APPLICATION DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES AUX SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES.

PAR

TORSTEN CARLEMAN

à STOCKHOLM.

Table des matières.

---

§ 1. Réduction à un système infini d'équations différentielles linéaires.

Dans sa conférence sur »L'avénir des Mathématiques», au Congrès de Rome en 1908, POINCARÉ a remarqué que l'on devait pouvoir appliquer la théorie des équations intégrales linéaires à la théorie des équations différentielles ordinaires non linéaires. Un premier pas pour réaliser l'idée de Poincaré a été fait par Fredholm dans une Note dans les Comptes rendus 23 août 1920. FREDHOLM arrive à une équation intégrale linéaire mais il constate en même temps que l'état actuel de la théorie des équations intégrales ne paraît cependant pas permettre une étude suffisamment approfondie de l'équation obtenue. Nous nous proposons d'attaquer le problème par une autre méthode.

Soit un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_\nu}{dt} = A_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{1}$$

et supposons d'abord que les A_ν soient des polynômes en $x_1, x_2, \ldots x_n$. Considérons les fonctions

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2}, \ldots x_n^{m_n} \qquad m_\nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

et ordonnons-les en une suite simple

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots.$$

En utilisant les équations (1) on obtient

$$\frac{d\varphi_\nu}{dt} = \sum_{r=1}^{\infty} c_{\nu r} \varphi_r \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

où $(c_{\nu r})$ est une matrice n'ayant qu'un nombre fini d'éléments non nuls dans chaque ligne et chaque colonne. Le problème d'intégrer les équations (1) se trouve ainsi réduit à un *système infini d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.*

Il n'est pas nécessaire de choisir pour $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ le système (2). Nous pouvons prendre n'importe quel système de fonctions pourvu qu'on puisse développer

$$\sum A_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

suivant les φ_ν. Considérons par exemple le système des fonctions $\varphi_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n)$ qui s'obtiennent en orthogonalisant les fonctions

$$\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}}$$

de manière que les relations

$$\int_{E_n} \varphi_p(x_1, x_2, \ldots x_n) \varphi_q(x_1, x_2, \ldots x_n) \mu(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \begin{matrix} 0 & p \neq q \\ 1 & p = q \end{matrix}$$

soient remplies, $\mu(x_1, x_2, \ldots x_n)$ étant une fonction positive donnée (ne croissant plus vite que $e^{\alpha(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}$, $\alpha<1$) et le domaine d'intégration E_n étant l'espace n-dimensionnel entier. On obtient ainsi une suite de fonctions

$$\varphi_\nu = e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)} P_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n), \tag{4}$$

où les $P_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sont des polynômes tels qu'un polynôme quelconque soit égal à une combinaison linéaire à coefficients constants d'un nombre fini des P_ν. Ceci posé, si l'on forme l'expression

$$\frac{d\varphi_\nu}{dt} = \sum_{r=1}^{n} A_r \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_r}$$

le second membre prend la forme suivante:

$$e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)} Q_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

où $Q_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n)$ est un polynôme. Or nous avons, d'après ce qui précède,

$$Q_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{r=1}^{N_\nu} a_{\nu r} P_r(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Il s'ensuit

$$\frac{d\varphi_\nu}{dt} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{\nu r}\varphi_r \qquad \nu = 1, 2 \ldots, \tag{5}$$

où $(a_{\nu r})$ est une matrice n'ayant qu'un nombre fini d'éléments non nuls dans chaque ligne. La théorie générale qu'on possède aujourd'hui pour les systèmes d'équations de la forme (5) est particulièrement développée dans les cas où l'une ou l'autre des relations

$$a_{\nu r} = a_{r \nu} \tag{6}$$

$$a_{\nu r} = - a_{r \nu} \tag{7}$$

sont remplies. Il est à remarquer que les conditions (7) sont vérifiées pour un grand nombre des systèmes d'équations différentielles qu'on rencontre dans les applications, à savoir ceux qui admettent un invariant intégral partout positif.

§ 2. Étude des équations différentielles ayant une intégrale uniforme et un invariant intégral positif.

