CONTRIBUTION À LA THÉORIE DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES SÉRIES DE DIRICHLET.

PAR

S. MANDELBROJT

à LILLE.

Introduction.

§ 1. — La recherche des singularités d'une série de Dirichlet est essentiellement plus difficile que celle des singularités d'une série de Taylor.

Dans les séries de Taylor les puissances étant entières il est infiniment difficile de se rendre compte de la vraie forme sous laquelle doivent intervenir des combinaisons des exposants et des coëfficients d'une série de Dirichlet quand il s'agit de passer des séries de Taylor aux séries de Dirichlet générales: ainsi par exemple si un théorème concerne des séries de Taylor (ceux concernant les séries lacunaires mises à part) il est difficile de prévoir si la différence des exposants successifs doit intervenir dans le théorème général concernant les séries de Dirichlet et à quel moment.

Remarquons aussi que théoriquement parmi les théorèmes concernant les singularités des séries de Taylor doivent être considérés comme les plus importants ceux qui permettent de donner dans leur ensemble d'une part des conditions pour qu'un point fixe soit singulier (Wigert-Leau-Faber), d'autre part des lois permettant de passer de ces cas simples aux cas plus compliqués par des opérations sur les coëfficients entraînant des opérations simples sur les singularités (Opération de M. Hadamard, Opération de Hurwitz), et enfin ceux donnant des relations entre les coëfficients d'une série de Taylor et la *nature* des singularités (théorème de M. Hadamard sur les séries de Taylor représentant les fonctions méromorphes).

1—29764. *Acta mathematica.* 55. Imprimé le 19 décembre 1929.

Il s'agit donc de trouver *des combinaisons entre les coëfficients et les exposants* d'une série de Dirichlet généralisant la notion des coëfficients des séries de Taylor (car en général on ne peut pas traduire un théorème concernant les coëfficients d'une série de Taylor en un théorème concernant directement les coëfficients d'une série de Dirichlet générale) et susceptibles de fournir des renseignements sur les fonctions correspondantes et qui se rapprochent autant que possible de ceux concernant les séries de Taylor et cités plus haut.

J'introduis dans ce travail une de ces combinaisons que j'appelle »coëfficient taylorien» d'une série de Dirichlet qui donne beaucoup de renseignements sur l'allure de ces fonctions et qui ressemblent à ceux que donnent les coëfficients d'une série de Taylor sur les singularités correspondantes.

§ 2. — Nous désignons dans tout ce qui suit par s la variable complexe, par σ et t des variables réelles telles qu'on ait $s=\sigma+it$. Nous supposerons que les séries de Dirichlet considérées ne sont pas partout divergentes, donc qu'elles possèdent un axe de convergence $\sigma=\sigma_0$, $\sigma_0<+\infty$.

Soit $f(s)=\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ $(0<\lambda_n<\lambda_{n+1},\ \lim\limits_{n=\infty}\lambda_n=\infty)$ une série de Dirichlet et la fonction supposée uniforme représentée par cette série. Soit σ_0 l'axe de convergence de cette série.

Désignons par $E(f,\sigma_1)$ l'ensemble de tous les points non-réguliers de $f(s)$ situés dans le demi-plan $\sigma>\sigma_1$.[1] $E(f,\sigma_1)$ n'est pas vide seulement dans le cas où $\sigma_1<\sigma_0$.

Désignons par $E(f,\sigma_1,t_0)$ le sous-ensemble de $E(f,\sigma_1)$ situé dans le demi-plan $t>t_0$.

Si sur une droite $t=t_1$ il existe un point de $E(f,\sigma_1)$, désignons par α_{t_1} celui des points de $E(f,\sigma_1)$ qui de tous les points appartenant à cet ensemble et situés sur la droite $t=t_1$ est le plus à droite: ainsi, si $\alpha_{t_1}=\sigma_{t_1}+it_1$ tout point $\sigma+it_1$ avec $\sigma>\sigma_{t_1}$ est un point régulier de $f(s)$.[2] Si sur la droite $t=t_2$ il n'existe pas de points de $E(f,\sigma_1)$ posons $\sigma_{t_2}=\sigma_1$, donc $\alpha_{t_2}=\sigma_1+it_2$.

La fonction $f(s)$ et la quantité σ_1 étant données, les symboles σ_t et α_t $(\alpha_t=\sigma_t+it)$ sont déterminés quel que soit t.

Posons $\sigma_f^0=\overline{\lim\limits_{t=+\infty}}\,\sigma_t$.

---

[1] Nous appelons ensemble de points non-réguliers de $f(s)$ dans le demi-plan $\sigma>\sigma_1$ l'ensemble composé de tous les points singuliers de $f(s)$ dans ce demi-plan et de tous les points qui ne sont sur aucune courbe (située dans ce demi-plan) passant par un point où $f(s)$ converge et ne passant pas par les points singuliers de $f(s)$.

[2] Il ne faut pas confondre σ_1 et σ_0 avec σ_t pour t respectivement égal à 1 et 0.

Posons $\sigma_f^1 =$ *borne supérieure* des σ_t quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$. Nous choisirons la quantité σ_1 telle qu'on ait $\sigma_1 < \sigma_f^1$.

Soit ε un nombre positif fixe. Désignons par $D_\varepsilon^{f\sigma_1}$ un ensemble de points intérieurs qui contient l'ensemble $E(f, \sigma_1)$ et tel que quel que soit le point A appartenant à $D_\varepsilon^{f\sigma_1}$ il existe un point B appartenant à $E(f, \sigma_1)$ dont la distance de A soit inférieure à ε.

Désignons par $\overline{D}_\varepsilon^{f\sigma_1}$ l'ensemble des points du demi-plan $\sigma \geqq \sigma_1 + \varepsilon$ qui n'appartiennent pas à $D_\varepsilon^{f\sigma_1}$.

Désignons par $C_\varepsilon^{f\sigma_1}$ l'ensemble des points frontières de $\overline{D}_\varepsilon^{f\sigma_1}$, par $C_{\varepsilon\alpha\beta}^{f\sigma_1}$ la partie de $C_\varepsilon^{f\sigma_1}$ contenue dans la bande $\alpha \leqq t \leqq \beta$, et par $L_{\varepsilon f \sigma_1}^{\alpha\beta}$ la longueur totale des courbes[1] $C^{\alpha\beta}$ communes à $C_{\varepsilon\alpha\beta}^{f\sigma_1}$ et à la frontière de $D_\varepsilon^{f\sigma_1}$.

Soit k une constante telle qu'à tout ε on peut faire correspondre un $D_\varepsilon^{f\sigma_1}$ tel que quelque soit s appartenant à $\overline{D}_\varepsilon^{f\sigma_1}$ on ait:

$$|f(s)| < M(\varepsilon)\,|t|^k, \tag{1}$$

$M(\varepsilon)$ ne dépendant que de ε.

Soit ν la borne inférieure de tous les k jouissant de la propriété précédente. Nous constaterons ce fait en disant que $f(s)$ est $B(\nu, \sigma_1)$ ou $f(s)$ possède la propriété $B(\nu, \sigma_1)$.

Si ν défini comme à l'instant vérifie lui même la propriété (1) nous dirons que $f(s)$ est $B(\bar{\nu}, \sigma_1)$: ainsi dire par exemple que $f(s)$ est $B(\bar{0}, \sigma_1)$ revient à dire que $|f(s)| < M(\varepsilon)$ dans $\overline{D}_\varepsilon^{f\sigma_1}$.

Soit k une constante telle qu'à tout ε on peut faire correspondre un $D_\varepsilon^{f\sigma_1}$ tel qu'on ait pour les points s qui font partie de $\overline{D}_\varepsilon^{f\sigma_1}$

$$|f(\sigma_1 + \varepsilon + it)| < M_1(\varepsilon)\,|t|^{k'}, \quad |f(\sigma + in)| < M_1(\varepsilon)\, n^{k'+1}, \tag{2}$$

$$|f(s)|\,[L_{\varepsilon f\sigma_1}^{-n-1,\,-n} + L_{\varepsilon f\sigma_1}^{n,\,n+1}] < M_2(\varepsilon) n^{k''}, \quad (s \text{ sur } C^{-n-1,\,-n} \text{ et } C^{n,\,n+1},\ n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

$$\operatorname{Max}(k', k'') = k, \tag{4}$$

$M_1(\varepsilon)$ et $M_2(\varepsilon)$ ne dépendant que de ε.

Soit ν la borne inférieure de tous les k vérifiant cette condition nous dirons que $f(s)$ est $AB(\nu, \sigma_1)$.

[1] Ces courbes sont supposées en nombre fini pour chaque α, β et régulières.

Si k est tel qu'à tout ε on peut faire correspondre un $D_\varepsilon^{f\sigma_1}$ et une suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots; \alpha_n > 0, \lim_{n=\infty} \alpha_n = \infty$ tels qu'on ait pour les points qui appartiennent à $\overline{D}_\varepsilon^{f\sigma_1}$ et situés dans le demi-plan $t > 0$:

$$(5)\qquad |f(\sigma_1 + \varepsilon + it)| < M_1(\varepsilon) t^{k'}, \ |f(\sigma + i\alpha_n)| < M_1(\varepsilon) \alpha_n^{k'+1-\varepsilon},$$

$$(6)\qquad |f(s)| L_{\varepsilon f \sigma_1}^{0, \alpha_n} < M_2(\varepsilon) \alpha_n^{k''}, \ (s \text{ sur } C^{0\alpha_n})$$

$$(7)\qquad \operatorname{Max}(k' + 1, k'') = k$$

et si ν étant la borne inférieure des quantités k vérifiant cette condition la vérifie elle-même nous dirons que $f(s)$ est $C(\nu, \sigma_1)$. Il est évident que $\nu \geqq 1$.

Une fonction $f(s)$ étant donnée si elle est $B(\nu, \sigma_1)$ elle est $B(\nu', \sigma_1')$ pour $\sigma_1' > \sigma_1$ avec $\nu' \leqq \nu$.

En partant donc de la propriété $B(\nu, \sigma_1)$ on voit que ν est une fonction décroissante de σ soit: $\nu(\sigma)$.

Cette fonction coïncide avec la fonction bien connue de M. Lindelöf pour $\sigma > \sigma_f^1$.

Une quantité h étant donnée désignons par $\sigma(h)$ la borne inférieure des quantités σ telles qu'on ait $\nu(\sigma) = h$.

Nous appellerons une série de la forme $\Sigma a_n e^{-ns}$ série de Taylor-D.

