence de la série (149), il faut faire des hypothèses sur les α_i, k_i et la fonction $\varphi(x)$.

Supposons d'abord $\alpha_i > 0$, $|k_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$; on suppose que $\varphi(x)$ admet une dérivée d'ordre $(m+1)$ qui reste continue pour $x \geq a$ et qui satisfait à la condition

$$\lim_{x \to \infty} x^{p+\varepsilon} |k_p|^{\frac{x}{\alpha_p}} \varphi^{(m+1)}(x) = 0, \tag{112 bis}$$

ε étant positif, mais arbitrairement petit.

Nous dirons que la série (149) est convergente si la somme

$$(k_1 + 1) \cdots (k_p + 1) \sum_{r_1=0}^{\mu_1 - 1} \cdots \sum_{r_p=0}^{\mu_p - 1} (-k_1)^{r_1} \cdots (-k_p)^{r_p} \varphi(x + r_1\alpha_1 + \cdots + r_p\alpha_p) \tag{149 bis}$$

tend vers une limite lorsque les entiers positifs μ_i tendent simultanément vers l'infini, mais indépendamment l'un de l'autre; pour simplifier l'écriture, nous allons supposer que les entiers μ_i sont impairs; on a dans ce cas

$$(k_1+1)\cdots(k_p+1)\mathop{\bigwedge}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}^{p}\sum_{r_1=0}^{\mu_1-1}\cdots\sum_{r_p=0}^{\mu_p-1}(-k_1)^{r_1}\cdots(-k_p)^{r_p}\varphi(x+r_1\alpha_1+\cdots+r_p\alpha_p)=$$

$$=(k_1^{\mu_1}+1)\cdots(k_p^{\mu_p}+1)\mathop{\bigwedge}_{\mu_1\alpha_1\ldots\mu_p\alpha_p}^{p}\varphi(x),$$

où l'opération $\overset{p}{\bigwedge}$ au second membre est formée avec les couples de valeurs $(\mu_1\alpha_1, k_1^{\mu_1}), \ldots, (\mu_p\alpha_p, k_p^{\mu_p})$.

La formule sommatoire (124) donne

$$(k_1+1)\cdots(k_p+1)\sum_{r_1=0}^{\mu_1-1}\cdots\sum_{r_p=0}^{\mu_p-1}(-k_1)^{r_1}\cdots(-k_p)^{r_p}\varphi(x+h+r_1\alpha_1+\cdots+r_p\alpha_p)=$$

$$=(k_1^{\mu_1}+1)\cdots(k_p^{\mu_p}+1)\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!}\mathop{\bigwedge}_{\mu_1\alpha_1\ldots\mu_p\alpha_p}^{p}\varphi^{(\nu)}(x)+$$

$$+(k_1^{\mu_1}+1)\cdots(k_p^{\mu_p}+1)\int_0^\infty\frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!}\mathop{\bigwedge}_{\mu_1\alpha_1\ldots\mu_p\alpha_p}^{p}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!}\sum_{r_1=0}^{1}\cdots\sum_{r_p=0}^{1}k_1^{\mu_1r_1}\cdots k_p^{\mu_pr_p}\varphi^{(\nu)}(x+\Omega)+$$

$$+\int_0^\infty\frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!}\sum_{r_1=0}^{1}\cdots\sum_{r_p=0}^{1}k_1^{\mu_1r_1}\cdots k_p^{\mu_pr_p}\varphi^{(m+1)}(x+t+\Omega)\,dt,$$

où l'on a posé

$$\Omega=r_1\mu_1\alpha_1+\cdots+r_p\mu_p\alpha_p.$$

Faisons tendre les μ_i vers l'infini; la première somme tend vers

$$\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(x),$$

car les autres (2^p-1) termes tendent vers zéro si l'on suppose

$$\lim_{x\to\infty} x^{\varepsilon}\,|k_p|^{\frac{x}{\alpha_p}}\,\varphi^{(\nu)}(x) = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, m;$$

(la dernière condition et la condition (122 bis) ont en particulier lieu lorsque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi^{(\nu)}(x)}{x^n} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, m+1,$$

n étant positif et arbitrairement grand) c'est ce qu'on voit facilement en majorant les termes à l'aide des inégalités (118) et en répétant le raisonnement qui suit la condition (144).

La seconde somme tend vers

$$\int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!}\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt$$

qui a un sens, comme nous l'avons montré plus haut; en effet, chacun des autres (2^p-1) termes peut être majoré par

$$\int_0^\infty |\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)|\,|k_p|^{\frac{\Omega}{\alpha_p}}\,|\varphi^{(m+1)}(x+t+\Omega)|\,dt.$$

On a ensuite, en posant $t+x+\Omega=u$,

$$\int_0^\infty |\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)|\,|k_p|^{\frac{\Omega}{\alpha_p}}\,|\varphi^{(m+1)}(x+t+\Omega)|\,dt <$$

$$< \int_{x+\Omega}^\infty (u-h-x-\Omega)^{p-1}\,|k_p|^{\frac{u-h-x-\Omega}{\alpha_p}}\,|k_p|^{\frac{\Omega}{\alpha_p}}\,\frac{M\,du}{u^{p+\varepsilon}\,|k_p|^{\frac{u}{\alpha_p}}} =$$

$$= \frac{M}{|k_p|^{\frac{h+x}{\alpha_p}}}\int_{x+\Omega}^\infty \frac{(u-h-x-\Omega)^{p-1}}{u^{p+\varepsilon}}\,du < \frac{M}{|k_p|^{\frac{h+x}{\alpha_p}}}\int_{x+\Omega}^\infty \frac{du}{u^{1+\varepsilon}} = \frac{M}{|k_p|^{\frac{h+x}{\alpha_p}}}\,\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{1}{(x+\Omega)^{\varepsilon}}$$

et le dernier membre tend uniformément vers zéro lorsque $a \le x \le b$ et Ω tend vers l'infini. Nous avons donc pour la solution principale, que nous désignons par $F^{(p)}(x+h\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p)$, de l'équation (148)

$$F^{(p)}(x+h) = \lim_{\mu_1 \ldots \mu_p \to \infty} (k_1+1)\cdots(k_p+1) \sum_{r_1=0}^{\mu_1-1} \cdots \sum_{r_p=0}^{\mu_p-1} (-k_1)^{r_1} \cdots (-k_p)^{r_p} .$$

$$. \varphi(x+h+r_1\alpha_1+\cdots+r_p\alpha_p) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{150}$$

La somme (149 bis) tend uniformément vers sa limite; la fonction $F^{(p)}(x+h)$ est donc une fonction continue de x dans l'intervalle $a \leq x \leq b$.

Supposons en second lieu

$$\alpha_i > 0,\ i=1, 2, \ldots, p;\ |k_i| = 1,\ i = 1, 2, \ldots, p';\ |k_j| < 1,\ j = p'+1, \ldots, p.$$

On suppose que $\varphi(x)$ admet une dérivée d'ordre $(m+1)$, qui reste continue pour $x \geq a$ et qui satisfait à l'équation

$$\lim_{x \to \infty} x^{p'+\varepsilon} \varphi^{(m+1)}(x) = 0. \tag{122}$$

La série (149 bis) est dans ce cas, en général divergente; pour la sommer suivant le procédé de M. Borel, remplaçons les k_i par ϱk_i, $i=1, 2, \ldots, p$, $\varrho < 1$; nous sommes ramenés au cas précédent et nous définissons la fonction

$$F_\varrho^{(p)}(x+h \mid \alpha_1, \varrho k_1; \ldots; \alpha_p, \varrho k_p) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}(h \mid \alpha_1, \varrho k_1; \ldots; \alpha_p, \varrho k_p)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x) +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_\nu^{(p)}(h-t \mid \alpha_1, \varrho k_1; \ldots; \alpha_p, \varrho k_p)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Faisons tendre ϱ vers $+1$ par valeurs positives et croissantes; on a

$$\lim_{\varrho \to 1} F_\varrho^{(p)}(x+h \mid \alpha_1, \varrho k_1; \ldots; \alpha_p, \varrho k_p) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}(h \mid \alpha, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x) +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt,$$

car la dernière intégrale est uniformément et absolument convergente (122). La limite ainsi définie, que nous désignons par $F^{(p)}(x+h\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p)$, sera dite la solution principale de l'équation (148) dans l'hypothèse (122),

$$F^{(p)}(x+h\,|\,\alpha_1,\, k_1;\, \ldots;\, \alpha_p,\, k_p) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!}\, \varphi^{(\nu)}(x) +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!}\, \varphi^{(m+1)}(x+t)\, dt. \qquad (151)$$

Montrons qu'on peut arriver à l'expression (151) de la solution principale par le procédé de la sommation exponentielle de la série divergente (149).