Nous nous proposons d'étudier, par la méthode indiquée dans le paragraphe précédent, un système d'équations différentielles qui contient comme cas particulier les équations canoniques de la dynamique. J'ai fait un exposé de mes recherches sur cette question dans une conférence à l'Institut Mittag-Leffler le 8 mai 1931. Un résumé de cette conférence a été communiqué à l'Académie des Sciences à Stockholm le 27 mai 1931.[1] Plus tard j'ai eu connaissance d'une Note de M. Koopman, publiée le 15 mai 1931 dans le Proceedings of the National Academie of Sciences U. S. A., qui m'a montré qu'un grand nombre de mes résultats généraux étaient déjà trouvés par M. Koopman. Si, néanmoins, je reviens à cette question c'est pour développer plus explicitement certaines applications (l'hypothèse ergodique, développement des solutions comme fonctions des valeurs initiales) que j'ai esquissées brièvement dans ma Note et qui ne se trouvent pas dans l'article de M. Koopman.

Considérons un système d'équations différentielles analytiques[2]

$$\frac{dx_\nu}{dt} = A_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{8}$$

ayant une intégrale uniforme $H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$ et possédant un invariant intégral positif.

Supposons en outre que l'hypersurface S (dans l'espace à n dimensions E_n) définie par l'équation $H(x_1, x_2, \ldots x_n) = C$ soit partout régulière et fermée. Les équations (8) définissent x_ν comme fonctions de t et des valeurs initiales $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$. On obtient ainsi une transformation $p \sim T(p_0, t)$ qui transforme le point p_0 avec les coordonnées $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ en le point p avec les coordonnés $x_1, x_2, \ldots x_n$ Cette transformation transforme l'hypersurface S en elle-même et admet un invariant intégral positif. En effectuant, s'il y a lieu, un changement de variables nous pouvons supposer cet invariant égal à un, c'est-à-dire que la transformation $p \sim T(p_0, t)$ conserve l'élément d'aire $d\sigma$ de S.

Soit $U(x_1, x_2, \ldots x_n) = U(p)$ une fonction continue ayant des dérivées partielles sur S et introduisons la transformation fonctionnelle linéaire

[1] Application de la théorie des équations intégrales singulières aux équations différentielles de la dynamique, Arkiv för mathematik etc. (Imprimé le 19 juin 1931).

[2] Il suffit que les A_ν satisfassent à certaines conditions de dérivabilité.

$$\Omega(U) = i\frac{dU(p)}{dt} = i\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \frac{\partial U}{\partial x_\nu}.$$

En écrivant le dernier membre sous la forme

$$i\sqrt{\Sigma A_\nu^2}\frac{dU}{ds},$$

où $\frac{d}{ds}$ désigne une dérivation suivant la caractéristique issue de p, on voit que l'opération $\Omega(U)$ a un sens pour toute fonction U qui est absolument continue sur presque toutes les caractéristiques. Soit $U(p_0)$ une fonction sommable (sur S) et posons $U(p_0, t) = U(T(p_0, t))$. En utilisant le fait que la transformation $T(p_0, t)$ conserve les aires, on voit que l'intégrale

$$\int_S U(p_0, t)\, d\sigma_{p_0} \tag{9}$$

est indépendant de t. Considérons maintenant deux fonctions $U(p)$ et $V(p)$ à carré intégrable et absolument continues sur presque toutes les caractéristiques et jouissant de la propriété que $\Omega(U)$ et $\Omega(V)$ sont à carré sommable sur S. En remplaçant dans (9) U par UV et en dérivant par rapport à t, on trouve (pour $t = 0$)

$$\int_S V\Omega(U)\, d\sigma = \int_S U\,\overline{\Omega(\overline{V})}\, d\sigma, \tag{10}$$

d'où l'on conclut que $\Omega(U)$ est une transformation linéaire hermitienne.

Soit $\varphi_1(p), \varphi_2(p), \ldots \varphi_n(p), \ldots$ un système complet de fonctions orthogonales et normales définies sur S et satisfaisant à certaines conditions de dérivabilité.[1] Il est clair que nous pouvons choisir les $\varphi_\nu(p)$ de manière que toutes les fonctions $\Omega(\varphi_\nu(p))$ soient continues et possèdent un nombre quelconque de dérivées continues. Ceci posé, nous pouvons développer les fonctions $\Omega(\varphi_\nu(p))$ en séries suivant les $\varphi_\nu(p)$:

$$\Omega(\varphi_\nu(p)) = i\frac{d\varphi_\nu(p)}{dt} = \sum_{r=1}^{\infty} c_{\nu r}\varphi_r(p), \tag{11}$$

où $\sum_{r=1}^{\infty}|c_{\nu r}|^2$ est convergente. Si le système des fonctions $\varphi_\nu(p)$ est suffisamment