Une fonction définie par une série de Taylor-D est évidemment $B(\bar{0}, \sigma_1)$, $AB(0, \sigma_1)$, $C(1, \sigma_1)$ quel que soit σ_1.

Il existe des séries de Dirichlet différentes des séries de Taylor-D jouissant des mêmes propriétés.

Partons, par exemple, d'une série de Dirichlet $F(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ qui admet un axe de convergence absolue $\sigma = \sigma_A < +\infty$.

Soit $\theta(s) = \Sigma b_n e^{-ns}$ une série de Taylor-D d'axe de convergence $\sigma_0 > \sigma_A$. Posons $\sigma_A < \sigma_1 < \sigma_0$ et supposons que $E(\theta, \sigma_1)$ ne possède que des points singuliers isolés non critiques.

Soit $T(x)$ une fonction entière; $T(x) = \Sigma C_n x^n$.

La fonction $T(F(s) + \theta(s))$ est une série de Dirichlet,

$$\psi(s) = T(F(s) + \theta(s)) = \Sigma k_n e^{-l_n s}$$

différente d'une série de Taylor-D et qui est $B(\bar{0}, \sigma_1)$, $AB(0, \sigma_1)$, $C(1, \sigma_1)$; on a ici $E(\psi, \sigma_1) \equiv E(\theta, \sigma_1)$.

On peut en donner plusieurs autres exemples, et où $E(\psi, \sigma_1)$ ne possède pas la même régularité sans être vide.

Dans le chapitre I nous donnons un théorème particulier de composition H de deux séries de Dirichlet appartenant au même type (c'est-à-dire avec les mêmes λ_n) ce théorème contenant le théorème de M. Hadamard sur les séries de Taylor comme cas particulier. L'importance du théorème I consiste plutôt dans la forme $\mathrm{I}^{\mathrm{bis}}$ que je lui ai donnée dans ce même chapitre.

Dans le Chapitre II nous donnons un théorème de composition H très général qui lui aussi contient le théorème de M. Hadamard comme cas très particulier.

Le Chapitre III est consacré à un théorème général de composition concernant les séries de Dirichlet et contenant le théorème de Hurwitz sur les séries de Taylor quand on se borne à une partie du plan.

Les autres chapitres sont consacrés à transporter aux séries de Dirichlet générales les propositions connues pour les séries de Taylor.

Il est évident que tous les théorèmes pour la série de Taylor dont la démonstration s'appuie sur les faits que nous transportons aux séries de Dirichlet peuvent aussi être transportés aux séries de Dirichlet générales.

Quelques-uns des résultats de ce travail ont été énoncés dans une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.[1]

Pour lire ce travail on n'a pas besoin de recourir à mes autres travaux concernant les séries de Dirichlet, pourtant il se relie étroitement à un Mémoire publié dans le Bulletin de la Société Mathématique de France — 1929.

CHAPITRE I.

Un cas spécial de Composition *H* concernant des séries de Dirichlet particulières, et généralisant le théorème de composition de M. Hadamard.

§ 3. — **Théorème I.** — *Soit* $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ *une fonction qui possède la propriété* $C\ (1, \sigma_1)$ *et soit* $\varphi(s) = \Sigma b_n e^{-\lambda_n s}$ *possédant la propriété* $B\ (\bar{0}, \sigma_2)$ *cette seconde série possédant un axe de convergence absolu* $\sigma = \sigma_A < +\infty$.

Posons $H(s) = H(f, \varphi) = \Sigma a_n b_n e^{-\lambda_n s}$.

[1] Tome 188, page 684.

L'ensemble $E(H, \sigma_2 + \sigma_f^0)$ *n'est formé que par des points* $\alpha + \beta$ *et des points* $\sigma_1 + it + \beta$, $t > t_0$ *où* α *est un point quelconque de* $E(f, \sigma_1, t_0)$, β *un point quelconque de* $E(\varphi, \sigma_2)$ *et où* t_0 *est arbitraire, et des points-limites de l'ensemble ainsi obtenu.*[1]

Remarque. — Comme une série de Taylor-D possède les propriétés $C(1, \sigma_1)$ et $B(\bar{0}, \sigma_1)$ avec σ_1 arbitraire il résulte du théorème précédent que si l'on pose $\lambda_n = n$ (alors $f(s) = \Sigma a_n e^{-ns}$ et $\varphi(s) = \Sigma b_n e^{-ns}$) la série $\Sigma a_n b_n e^{-ns}$ n'a pas d'autres points singuliers que $\alpha + \beta$ où α est un point singulier quelconque de $f(s)$ et β un point singulier quelconque de $\varphi(s)$. En posant $e^{-s} = z$ on obtient le théorème de M. Hadamard.

Démonstration du théorème I.

Soit ε une quantité positive et soient $D_\varepsilon^{f\sigma_1}$ et la suite $0 < \alpha_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$; $\lim \alpha_n = \infty$ les éléments qui dépendent de ε et qui en vertu de la propriété $C(1, \sigma_1)$ de $f(s)$ peuvent être choisis tels qu'on ait, d'après la définition même de cette propriété,

$$|f(\sigma_1 + \varepsilon + it)| < M_1(\varepsilon), \quad |f(\sigma + i\alpha_n)| < M_1(\varepsilon)\,\alpha_n^{1-\varepsilon} \tag{8}$$

quand s varie dans la partie de $\bar{D}_\varepsilon^{f\sigma_1}$ qui est située dans le demi-plan $t > 0$.

$$|f(s)|\, L_{\varepsilon f \sigma_1}^{0\,\alpha_n} < M_2(\varepsilon)\alpha_n, \quad (s \text{ sur } C^{0\,\alpha_n}). \tag{9}$$

Choisissons $D_\varepsilon^{\varphi\sigma_2}$ tel qu'on ait

$$|\varphi(s)| < M_3(\varepsilon) \tag{10}$$

quand s varie dans $\bar{D}_\varepsilon^{\varphi\sigma_2}$ ce qui est aussi possible en vertu de la propriété $B(\bar{0}, \sigma_2)$.

Donnons $t_0 > 0$, et considérons $C_{\varepsilon t_0 \alpha_n}^{f\sigma_1}$, la partie de $C_\varepsilon^{f\sigma_1}$ comprise dans la bande $t_0 \leqq t \leqq \alpha_n$.

Faisons parcourir à la variable $z = x + iy$ un domaine $\varDelta$ borné contenant un point $z_0 = x_0 + iy_0$ avec

[1] C'est à dire $E(H, \sigma_2 + \sigma_f^0)$ ne peut contenir que les points $\alpha + \beta$; $\sigma_1 + it + \beta$, $(t > t_0)$, leurs points limites et les points qui ne sont situés sur aucune courbe située dans le demi-plan $\sigma > \sigma_2 + \sigma_f^0$, cette courbe passant par un point où la série H converge et ne contenant ni les points précisés ni leurs points limites. H n'est pas partout divergente, comme nous verrons au cours de la démonstration. Le théorème de M. Hadamard concernant les séries de Taylor doit s'énoncer d'une manière analogue à celle du théorème I avec les conventions précisées ici et en bas de la page 2 tout en parlant du plan entier au lieu du demi-plan; l'énoncé qu'on donne couramment du théorème de M. Hadamard n'est pas assez rigoureux.

$$x_0 > \max(\sigma_f^1 + \sigma_A + 2\varepsilon,\ \sigma_A + 2\varepsilon) \tag{11}$$

tous les points z de Δ vérifiant les conditions

$$|z - \alpha - \beta| > 2\varepsilon \tag{12}$$

$$x > \sigma_f^0 + \sigma_2 + 3\varepsilon \tag{13}$$

$$|z - \sigma_1 - it - \beta| > 2\varepsilon, \quad t > t_0 \tag{14}$$

quels que soient α de $E(f, \sigma_1, t_0)$ et β de $E(\varphi, \sigma_2)$.

Il résulte de (12) et (14) et de la définition de $C^{f\sigma_1}_{\varepsilon t_0 \alpha_n}$ que

$$|z - s - \beta| > \varepsilon \tag{15}$$

quand z est un point quelconque de Δ, s un point quelconque de $C^{f\sigma_1}_{\varepsilon t_0 \alpha_n}$ et β un point quelconque de $E(\varphi, \sigma_2)$.

A partir de ce moment on supposera que t_0 est choisi de telle manière qu'on ait

$$\sigma_t < \sigma_f^0 + \varepsilon \quad \text{si} \quad t > t_0\,[1]$$

ce qui est possible en vertu de la définition de σ_f^0.

On aura donc quand s est un point quelconque de $C^{f\sigma_1}_{\varepsilon t_0 \alpha_n}$ qui n'est pas point de la droite $\sigma = \sigma_1 + \varepsilon$

$$\sigma \leqq \sigma_t + \varepsilon \leqq \sigma_f^0 + 2\varepsilon.$$

Quel que soit $z = x + iy$ de Δ et s de $C^{f\sigma_1}_{\varepsilon t_0 \alpha_n}$ on a en vertu de cette dernière inégalité et de (12) et (13)

$$\Re(z - s) > \sigma_2 + \varepsilon.\,[2] \tag{16}$$

Considérons maintenant la suite $H_n(z)$ des fonctions définies par l'égalité:

$$H_n(z) = \frac{1}{i\alpha_n} \int\limits_{C^{f\sigma_1}_{\varepsilon t_0 \alpha_n}} f(s)\varphi(z - s)\,ds.\,[3]$$

---

[1] It est évident que si le théorème I a lieu pour un t_0 il aura lieu pour t_0 inférieur au précédent. De même si l'on démontre que $H(z)$ est holomorphe dans tout Δ formé à partir de t_0 par les inégalités (11), (12), (13) et (14) elle sera aussi holomorphe dans tout domaine Δ formé par les mêmes inégalités et à partir d'un t_0 inférieur au précédent.

[2] Rappelons que $\sigma_2 < \sigma_\varphi^1$ et $\sigma_1 < \sigma_f^1$. Voir page 2.

[3] Le sens d'intégration étant choisi de sorte à laisser les points de $D_\varepsilon^{f\sigma_1}$ à droite du parcours.

La famille des fonctions $H_n(z)$ est holomorphe (d'après (15)) et bornée dans son ensemble.