Si l'on remplace en (149 bis) $\varphi(x)$ par $\varphi(x)\,e^{-\eta x}$, $\eta > 0$, on a comme plus haut en posant

$$\Omega = r_1 \mu_1 \alpha_1 + \cdots + r_p \mu_p \alpha_p,$$

$$(k_1+1)\cdots(k_p+1) \sum_{r_1=0}^{\mu_1-1} \cdots \sum_{r_p=0}^{\mu_p-1} (-k_1)^{r_1} \cdots (-k_p)^{r_p} \,.$$

$$.\, \varphi(x+h+r_1\alpha_1+\cdots+r_p\alpha_p)\, e^{-\eta(x+h+r_1\alpha_1+\cdots+r_p\alpha_p)} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!} \sum_{r_1=0}^{1} \cdots \sum_{r_p=0}^{1} k_1^{\mu_1 r_1} \cdots k_p^{\mu_p r_p}\, D_x^\nu \left(\varphi(x+\Omega)\, e^{-\eta(x+\Omega)}\right) +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!} \sum_{r_1=0}^{1} \cdots \sum_{r_p=0}^{1} k_1^{\mu_1 r_1} \cdots k_p^{\mu_p r_p}\, D_x^{m+1} \left(\varphi(x+t+\Omega)\, e^{-\eta(x+t+\Omega)}\right) dt.$$

De la relation (122) on déduit

$$\lim_{x\to\infty} \varphi^{(m+1)}(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi^{(m+1-\nu)}(x)}{x^\nu} = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m+1$$

et en particulier, on peut déterminer une constante positive C, tel qu'on ait pour les grandes valeurs de x,

$$|\varphi^{(\nu)}(x)| < C x^m, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, m.$$

La série au premier membre est donc convergente pour $\eta > 0$ et lorsque x reste dans un intervalle fini quelconque $a \leq x \leq b$.

Lorsque les μ_i tendent vers l'infini, la première somme tend vers

$$\sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_{\nu}^{(p)}(h)}{\nu!} D_x^{\nu}(\varphi(x) e^{-\eta x}),$$

car les autres termes, en nombre fini, sont de la forme, à un facteur fini près,

$$\varphi^{(\nu)}(x + \Omega) e^{-\eta(x+\Omega)}$$

qui tend vers zéro lorsque Ω tend vers l'infini, en vertu de l'inégalité

$$|\varphi^{(\nu)}(x + \Omega)| < C(x + \Omega)^m, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, m.$$

Lorsque Ω tend vers l'infini, l'intégrale tend vers

$$\int_0^{\infty} \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!} D_x^{m+1}(\varphi(x+t) e^{-\eta(x+t)}) \, dt$$

car les autres termes, en nombre fini, sont de la forme, à un facteur fini près,

$$\int_0^{\infty} \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t) \varphi^{(\nu)}(x+t+\Omega) e^{-\eta(x+t+\Omega)} \, dt,$$

et l'intégrale est, en valeur absolue, plus petite que

$$C \int_0^{\infty} (t-h)^{p'-1} (x+t+\Omega)^m e^{-\eta(x+t+\Omega)} \, dt < C \int_0^{\infty} (x+t+\Omega)^{m+p'-1} e^{-\eta(x+t+\Omega)} \, dt =$$

$$= C \int_{x+\Omega}^{\infty} u^{m+p'-1} e^{-\eta u} \, du$$

qui tend vers zéro lorsque Ω tend vers l'infini.

Faisons maintenant tendre η vers zéro:

$$\lim_{\eta\to 0}\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!}D_x^\nu(\varphi(x)e^{-\eta x})=\lim_{\eta\to 0}\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!}\sum_{s=0}^{\nu}\binom{\nu}{s}(-\eta)^s\varphi^{(\nu-s)}(x)e^{-\eta x}=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(x).$$

Posons

$$I_s(\eta)=\binom{m+1}{s}\frac{(-\eta)^s}{m!}\int_0^\infty \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)\,\varphi^{(m+1-s)}(x+t)\,e^{-\eta(x+t)}\,dt.$$

On a

$$\lim_{\eta\to 0}\int_0^\infty\frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!}D_x^{m+1}(\varphi(x+t)\,e^{-\eta(x+t)})\,dt=$$
$$=\lim_{\eta\to 0}\int_0^\infty\frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,e^{-\eta(x+t)}\,dt+\lim_{\eta\to 0}\sum_{s=1}^{m+1}I_s(\eta).$$

Lorsque η tend vers zéro, l'intégrale

$$\int_0^\infty\frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,e^{-\eta(x+t)}\,dt$$

tend uniformément, dans l'intervalle $a\leq x\leq b$, vers

$$\int_0^\infty\frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt$$

car cette dernière intégrale est uniformément et absolument convergente (122).

Montrons que pour $s\geq 1$, l'intégrale

$$J_s(\eta)=\eta^s\int_0^\infty \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)\,\varphi^{(m+1-s)}(x+t)\,e^{-\eta(x+t)}\,dt$$

tend vers zéro lorsque η tend vers zéro. En effet, on a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi^{(m+1-s)}(x)}{x^s}=0,$$

ce qui veut dire que ε étant choisi arbitrairement petit, on peut déterminer T suffisamment grand pour avoir

$$|\varphi^{(m+1-s)}(x+t)| < \varepsilon(x+t)^s \qquad \text{pour } t \geq T.$$

D'autre part, pour $t \geq T$, on a

$$|\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)| < C(t-h)^{p'-1}.$$

$$J_s(\eta) = \eta^s \int_0^T \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)\, \varphi^{(m+1-s)}(x+t)\, e^{-\eta(x+t)}\, dt +$$

$$+ \eta^s \int_T^\infty \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)\, \varphi^{(m+1-s)}(x+t)\, e^{-\eta(x+t)}\, dt.$$

La première intégrale au second membre tend vers zéro avec η; la seconde est en valeur absolue plus petite que

$$\eta^s \int_T^\infty C(t-h)^{p'-1}\, \varepsilon(x+t)^s\, e^{-\eta(x+t)}\, dt < C\varepsilon\eta^s \int_T^\infty (x+t)^{s+p'-1}\, e^{-\eta(x+t)}\, dt <$$

$$< C\varepsilon\eta^s \int_0^\infty u^{s+p'-1}\, e^{-\eta u}\, du = \frac{C\varepsilon}{\eta^{p'}} \int_0^\infty v^{s+p'-1}\, e^{-v}\, dv.$$

ε étant arbitrairement petit, on n'a qu'à prendre par exemple $\varepsilon = \eta^{p'+1}$, pour déduire que le dernier membre tend vers zéro avec η, car l'intégrale

$$\int_0^\infty v^{s+p'-1}\, e^{-v}\, dv$$

est finie.

On peut encore montrer que $J_s(\eta)$ tend vers zéro avec η, en observant que de la condition

$$\lim_{x \to \infty} x^{p'+\varepsilon}\, \varphi^{(m+1)}(x) = 0 \tag{122}$$

on déduit que la dérivée $\varphi^{(m+1-s)}(x)$ est de la forme

$$\varphi^{(m+1-s)}(x) = \psi_s(x) + p_s(x), \qquad s = 1, 2, \ldots, m+1,$$

où $p_s(x)$ est un polynome de degré $(s-1)$ et $\psi_s(x)$ une fonction continue de x pour $x \geq a$ et qui satisfait à la condition

$$\lim_{x\to\infty} x^{p'+\varepsilon-s}\psi_s(x) = 0,$$

d'où l'on déduit que, ε' étant choisi arbitrairement petit, on peut déterminer T suffisamment grand pour avoir

$$|\psi_s(t)| < \varepsilon' t^{s-p'-\varepsilon} \qquad \text{pour } t \geq T.$$

L'intégrale

$$\eta^s \int_0^\infty \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)\, p_s(x+t)\, e^{-\eta(x+t)}\, dt$$

tend vers zéro avec η, car

$$\int_0^\infty \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)\, p_s(x+t)\, e^{-\eta(x+t)}\, dt$$

tend vers une limite finie lorsque η tend vers zéro (125).