[1] Nous supposons aussi que les $\varphi_\nu(p)$ soient réelles.

régulier nous pouvons même supposer que le dernier membre de (11) converge non seulement en moyenne mais absolument et uniformément.[1]

Le système d'équations différentielles non linéaires se trouve ainsi transformé en un système infini d'équations linéaires à coefficients constants. En multipliant (11) par $\varphi_\mu(p)$ et en intégrant, il résulte

$$c_{\nu\mu} = \int_S \varphi_\mu(p)\,\Omega(\varphi_\nu(p))\,d\sigma_p.$$

Or on a, d'après (10),

$$\int_S \varphi_\mu(p)\,\Omega(\varphi_\nu(p))\,d\sigma_p = \int_S \varphi_\nu(p)\,\overline{\Omega(\varphi_\mu(p))}\,d\sigma_p = \bar{c}_{\mu\nu},$$

d'où l'on conclut

$$c_{\nu\mu} = \bar{c}_{\mu\nu}.$$

La matrice $(c_{\nu r})$ est donc une matrice hermitienne à éléments purement imaginaires. La forme hermitienne $\Sigma\Sigma c_{\nu r} u_\nu \bar{u}_r$ n'est pas (en général) bornée au sens de M. Hilbert. Or, nous avons ici un cas où l'on peut appliquer la généralisation de la théorie de M. Hilbert que j'ai développée il y a une dizaine d'années.[2]

Pour utiliser la matrice $(c_{\nu r})$ pour l'étude qui nous occupe, je démontre d'abord le lemme suivant.

Lemme I: *Si deux suites de constantes $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots, w_1, w_2, \ldots w_n, \ldots$, pour lesquelles $\Sigma|u_\nu|^2$ et $\Sigma|w_\nu|^2$ convergent, sont liées entre elles par les relations*

$$w_\nu = \sum_{r=1}^{\infty} \bar{c}_{\nu r} u_r \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

les fonctions $U(p) \sim \Sigma u_\nu \varphi_\nu(p)$ et $W(p) \sim \Sigma w_\nu \varphi_\nu(p)$ satisfont à la relation

$$\frac{d}{dt}\int_S U(p_0, t)\,V(p_0)\,d\sigma_{p_0} = -i\int_S W(p_0, t)\,V(p_0)\,d\sigma_{p_0} \tag{12}$$

[1] Cela arrive par exemple pour les $\varphi_\nu(p)$ qui s'obtiennent en orthogonalisant les fonctions $x_1^{\nu_1}, x_2^{\nu_2}, \ldots x_n^{\nu_n}$ sur S.

[2] T. Carleman: Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique. Upsala Universitets årsskrift, 1923. Cf. aussi: Congrès des mathématiciens scandinaves. Copenhagen 1925 et Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1931.

presque partout pour chaque fonction $V(p_0)$ à carré intégrable sur S. La fonction sous le signe de dérivation est absolument continue.

Pour la démonstration nous supposerons d'abord que $V(p_0)$ ait toutes ses dérivées premières continues sur S.

En utilisant la formule

$$\int_S U(p_0, \tau)\, V(p_0)\, d\sigma_{p_0} = \int_S U(p_0)\, V(p_0, -\tau)\, d\sigma_{p_0}$$

on voit que le premier membre est dérivable et qu'on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\int_S U(p_0, \tau)\, V(p_0)\, d\sigma_{p_0} &= \int_S U(p_0) \frac{\partial V(p_0, -\tau)}{\partial \tau}\, d\sigma_{p_0} \\ &= i\int_S U(p_0)\, \Omega(V(p_1))\, d\sigma_{p_0},\end{aligned}$$

où $p_1 = T(p_0, -\tau)$. En faisant $\tau = 0$, il résulte

$$\left[\frac{d}{d\tau}\int_S U(p_0, \tau)\, V(p_0)\, d\sigma_{p_0}\right]_{\tau=0} = i\int_S U(p_0)\, \Omega(V(p_0))\, d\sigma_{p_0}.$$