En effet: quand z varie dans $\varDelta$ et quand s est sur $C^{f\sigma_1}_{\varepsilon t_0 \alpha_n}$ on a d'après (8), (9), (10), (15), (16)

$$|H_n(z)| \leqq \frac{A}{\alpha_n} \underset{s \text{ sur } C^{f\sigma_1}_{\varepsilon t_0 \alpha_n}}{\operatorname{Max}} |f(s)| \underset{\substack{z \text{ dans } \varDelta \\ s \text{ sur } C^{f\sigma_1}_{\varepsilon t_0 \alpha_n}}}{\operatorname{Max}} |\varphi(z-s)| \, L^{0\,\alpha_n}_{\varepsilon f \sigma_1} + M_1(\varepsilon) M_3(\varepsilon) < C$$

où A et C sont des constantes indépendantes de n.

La famille $H_n(z)$ est donc une famille normale.

Il existe donc une suite n_j $(j = 1, 2, \ldots)$ telle que la suite $H_{n_j}(z)$ tend uniformément vers une fonction holomorphe dans tout domaine fermé intérieur à $\varDelta$ quand j tend vers l'infini. Posons

$$\lim_{j=\infty} H_{n_j}(z) = H^0(z). \tag{17}$$

En vertu de (11) on peut choisir une quantité $\bar{\sigma} > \sigma_f^1 + \varepsilon$ et telle qu'on ait

$$x_0 > \operatorname{Max}(\bar{\sigma} + \sigma_A + \varepsilon, \sigma_A). \tag{18}$$

Considérons la partie $D_{j,\varepsilon}$ de $\bar{D}^{f\sigma_1}_{\varepsilon}$ dont les points se trouvent dans le domaine

$$\sigma \leqq \bar{\sigma}, \quad t_0 \leqq t \leqq \alpha_{n_j}.$$

Soit $C_{j,\varepsilon}$ sa frontière.

Considérons d'autre part un cercle C_1 de centre z_0 et de rayon assez petit pour qu'on ait pour tous les points z de ce cercle et par tous les points s du domaine fermé $D_{j,\varepsilon}$

$$x > \operatorname{Max}(\sigma + \sigma_A + \varepsilon, \sigma_A) \quad (z = x + iy,\ s = \sigma + it). \tag{19}$$

Ce cercle de rayon δ non nul existe en vertu de (18) et de la définition de $D_{j,\varepsilon}$.

Quand z et s parcourent les ensembles spécifiés en dernier lieu la fonction $\varphi(z-s)$ est alors une fonction holomorphe de s. $f(s)$ étant aussi holomorphe quand s est dans $D_{j,\varepsilon}$ on a

$$\int_{C_{j\varepsilon}} f(s)\,\varphi(z-s)\,ds = 0.$$

Désignons par $C'_{j\varepsilon}$ l'ensemble des points de $C_{j\varepsilon}$ qui n'appartiennent ni à $C^{f\sigma_1}_{\varepsilon t_0 \alpha_n}$ ni à la droite $\sigma = \bar{\sigma}$.

On a

$$(20)\qquad \begin{aligned} H_{n_j}(z) = \frac{1}{i\,\alpha_{n_j}} \int_{C^{f\sigma_1}_{\varepsilon t_0 \alpha_{n_j}}} f(s)\,\varphi(z-s)\,ds &= \frac{1}{\alpha_{n_j}} \int_{t_0}^{\alpha_{n_j}} f(\bar{\sigma}+it)\,\varphi(z-\bar{\sigma}-it)\,dt \\ &- \frac{1}{i\,\alpha_{n_j}} \int_{C'_{j\varepsilon}} f(s)\,\varphi(z-s)\,ds. \end{aligned}$$

En désignant par $L_{j\varepsilon}$ la longueur totale des segments formés par les points de $C'_{j\varepsilon}$ on voit immédiatement qu'il existe un nombre L tel que pour tout j on ait

$$L_{j\varepsilon} < L$$

nous pouvons donc écrire en vertu de (19):

$$(21)\qquad \left| \int_{C'_{j\varepsilon}} f(s)\,\varphi(z-s)\,ds \right| < L M_1(\varepsilon) M_3(\varepsilon).$$

En vertu aussi de (19) on a pour tout point z de C_1 et s de la droite $\sigma = \bar{\sigma}$ uniformément

$$\varphi(z-s) = \sum_n b_n e^{-\lambda_n (z-s)}$$

cette série converge d'ailleurs absolument.

Nous pouvons donc écrire en vertu de (20)

$$H_{n_j}(z) = \frac{1}{\alpha_{n_j}} \int_{t_0}^{\alpha_{n_j}} f(\bar{\sigma}+it) \sum_m b_m e^{-\lambda_m z} e^{\lambda_m (\bar{\sigma}+it)}\,dt - \frac{1}{i\,\alpha_{n_j}} \int_{C'_{j\varepsilon}} f(s)\,\varphi(z-s)\,ds.$$

Comme $\bar{\sigma} > \sigma_f^1 + \varepsilon$ et comme $f(s)$ est bornée pour $\sigma > \sigma_f^1 + \varepsilon$ on peut écrire d'après une formule connue

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} f(\sigma+it)e^{\lambda_k(\bar{\sigma}+it)}dt = a_k + \varepsilon(k, T)$$

avec

$$\lim_{T=\infty} \varepsilon(k, T) = 0$$

quel que soit k.

On voit donc que quand z est dans C_1 on a

$$H_{n_j}(z) = \sum_{m=1}^{p} b_m e^{-\lambda_m z}(a_m + \varepsilon_{jm}) - \frac{1}{i\alpha_{n_j}}\int_{C'_{j\varepsilon}} f(s)\varphi(z-s)ds + F_{pj}(z) \tag{22}$$

les ε_{jm} étant tels que $\eta > 0$ étant donné à l'avance on peut choisir j_0 tel que pour $j > j_0$ on ait $|\varepsilon_{jm}| < \eta$ et où (la série $\Sigma b_n e^{-\lambda_n z}$ converge absolument quand z est dans C)

$$F_{pj}(z) = \frac{1}{\alpha_{n_j}}\int_{t_0}^{\alpha_{n_j}} f(\bar{\sigma}+it)\sum_{m=p+1}^{\infty} b_m e^{-\lambda_m(z-s)}ds. \tag{23}$$

En combinant (21), (22) et (23) on obtient pour z dans C_1

$$H_{n_j}(z) = \Sigma b_m a_m e^{-\lambda_m z} + F_j(z) + F_{pj}$$

avec

$$\lim_{j=\infty} F_j(z) = 0; \quad \lim_{j=\infty} F_{pj}(z) = F_p^1(z); \quad \lim_{p=\infty} F_p^1(z) = 0$$

uniformément dans C_1.

D'où

$$\lim_{j=\infty} H_{n_j}(z) = H^0(z) = \sum_m a_m b_m e^{-\lambda_m z}.$$

Donc pour z variant dans C_1 on a:

$$H^0(z) = H(z) = H(f, \varphi).$$

La fonction $H(z)$ coïncide donc avec $H^0(z)$ ce qui (en nous rappelant la définition de Δ et le fait que $H^0(z)$ est holomorphe dans Δ), démontre le théorème.

Le théorème I peut être utilisé sous la forme suivante:

Théorème I$^{\text{bis}}$: Si pour t_0 et σ_1 fixes, l'ensemble

$$E(H, \sigma_2 + \sigma_f^0) \quad \text{où} \quad H(s) = H(f(s), \varphi(s)) = \Sigma a_n b_n e^{-\lambda_n s}$$

contient au moins un point qui n'est ni de la forme $\alpha + \beta$ pour aucun α de $E(f, \sigma_1, t_0)$ et β de $E(\varphi, \sigma_2)$ ni de la forme $\sigma_1 + it + \beta$, $t > t_0$ ni un point limite de l'ensemble ainis obtenu, la série $\varphi(s) = \Sigma b_n e^{-\lambda_n s}$ admettant un axe de convergence absolue, alors ou bien $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ ne possède pas la propriété $C(1, \sigma_1)$, ou bien $\varphi(s)$ ne possède pas la propriété $B(0, \sigma_2)$.

Par exemple on a en posant $f(s) = \varphi(s) = \Sigma e^{-\lambda_n s}$ (et alors $H(s) = \Sigma e^{-\lambda_n s}$) et $\sigma_2 = \sigma_1$ le fait suivant:

Si pour t_0 et σ_1 fixe $E(f, \sigma_1 + \sigma_f^0)$ où $f(s) = \Sigma e^{-\lambda_n s}$ possède au moins un point qui ne peut être mis sous la forme $\alpha + \beta$ ou de la forme $\sigma_1 + it + \beta$, $t > t_0$ et qui n'est pas un point limite de tels points où α est un point de $E(f, \sigma_1, t_0)$ et β un point de $E(f, \sigma_1)$ convenablement choisis, alors $f(s)$ ne possède pas au moins une de deux propriétés $C(1, \sigma_1)$, $B(0, \sigma_1)$.

Le fait simple suivant est contenu dans ce que nous venons de dire:

Si $f(s) = \Sigma e^{-\lambda_n s}$ ne possède des points singuliers que dans une bande $t_1 < t < t_2$ en en possédant au moins un, alors aucune combinaison

$$F(s) = f^{(l_1)}(s + a_1) + f^{(l_2)}(s + a_2) + \cdots + f^{(l_r)}(s + a_r) \tag{24}$$

où les a_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sont choisis arbitrairement n'est bornée pour $\sigma > \frac{\sigma_F^1}{2} - \varepsilon$, $t > t_0$, t_0 étant arbitraire.

$H(F, F)$ est encore, on le voit immédiatement de la forme (24); si t_0 est choisi de sorte que $t_0 > \underset{i=1,2,\cdots r}{\operatorname{Max}} (|t_1| + |t_2| + 2|a_i|)$ l'ensemble $E\left(F, \frac{\sigma_F^1}{2}, t_0\right)$ est vide; le résultat précédent démontre le reste.

CHAPITRE II.

Une composition $H_1(f, \varphi)$ concernant les séries de Dirichlet très générales et contenant également comme cas particulier l'opération H sur les séries de Taylor.

§ 4. — Dans la théorie des moyennes typiques de M. Marcel Riesz on opère avec les expériences de la forme

$$\sum_{\lambda_n < \omega} (\omega - \lambda_n)^k a_n$$

une série $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ étant donnée.

Nous donnerons à la quantité variable ω des valeurs numériques qui seront les exposants d'une autre série de Dirichlet $\Sigma b_q e^{-l_q s}$: nous considérons donc les expressions

$$(25) \qquad \sum_{\lambda_n < l_m} (l_m - \lambda_n)^k a_n$$

et nous employons ces expressions dans un but tout à fait différent de celui de la théorie de M. Riesz.