On a ensuite

$$\eta^s \int_0^\infty \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)\, \psi_s(x+t)\, e^{-\eta(x+t)}\, dt = \eta^s \int_0^T \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)\, \psi_s(x+t)\, e^{-\eta(x+t)}\, dt +$$

$$+\, \eta^s \int_T^\infty \overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)\, \psi_s(x+t)\, e^{-\eta(x+t)}\, dt.$$

La première intégrale au second membre tend vers zéro avec η, car $s \geq 1$; la seconde intégrale est en valeur absolue plus petite que

$$\eta^s \int_T^\infty C(t-h)^{p'-1} \varepsilon'(x+t)^{s-p'-\varepsilon} e^{-\eta(x+t)}\, dt < C\varepsilon'\eta^s \int_T^\infty (t+x)^{s-1-\varepsilon} e^{-\eta(x+t)}\, dt <$$

$$< C\varepsilon'\eta^s \int_0^\infty u^{s-1-\varepsilon}\, \varepsilon^{-\eta u}\, du = C\varepsilon'\eta^\varepsilon \int_0^\infty v^{s-1-\varepsilon} e^{-v}\, dv,$$

qui tend vers zéro avec η, ce qu'il fallait démontrer.

Nous trouvons donc finalement pour la solution principale

$$F^{(p)}(x+h\,|\,\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p)=$$

$$\lim_{\eta\to 0}\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!}D_x^\nu[\varphi(x)\,e^{-\eta x}]+\lim_{\eta\to 0}\int_0^{\infty}\frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!}D_x^{m+1}[\varphi(x+t)\,e^{-\eta(x+t)}]\,dt=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_\nu^{(p)}(h)}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(x)+\int_0^{\infty}\frac{\overset{*}{R}{}_m^{(p)}(h-t)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt,$$

c'est-à-dire l'expression (151).

20. **Opération $\overset{p,\,q}{\wedge}$ et troisième équation.** Lorsque $\varphi(x)$ est un polynome de degré $(m+q)$, nous avons trouvé plus haut pour la solution de l'équation

$$\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\beta_1\ldots\beta_q}{\overset{p,\,q}{\wedge}}F(x)=\varphi^{(q)}(x), \tag{62}$$

le polynome

$$F(x+h)=\varphi(x+R^{(p,\,q)}(h))=\sum_{\nu=0}^{m+q}\frac{R_\nu^{(p,\,q)}(h)}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(x).$$

Supposons maintenant que $\varphi(x)$ est une fonction différente d'un polynome; l'équation

$$\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\beta_1\ldots\beta_q}{\overset{p,\,q}{\wedge}}F(x)=\varphi(x) \tag{152}$$

admet une infinité de solutions. Fixons l'attention sur la solution donnée par la méthode des approximations successives, série entière par rapport aux variables $k_1,\ldots,k_p$,

$$(-1)^q(k_1+1)\cdots(k_p+1)\,\beta_1\cdots\beta_q\sum(-k_1)^{r_1}\cdots(-k_p)^{r_p}\varphi(x+\Omega), \tag{153}$$

où l'on a posé

$$\Omega=r_1\alpha_1+\cdots+r_p\alpha_p+s_1\beta_1+\cdots+s_q\beta_q,$$

et où le signe Σ s'étend à toutes les valeurs entières non négatives des r_i et s_j; si l'on ajoute à (153) un polynome arbitraire de degré $(q-1)$, on obtient encore une solution; il convient d'ajouter, pour assurer la convergence de (153), le polynome

$$\int_a^\infty \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x-t)}{(q-1)!}\varphi(t)\,dt, \tag{154}$$

où a est une constante arbitraire.

Nous prenons donc, comme point de départ, la solution formelle

$$\int_a^\infty \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x-t)}{(q-1)!}\varphi(t)\,dt + (-1)^q (k_1+1)\cdots(k_p+1)\beta_1\cdots\beta_q \cdot$$

$$\cdot \sum (-k_1)^{r_1}\cdots(-k_p)^{r_p}\varphi(x+\Omega). \tag{155}$$

Pour décider de la convergence de (155), il faut faire des hypothèses sur les α_i, k_i, β_j et la fonction $\varphi(x)$.

Supposons les α_i et β_j positifs, $i=1, 2, \ldots, p$; $j=1, 2, \ldots, q$; $|k_i|=1$, $i=1, 2, \ldots, p'$; $|k_j|<1$, $j=p'+1, \ldots, p$, où p' a l'une des valeurs $0, 1, \ldots, p$. On suppose que $\varphi(x)$ admet une dérivée d'ordre $(m+1)$ qui reste continue pour $x \geq a$ et qui satisfait à la condition

$$\lim_{x\to\infty} x^{p'+q+\varepsilon}\varphi^{(m+1)}(x) = 0. \tag{137}$$

En (155), l'intégrale et la série divergent en général; nous allons les sommer en introduisant le facteur de convergence $e^{-\eta x}$, c'est-à-dire en remplaçant en (155) $\varphi(x)$ par $\varphi(x)e^{-\eta x}$, $\eta>0$.

Nous sommes ainsi ramenés à considérer la somme

$$\int_a^\infty \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x-t)}{(q-1)!}\varphi(t)e^{-\eta t}\,dt + (-1)^q (k_1+1)\cdots(k_p+1)\beta_1\cdots\beta_q \cdot$$

$$\cdot \sum (-k_1)^{r_1}\cdots(-k_p)^{r_p}\varphi(x+\Omega)e^{-\eta(x+\Omega)}. \tag{156}$$

En (156), l'intégrale et la série sont convergentes pour toute valeur positive de η, car de (137) on déduit

$$\lim_{x\to\infty}\varphi^{(m+1)}(x)=0, \quad \lim\frac{\varphi^{(m+1-\nu)}(x)}{x^\nu}=0, \quad \nu=1, 2, \ldots, m+1.$$

Nous allons montrer que l'expression (156) tend uniformément vers une limite lorsque x reste compris dans un intervalle fini quelconque $a\leq x\leq b$ et lorsque η tend vers zéro et cette limite, que nous allons désigner par $F^{(p,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q)$, sera dite la solution principale de (152).

Nous disons que la série (153) est convergente si la somme

$$(-1)^q(k_1+1)\cdots(k_p+1)\beta_1\cdots\beta_q\sum_{r_1=0}^{\mu_1-1}\cdots\sum_{r_p=0}^{\mu_p-1}\sum_{s_1=0}^{\nu_1-1}\cdots\sum_{s_q=0}^{\nu_q-1}(-k_1)^{r_1}\cdots(-k_p)^{r_p}\varphi(x+\Omega)$$

tend vers une limite lorsque les entiers positifs μ_i et ν_j tendent simultanément vers l'infini, mais indépendamment l'un de l'autre; pour simplifier l'écriture, nous allons supposer que les entiers positifs μ_i sont impairs et les entiers positifs ν_j quelconques. Dans ces conditions on a l'identité

$$\mathop{\bigwedge\nolimits^{p,q}}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\beta_1\ldots\beta_q}(k_1+1)\cdots(k_p+1)\beta_1\cdots\beta_q\cdot$$

$$\cdot\sum_{r_1=0}^{\mu_1-1}\cdots\sum_{r_p=0}^{\mu_p-1}\sum_{s_1=0}^{\nu_1-1}\cdots\sum_{s_q=0}^{\nu_q-1}(-k_1)^{r_1}\cdots(-k_p)^{r_p}f(x+\Omega)=$$

$$=(k_1^{\mu_1}+1)\cdots(k_p^{\mu_p}+1)(\nu_1\beta_1)\cdots(\nu_q\beta_q)\mathop{\bigwedge\nolimits^{p,q}}_{\mu_1\alpha_1\ldots\nu_q\beta_q}f(x),$$

où l'opération $\bigwedge\limits^{p,q}$ au second membre est formée avec les couples de valeurs $(\mu_1\alpha_1, k_1^{\mu_1}), \ldots, (\mu_p\alpha_p, k_p^{\mu_p})$ et les écarts $\nu_1\beta_1, \ldots, \nu_q\beta_q$.