Désignons par $V_m(p_0)$ la somme $\sum\limits_{\nu=1}^{m} a_\nu \varphi_\nu(p_0)$ des n premiers termes dans le développement de $V(p_0)$ suivant les fonctions $\varphi_\nu(p_0)$. On démontre que $\Omega(V_m(p_0))$ tend en moyenne vers $\Omega(V(p_0))$ si le système orthogonal est convenablement choisi.[1] On a

$$\begin{aligned} i\int_S U(p_0)\, \Omega(V_m(p_0))\, d\sigma_{p_0} &= i\int_S U(p_0) \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{r=1}^{\infty} a_\nu c_{\nu r}\varphi_r(p_0)\, d\sigma_{p_0} = \\ &= i\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{r=1}^{\infty} a_\nu c_{\nu r} u_r = -i\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu \bar{c}_{\nu r} u_r = -i\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu w_\nu = \\ &= -i\int_S W(p_0)\, V_m(p_0)\, d\sigma_{p_0}.\end{aligned}$$

---

[1] Cf. la Note à la page 68.

En faisant tendre m vers l'infini il viendra

$$i\int_S U(p_0)\,\Omega(V(p_0))\,d\sigma_{p_0} = -\,i\int_S W(p_0)\,V(p_0)\,d\sigma_{p_0}.$$

Nous avons ainsi démontré la formule

$$\left[\frac{d}{d\tau}\int_S U(p_0,\tau)\,V(p_0)\,d\sigma_{p_0}\right]_{\tau=0} = -\,i\int_S W(p_0)\,V(p_0)\,d\sigma_{p_0}$$

en suppsant que $V(p_0)$ soit une fonction à dérivées premières continues. Si, dans cette formule on remplace $V(p_0)$ par $V(p_0, -t)$ il viendra facilement

$$\frac{d}{dt}\int_S U(p_0, t)\,V(p_0)\,d\sigma_{p_0} = -\,i\int_S W(p_0, t)\,V(p_0)\,d\sigma_{p_0}.$$

En intégrant nous en déduisons l'équation

$$(13)\qquad \int_S U(p_0, t)\,V(p_0)\,d\sigma_{p_0} - \int_S U(p_0)\,V(p_0)\,d\sigma_{p_0} =$$

$$= -\,i\int_0^t\int_S W(p_0,\tau)\,V(p_0)\,d\sigma_{p_0}\,d\tau.$$

Par un passage à la limite, on trouve que cette formule, qui est démontrée pour chaque fonction $V(p_0)$ dérivable est aussi vraie sous la seule hypothèse que $V(p_0)$ soit à carré intégrable. En dérivant (13) par rapport à t, on voit que (12) est valable pour presque toutes les valeurs de t quelle que soit la fonction $V(p_0)$ à carré intégrable. C. Q. F. D.

Si l'on intègre l'équation (13) encore une fois on obtient la formule

$$\int_S \left[\int_0^t U(p_0,\tau)\,d\tau - t\,U(p_0) + i\int_0^t (t-\tau)\,W(p_0,\tau)\,d\tau\right] V(p_0)\,d\sigma_{p_0} = 0.$$

Cette relation, ayant lieu pour toutes les fonctions $V(p_0)$ à carré intégrable, entraîne (pour t fixe)

$$\int_0^t U(p_0, \tau)\, d\tau - t\, U(p_0) + i \int_0^t (t-\tau)\, W(p_0, \tau)\, d\tau = 0 \tag{14}$$

pourvu que p_0 n'appartienne pas à un certain ensemble E_t de mesure nulle. Considérons maintenant une infinité de valeurs $t_1, t_2, \ldots t_\nu, \ldots$ formant un ensemble partout dense dans l'intervalle $-\infty < t < \infty$. Si p_0 n'appartient pas à l'ensemble ΣE_{t_ν}, qui est de mesure nulle, l'équation (14) a donc lieu pour toutes les valeurs t_ν et par conséquent, à cause de la continuité, pour toutes les valeurs de t. L'équation (14) est donc valable identiquement en t pour presque tous les points p_0. En dérivant par rapport à t, il vient

$$U(p_0, t) = U(p_0) + i \int_0^t W(p_0, \tau)\, d\tau \tag{15}$$

pour presque toutes les valeurs de t.

En modifiant les valeurs de $U(p_0)$ en un ensemble de points de mesure nulle (ce qui ne change pas les coefficients de Fourier de $U(p_0)$) nous pouvons donc supposer que (15) ait lieu pour toutes les valeurs de t. $U(p_0)$ devient ainsi une fonction absolument continue sur presque toutes les caractéristiques. En dérivant par rapport à t, on trouve

$$\Omega(U) = W.$$

presque partout. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant.