Nous appellerons l'expression (25) le $m^{\text{ième}}$ coefficient du type $\{l_q\}$[1] et d'ordre k de la série $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$; nous appellerons aussi $m^{\text{ième}}$ »coefficient taylorien» d'ordre k de la série $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ son $m^{\text{ième}}$ coefficient du type $\{q\}$ et d'ordre k c'est-à-dire l'expression

$$\sum_{\lambda_n < m} (m - \lambda_n)^k a_n .$$

Cette appellation nous paraitra tout à fait naturelle après que nous aurons établi les théorèmes des chapitres suivants; mais remarquons dès maintenant que si l'on pose $\lambda_n = n$, et en posant $e^{-s} = z$ c'est-à-dire en considérant une série de Taylor le $n^{\text{ième}}$ coefficient taylorien d'ordre k est égal à C_n où

$$\Sigma C_n z^n = \frac{k!}{(1 - z)^{k+1}} \Sigma a_n z^n .$$

Donc les théorèmes concernant les singularités des séries de Taylor et portant sur les propriétés de ses coefficients peuvent être immédiatement remplacés par des théorèmes donnant des renseignements sur les singularités et portant sur les coefficients d'ordre k. C'est sous cette dernière forme que ces théorèmes se transportent le plus facilement aux séries de Dirichlet générales, comme nous le verrons dans les Chapitres suivants:

Commençons par démontrer le théorème suivant:

Théorème II. *Soit $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ une fonction qui possède la propriété $AB(\nu_1, \sigma_1)$ et $\varphi(s) = \Sigma b_n e^{-l_n s}$ une fonction possédant la propriété $B(\nu_2, \sigma_2)$ cette der-*

[1] $\{l_q\}$ désignant la suite $l_1, l_2, \ldots l_q, \ldots$

nière série possédant un axe de convergence absolue σ_A. Soit un entier $k > \nu_1 + \nu_2$, posons

$$(26)\qquad H_1(s) = H_1(f, \varphi) = \Sigma a_{l_n}^{(k)} b_n e^{-l_n s}$$

si le point o *est un point singulier de $f(s)$, et posons*

$$(27)\qquad H_1(s) = H_1(f, \varphi) = \Sigma a_{l_n}^{(k)} b_n e^{-l_n s} -$$
$$- \{f^{(k)}(0)\varphi(s) - k f^{(k-1)}(0)\varphi'(s) + \cdots + (-1)^k f(0)\varphi^{(k)}(s)\}$$

si le point o *est un point régulier de $f(s)$ où $a_{l_n}^{(k)}$ est le $n^{\text{ième}}$ coefficient du type $\{l_q\}$ et d'ordre k de la fonction $f(s)$ c'est-à-dire $a_{l_n}^{(k)} = \sum_{\lambda_m < l_n} (l_n - \lambda_m)^k a_m$.*

L'ensemble $E(H, \mathrm{Max}(\sigma_f^1 + \sigma_2, \sigma_\varphi^1 + \sigma_1))$ n'est formé que par des points de la forme $\alpha + \beta$ et leurs points-limites où α est un point quelconque de $E(f, \sigma_1)$ et où β est un point quelconque de $E(\varphi, \sigma_2)$.[1]

Remarquons que le théorème II lui aussi contient le théorème de M. Hadamard comme cas tout à fait particulier: en effet si $\lambda_n = l_n = n$ on peut évidemment poser $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 0$; posons donc $k = 2$ avec σ_1 et σ_2 arbitraires; si $\theta(z) = \Sigma a_n z^n$ ne possède pas le point un comme point singulier la fonction $F(z) = \dfrac{\theta(z)(1-z)^3}{6} =$ $= \Sigma C_n z^n$ (les C_n sont tels que $C_n^{(2)} = a_n$) admet le point 1 comme zéro triple, donc en posant $F(z) = F(e^{-s}) = f(s)$ et $T(z) = \Sigma b_n z^n = T(e^{-s}) = \varphi(s)$ et en tenant compte de ce que $C_n^{(2)} = a_n$ on voit d'après le théorème II:

$$H_1(f, \varphi) = \Sigma C_n^{(2)} b_n e^{-ns} - \{f(0)\varphi''(s) - 2f'(0)\varphi'(s) + f''(0)\varphi(s)\} =$$
$$= \Sigma C_n^{(2)} b_n e^{-ns} = \Sigma a_n b_n z^n = H(\theta, T)$$

n'a pas dans le plan s d'autres points singuliers que les points $\alpha + \beta$ où α est un point singulier quelconque de $f(s)$ et β un point singulier quelconque de $\varphi(s)$ ou autrement dit elle n'a pas dans le plan z d'autres points singuliers que les points $\alpha'\beta'$ où α' est un point singulier quelconque de $\theta(z)$ et β' un point singulier quelconque de $T(z)$.

De même si $\theta(z)$ admettait le point *un* comme point singulier différent d'un pôle de degré inférieur à 4 on aura encore

---

[1] Voir les notes en bas des pages 2 et 6.

$$H_1(f, \varphi) = \Sigma C_n^{(2)} b_n e^{-ns} = \Sigma a_n b_n z^n = H(\theta, T)$$

et la conclusion subsiste.

Enfin si *un* était un pôle de degré au plus égal à trois ce point sera un zéro de degré au plus égal à deux pour $F(z)$ et on aura

$$H_1(f, \varphi) = \Sigma C_n^{(2)} b_n e^{-ns} - \{f(0)\varphi''(s) - 2f'(0)\varphi'(s) + f''(0)\varphi(s)\} = \\ = H(\theta, T) + A(z)$$

$A(z)$ admettant comme points singuliers seulement ceux de T, d'où encore la conclusion. Donc le théorème II contient bien le théorème de M. Hadamard comme cas particulier.

Remarquons encore qu'un théorème[1] avec des restrictions pour les ensembles de points singuliers de $f(s)$ et $\varphi(s)$ et que j'ai proposé de démontrer à un de mes auditeurs par des méthodes qui relèvent de l'intégrale que j'emploie dans la suite est aussi un cas très particulier du théorème II.

Démonstration du théorème II.

Soient ε et δ deux quantités positives. Soient $D_\varepsilon^{f\sigma_1}$ et $D_\varepsilon^{\varphi\sigma_2}$ et les quantités k', k'', k''' tels que $\mathrm{Max}(k', k'') < \nu_1 + \delta$, $k''' < \nu_2 + \delta$ et qui correspondent à la définition de $AB(\nu_1, \sigma_1)$ et $B(\nu_2, \sigma_2)$ c'est-à-dire tels qu'on ait:

(28) $$|f(\sigma_1 + \varepsilon + it)| < M_1(\varepsilon)|t|^{k'} \quad |f(\sigma + in)| < M_1(\varepsilon) n^{k'+1},$$

(29) $$|f(s)|[L_{\varepsilon f\sigma_1}^{-n-1, -n} + L_{\varepsilon f\sigma_1}^{n, n+1}] < M_2(\varepsilon) n^{k''} \; (s \text{ sur } C^{-n-1, -n} \text{ et } C^{n, n+1})$$

quand s varie dans $\overline{D}_\varepsilon^{f\sigma_1}$

(30) $$|\varphi(s)| < M_3(\varepsilon)|t|^{k'''}$$

quand s varie dans $\overline{D}_\varepsilon^{\varphi\sigma_2}$..

Faisons parcourir à la variable $z = x + iy$ un domaine borné $\varDelta$ contenant un point $z_0 = x_0 + iy_0$ avec

(31) $$x_0 > \sigma_0 + 2\varepsilon + \sigma_A$$

---

[1] Widder C. R. 1927, A. Journal of Mathematics 1927, Bull. of the American Math. Society 1927.

où σ_0 est l'axe de convergence de $f(s)$ les points de z de ce domaine vérifiant les inégalités

$$|z-\alpha-\beta|>2\varepsilon \tag{32}$$

$$x>\sigma_f^1+\sigma_2+2\varepsilon \tag{33}$$

$$x>\sigma_\varphi^1+\sigma_1+2\varepsilon \tag{34}$$

quel que soit le point α de $E(f,\sigma_1)$ et quel que soit β de $E(\varphi,\sigma_2)$.

Il résulte de (32), (33) et (34) que quel que soit le point s de $C_\varepsilon^{f\sigma_1}$, z de $\varDelta$ et β de $E(\varphi,\sigma_2)$ on a:

$$|z-s-\beta|>\varepsilon \tag{35}$$

$$\Re(z-s)>\sigma_2+\varepsilon. \tag{36}$$

Considérons alors l'intégrale

$$F(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{C_\varepsilon^{f\sigma_1}} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}}\,. \tag{37}$$

En désignant par C_ε^n la partie de $C_\varepsilon^{f\sigma_1}$ qui se trouve dans les bandes $-n-1\leqq t\leqq -n$, $n\leqq t\leqq n+1$ nous pouvons écrire

$$F(z)=\frac{k!}{2\pi i}\sum_n\int\limits_{C_\varepsilon^n} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}} \tag{38}$$

cette dernière somme étant uniformément convergente l'égalité (37) a donc un sens.

En effet on a d'après (28), (29), (30), (35) et (36)

$$|F(z)|<C_1\sum_n\frac{(n+1)^{\nu_1+\nu_2+2\delta}}{n^{k+1}}=C_2\sum_n\frac{1}{n^{k+1-\nu_1-\nu_2-2\delta}}$$

C_1 et C_2 étant constantes. Comme δ est une constante arbitraire positive qu'on a pu choisir assez petite et comme $\nu_1+\nu_2<k$ on voit que (38) est uniformément convergente en z donc (37) détermine une fonction holomorphe de z quand z est dans $\varDelta$.

Désignons par $D_{n\varepsilon}$ la partie de $\bar{D}_\varepsilon^{f\sigma_1}$ qui se trouve dans le domaine

$$\sigma \leqq \bar{\sigma}, \quad -n < t < n$$

$\bar{\sigma}$ étant tel qu'on ait $\bar{\sigma} > \sigma_0 + \varepsilon$ et

$$x_0 > \bar{\sigma} + \sigma_A + \varepsilon \tag{39}$$

ce qui est possible en vertu de (31). Soit $C_{n\varepsilon}$ la frontière de $D_{n\varepsilon}$.