La formule sommatoire (128), avec les expressions (138) et (139) des termes complémentaires τ_q et T_{m+1}, s'écrit

$$f(x+h)+\int_0^\infty\frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h-t)}{(q-1)!}\mathop{\bigwedge\nolimits^{p,q}}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\beta_1\ldots\beta_q}f(x+t)\,dt=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_{\nu+q}^{(p,q)}(h)}{(\nu+q)!}\mathop{\bigwedge\nolimits^{p,q}}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\beta_1\ldots\beta_q}f^{(\nu)}(x)+$$

$$+\int_0^\infty\frac{\overset{*}{R}{}_{q+1}^{(p,q)}h-t)}{(m+q)!}\mathop{\bigwedge\nolimits^{p,q}}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\beta_1\ldots\beta_q}f^{(m+1)}(x+t)\,dt,$$

qui devient, compte tenu de l'identité précédente,

$$(k_1 + 1) \cdots \beta_q \sum_{r_1=0}^{\mu_1-1} \cdots \sum_{s_q=0}^{\nu_q-1} (-k_1)^{r_1} \cdots (-k_p)^{r_p} f(x + h + \Omega) +$$

$$+ (k_1^{\mu_1} + 1) \cdots (\nu_q \beta_q) \int_0^\infty \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h-t)}{(q-1)!} \underset{\mu_1 \alpha_1 \ldots \nu_q \beta_q}{\overset{p,q}{\bigwedge}} f(x+t)\, dt =$$

$$= (k_1^{\mu_1} + 1) \cdots (\nu_q \beta_q) \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_{\nu+q}^{(p,q)}(h)}{(\nu+q)!} \underset{\mu_1 \alpha_1 \ldots \nu_q \beta_q}{\overset{p,q}{\bigwedge}} f^{(\nu)}(x) +$$

$$+ (k_1^{\mu_1} + 1) \cdots (\nu_q \beta_q) \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!} \underset{\mu_1 \alpha_1 \ldots \nu_q \beta_q}{\overset{p,q}{\bigwedge}} f^{(m+1)}(x + t)\, dt.$$

Remplaçons $f(x)$ par $\varphi(x) e^{-\eta x}$, $\eta > 0$; faisons dans l'intégrale au premier membre le changement de variable $x + t = u$; faisons tendre les μ_i et ν_j vers l'infini. La dernière égalité devient

$$\lim_{\mu_1 \ldots \nu_q \to \infty} (k_1 + 1) \cdots (k_p + 1) \beta_1 \cdots \beta_q \sum_{r_1=0}^{\mu_1-1} \cdots \sum_{s_q=0}^{\nu_q-1} (-k_1)^{r_1} \cdots$$

$$\cdots (-k_p)^{r_p} \varphi(x + h + \Omega) e^{-\eta(x+h+\Omega)} + (-1)^q \int_x^\infty \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x+h-u)}{(q-1)!} \varphi(u) e^{-\eta u}\, du =$$

$$= (-1)^q \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_{\nu+q}^{(p,q)}(h)}{(\nu+q)!} D_x^\nu [\varphi(x) e^{-\eta x}] +$$

$$+ (-1)^q \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!} D_x^{m+1} [\varphi(x+t) e^{-\eta(x+t)}]\, dt;$$

la démonstration est exactement la même que celle utilisée pour la série (149 bis). La dernière égalité s'écrit encore

$$\int_a^\infty \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x+h-t)}{(q-1)!}\varphi(t)e^{-\eta t}dt + (-1)^q(k_1+1)\cdots(k_p+1)\beta_1\cdots\beta_q\sum(-k_1)^{r_1}\cdots$$

$$\cdots(-k_p)^{r_p}\varphi(x+h+\Omega)e^{-\eta(x+h+\Omega)} = \int_a^x \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x+h-t)}{(q-1)!}\varphi(t)e^{-\eta t}dt +$$

$$+\sum_{\nu=0}^m \frac{R_{\nu+q}^{(p,q)}(h)}{(\nu+q)!}D_x^\nu[\varphi(x)e^{-\eta x}] + \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!}D_x^{m+1}[\varphi(x+t)e^{-\eta(x+t)}]\,dt,$$

et au premier membre on a l'expression (156). Faisons au second membre tendre η vers zéro; on montre de la même manière que pour (151) que la limite est égale à l'expression déduite du second membre en faisant directement $\eta = 0$. Le premier membre tend donc vers une limite et il tend uniformément vers sa limite dans l'intervalle $a \leq x \leq b$ et l'on a

$$\lim_{\eta\to 0}\int_a^\infty \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x+h-t)}{(q-1)!}\varphi(t)e^{-\eta t}dt +$$

$$+\lim_{\eta\to 0}(-1)^q(k_1+1)\cdots(k_p+1)\beta_1\cdots\beta_q\sum(-k_1)^{r_1}\cdots(-k_p)^{r_p}\varphi(x+h+\Omega)e^{-\eta(x+h+\Omega)} =$$

$$= \int_a^x \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x+h-t)}{(q-1)!}\varphi(t)dt + \sum_{\nu=0}^m \frac{R_{\nu+q}^{(p,q)}(h)}{(\nu+q)!}\varphi^{(\nu)}(x) +$$

$$+\int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt =$$

$$= F^{(p,q)}(x+h\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q). \tag{157}$$

La solution principale[1]

$$F^{(p,q)}(x+h\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q)$$

ainsi définie, est une fonction continue de x dans l'intervalle $a \leq x \leq b$, car (156) tend uniformément vers sa limite lorsque η tend vers zéro.

La première intégrale au second membre de (157) peut être transformée; on a

---

[1] Cf. *Hauptlösungen von Differenzengleichungen*, pag. 13, formule 46.

$$\frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h+x-t)}{(q-1)!}=\sum_{\nu=0}^{q-1}\frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!}\,\frac{(x-t)^{q-1-\nu}}{(q-1-\nu)!},$$

$$\int_a^x \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x+h-t)}{(q-1)!}\,\varphi(t)\,dt=\sum_{\nu=0}^{q-1}\frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!}\int_a^x\frac{(x-t)^{q-1-\nu}}{(q-1-\nu)!}\,\varphi(t)\,dt=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{q-1}\frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!}\,f^{(\nu)}(x),$$

où l'on a posé

$$f(x)=\int_a^x\frac{(x-t)^{q-1}}{(q-1)!}\,\varphi(t)\,dt,\qquad f^{(q)}(x)=\varphi(x).$$

L'expression (157) de la solution principale devient

$$F^{(p,q)}(x+h)=\sum_{\nu=0}^{m+q}\frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!}\,f^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty\frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!}\,f^{(q+m+1)}(x+t)\,dt. \qquad (158)$$

CHAPITRE V.

Propriétés de la solution principale.

21. **Valeur asymptotique pour les grandes valeurs de la variable x.** Considérons la solution principale

$$F^{(p,q)}(x+h\mid\alpha_1,k_1;\ldots;\alpha_p,k_p\mid\beta_1,\ldots,\beta_q)=\int_a^x\frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x+h-t)}{(q-1)!}\,\varphi(t)\,dt+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m}\frac{R_{\nu+q}^{(p,q)}(h)}{(\nu+q)!}\,\varphi^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty\frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!}\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt \qquad (157)$$

de l'équation

$$\underset{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\beta_1\ldots\beta_q}{\overset{p,q}{\bigwedge}}F(x)=\varphi(x), \qquad (152)$$

définie dans les hypothèses (137). La première intégrale au second membre est encore égale à

$$\int_a^x\frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x+h-t)}{(q-1)!}\,\varphi(t)\,dt=\sum_{\nu=0}^{q-1}\frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!}\,f^{(\nu)}(x)$$

où

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{q-1}}{(q-1)!} \varphi(t)\, dt.$$

Nous nous proposons d'étudier la manière dont se comporte la solution principale $F^{(p,q)}(x)$ pour les grandes valeurs réelles et positives de x; supposons à cet effet que r est le plus petit entier positif tel que

$$\lim_{x\to\infty} \varphi^{(r)}(x) = 0. \tag{159}$$

La solution principale $F^{(p,q)}(x)$ peut s'écrire

$$F^{(p,q)}(x) = \sum_{\nu=0}^{q-1+r} \frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!} f^{(\nu)}(x) + \sum_{\nu=r}^{m} \frac{R_{\nu+q}^{(p,q)}(h)}{(\nu+q)!} \varphi^{(\nu)}(x) +$$
$$+ \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\, dt.$$

De l'hypothèse (159) il résulte que le second terme au second membre tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini. L'intégrale au second membre est en valeur absolue plus petite que

$$\int_0^\infty \frac{C(t-h)^{p'+q-1}}{(m+q)!} \frac{M\, dt}{(x+t)^{p'+q+\varepsilon}} < C_1 \int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^{1+\varepsilon}} = \frac{C_1}{\varepsilon} \frac{1}{x^\varepsilon}$$

qui tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini, car $\varepsilon > 0$.