Lemme II: *Si deux suites de constantes $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots, w_1, w_2, \ldots w_n, \ldots$ pour lesquelles $\Sigma |u_\nu|^2$ et $\Sigma |w_\nu|^2$ convergent sont liées entre elles par les relations*

$$w_\nu = \sum_{r=1}^{\infty} \bar{c}_{\nu r}\, u_r \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

il existe deux fonctions à carré intégrable $U(p)$ et $W(p)$ (dont la première est absolument continue sur presque toutes les caractéristiques) satisfaisant aux relations:

$$\int_S U(p)\, \varphi_\nu(p)\, d\sigma_p = u_\nu, \quad \int_S W(p)\, \varphi_\nu(p)\, d\sigma_p = w_\nu,$$

$$\Omega(U) = W.$$

La réciproque est vraie.

Nous pouvons maintenant démontrer que la forme $\Sigma \bar{c}_{\nu r} u_\nu v_\nu$ admet une et une seule forme spectrale orthogonale. Il suffit de faire voir que les équations

$$u_\nu = \lambda \sum_{r=1}^{\infty} \bar{c}_{\nu r} u_r \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

n'admettent pas de solution non nulle telle que $\Sigma |u_\nu|^2$ converge, si λ est non réel. Supposons, par impossible, qu'il existe une telle solution. En appliquant le lemme I on trouve pour la fonction $U(p) \sim \Sigma u_\nu \varphi_\nu(p)$ la relation

$$\int_S U(p_0, t)\, V(p_0)\, d\sigma_{p_0} = \int_S U(p_0)\, V(p_0, -t)\, d\sigma_{p_0} = e^{-\frac{it}{\lambda}} \int_S U(p_0)\, V(p_0)\, d\sigma_{p_0}.$$

Le second membre reste certainement borné lorsque t varie dans l'intervalle $-\infty < t < \infty$ si $V(p_0)$ est une fonction bornée, tandis que le troisième membre n'est pas borné à moins que

$$\int_S U(p_0)\, V(p_0)\, d\sigma_{p_0} = 0.$$

Il faut donc que cette relation ait lieu quelle soit la fonction V bornée, ce qui entraîne $U(p_0) = 0$ presque partout, contrairement à l'hypothèse.

Introduisons maintenant un noyau $K(\xi, \eta)$ par les relations

$$K(\xi, \eta) = \bar{c}_{pq} \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} p - 1 < \xi < p & \quad p = 1, 2, \ldots \\ q - 1 < \eta < q & \quad q = 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

$$K(\xi, \eta) = 0 \quad \text{pour} \quad \xi \text{ ou } \eta = \text{nombre entier}.$$

À chaque fonction $U(p)$ à carré intégrable sur S nous pouvons faire correspondre une fonction $U^*(\xi)$ à carré intégrable dans l'intervalle $(0, \infty)$ et définie par les relations

$$U^*(\xi) = \int_S U(p_0)\, \varphi_\nu(p_0)\, d\sigma_{p_0} \quad \text{pour} \quad \nu - 1 < \xi < \nu$$

$$U^*(\xi) = 0 \qquad \text{pour} \quad \xi = \text{nombre entier}.$$

Nous venons de démontrer que l'équation

$$U(\xi) - \lambda \int_0^\infty K(\xi, \eta)\, U(\eta)\, d\eta = 0$$

ne possède pas de solutions non identiquement nulles et à carré intégrable pour λ non réel. Il s'ensuit que $K(\xi, \eta)$ appartient à la classe I et admet un et un seul noyau spectral orthogonal.