Considérons d'autre part un cercle C_1, de centre z_0 et de rayon assez petit pour qu'on ait pour tous les points z de ce cercle

$$x > \bar{\sigma} + \sigma_A + \varepsilon. \tag{40}$$

z étant contenu dans C_1, et s étant dans $D_{n,\varepsilon}$, fermé, la fonction $\varphi(z-s)$ est holomorphe de s; $f(s)$ est aussi holomorphe dans $D_{n,\varepsilon}$ fermé. Donc si $s=0$ n'est pas un point singulier de $f(s)$ on aura si $\sigma_1 + \varepsilon < 0 < \bar{\sigma}$

$$\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{C_{n,\varepsilon}} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}} = -\{(-1)^k f(0)\varphi^{(k)}(z) + (-1)^{k-1} k f'(0)\varphi^{(k-1)}(z) + \\ + \cdots + f^{(k)}(0)\,\varphi(z)\} \tag{41}$$

car la parenthèse désigne le résidu multiplié par $k!$ du pôle $s=0$ de la fonction $\frac{f(s)\,\varphi(z-s)}{s^{k+1}}$ et l'intégrale est prise dans le sens négatif.

Nous avons supposé dans (41) que $\sigma_1 + \varepsilon < 0 < \bar{\sigma}$. On peut évidemment toujours supposer la seconde partie de cette inégalité, il suffit pour cela de prendre x_0 et σ assez grand. Si la première partie n'avait pas lieu c'est-à-dire si $\sigma_1 \geqq 0$ (on exclut facilement le cas $\sigma_1 + \varepsilon = 0$ par un choix convenable de ε) la formule (42) aura lieu; mais comme les singularités correspondant à la parenthèse de la formule (41) qui sont les β sont telles qu'elles ne peuvent pas entrer dans l'ensemble $E(H, \mathrm{Max}\,(\sigma_f^1 + \sigma_2, \sigma_\varphi^1 + \sigma_1))$ si $\sigma_1 \geqq 0$, car alors $\Re\beta \leqq \sigma_\varphi^1 \leqq \sigma_\varphi^1 + \sigma_1$, on voit donc qu'on peut supposer $\sigma_1 + \varepsilon < 0$.

Si au contraire le point $s=0$ est un point singulier de $f(s)$ on a

$$\frac{k!}{2\pi}\int\limits_{C_{n,\varepsilon}} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}} = 0. \tag{42}$$

Désignons par $C'_{n\varepsilon}$ l'ensemble des points de $C_{n\varepsilon}$ qui n'appartiennent ni à $C_\varepsilon^{f\sigma_1}$ ni à la droite $\sigma = \bar{\sigma}$ on a évidemment

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_{C'_{n,\varepsilon}} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}} = 0. \tag{43}$$

Il résulte immédiatement des formules (37), (41), (42) et (43) que pour z situé dans C_1, on a

$$F(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\bar\sigma + it)\varphi(z-\bar\sigma-it)\frac{i\,dt}{(\bar\sigma+it)^{k+1}} - \{f(0)\varphi^{(k)}(z) - \cdots + (-1)^k f^{(k)}(0)\,\varphi(z)\},$$

si $s=0$ est un point régulier pour $f(s)$ et

$$F(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\bar\sigma + it)\varphi(z-\bar\sigma-it)\frac{i\,dt}{(\bar\sigma+it)^{k+1}},$$

si $s=0$ est un point singulier pour $f(s)$.

Mais on peut écrire

$$\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{i\,dt}{s^{k+1}} = \sum_n \frac{k!}{2\pi i} b_n e^{-l_n z}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,e^{l_n s}\frac{i\,dt}{s^{k+1}} \tag{44}$$

pour $\sigma=\bar\sigma$, z étant dans C_1,

car d'après (39) la série $\Sigma b_n e^{-l_n s}$ converge alors absolument et uniformément l'expression

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(s)|\frac{dt}{|s|^{k+1}} + \int\limits_{-\infty}^{0} |f(s)|\frac{dt}{|s|^{k+1}}$$

étant finie d'après (28) et d'après l'inégalité $k > k'$.

On a d'autre part d'après une formule connue

$$\frac{k!}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,e^{\omega s}\frac{dt}{s^{k+1}} = \sum_{\lambda_m<\omega}(\omega-\lambda_m)^k a_m$$

si $\sigma = \bar\sigma$

donc

$$\frac{k!}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\bar\sigma+it)\,e^{l_n(\bar\sigma+it)}\frac{dt}{(\bar\sigma+it)^{k+1}} = a_{l_n}^{(k)}.$$

D'où l'on tire que

$$F(z) = H_1(z)$$

quand z est dans C_1. Comme $F(z)$ est holomorphe dans Δ on constate que notre théorème est démontré.

On peut avoir un théorème analogue en remplaçant les expressions

$$\sum_{\lambda_m < l_n} a_m (l_n - \lambda_m)^k$$

par des expressions

$$\Sigma a_m (1 - e^{\lambda_m - l_n})^k$$

mais nous nous contentons de le signaler.

CHAPITRE III.

Opération H^* concernant les séries générales de Dirichlet et généralisant l'opération de Hurwitz sur les séries de Taylor.

§ 5. — Bien que les fonctions qui intervenaient sous le signe d'intégrale dans les démonstrations des théorèmes I et II ressemblaient plutôt à celles qui interviennent dans la démonstration du théorème de Hurwitz pour les séries de Taylor, les opérations traitées doivent bien être considérées comme généralisations du théorème de M. Hadamard: elles deviennent cette opération si $l_n = \lambda_n = n$. C'est à cause de la transformation $e^{-s} = z$ qu'interviennent les sommes $\alpha + \beta$ pour la variable s, quand $\alpha' \beta'$ intervient pour la variable z. $(\alpha' = e^{-\alpha}, \beta' = e^{-\beta}.)$

Au contraire: à l'expression $\alpha' + \beta'$ correspond l'expression $-\log(e^{-\alpha} + e^{-\beta})$.

Le théorème de Hurwitz pour les séries de Taylor-D s'énonce donc de la manière suivante:

Si $f(s) = \Sigma a_n e^{ns}$ et $\varphi(s) = \Sigma b_n e^{ns}$ possèdent un axe de convergence la fonction $\Sigma \gamma_n e^{ns}$ où

$$\gamma_n = a_n b_1 + C_n^1 a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n \tag{45}$$

n'a pas d'autres points singuliers que les points $-\log(e^{-\alpha} + e^{-\beta})$ si α est un point singulier quelconque de $f(s)$ et β un point singulier quelconque de $\varphi(s)$.

Une généralisation du théorème de Hurwitz aux séries de Dirichlet doit donc contenir le théorème précédent comme cas particulier.

Nous supposerons que les séries de la forme $\Sigma k_n e^{r_n s}$ considérées dans la suite possèdent un axe de convergence à distance finie, c'est-à-dire qu'il existe pour chacune de ces séries une quantité $\sigma = \sigma_0 > -\infty$ telle qu'elle converge pour $\sigma < \sigma_0$.

Nous employons dans ce chapitre les mêmes notations que dans le chapitre précédent, mais chaque fois que nous employons une telle notation en relation avec une série de la forme $\Sigma k_n e^{r_n s}$ pour comprendre cette notation il faut se rapporter à la série $\Sigma k_n e^{-r_n s}$.

Ainsi par exemple en considérant une fonction $f(s) = \Sigma a_n e^{\lambda_n s}$ on dira qu'elle possède les propriétés $AB(\nu_1, \sigma_1)$, $B(\nu_2, \sigma_2)$ si la fonction $f_1(s) = f(-s)$ possède les propriétés $AB(\nu_1, -\sigma_1)$, $B(\nu_2, -\sigma_2)$; l'ensemble $E(f, \sigma_1)$ est symétrique par rapport à la droite $\sigma = 0$ de l'ensemble $E(f_1, -\sigma_1)$ ainsi que les ensembles $D_\varepsilon^{f\sigma_1}$, $C_\varepsilon^{f\sigma_1}$, $\overline{D}_\varepsilon^{f\sigma_1}$, etc. qui sont respectivement symétriques des ensembles $D_\varepsilon^{f_1-\sigma_1}$, $C_\varepsilon^{f_1-\sigma_1}$, $\overline{D}_\varepsilon^{f_1-\sigma_1}$, etc... $\sigma_f^1 = -\sigma_{f_1}^1$, σ_A pour $f(s)$ est égal à $-\sigma_A$ pour $f_1(s)$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant:

Théorème III. *Soit $f(s) = \Sigma a_n e^{\lambda_n s}$ une fonction possédant la propriété $AB(\nu_1, \sigma_1)$ et $\varphi(s) = \Sigma b_n e^{l_n s}$ une fonction possédant un axe de convergence absolu $\sigma_A > -\infty$.*

Soit un entier $k > \nu_1$ et posons

$$H^*(s) = H^*(f, \varphi) = \Sigma d_n e^{\mu_n s} \tag{46}$$

si le point $s = 0$ est un point singulier de $f(s)$, et posons

$$\begin{aligned} H^*(s) = H^*(f, \varphi) = \Sigma d_n e^{\mu_n s} + (-1)^{k+1} \Big\{ & f^{(k)}(0) \varphi[-\log(e^{-s} - 1)] + \\ & + k f^{(k-1)}(0) \left[\frac{d\varphi[-\log(e^{-s} - e^{-\xi})]}{d\xi}\right]_{\xi=0} + \cdots \\ & + f(0) \left[\frac{d^k \varphi[-\log(e^{-s} - e^{-\xi})]}{d\xi^k}\right]_{\xi=0} \Big\} \end{aligned} \tag{47}$$

(pour $\Re(s - \xi) < 0$; $\varphi[-\log(e^{-s} - e^{-\xi})] = \Sigma b_n e^{s l_n}(1 - e^{s-\xi})^{-l_n}$; $(1 - x)^{-l_n} = = 1 + l_n x + \cdots$) si le point 0 est un point régulier de $f(s)$, où les μ_n désignent les sommes $m + l_q$ $(m = 1, 2, \ldots;\ q = 1, 2, \ldots)$ rangées par ordre de grandeur et où $d_n = b_q a_m^{(k)} \dfrac{l_q(l_q + 1) \cdots (l_q + m - 1)}{m!}$ si $\mu_n = m + l_q$; $\left(a_m^{(k)} = \sum\limits_{\lambda_r < m} (m - \lambda_r)^k a_r\right)$.

L'ensemble $E(H^*, \min(\sigma_f^1, -\log(e^{-\sigma_\varphi^1} + e^{-\sigma_1})))$ *n'est formé d'autres points que* *de ceux de la forme* $-\log(e^{-\alpha}+e^{-\beta})$ *et de leurs points limites où* α *est un point quelconque de* $E(f, \sigma_1)$ *et où* β *est un point quelconque de* $E(\varphi, +\infty)$.[1]

Dans cet énoncé nous donnons au logarithme toutes les déterminations (sauf évidemment à la quantité $\log(e^{-\sigma_\varphi^1}+e^{-\sigma_1})$ qui est prise réelle).