Il résulte que si l'on pose

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{q-1+r} \frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!} f^{(\nu)}(x), \tag{160}$$

on a

$$\lim_{x\to\infty} (F^{(p,q)}(x) - P(x)) = 0. \tag{161}$$

La fonction $P(x)$ représente donc la valeur asymptotique de la solution principale $F^{(p,q)}(x+h)$ pour les grandes valeurs réelles et positives de x.

Proposons nous de trouver une autre expression de la solution principale

$F^{(p,q)}(x)$ en utilisant sa valeur asymptotique. De l'équation (152) de définition, on déduit la relation identique

$$(k_1+1)\dots(k_p+1)\beta_1\dots\beta_q\sum_{r_1=0}^{\mu_1-1}\cdots\sum_{r_p=0}^{\mu_p-1}\sum_{s_1=0}^{\nu_1-1}\cdots\sum_{s_q=0}^{\nu_q-1}(-k_1)^{r_1}\dots(-k_p)^{r_p}\varphi(x+h+\Omega)-$$
$$-(k_1^{\mu_1}+1)\dots(k_p^{\mu_p}+1)(\nu_1\beta_1)\dots(\nu_q\beta_q)\mathop{\bigwedge}_{\mu_1\alpha_1\dots\nu_q\beta_q}^{p,q}F^{(p,q)}(x+h)=0,$$

où $\Omega=r_1\alpha_1+\cdots+r_p\alpha_p+s_1\beta_1+\cdots+s_q\beta_q$, les entiers positifs μ_i sont impairs et ν_j quelconques et où l'opération $\overset{p,q}{\bigwedge}$ est formée avec les couples de valeurs $(\mu_1\alpha_1,\ k_1^{\mu_1}),\dots,(\mu_p\alpha_p,\ k_p^{\mu_p})$ et les écarts $(\nu_1\beta_1),\dots,(\nu_q\beta_q)$. On ajoute aux deux membres la fonction $F^{(p,q)}(x+h)$, on ajoute et on retranche la différence

$$P(x)-(-1)^q(k_1^{\mu_1}+1)\dots(k_p^{\mu_p}+1)(\nu_1\beta_1)\dots(\nu_q\beta_q)\mathop{\bigwedge}_{\mu_1\alpha_1\dots\nu_q\beta_q}^{p,q}P(x),$$

et on obtient

$$F^{(p,q)}(x+h)=(-1)^q(k_1+1)\dots(k_p+1)\beta_1\dots\beta_q\,.$$
$$\cdot\sum_{r_1=0}^{\mu_1-1}\cdots\sum_{r_p=0}^{\mu_p-1}\sum_{s_1=0}^{\nu_1-1}\cdots\sum_{s_q=0}^{\nu_q-1}(-k_1)^{r_1}\dots(-k_p)^{r_p}\varphi(x+h+\Omega)+P(x)-$$
$$-(-1)^q(k_1^{\mu_1}+1)\dots(\nu_q\beta_q)\mathop{\bigwedge}_{\mu_1\alpha_1\dots\nu_q\beta_q}^{p,q}P(x)+$$
$$+[F^{(p,q)}(x+h)-P(x)-(-1)^q(k_1^{\mu_1}+1)\dots(\nu_q\beta_q)\mathop{\bigwedge}_{\mu_1\alpha_1\dots\nu_q\beta_q}^{p,q}(F^{(p,q)}(x+h)-P(x))].$$

Faisons tendre les entiers μ_i et ν_j vers l'infini; la parenthèse tend uniformément vers zéro pour $x\geq a+h$, car les dérivées $\varphi^{(\nu)}(x)$, $\nu=0,1,\dots,r-1$, sont continues pour $x\geq a$ et l'on obtient

$$F^{(p,q)}(x+h)=\lim_{\mu_1\dots\nu_q\to\infty}[(-1)^q(k_1+1)\dots\beta_q\sum_{r_1=0}^{\mu_1-1}\cdots\sum_{s_q=0}^{\nu_q-1}(-k_1)^{r_1}\dots(-k_p)^{r_p}\varphi(x+h+\Omega)+$$
$$+P(x)-(-1)^q(k_1^{\mu_1}+1)\dots(\nu_q\beta_q)\mathop{\bigwedge}_{\mu_1\alpha_1\dots\nu_q\beta_q}^{p,q}P(x)].\qquad(162)$$

La solution principale $F^{(p,q)}(x)$ satisfait à l'équation

$$k_p F^{(p,q)}(x+\alpha_p)+F^{(p,q)}(x)=(k_p+1)F^{(p-1,q)}(x), \tag{163}$$

d'où l'on déduit successivement

$$F^{(p,q)}(x+h)=(k_p+1)\sum_{s=0}^{n-1}(-k_p)^s F^{(p-1,q)}(x+h+s\alpha_p)+(-k_p)^n F^{(p,q)}(x+h+n\alpha_p)=$$

$$=(k_p+1)\sum_{s=0}^{n-1}(-k_p)^s F^{(p-1,q)}(x+h+s\alpha_p)+(-k_p)^n P(x+n\alpha_p)+$$

$$+(-k_p)^n[F^{(p,q)}(x+h+n\alpha_p)-P(x+n\alpha_p)].$$

Si l'on fait tendre n vers l'infini, la parenthèse tend vers zéro et l'on a

$$F^{(p,q)}(x+h)=\lim_{n\to\infty}[(k_p+1)\sum_{s=0}^{n-1}(-k_p)^s F^{(p-1,q)}(x+h+s\alpha_p)+(-k_p)^n P(x+n\alpha_p)]. \tag{164}$$

Lorsque la condition (159) a lieu pour $r=0$, c'est-à-dire

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0,$$

on a

$$P(x)=\sum_{\nu=0}^{q-1}\frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!}f^{(\nu)}(x)=\int_a^x\frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x+h-t)}{(q-1)!}\varphi(t)\,dt$$

et (164) devient

$$F^{(p,q)}(x+h)=\lim_{n\to\infty}[(-k_p)^n\int_a^{x+n\alpha_p}\frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x+n\alpha_p+h-t)}{(q-1)!}\varphi(t)\,dt+$$

$$+(k_p+1)\sum_{s=0}^{n-1}(-k_p)^s F^{(p-1,q)}(x+h+s\alpha_p)]. \tag{164 bis}$$

La solution principale satisfait aussi à l'équation

$$F^{(p,q)}(x+\beta_q)-F^{(p,q)}(x)=\beta_q F^{(p,q-1)}(x), \tag{165}$$

d'où l'on déduit

$$F^{(p,q)}(x+h)=F^{(p,q)}(x+h+n\beta_q)-\beta_q\sum_{s=0}^{n-1}F^{(p,q-1)}(x+h+s\beta_q)=$$

$$=P(x+n\beta_q)-\beta_q\sum_{s=0}^{n-1}F^{(p,q-1)}(x+h+s\beta_q)+[F^{(p,q)}(x+h+n\beta_q)-P(x+n\beta_q)].$$

Lorsque n tend vers l'infini, la dernière parenthèse tend vers zéro et l'on a

$$F^{(p,q)}(x+h)=\lim_{n\to\infty}\,[P(x+n\beta_q)-\beta_q\sum_{s=0}^{n-1}F^{(p,\,q-1)}(x+h+s\beta_q)]. \tag{166}$$

Dans le cas particulier

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0,$$

(166) devient

$$F^{(p,q)}(x+h)=\lim_{n\to\infty}\,[\int\limits_a^{x+n\beta_q}\frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x+n\beta_q+h-t)}{(q-1)!}\varphi(t)\,dt-$$

$$-\beta_q\sum_{s=0}^{n-1}F^{(p,\,q-1)}(x+h+s\beta_q)]. \tag{166 bis}$$

On a l'identité, $f(x)$ étant une fonction quelconque,

$$\bigwedge_{\alpha_1\ldots\beta_q}^{p,\,q}(k_1+1)\ldots\beta_q\sum_{r_1=0}^{\mu_1-1}\cdots\sum_{s_q=0}^{\nu_q-1}(-k_1)^{r_1}\ldots(-k_p)^{r_p}f(x+\Omega)=$$

$$=(k_1^{\mu_1}+1)\ldots(\nu_q\beta_q)\bigwedge_{\mu_1\alpha_1\ldots\nu_q\beta_q}^{p,\,q}f(x).$$

L'expression au second membre de (162) converge uniformément vers la fonction $F^{(p,q)}(x+h)$; on peut donc définir $F^{(p,q)}(x+h)$, compte tenu de la dernière identité, aussi par la série à $(p+q)$ entrées

$$F^{(p,q)}(x+h)=P(x)+(-1)^q(k_1+1)\ldots\beta_q\,\Sigma(-k_1)^{r_1}\ldots(-k_p)^{r_p}\,.$$

$$.\,[\varphi(x+h+\Omega)-\bigwedge_{\alpha_1\ldots\beta_q}^{p,\,q}P(x+\Omega)], \tag{167}$$

où le signe Σ s'étend aux valeurs entières non négatives des r_i et s_j.