Considérons maintenant l'équation intégrale de première espèce

$$\int_0^\infty K(\xi, \eta)\, \Phi(\eta)\, d\eta = 0. \tag{16}$$

Chaque solution Φ à carré intégrable peut se décomposer (d'une manière unique) en une somme

$$\Phi = \omega^*(\xi) + \psi(\xi),$$

où $\omega^*(\xi)$ est constante dans tous les intervalles $(\nu - 1, \nu)$ et où $\psi(\xi)$ satisfait aux équations simultanées

$$\int_{\nu-1}^{\nu} \psi(\eta)\, d\eta = 0.$$

Les fonctions $\omega^*(\xi)$ et $\psi(\xi)$ satisfont séparément à l'équation (16). Les solutions du type $\omega^*(\xi)$ et celles du type $\psi(\xi)$ forment des ensembles linéaires et fermés de fonctions à carré intégrable. Nous pouvons dons trouver deux systèmes de fonctions orthogonales et normales $\omega_1^*(\xi)$, $\omega_2^*(\xi)$, ... et $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\xi)$, ... tels que l'ensemble des solutions à carré intégrable de (16) soit représenté par la formule

$$\Phi(\xi) \sim \sum_{\nu=1}^\infty a_\nu\, \omega_\nu^*(\xi) + \sum_{\nu=1}^\infty b_\nu\, \psi_\nu(\xi),$$

où a_ν et b_ν sont des constantes quelconques pour lesquelles $\Sigma |a_\nu|^2$ et $\Sigma |b_\nu|^2$ convergent. En utilisant le lemme II on voit qu'il correspond aux fonctions $\omega_\nu^*(\xi)$ des solutions $\omega_\nu(p)$ de l'équation $\Omega(\omega) = 0$. Cet ensemble de fonctions possède la propriété que toute autre solution à carré intégrable de $\Omega(\omega) = 0$ peut s'ecrire

$$\omega(p) \sim \Sigma c_\nu \omega_\nu(p)$$

où $\Sigma |c_\nu|^2$ est convergent. Remarquons finalement que les fonctions $\psi_\nu(\xi)$ sont orthogonales à toutes les fonctions qui sont constantes dans tous les intervalles $(\nu - 1, \nu)$.

Ceci posé, en désignant par $U(p)$ et $V(p)$ deux fonctions quelconques à carré intégrable sur S, nous obtenons par une formule fondamentale de la théorie des équations intégrales singulières (voir p. 48 et 49 dans le livre cité à la page 68)

$$(17) \qquad \int\limits_S U(p_0)\, V(p_0)\, d\sigma_{p_0} = \int\limits_0^\infty U^*(\xi)\, V^*(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \theta(\xi, \eta | \lambda)\, U^*(\xi)\, V^*(\eta)\, d\xi\, d\eta + \sum \int\limits_0^\infty U^*(\xi)\, \omega_\nu^*(\xi)\, d\xi \cdot \int\limits_0^\infty V^*(\xi)\, \omega_\nu^*(\xi)\, d\xi.$$

Le dernier terme du second membre peut encore s'écrire:

$$\sum \int\limits_S U(p_0)\, \omega_\nu(p_0)\, d\sigma_{p_0} \cdot \int\limits_S V(p_0)\, \omega_\nu(p_0)\, d\sigma_{p_0}.$$

En introduisant la fonction

$$\psi(p, \eta | \lambda) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \theta\left(\nu - \frac{1}{2}, \eta | \lambda\right) \varphi_\nu(p)$$

nous pouvons écrire (17) sous la forme

$$(18) \qquad \int\limits_S U(p_0)\, V(p_0)\, d\sigma_{p_0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \int\limits_S \int\limits_0^\infty \psi(p_0, \eta | \lambda)\, U(p_0)\, V^*(\eta)\, d\sigma_{p_0}\, d\eta +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_S U(p_0)\, \omega_\nu(p_0)\, d\sigma_{p_0} \cdot \int\limits_S V(p_0)\, \omega_\nu(p_0)\, d\sigma_{p_0}.$$

La fonction spectrale $\theta(\xi, \eta | \lambda)$ satisfait à la relation

$$\theta(\xi, \eta | \lambda + \Delta\lambda) - \theta(\xi, \eta | \lambda) = \int\limits_0^\infty K(\xi, \zeta) \int\limits_\lambda^{\lambda+\Delta\lambda} \lambda\, d_\lambda \theta(\zeta, \eta | \lambda)\, d\zeta,$$

d'où l'on déduit en appliquant le lemme II

$$i\frac{d}{dt}\int\limits_{\lambda}^{\lambda+\varDelta\lambda}\lambda\, d_\lambda\,\psi(p,\eta|\lambda)=\psi(p,\eta|\lambda+\varDelta\lambda)-\psi(p,\eta|\lambda).$$

Il s'ensuit aisément

$$\psi(p,\eta|\lambda+\varDelta\lambda)-\psi(p,\eta|\lambda)=\int\limits_{\lambda}^{\lambda+\varDelta\lambda}e^{-\frac{it}{\lambda}}\,d_\lambda\,\psi(p_0,\eta\,\lambda)$$

où l'on a posé $p=T(p_0,t)$.