Démonstration du théorème III.

Considérons un domaine borné Δ de la variable $z=x+iy$ contenant un point $z_0=x_0+iy_0$ avec

$$x_0 < -\log(e^{-\sigma_0+1}+e^{-\sigma_A+1}) \tag{48}$$

σ_0 étant l'axe de convergence de $f(s)$, et dont tous les points vérifient l'inégalité

$$|z+\log(e^{-\alpha}+e^{-\beta})| > \varepsilon > 0, \tag{49}$$

$$x+\log(e^{-\sigma_f^1+\varepsilon_2}+e^{-\sigma_2}) < 0, \tag{50}$$

$$x+\log(e^{-\sigma_1+\varepsilon_2}+e^{-\sigma_\varphi^1+\varepsilon_2}) < 0, \qquad \varepsilon_2 > 0, \tag{51}$$

σ_2 étant une quantité arbitraire fixe ces inégalités ayant lieu quel que soit le point α de $E(f, \sigma_1)$ et quel que soit β de $E(\varphi, \sigma_2)$ et en donnant à $\log(e^{-\alpha}+e^{-\beta})$ toutes ses déterminations.

Soit $\delta > 0$ et considérons tous les couples d'un α et d'un β tels qu'ont ait

$$|e^{-\alpha}+e^{-\beta}| \geqq \delta. \tag{52}$$

On a d'autre part pour tout α et tout β

$$\Re\alpha > \sigma_f^1, \quad \Re\beta > \sigma_\varphi^1$$

donc

$$|e^{-\alpha}| \leqq e^{-\sigma_f^1}, \quad |e^{-\beta}| \leqq e^{-\sigma_\varphi^1}, \tag{53}$$

$$|e^{-\alpha}+e^{-\beta}| \leqq e^{-\sigma_f^1}+e^{-\sigma_\varphi^1} = \varrho < +\infty. \tag{54}$$

Soit $\eta > 0$, et soit E_η un ensemble de points s tel que quel que soit le point s de cet ensemble on puisse trouver un α jouissant de la propriété

[1] Voir les notes pages 2 et 6.

$$|s-\alpha| < \eta. \tag{55}$$

Il résulte de (53) et de (55) qu'à tout point s de E_η on peut faire correspondre un point α tel qu'on ait

$$|e^{-s} - e^{-\alpha}| < \eta' \tag{56}$$

où η' tend vers zéro avec η.

On peut donc choisir η assez petit pour qu'on ait en vertu de (52) et (54)

$$\frac{\delta}{2} < |e^{-s} + e^{-\beta}| < 2c \tag{57}$$

quel que soit le point s de E_η, vérifiant (55) α et β vérifiant (52). Il résulte de (52), (54) et (57) qu'on peut trouver une quantité $\eta'' > 0$ qui tend vers o avec η tel que quel que soit s de E_η vérifiant (55) α et β vérifiant (52)

$$\left|\log \frac{e^{-\alpha} + e^{-\beta}}{e^{-s} + e^{-\beta}}\right| = |\log(e^{-s} + e^{-\beta}) - \log(e^{-\alpha} + e^{-\beta})| < \eta'' \tag{58}$$

en choisissant la détermination principale du logarithme de $\dfrac{e^{-\alpha} + e^{-\beta}}{e^{-s} + e^{-\beta}}$.

On peut alors en vertu de (49) et (58) choisir η assez petit pour qu'on ait

$$|z + \log(e^{-s} + e^{-\beta})| > \varepsilon'_2 > 0 \tag{59}$$

pour une quantité convenablement choisie ε'_2 quel que soit s de E_η vérifiant (55) quels que soient α et β de (52) et quel que soit z de $\varDelta$, et avec une détermination quelconque du logarithme. Il résulte donc de (57) qu'on peut trouver une quantité $\varepsilon_3 > 0$ telle qu'on ait dans les mêmes conditions que pour (59):

$$|e^{-z} - e^{-s} - e^{-\beta}| > \varepsilon_3. \tag{60}$$

Comme $|\Re\beta|$ est borné $e^{-\beta}$ est situé dans une couronne autour de l'origine, on a en vertu de (60)

$$|\log[(e^{-z} - e^{-s})e^{\beta}]| = |\log(e^{-z} - e^{-s}) + \beta| > \varepsilon_4 > 0; \tag{61}$$

ε_4 étant convenablement choisi quel que soit z de $\varDelta$ et s de E_η α et β de (52) en donnant à $\log[(e^{-z} - e^{-s})e^{\beta}]$ une détermination quelconque.

Il résulte d'autre part de (56) qu'on peut choisir η assez petit pour qu'on ait pour tout α et tout β vérifiant l'inégalité

$$(62) \qquad |e^{-\alpha}+e^{-\beta}|<\delta$$

l'inégalité suivante

$$|e^{-s}+e^{-\beta}|<2\delta$$

s vérifiant (55).

On peut donc choisir δ et η assez petits pour qu'on ait pour z de $\varDelta$, s vérifiant (55), α et β vérifiant (62):

$$(63) \qquad |e^{-z}-e^{-s}-e^{-\beta}|>\varepsilon_5>0,$$

ε_5 étant convenablement choisi.

On peut donc trouver une quantité $\varepsilon_6>0$ telle qu'on ait

$$(64) \qquad \log[e^{\beta}(e^{-z}-e^{-s})]=|\log(e^{-z}-e^{-s})+\beta|>\varepsilon_6$$

dans les mêmes conditions que (63) quelle que soit la détermination du $\log[e^{\beta}(e^{-z}-e^{-s})]$.

En définitive en supposant (49) nous avons pu choisir les quantités positives δ, η, ε_4 et ε_6 telles que si à tout s correspond un α tel que

$$(65) \qquad |s-\alpha|<\eta$$

on a pour tout α et tout β vérifiant (52) l'inégalité (61) et pour tout α et β vérifiant (62) l'inégalité (64) quel que soit z de $\varDelta$. Posons $\mu<\min(\eta,\varepsilon_4,\varepsilon_6)$ $(\mu>0)$. On voit donc que pour tous les points de E_μ, pour tout z de $\varDelta$ et pour tout β on a

$$(66) \qquad |\log(e^{-z}-e^{-s})+\beta|>\mu>0$$

quelle que soit la détermination du $\log(e^{-z}-e^{-s})$.

Considérons maintenant un domaine $\varDelta_1$ de la variable $z=x+iy$ qui est la partie commune de $\varDelta$ et du demi-plan

$$(67) \qquad x<\min\left[-\log\left(e^{-\sigma_f^1+\mu}+e^{-\sigma_2}\right),\ -\log\left(e^{-\sigma_1+\mu}+e^{-\sigma_\varphi^1+\mu}\right)\right].$$

Il résulte de cette inégalité qu'en posant $s=\sigma_1-\mu+it$

$$(68) \qquad \Re[-\log(e^{-z}-e^{-s})]<\sigma_\varphi^1-\mu$$

z appartenant à Δ_1; en effet, on a

$$e^{-x} - e^{-\sigma_1+\mu} > e^{-\sigma_\varphi^1+\mu}.$$

Donc

$$|e^{-z} - e^{-s}| \geqq e^{-x} - e^{-\sigma_1+\mu} > e^{-\sigma_\varphi^1+\mu}$$

d'où (68).

Posons $E_\mu = D_\mu^{f\sigma_1}$ et considérons alors l'intégrale

(69) $$F(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{C_\mu^{f\sigma_1}} f(s)\,\varphi\,[-\log(e^{-z} - e^{-s})]\,\frac{ds}{s^{k+1}},$$

quand z est dans Δ_1, la valeur de $\varphi\,[-\log(e^{-z} - e^{-s})]$ qui intervient dans cette intégrale étant déterminée de la manière suivante:

Considérons un cercle C_1 autour du point z_0 et de rayon assez petit pour qu'on ait pour tous les points z de ce cercle

(70) $$x < -\log(e^{-\sigma_0+1} + e^{-\sigma_A+1})$$

ce qui est possible en vertu de (48). Comme $\mu < 1$ et comme $\sigma_f^1 \geqq \sigma_0$ on voit immédiatement que

$$e^{-x} - e^{-\sigma} > e^{-\sigma_A+1}$$

donc

(71) $$\Re\,[-\log(e^{-z} - e^{-s})] < \sigma_A - \mu$$

pour z dans C_1 et s intervenant dans (69).

La série

(72) $$\Sigma b_n (e^{-z} - e^{-s})^{-l_n}$$

converge donc uniformément et absolument dans les mêmes conditions que (71). D'autre part il résulte de (70) que

$$x < \sigma.$$

Nous pouvons donc écrire

(73) $$(e^{-z} - e^{-s})^{-l_n} = e^{l_n z} \sum_m \frac{l_n(l_n+1)\cdots(l_n+m-1)}{m!}\, e^{m(z-s)}$$

cette série convergeant ainsi uniformément et absolument.

Donc la série double

$$\sum_n b_n e^{l_n z} \sum_m \frac{l_n(l_n+1)\cdots(l_n+m-1)}{m!} e^{m(z-s)} \tag{74}$$

converge absolument quand z est dans C_1 et quand s est sur $C_\mu^{f\sigma_1}$.

La série (74) représente une série de Taylor-D en s. C'est la valeur de cette série que nous donnons à $\varphi[-\log(e^{-z}-e^{-s})]$ quand z et dans C_1 et s sur $C_\mu^{f\sigma_1}$.

Et c'est par le prolongement analytique par rapport à z que nous définissons les valeurs de cette fonction pour z situé dans Δ_1 et s sur $C_\mu^{f\sigma_1}$ en ne passant que par les valeurs de z situées dans Δ_1. Ce prolongement étant unique car $e^{-z}-e^{-s}$ ne s'annule pas dans les conditions précisées: on a en effet d'après (68)

$$|e^{-z}-e^{-s}| > e^{-\sigma_2} > 0.$$

En s'appuyant sur (66), (68) et sur les propriétés de $f(s)$ citées dans le théorème on démontre d'une manière tout à fait analogue comme pour l'intégrale (37) que l'intégrale (69) a un sens bien déterminé.

($|\varphi[-\log(e^{-z}-e^{-s})]| < M$, z étant dans Δ_1 et s étant sur $C_\mu^{f\sigma_1}$ vu la périodicité de $\varphi[-\log(e^{-z}-e^{-s})]$ par rapport à s.)