L'expression au second membre de (162) tend vers une limite lorsqu'on fait tendre d'abord r_1 vers l'infini, ensuite $r_2,\ldots$ et enfin s_q vers l'infini et la limite est la même que dans le cas où ces nombres tendent simultanément vers l'infini, mais indépendamment l'un de l'autre; on peut donc représenter la solution principale $F^{(p,q)}(x+h)$ aussi par la série $(p+q)$ fois itérée

$$F^{(p,q)}(x+h) = P(x) + (-1)^q (k_1+1)\dots\beta_q \sum_{r_1=0}^{\infty} (-k_1)^{r_1} \dots \sum_{r_p=0}^{\infty} (-k_p)^{r_p} \,.$$

$$\cdot \sum_{s_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_q=0}^{\infty} \Big[\varphi(x+h+\Omega) - \mathop{\bigwedge}_{\alpha_1\dots\beta_q}^{p,q} P(x+\Omega)\Big]. \tag{168}$$

Les séries (162), (167) et (168) qui définissent la solution principale $F^{(p,q)}(x+h)$, sont uniformément convergentes, mais ne sont pas, en général, absolument convergentes; dans ces séries figure la fonction $P(x)$ qui dépend de l'entier positif r, qui est le plus petit entier tel que

$$\lim_{x\to\infty} \varphi^{(r)}(x) = 0.$$

Si on augmente r, la rapidité de la convergence des séries susdites augmente en général et pour une valeur convenable de r, la convergence peut devenir absolue; en revanche, le terme général est plus compliqué. On peut donc disposer de l'entier r, de manière à définir la solution principale $F^{(p,q)}(x+h)$ par des séries convergentes à volonté. C'est ce qui se passe aussi pour les transcendantes $F_n(x|\omega_1, \dots, \omega_n)$ et $G_n(x|\omega_1, \dots, \omega_n)$ de M. Nörlund.

22. **Valeur asymptotique pour les petites valeurs des écarts α_i et β_j.** Laissons maintenant x et les k_i invariables et supposons que les α_i et β_j varient; on sait que le polynome $R_m^{(p,q)}(x)$ est homogène et de degré m par rapport à h et aux α_i et β_j,

$$R_m^{(p,q)}(\lambda h|\lambda\alpha_1, k_1; \dots; \lambda\alpha_p, k_p|\lambda\beta_1, \dots, \lambda\beta_p) = \lambda^m R_m^{(p,q)}(h|\alpha_1, k_1; \dots; \alpha_p, k_p|\beta_1, \dots, \beta_q).$$

L'expression (158) de la solution principale devient

$$F^{(p,q)}(x+\lambda h|\lambda\alpha_1, k_1; \dots; \lambda\alpha_p, k_p|\lambda\beta_1, \dots, \lambda\beta_q) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{m+q} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} R_\nu^{(p,q)}(h|\alpha_1, k_1; \dots; \alpha_p, k_p|\beta_1, \dots; \beta_q) f^{(\nu)}(x) +$$
$$+ \lambda^{m+q+1} \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!} \varphi^{(m+1)}(x+\lambda t)\, dt. \tag{169}$$

Supposons que λ est positif et très petit; cherchons une limite supérieure du terme reste; on a

$$|\overset{*}{R}{}^{(p,q)}_{m+q}(h-t)| < C_1 t^{p'+q-1}, \qquad |\varphi^{(m+1)}(x+\lambda t)| < \frac{C_2}{(x+\lambda t)^{p'+q+\varepsilon}},$$

$$|T_{m+q}| < \lambda^{m+q+1} C \int_0^\infty \frac{t^{p'+q-1}\,dt}{(x+\lambda t)^{p'+q+\varepsilon}} = C\lambda^{m-p'+1} \int_0^\infty \frac{t^{p'+q-1}\,dt}{(x+t)^{p'+q+\varepsilon}}.$$

On déduit que le produit $|T_{m+q}|\,\lambda^{-m-1+p'}$ reste plus petit qu'une constante lorsque x restant fixe, λ tend vers zéro.

On a, d'autre part,

$$T_n = \sum_{\nu=n+1}^{m+q} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} R^{(p,q)}_\nu(h) f^{(\nu)}(x) + T_{m+q},$$

$$\lambda^{-n} T_n = \frac{\lambda}{(n+1)!} R^{(p,q)}_{n+1}(h) f^{(n+1)}(x) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\lambda^{m+q-n}}{(m+q)!} R^{(p,q)}_{m+q}(h) f^{(m+q)}(x) + \lambda\lambda^{m-p'-n}(T_{m+q}\lambda^{-m-1+p'}).$$

Il résulte que le produit $\lambda^{-n} T_n$ tend vers zéro lorsque λ tend vers zéro, si $n \leq m-p'$.

Lorsque $\varphi(x)$ admet des dérivées de tous les ordres pour $x \geq a$ et qui satisfont à la condition

$$\lim_{x\to\infty} x^{p'+q+\varepsilon} \varphi^{(m+1)}(x) = 0,$$

pour toute valeur de m qui surpasse une certaine valeur, l'inégalité $n \leq m-p'$ est satisfaite pour toute valeur de n; par conséquent, la série (169) représente la solution principale, asymptotiquement au sens de Poincaré. En particulier

$$\lim_{\lambda\to 0} F^{(p,q)}(x+\lambda h|\lambda\alpha_1, k_1; \ldots; \lambda\alpha_p, k_p|\lambda\beta_1, \ldots, \lambda\beta_q) = \int_a^x \frac{(x-t)^{q-1}}{(q-1)!}\varphi(t)\,dt. \tag{170}$$

La série (169) procède suivant les puissances des $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q$; groupons maintenant les termes suivant les puissances du seul écart α_p ou du seul écart β_q.

De l'équation

$$k_p F^{(p,q)}(x+\alpha_p) + F^{(p,q)}(x) = (k_p+1) F^{(p-1,q)}(x),$$

on tire

$$F^{(p,q)}(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(1)}(h|\alpha_p,\, k_p)}{\nu!} \frac{d^\nu F^{(p-1,q)}(x)}{dx} +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(1)}(h-t|\alpha_p,\, k_p)}{m!} \frac{d^{m+1} F^{(p-1,q)}(x+t)}{dx^{m+1}}\, dt.$$

Laissons x et $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta_1, \ldots, \beta_q$ constants et remplaçons h et α_p par λh et $\lambda \alpha_p$,

$$F^{(p,q)}(x+\lambda h|\alpha_1,\, k_1;\, \ldots;\, \lambda\alpha_p,\, k_p|\beta_1,\, \ldots,\, \beta_q) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} R_\nu^{(1)}(h|\alpha_p,\, k_p) \frac{d^\nu F^{(p-1,q)}(x)}{dx^\nu} +$$

$$+ \lambda^{m+1} \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_m^{(1)}(h-t)}{m!} \frac{d^{m+1} F^{(p-1,q)}(x+\lambda t)}{dx^{m+1}}\, dt, \tag{171}$$

et cette série représente asymptotiquement la solution principale au voisinage du point $\alpha_p = 0$; en particulier

$$\lim_{\alpha_p \to 0} F^{(p,q)}(x) = F^{(p-1,q)}(x). \tag{172}$$

De l'équation

$$F^{(p,q)}(x+\beta_q) - F^{(p,q)}(x) = \beta_q F^{(p,q-1)}(x)$$

on tire de même

$$F^{(p,q)}(x+h) = \int_a^\infty F^{(p,q-1)}(t)\, dt + \sum_{\nu=0}^{m} \frac{B_{\nu+1}^{(1)}(h|\beta_q)}{(\nu+1)!} \frac{d^\nu F^{(p,q-1)}(x)}{dx^\nu} +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\overset{*}{B}{}_{m+1}^{(1)}(h-t)}{(m+1)!} \frac{d^{m+1} F^{(p,q-1)}(x+t)}{dx^{m+1}}\, dt,$$

où $\overset{*}{B}{}_{m+1}^{(1)}(x)$ est le polynome périodique Bernoulli-Nörlund du premier ordre et de degré $(m+1)$.