Remplaçons maintenant dans la formule (18) $U(p_0)$ par $U(p_0,t)$. On a

$$\int\limits_S U(p_0,t)\,\psi(p_0,\eta|\lambda)\,d\sigma_{p_0}=\int\limits_S U(p_0)\,\psi(T(p_0,-t),\eta|\lambda)\,d\sigma_{p_0}=$$

$$=\int\limits_0^{\lambda}e^{\frac{it}{\lambda}}d_\lambda\int\limits_S U(p_0)\,\psi(p_0,\eta\,\lambda)\,d\sigma_{p_0}.$$

Il s'ensuit *la formule fondamentale*

$$\int\limits_S U(p_0,t)\,V(p_0)\,d\sigma_{p_0}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{it}{\lambda}}\,d_\lambda\int\limits_S\int\limits_0^{\infty}\psi(p_0,\eta|\lambda)\,U(p_0)\,V^*(\eta)\,d\sigma_{p_0}\,d\eta+ \tag{19}$$

$$+\sum\int\limits_S U(p_0)\,\omega_\nu(p_0)\,d\sigma_{p_0}\cdot\int\limits_S V(p_0)\,\omega_\nu(p_0)\,d\sigma_{p_0}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{it}{\lambda}}\,d_\lambda\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\theta(\xi,\eta|\lambda)\,U^*(\xi)\,V^*(\eta)\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\sum\int\limits_S U(p_0)\,\omega_\nu(p_0)\,d\sigma_{p_0}\cdot\int\limits_S V(p_0)\,\omega_\nu(p_0)\,d\sigma_{p_0}.$$

Nous pouvons aussi affirmer que

$$U(p_0,t)\sim\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{it}{\lambda}}\,d_\lambda\int\limits_S\psi(p_0,\eta|\lambda)\,U^*(\eta)\,d\eta+\sum\omega_\nu(p_0)\int\limits_S\omega_\nu(q_0)\,U(q_0)\,d\sigma_{q_0},$$

où le signe ~ indique que l'intégrale + la somme dans le second membre tend en moyenne (par rapport à p_0) vers $U(p_0, t)$.

Ajoutons finalement la remarque suivante concernant le spectre ponctuel de la transformation $\Omega(U)$. Supposons que toutes les solutions à carré intégrable de l'équation $\Omega(U) = 0$ soient constantes presque partout. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ des points appartenant au spectre ponctuel et désignons par $U_1(p)$, $U_2(p), \ldots U_r(p)$ des fonctions fondamentales correspondantes. De l'équation

$$i\lambda_\nu \frac{d\,U_\nu(p)}{dt} = U_\nu(p)$$

on déduit

$$U_\nu(p_0, t) = e^{-\frac{it}{\lambda_\nu}} U_\nu(p_0)$$

et par conséquent

$$\Omega(|U_\nu(p)|) = 0\,.$$

Nous avons donc, à cause de notre hypothèse sur les solutions de $\Omega(U) = 0$

$$|U_\nu(p)| = \text{constante presque partout.}$$

Il s'ensuit que l'expression

$$U(p) = \prod_{\nu=1}^{r} U_\nu(p)^{n_\nu},$$

où les n_ν sont des nombres entiers quelconques est une fonction uniforme et bornée (si l'on exclut un ensemble de mesure nulle). Un calcul facile donne

$$\Omega(U) = \sum_{\nu=1}^{r} \frac{n_\nu}{\lambda_\nu} \cdot U,$$

d'où l'on conclut le théorème suivant:

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ appartiennent au spectre ponctuel de $\Omega(U)$ il en est de même de tous les nombres ϱ définis par l'équation

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{n_1}{\lambda_1} + \frac{n_2}{\lambda_2} + \cdots + \frac{n_r}{\lambda_r}$$

$n_1, n_2, \ldots n_r$ étant des nombres entiers quelconques.

§ 3. L'hypothèse ergodique.

Les résultats obtenus dans le numéro précédent permettent de traiter d'une manière rigoureuse certaines questions qui se rattachent à »l'hypothèse ergodique» qui joue un rôle fondamental dans la mécanique statistique.