En tenant compte du fait que l'expression

$$\frac{1}{k!}\left\{f^{(k)}(0)\,\varphi[-\log(e^{-z}-1)] + \cdots + f(0)\left[\frac{d^k\varphi[-\log(e^{-z}-e^{-s})]}{ds^k}\right]_{s=0}\right\}$$

est le résidu du pôle $s=0$ de la fonction (en s)

$$\frac{f(s)\,\varphi[-\log(e^{-z}-e^{-s})]}{s^{k+1}}$$

on constate comme pour le théorème II que

$$F(z) = \frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar\sigma+it)\,\varphi[-\log(e^{-z}-e^{-\bar\sigma-it})]\frac{dt}{(\bar\sigma+it)^{k+1}},$$

si $s=0$ est un point singulier de $f(s)$ et

$$F(z) = \frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{\sigma}+it)\,\varphi[-\log(e^{-z}-e^{-\bar{\sigma}-it})]\frac{dt}{(\bar{\sigma}+it)^{k+1}}$$
$$+\left\{f^{(k)}(0)\,\varphi[-\log(e^{-z}-1)]+\cdots+f(0)\left[\frac{d^k\varphi[-\log(e^{-z}-e^{-s})]}{ds^k}\right]_{s=0}\right\}$$

quand z est dans C_1, $\bar{\sigma}$ étant tel qu'on ait

$$\bar{\sigma} < \sigma_0$$

et

$$x < -\log(e^{-\bar{\sigma}}+e^{-\sigma_A+1})$$

quel que soit z de C_1 ce qui est possible en vertu de (70).

On peut maintenant écrire en vertu de (72)

$$(75)\quad \frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\varphi[-\log(e^{-z}-e^{-s})]\frac{dt}{s^{k+1}} = \frac{k!}{2\pi}\sum_n b_n \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,dt}{(e^{-z}-e^{-s})\,l_n s^{k+1}},\quad (s=\bar{\sigma}+it)$$

et en vertu de (73):

$$(76)\quad \frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\frac{dt}{(e^{-z}-e^{-s})s^{k+1}} =$$
$$= \sum_m e^{(m+l_n)z}\frac{l_n(l_n+1)\cdots(l_n+m-1)}{m!}\cdot\frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)}{s^{k+1}}e^{-ms}\,dt,\quad (s=\bar{\sigma}+it)$$

quand z est dans C_1.[1]

Mais en posant $s=-s'$ et $f(s)=f_1(s')$ on a $(s=\bar{\sigma}+it)$,

$$\frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\frac{e^{-ms}}{s^{k+1}}\,dt = \frac{k!}{(-1)^{k+1}2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s')\frac{e^{ms'}}{s'^{k+1}}\,dt = (-1)^{k+1}\sum_{\lambda_r<m}(m-\lambda_r)^k a_r.$$

On obtient donc

$$\frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\varphi[-\log(e^{-z}-e^{-s})]\frac{dt}{s^{k+1}} = (-1)^{k+1}\sum_n b_n\sum_m e^{(m+l_n)z}\frac{l_n\cdots(l_n+m-1)}{m!}\,a_m^{(k)}.$$

[1] Les séries (75) et (76) convergent et leur emploi est légitime car $\Re[-\log(e^{-z}-e^{-\bar{\sigma}-it})] < \sigma_A-\mu$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|\frac{dt}{|s|^{k+1}}$ converge.

Cette dernière série possède un axe de convergence absolue. En effet

$$|a_m^{(k)}| = \Big|\sum_{\lambda_r < m} (m - \lambda_r)^k a_r\Big| \leqq M e^{-m\bar{\sigma}}$$

où M est indépendant de m et qui vérifie l'égalité

$$M = \frac{k!}{2\pi}\left(\int_0^\infty |f(s)| \frac{dt}{|s|^{k+1}} + \int_0^\infty |f(\bar{s})| \frac{dt}{|\bar{s}|^{k+1}}\right), \qquad \sigma = \bar{\sigma}.$$

Donc pour x négatif et en valeur absolue assez grand

$$\begin{aligned}\sum_n |b_n| \sum_m e^{(m+l_n)x} \frac{l_n(l_n+1)\cdots(l_n+m-1)}{m!} |a_m^{(k)}| \\ \leqq M \sum_n |b_n| e^{l_n x} \sum_m \frac{l_n \cdots (l_n+m-1)}{m!} e^{m(x-\bar{\sigma})} \\ = M \sum_n |b_n| e^{l_n(x-\varepsilon)}\end{aligned}$$

en posant

$$1 - e^{x-\bar{\sigma}} = e^{\varepsilon}.$$

Quand $\lim x = -\infty$; $\lim \varepsilon = 0$; comme $\varphi(z)$ possède un axe de convergence absolue nous voyons que notre assertion est vraie.

Nous pouvons donc écrire pour z situé dans C_1:

$$\frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\varphi[-\log(e^{-z} - e^{-s})] \frac{dt}{s^{k+1}} =$$

$$= (-1)^{k+1} \sum_n b_n \sum_m e^{(m+l_n)z} \frac{l_n(l_n+1)\cdots(l_n+m-1)}{m!} \sum_{\lambda_r<m} m - \lambda_r)^k a)_r = (-1)^{k+1} \sum_n d_n e^{\mu_n z}$$

$$(s = \sigma + it)$$

où $\mu_n = m + l_q$ (cette suite étant parcourue dans l'ordre de croissance) et où

$$d_n = b_q \frac{l_q(l_q+1)\cdots(l_q+m-1)}{m!} \sum_{\lambda_r < m} (m - \lambda_r)^k a_r.$$

Comme dans C_1

$$F(z) = H^*(z)$$

et comme $F(z)$ est holomorphe dans Δ_1, on voit que le théorème III est démontré.

§ 6. — On peut démontrer d'une manière beaucoup plus simple que le théorème III le théorème suivant

Théorème IV. *Considérons la série* $f(s) = \Sigma a_n e^{ns}$ *d'axe de convergence* $\sigma = \sigma_0$ *et la série* $\varphi(s) = \Sigma b_n e^{\lambda_n s}$ *possédant un axe* σ_A *de conv. absolue.*

La fonction

$$H_1^*(s) = H_1^*(f, \varphi) = \Sigma d_n e^{l_n s}$$

où $l_n = m + \lambda_r$ (cette suite étant parcourue dans l'ordre de croissance) *et où*

$$d_n = a_m b_r \frac{\lambda_r(\lambda_r + 1)\cdots(\lambda_r + m - 1)}{m!}$$

est telle que $E(H^*, \min(\sigma_\varphi^1, \sigma_0))$ *n'est formé d'autres points que de points de la forme* $-\log(e^{-\alpha} + e^{-\beta})$ *et de leurs points limites où* α *est un point de* $E(f, \infty)$ *et où* β *est un point de* $E(\varphi, \infty)$.

Dans la démonstration de ce théorème on peut supposer que le domaine $D_\mu^{f\sigma_1}$, σ_1 étant une quantité quelconque, est périodique avec la période $2\pi i$, c'est-à-dire que les parties de $D_\mu^{f\sigma_1}$ situées dans deux bandes $2k\pi \leqq t \leqq 2(k+1)\pi$ et $2k'\pi \leqq t \leqq 2(k'+1)\pi$ peuvent être superposées, la fonction $f(s)$ étant périodique avec la même période. En désignant par $D_{0\mu}^{f\sigma_1}$ la partie de $D_\mu^{f\sigma_1}$ contenue dans la bande $0 \leqq t \leqq 2\pi$, et par $C_{0\mu}^{f\sigma_1}$ sa frontière nous pouvons poser

$$H_1^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0\mu}^{f\sigma_1}} f(s)\varphi[-\log(e^{-z} - e^{-s})]\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar\sigma}^{\bar\sigma + 2\pi i} f(s)\varphi[-\log(e^{-z} - e^{-s})]\,ds$$

(dans la dernière intégrale $s = \bar\sigma + it$).

Comme dans ces intégrales s et $e^{-z} - e^{-s}$ ne varient que dans des domaines bornés ces intégrales ont un sens quels que soient σ_1 et σ_2; on a aussi $\sigma_f^1 = \sigma_0$. On voit immédiatement quelles sont les parties du raisonnement qui ont servi pour la démonstration du théorème III qui doivent être transportées ici.

Remarquons que le théorème III peut se démontrer en combinant les théorèmes II et IV.

CHAPITRE IV.

Sur les séries de Dirichlet représentant des fonctions méromorphes.

§ 7. — Considérons de nouveau la fonction $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ et l'ensemble $E(f, \sigma_1)$.

Soit $z' = \sigma' + it'$, $0 \leqq t' < 2\pi$. Nous dirons qu'un sous-ensemble de $E(f, \sigma_1)$ constitue une classe z' si ce sous-ensemble contient tous les points de $E(f, \sigma_1)$ qui peuvent être mis sous la forme $z' + 2k\pi i$ où k est un entier. Nous désignons ce sous-ensemble par $E(z')$.

Si une classe $E(z')$ ne possède que des pôles nous dirons qu'elle est polaire. S'il existe un nombre r qui de tous les degrés des pôles de la classe polaire $E(z')$ est le plus élevé nous dirons que $E(z')$ est polaire de degré r.

Soient $A_1^k, \ldots A_r^k$ les coefficients de la partie principale du pôle $z' + 2k\pi i = \sigma' + it' + 2k\pi i$ (ce point appartient à $E(z')$), les quantités $A_{r-p+1}^k, A_{r-p+2}^k, \ldots, A_r^k$ étant des zéros si ce point est un pôle de degré $p < r$. Si pour un k le point $z' = \sigma' + it' + 2k\pi i$ n'appartient pas à $E(z')$ nous poserons $A_1^k = A_2^k = \cdots = A_r^k = 0$.

Posons

$$\varrho = \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots r} \overline{\lim_{|k|=\infty}} \frac{\log |A_i^k|}{\log |k|}. \tag{77}$$

Nous dirons alors que la classe polaire $E(z')$ est de degré r et d'ordre ϱ.

Démontrons maintenant le théorème suivant:

Théorème V. *Si* $E(f, \sigma_1)$ *est composé d'un nombre fini de classes polaires:* $E(z^{(1)}), E(z^{(2)}) \ldots E(z^{(l)})$ *dont les degrés respectifs sont* $r_1, \ldots r_l$ *et dont le plus grand ordre est* ϱ, *si en plus* $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ *est* $B(\nu, \sigma_1)$.