On laisse x et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_{q-1}$ constants et on considère β_q variable; on remplace dans la dernière équation h et β_q par λh et $\lambda \beta_q$,

$$F^{(p,q)}(x+\lambda h|\alpha_1,\, k_1;\, \ldots;\, \alpha_p,\, k_p|\beta_1,\, \ldots,\, \lambda\beta_q) = \int_a^x F^{(p,q-1)}(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{m} \frac{\lambda^{\nu+1}}{(\nu+1)!} B_{\nu+1}^{(1)}(h \mid \beta_q) \frac{d^\nu F^{(p,\,q-1)}(x)}{dx^\nu} +$$

$$+ \lambda^{m+2} \int\limits_0^\infty \frac{\overset{*}{B}{}_{m+1}^{(1)}(h-t)}{(m+1)!} \frac{d^{m+1} F^{(p,\,q-1)}(x+\lambda t)}{d x^{m+1}} dt. \qquad (173)$$

La dernière série représente la solution principale asymptotiquement au voisinage de $\beta_q = 0$; en particulier

$$\lim_{\beta_q \to 0} F^{(p,\,q)}(x) = \int\limits_a^x F^{(p,\,q-1)}(t)\, dt. \qquad (174)$$

23. **Théorème de multiplication de l'argument.** La solution principale $F^{(p,\,q)}(x)$ a été définie par

$$F^{(p,\,q)}(x) = \lim_{\eta \to 0} F_\eta^{(p,\,q)}(x),$$

où l'on a mis

$$F_\eta^{(p,\,q)}(x) = \int\limits_a^\infty \frac{R_{q-1}^{(p,\,q)}(x-t)}{(q-1)!} \varphi(t) e^{-\eta t} dt +$$

$$+ (-1)^q (k_1+1) \ldots (k_p+1) \beta_1 \ldots \beta_q \Sigma (-k_1)^{r_1} \ldots (-k_p)^{r_p} \varphi(x+\Omega) e^{-\eta(x+\Omega)}. \qquad (156)$$

Soient $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$ des entiers positifs quelconques; le polynome $R_m^{(p,\,q)}(x)$ satisfait à l'équation

$$\nu_1 R_m^{(p,\,q)}\left(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots, \alpha_p, k_p \mid \frac{\beta_1}{\nu_1}, \beta_2, \ldots, \beta_q\right) =$$

$$= \sum_{s_1=0}^{\nu_1-1} R_m^{(p,\,q)}\left(x + s_1 \frac{\beta_1}{\nu_1} \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q\right),$$

d'où l'on déduit

$$\nu_1 F_\eta^{(p,\,q)}\left(x \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \frac{\beta_1}{\nu_1}, \beta_2, \ldots, \beta_q\right) =$$

$$= \sum_{s_1=0}^{\nu_1-1} F_\eta^{(p,\,q)}\left(x + s_1 \frac{\beta_1}{\nu_1} \mid \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q\right).$$

Si l'on fait tendre η vers zéro, $F_\eta^{(p,q)}(x)$ tend uniformément vers $F^{(p,q)}(x)$ et la dernière égalité devient à la limite

$$\nu_1 F^{(p,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\frac{\beta_1}{\nu_1}, \beta_2, \ldots, \beta_q) =$$
$$= \sum_{s_1=0}^{\nu_1-1} F^{(p,q)}(x + s_1\frac{\beta_1}{\nu_1}\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q). \qquad (175)$$

Mais la fonction $F^{(p,q)}(x)$ est symétrique par rapport aux β_j, on a donc la relation plus générale

$$\sum_{s_1=0}^{\nu_1-1} \cdots \sum_{s_q=0}^{\nu_q-1} F^{(p,q)}(x + \frac{s_1\beta_1}{\nu_1} + \cdots + \frac{s_q\beta_q}{\nu_q}\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q) =$$
$$= \nu_1 \ldots \nu_q F^{(p,q)}(x\,|\,\alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\frac{\beta_1}{\nu_1}, \ldots, \frac{\beta_q}{\nu_q}). \qquad (176)$$

Soient maintenant les entiers positifs impairs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$; le polynome $R_m^{(p,q)}(x)$ satisfait à l'équation

$$\frac{1}{k_1+1} R_m^{(p,q)}(x\,|\,\frac{\alpha_1}{\mu_1}, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q) =$$
$$= \frac{1}{k_1^{\mu_1}+1} \sum_{r_1=0}^{\mu_1-1} (-k_1)^{r_1} R_m^{(p,q)}(x + r_1\frac{\alpha_1}{\mu_1}\,|\,\alpha_1, k_1^{\mu_1}; \alpha_2, k_2; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{k_1+1} F_\eta^{(p,q)}(x\,|\,\frac{\alpha_1}{\mu_1}, k_1; \alpha_2, k_2; \ldots, \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q) =$$
$$\frac{1}{k_1^{\mu_1}+1} \sum_{r_1=0}^{\mu_1-1} (-k_1)^{r_1} F_\eta^{(p,q)}(x + r_1\frac{\alpha_1}{\mu_1}\,|\,\alpha_1, k_1^{\mu_1}; \alpha_2, k_2; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q).$$

Faisons tendre η vers zéro, il vient

$$\sum_{r_1=0}^{\mu_1-1} (-k_1)^{r_1} F^{(p,q)}(x + r_1\frac{\alpha_1}{\mu_1}\,|\,\alpha_1, k_1^{\mu_1}; \alpha_2, k_2; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q) =$$
$$= \frac{k_1^{\mu_1}+1}{k_1+1} F^{(p,q)}(x\,|\,\frac{\alpha_1}{\mu_1}, k_1; \alpha_2, k_2; \ldots; \alpha_p, k_p\,|\,\beta_1, \ldots, \beta_q). \qquad (177)$$

La fonction $F^{(p,q)}(x)$ est symétrique par rapport aux p couples de valeurs $(\alpha_1, k_1), \ldots, (\alpha_p, k_p)$ d'où l'on déduit la relation plus générale

$$\sum_{r_1=0}^{\mu_1-1} \cdots \sum_{r_p=0}^{\mu_p-1} (-k_1)^{r_1} \ldots (-k_p)^{r_p} \,.$$

$$. F^{(p,q)}\left(x + r_1 \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \cdots + r_p \frac{\alpha_p}{\mu_p} \,\middle|\, \alpha_1, k_1^{\mu_1}; \ldots; \alpha_p, k_p^{\mu_p} \middle| \beta_1, \ldots, \beta_q\right) =$$

$$= \frac{k_1^{\mu_1}+1}{k_1+1} \cdots \frac{k_p^{\mu_p}+1}{k_p+1} F^{(p,q)}\left(x \,\middle|\, \frac{\alpha_1}{\mu_1}, k_1; \ldots; \frac{\alpha_p}{\mu_p}, k_p \middle| \beta_1, \ldots, \beta_q\right). \tag{178}$$

On a supposé dans cette formule que les entiers positifs μ_i sont impairs; lorsqu'ils sont quelconques, on obtient une formule plus générale, deduite de (178) en remplaçant les $k_i^{\mu_i}$ par $-(-k_i)^{\mu_i}$. Si l'on rapproche les formules (176) et (178), on obtient finalement

$$\sum_{r_1=0}^{\mu_1-1} \cdots \sum_{r_p=0}^{\mu_p-1} \sum_{s_1=0}^{\nu_1-1} \cdots \sum_{s_q=0}^{\nu_q-1} (-k_1)^{r_1} \ldots (-k_p)^{r_p} \,.$$

$$. F^{(p,q)}\left(x + r_1 \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \cdots + r_p \frac{\alpha_p}{\mu_p} + s_1 \frac{\beta_1}{\nu_1} + \cdots + s_q \frac{\beta_q}{\nu_q} \,\middle|\, \alpha_1, k_1^{\mu_1}; \ldots; \alpha_p, k_p^{\mu_p} \middle| \beta_1, \ldots, \beta_q\right) =$$

$$= \frac{k_1^{\mu_1}+1}{k_1+1} \cdots \frac{k_p^{\mu_p}+1}{k_p+1} \nu_1 \ldots \nu_q F^{(p,q)}\left(x \,\middle|\, \frac{\alpha_1}{\mu_1}, k_1; \ldots; \frac{\alpha_p}{\mu_p}, k_p \middle| \frac{\beta_1}{\nu_1}, \ldots, \frac{\beta_q}{\nu_q}\right). \tag{179}$$

Considérons de nouveau la formule (175) écrite sous la forme

$$\frac{1}{\beta_1} \frac{\beta_1}{\nu_1} \sum_{s_1=0}^{\nu_1-1} F^{(p,q)}\left(x + s_1 \frac{\beta_1}{\nu_1} \,\middle|\, \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \middle| \beta_1, \ldots, \beta_q\right) =$$

$$= F^{(p,q)}\left(x \middle| \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \middle| \frac{\beta_1}{\nu_1}, \beta_2, \ldots, \beta_q\right).$$

Faisons tendre l'entier positif ν_1 vers l'infini; on trouve

$$\frac{1}{\beta_1} \int_x^{x+\beta_1} F^{(p,q)}\left(s \middle| \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \middle| \beta_1, \ldots; \beta_q\right) ds =$$

$$= \lim_{\nu_1 \to \infty} F^{(p,q)}\left(x \middle| \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \middle| \frac{\beta_1}{\nu_1}, \beta_2, \ldots, \beta_q\right),$$

ou encore,

$$\int_0^1 F^{(p,q)}\left(x + s\beta_1 \middle| \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \middle| \beta_1, \ldots, \beta_q\right) ds =$$

$$= \lim_{\nu_1 \to \infty} F^{(p,q)}\left(x \middle| \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \middle| \frac{\beta_1}{\nu_1}, \beta_2, \ldots, \beta_q\right). \tag{180}$$

On établit de la même manière la formule

$$\int_0^1 ds_2 \int_0^1 F^{(p,q)}(x + s_1\beta_1 + s_2\beta_2)\, ds_1 =$$

$$= \lim_{\nu_1, \nu_2 \to \infty} F^{(p,q)}\left(x \middle| \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \middle| \frac{\beta_1}{\nu_1}, \frac{\beta_2}{\nu_2}, \beta_3, \ldots, \beta_q\right),$$

et si l'on répète l'opération q fois,

$$\int_0^1 ds_q \ldots \int_0^1 ds_2 \int_0^1 F^{(p,q)}(x + s_1\beta_1 + \cdots + s_q\beta_q)\, ds_1 =$$

$$= \lim_{\nu_1 \ldots \nu_q \to \infty} F^{(p,q)}\left(x \middle| \alpha_1, k_1; \ldots; \alpha_p, k_p \middle| \frac{\beta_1}{\nu_1}, \ldots, \frac{\beta_q}{\nu_q}\right). \tag{181}$$

24. **Dérivées de la solution principale.** Nous avons trouvé pour la solution principale, l'expression

$$F^{(p,q)}(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m+q} \frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!} f^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\, dt, \tag{158}$$

où

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{q-1}}{(q-1)!} \varphi(t)\, dt.$$

Convenons d'écrire (158), pour $h = 0$, sous la forme symbolique

$$F^{(p,q)}(x) = \overset{-p,\,-q}{\bigwedge} \varphi(x). \tag{182}$$

Considérons en même temps la fonction

$$G^{(p,q)}(x) = \overset{-p,\,-q}{\bigwedge} \varphi'(x),$$

c'est-à-dire

$$G^{(p,q)}(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m+q} \frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!} g^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overset{*}{R}{}_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!} \varphi^{(m+2)}(x+t)\, dt \tag{183}$$

où

$$g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{q-1}}{(q-1)!} \varphi'(t)\, dt.$$

En intégrant par parties on trouve si $\nu<q$,

$$g^{(\nu-1)}(x) = -\frac{(x-a)^{q-\nu}}{(q-\nu)!}\varphi(a) + f^{(\nu)}(x).$$

D'autre part, pour $\nu \geq q$, on a

$$g^{(\nu)}(x) = f^{(\nu+1)}(x).$$

On déduit finalement

$$\sum_{\nu=0}^{m+q} \frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!}\left[f^{(\nu+1)}(x) - g^{(\nu)}(x)\right] = \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(h+x-a)}{(q-1)!}\varphi(a). \tag{184}$$

Dérivons les deux membres de (158) par rapport à x; l'intégrale au second membre étant uniformément convergente, on obtient

$$\frac{dF^{(p,q)}(x+h)}{dx} = \sum_{\nu=0}^{m+q}\frac{R_\nu^{(p,q)}(h)}{\nu!}f^{(\nu+1)}(x) + \int_0^\infty \frac{R_{m+q}^{(p,q)}(h-t)}{(m+q)!}\varphi^{(m+2)}(x+t)\,dt.$$

On retranche (183) et on tient compte de (184),

$$\frac{dF^{(p,q)}(x+h)}{dx} - G^{(p,q)}(x+h) = \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x+h-a)}{(q-1)!}\varphi(a). \tag{185}$$

La dernière équation peut s'écrire, en faisant $h=0$,

$$\frac{d}{dx}\overset{-p,-q}{\bigwedge}\varphi(x) = \overset{-p,-q}{\bigwedge}\varphi'(x) + \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x-a)}{(q-1)!}\varphi(a). \tag{185 bis}$$

Dérivons les deux membres par rapport à x,

$$\frac{d^2}{dx^2}\overset{-p,-q}{\bigwedge}\varphi(x) = \overset{-p,-q}{\bigwedge}\varphi''(x) + \frac{R_{q-1}^{(p,q)}(x-a)}{(q-1)!}\varphi'(a) + \frac{R_{q-2}^{(p,q)}(x-a)}{(q-2)!}\varphi(a).$$

Dérivons la dernière relation encore $(m+q-2)$ fois par rapport à x; on déduit de proche en proche

$$\frac{d^{m+q}}{dx^{m+q}}\overset{-p,-q}{\bigwedge}\varphi(x) = \overset{-p,-q}{\bigwedge}\varphi^{(m+q)}(x) + \sum_{\nu=0}^{q-1}\frac{R_\nu^{(p,q)}(x-a)}{\nu!}\varphi^{(m+\nu)}(a). \tag{186}$$

Mais

$$\overset{-p,\,-q}{\bigwedge}\varphi^{(m+q)}(x)=\int_a^{\infty}\frac{R_{q-1}^{(p,\,q)}(x-t)}{(q-1)!}\varphi^{(m+q)}(t)\,dt\,+$$

$$+(-1)^q(k_1+1)\ldots(k_p+1)\beta_1\ldots\beta_q\,\Sigma(-k_1)^{r_1}\ldots(-k_p)^{r_p}\varphi^{(m+q)}(x+\Omega).$$

En intégrant par parties et en tenant compte de l'hypothèse

$$\lim_{x\to\infty} x^{p'+q+\varepsilon}\varphi^{(\nu)}(x)=0\,. \qquad \nu>m,$$

on trouve

$$\int_a^{\infty}\frac{R_{q-1}^{(p,\,q)}(h-t)}{(q-1)!}\varphi^{(m+q)}(t)\,dt=\lim_{x\to\infty}\varphi^{(m)}(x)-\sum_{\nu=0}^{q-1}\frac{R_{\nu}^{(p,\,q)}(x-a)}{\nu!}\varphi^{(m+\nu)}(a),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d^{m+q}}{dx^{m+q}}\overset{-p,\,-q}{\bigwedge}\varphi(x)=\lim_{x\to\infty}\varphi^{(m)}(x)+(-1)^q(k_1+1)\ldots(k_p+1)\beta_1\ldots\beta_q\,.$$

$$.\,\Sigma(-k_1)^{r_1}\ldots(-k_p)^{r_p}\varphi^{(m+q)}(x+\Omega). \tag{187}$$

La série au second membre tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini; $\varphi^{(m)}(x)$ tend vers une limite finie. Il résulte que la solution principale $F^{(p,\,q)}(x)$ admet des dérivées continues pour $x\geq a$ et que la dérivée d'ordre $(m+q)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers l'infini. La solution principale (158) se réduit d'ailleurs à un polynome lorsque la fonction $\varphi(x)$ est un polynome de degré m. Ces propriétés de $F^{(p,\,q)}(x)$ montrent que la solution principale définie plus haut est parmi l'infinité de solutions de l'équation (152), la solution »la plus rationnelle».

Nous avons supposé dans tout ce qui précède que les écarts α_i et β_j sont positifs et que les k_i, différents ou égaux, sont situés à l'intérieur ou sur le cercle unité. On peut même supposer qu'il y a des k_i situés à l'extérieur du cercle unité, à condition que les α_i correspondants soient négatifs; c'est ce qui résulte de la propriété (65) du polynome $R_m^{(p,\,q)}(x|\alpha_1,\,k_1;\,\ldots;\,\alpha_p,\,k_p|\beta_1,\,\ldots,\,\beta_q)$.

Université de Bucarest.