Alors en désignant par $C_n^{k_1}$ *le* $n^{\text{ième}}$ *coefficient taylorien de* $f(s)$ *d'ordre entier* $k_1 > \max(\nu, \varrho)$ *et en posant*

$$D_{m,N} = \begin{vmatrix} C_m^{k_1} & \ldots & C_{m+N+1}^{k_1} \\ \vdots & & \vdots \\ & \ldots & C_{m+2N+1} \end{vmatrix}$$

où

$$N = \Sigma r_n + k_1$$

on a

$$\overline{\lim} \sqrt[m]{|D_{m,N}|} < e^{N \cdot \max(0, \sigma_f^1)}.$$

Ce théorème contient évidemment le théorème de M. Hadamard sur les fonctions méromorphes représentées par une série de Taylor.

Démonstration du théorème V.

Remarquons que si dans la démonstration du théorème II, le domaine $D_\varepsilon^{f\sigma_1}$ est composé d'une suite de domaine: $D_\varepsilon^1, D_\varepsilon^2, \ldots D_\varepsilon^j, \ldots$ dont les frontières sont $C_\varepsilon^1, C_\varepsilon^2, \ldots C_\varepsilon^j, \ldots$ et si les points de C_ε^j $(j=1, 2, \ldots)$ font partie de $\bar{D}_\varepsilon^{f\sigma_1}$ nous pouvons écrire, en conservant les notations du théorème II:

$$(78)\quad \frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\bar\sigma+it)\,\varphi(z-\bar\sigma-it)}{(\bar\sigma+it)^{k+1}}\,dt=\frac{k!}{2\pi i}\sum_j\int_{C_\varepsilon^j} f(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}}+$$

$$+\frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma_1+\varepsilon+it)\varphi(z-\sigma_1-it)\frac{dt}{(\sigma+it)^{k+1}}+\{f^{(k)}(0)\varphi(z)-\cdots+(-1)^k f(0)\varphi^{(k)}(z)\}$$

si $s=0$ est un point régulier de $f(s)$ et

$$(79)\quad \frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\bar\sigma+it)\,\varphi(z-\bar\sigma-it)}{(\bar\sigma+it)^{k+1}}\,dt=\frac{k!}{2\pi i}\sum_j\int_{C_\varepsilon^j}^{+\infty} f(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}}+$$

$$+\frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma_1+\varepsilon+it)\varphi(z-\sigma_1-\varepsilon-it)\frac{dt}{(\bar\sigma+it)^{k+1}}$$

si $s=0$ est un point singulier de $f(s)$.

Si en particulier $E(f,\sigma_1)$ ne contient qu'un nombre fini de classes $E(z^{(1)}), \ldots E(z^{(l)})$ on peut écrire

$$(80)\quad \sum_j\int_{C_\varepsilon^j} f(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}}=\sum_{m=1}^{m=l}\sum_{k=0}^{|k|=\infty}\int_{C_\varepsilon^{km}} f(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}}$$

où C_ε^{km} est une circonférence de rayon ε autour du point $z^{(m)}+2k\pi i$ en tenant compte du fait que

$$\int_{C_\varepsilon^{km}} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k+1}}=0$$

si $z^{(m)}+2k\pi i$ n'appartient pas à $E(f,\sigma_1)$.

Il est évident d'autre part que la fonction de z

(81)
$$F_1(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\varphi(z-s)\frac{dt}{s^{k+1}}\qquad(\sigma=\sigma_1+\varepsilon)$$

est holomorphe pour $x>\sigma_1+\varepsilon+\sigma_\varphi^1$ si $\sigma_1+\sigma_\varphi^1>\sigma_2+\sigma_f^1$.

Posons maintenant

$$\varphi(s)=\frac{1}{1-e^{-s}}$$

$\varphi(s)$ possède donc la propriété $B(0,\sigma_2)$ quel que soit σ_2.

En tenant alors compte du fait que la fonction $f(s)=\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ du théorème V possède la propriété $B(\nu,\sigma_1)$ on voit en s'inspirant de la démonstration du théorème II

(82)
$$H^1(z)=\frac{k!}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\frac{dt}{(1-e^{-z+s})\,s^{k_1+1}}=\Sigma C_n^{(k)}e^{-nz}.\qquad(s=\sigma+it)$$

En tenant compte des hypothèses du théorème V et des remarques qui ont conduit aux formules (78), (79), (80) et (81) on voit que

$$H^1(z)=\frac{k!}{2\pi i}\sum_{m=1}^{l}\sum_{k=0}^{|k|=\infty}\int_{C_\varepsilon^{km}} f(s)\frac{ds}{(1-e^{-z+s})\,s^{k_1+1}}+$$
$$+\,\delta\{f^{(k_1)}(0)\varphi(z)-\cdots+(-1)^{k_1}f(0)\varphi^{(k_1)}(z)\}+T(z)$$

où $T(z)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $x>\sigma_1+\varepsilon$, σ_2 étant quelconque et $\sigma_\varphi^1=0$, et $\delta=0$ si $s=0$ est singulier pour $f(s)$, $\delta=1$ si $s=0$ est régulier pour $f(s)$.

Soit $$\alpha=z^{(m)}+2k\pi i\neq 0.$$

Soit $$\frac{1}{s^{k_1+1}}=\frac{1}{\alpha^{k_1+1}}\sum_n B_n^{km}(s-\alpha)^n$$

$$\frac{1}{1-e^{-z+s}}=\varphi(z-s)=\varphi(z-\alpha)-\left[\frac{d\varphi(z-s)}{ds}\right]_{s=\alpha}(s-\alpha)+\left[\frac{d^2\varphi(z-s)}{ds^2}\right]_{s=\alpha}(s-\alpha)^2+\cdots$$

$$f(s)=\frac{A_1^{km}}{(s-\alpha)}+\frac{A_2^{km}}{(s-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_r^{km}}{(s-\alpha)^r}.$$

On a pour x assez grand

$$\frac{f(s)\varphi(z-s)}{s^{k_1+1}} = \frac{1}{\alpha^{k_1+1}(s-\alpha)}\Big\{\varphi(z-\alpha)B_0^{km}A_1^{km} - \left(\left[\frac{d\varphi(z-s)}{ds}\right]_{s=\alpha} B_0^{km} - \varphi(z-\alpha)B_1^{km}\right)A_2^{km} +$$

$$\cdots + \left((-1)^{r-1}\left[\frac{d^{r-1}\varphi(z-s)}{ds^{r-1}}\right]_{s=\alpha} B_0^{km} + \cdots + \varphi(z-\alpha)B_{r-1}^{km}\right)A_r^{km}\Big\} + T(z, s)$$

où
$$T(z, s) = \frac{1}{(s-\alpha)^2}\left(T_1(z) + \frac{T_2(z)}{s-\alpha} + \cdots\right).$$

D'où on tire immédiatement

$$(84) \qquad \frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{C_\varepsilon^{km}} f(s)\frac{ds}{(1-e^{-z+s})s^{k_1+1}} = \frac{k!}{\alpha^{k_1+1}}\{\varphi(z-\alpha)B_0^{km}A_1^{km} + \cdots\}.$$

Comme l'ordre de la classe polaire $E(z^{(m)})$ est inférieur à k_1, d'après l'hypothèse, il résulte immédiatement de la formule (84) que la somme

$$(85) \qquad F_m(z) = \sum_{k=0}^{|k|=\infty}\int\limits_{C_\varepsilon^{km}} f(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{k_1+1}}$$

converge absolument et uniformément quand x est assez grand. Si r_m est le degré de la classe polaire $E(z^{(m)})$ on constate que $F_m(z)$ est une fonction qui n'admet comme singularités que les points $z^{(m)} + 2k\pi i$ $(= 1, 2, \ldots)$ qui sont des pôles de degré au plus égal à r_m (car $A_{r_m+1}^{km} = A_{r_m+2}^{km} = A_r^{km} = 0$ et les fonctions $\left[\frac{d^j\varphi(z-s)}{ds^j}\right]_{s=0}$ admettent les points $z^{(m)} + 2k\pi i$ comme pôles de degré $j+1$).

Il résulte donc de (82) et (83) que la série de Taylor-D $\Sigma C_n^{(k_1)}e^{-nz}$ représente une fonction méromorphe dans le demi-plan $x > \sigma_1$ qui y possède au plus $1 + k_1 + \sum_{n=1}^{l} r_n$ pôles.

D'après le théorème II la partie réelle des affixes de ces pôles ne surpasse pas $\max(0, \sigma_f^1)$. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème de M. Hadamard (dont le théorème V est la généralisation) pour arriver au théorème V.

§ 8. — Le raisonnement employé au § précédent prouve en outre que si $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ est telle que $E(f, \sigma_1)$ ne possède que la classe $E(0)$ (que nous ne supposons plus polaire) qui ne contient pas de points critiques, et si $f(s)$ est

$B(\nu_1, \sigma_1)$, alors la série de Taylor-D $\Sigma C_n^{(k_1)} e^{-ns}$ avec $k_1 > \nu$ ne possède pas dans le plan $\sigma > \sigma_1$ d'autres points singuliers que ceux qui appartiennent à la classe $E(0)$.

La série de Taylor-D citée représente donc une fonction $F(z)$ de la forme

$$F(z) = F_2(z) + F_3(z) .$$

où $F_2(z)$ ne possède comme singularités que celles appartenant à $E(0)$ et $F_2(z)$ possédant un axe de convergence qui se trouve dans le demi-plan $\sigma \leqq \sigma_1$. D'où en appliquant un théorème connu de M. Faber concernant les séries de Taylor on obtient le résultat suivant qui généralise ce théorème pour toutes les séries de Dirichlet.

Théorème VI. *Si* $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ *est telle que* $E(f, -\infty)$ *ne contient qu'une classe* $E(0)$, *alors pour tout* k *entier le coefficient taylorien* $a_n^{(k)}$ *d'ordre* k *de cette série vérifie l'égalité suivante*

$$a_n^{(k)} = g(n) + a'_n$$

où $g(z)$ *est une fonction entière telle que* $|g(z)| < e^{\varepsilon |z|}$; $\lim\limits_{|z|=\infty} \varepsilon = 0$

et où
$$\overline{\lim} \frac{\log |a'_n|}{n} \leqq \sigma(k).[1]$$

Lille, le 11 mai 1929.

[1] Pour la définition de $\sigma(k)$ voir l'Introduction.