En intégrant la formule (19) par rapport à t, on trouve (l étant un nombre positif quelconque)

$$\frac{1}{t}\int_0^t\int_S U(p_0, t)\, V(p_0)\, d\sigma_{p_0} dt - \sum \int_S U(p_0)\,\omega_\nu(p_0)\, d\sigma_{p_0} \cdot \int_S V(p_0)\,\omega_\nu(p_0)\, d\sigma_{p_0} = h(t) + g(t),$$

où l'on a posé

$$h(t) = \frac{i}{t}\int_{-l}^{l}\left(1 - e^{\frac{it}{\lambda}}\right)\lambda\, d_\lambda \int_0^\infty\int_0^\infty \theta(\xi, \eta\,|\,\lambda)\, U^*(\xi)\, V^*(\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$g(t) = \frac{1}{t}\int_0^t\left[\int_{-\infty}^{-l} + \int_l^\infty e^{\frac{it}{\lambda}} d_\lambda \int_0^\infty\int_0^\infty \theta(\xi, \eta\,|\,\lambda)\, U^*(\xi)\, V^*(\eta)\, d\xi\, d\eta\right] dt.$$

On obtient immédiatement les inégalités

$$|h(t)| \leq \frac{2l}{t}\int_{-l}^{l}\left| d_\lambda \int_0^\infty\int_0^\infty \theta(\xi, \eta\,|\,\lambda)\, U^*(\xi)\, V^*(\eta)\, d\xi\, d\eta\right|$$

$$|g(t)| \leq \int_l^\infty + \int_{-\infty}^{-l}\left| d_\lambda \int_0^\infty\int_0^\infty \theta(\xi, \eta\,|\,\lambda)\, U^*(\xi)\, V^*(\eta)\, d\xi\, d\eta\right|.$$

À cause de la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left| d_\lambda \int_0^\infty\int_0^\infty \theta(\xi, \eta\,|\,\lambda)\, U^*(\xi)\, V^*(\eta)\, d\xi\, d\eta\right|$$

nous pouvons choisir l de manière que $|g(t)|$ soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$ pour toutes les valeurs de t. Ceci posé, nous pouvons choisir un nombre t_0 tel qu'on ait

$$|h(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad t > t_0.$$

Il s'ensuit:

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t \int_S U(p_0, t)\, V(p_0)\, d\sigma_{p_0} dt - \sum \int_S U(p_0)\, \omega_\nu(p_0)\, d\sigma_{p_0} \cdot \int_S V(p_0)\, \omega_\nu(p_0)\, d\sigma_{p_0} \right| < \varepsilon$$

pour $t > t_0$. Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant:

$$(20) \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_S U(p_0, t)\, V(p_0)\, d\sigma_{p_0} dt = \sum \int_S U(p_0)\, \omega_\nu(p_0)\, d\sigma_{p_0} \cdot \int_S V(p_0)\, \omega_\nu(p_0)\, d\sigma_{p_0}.$$

Considérons un point p_1 sur S et l'ensemble M_ϱ des points sur S dont la distance à p_1 est $\leq \varrho$. Si, dans la formule précédente, on pose

$$\begin{aligned} U(p_0) &= V(p_0) = 1 \quad \text{si } p_0 \text{ appartient à} \quad M_\varrho \\ U(p_0) &= V(p_0) = 0 \qquad \text{»} \qquad S - M_\varrho, \end{aligned}$$

on trouve

$$\lim \frac{1}{t} \int_0^t \int_S U(p_0, t)\, U(p_0)\, d\sigma_{p_0} dt > 0.$$

On en déduit aisément le théorème de Poincaré sur la récurrence des trajectoires.

Supposons dès maintenant que chaque solution à carré intégrable de l'équation $\Omega(U) = 0$ est égale à une constante presque partout. La formule (20) se réduit dans ce cas à la relation suivante:

$$(21) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_S U(p_0, t)\, V(p_0)\, d\sigma_{p_0} dt = \frac{1}{S_0} \int_S U(p_0)\, d\sigma_{p_0} \cdot \int_S V(p_0)\, d\sigma_{p_0}$$

où S_0 désigne la mesure de la surface S.

Considérons maintenant un point q sur S et le domaine $D(q, \varrho)$ de S qui est intérieur à une hypersphère de rayon ϱ autour de q. Désignons par $C(p_0)$ la caractéristique issue de p_0. On vérifie aisément que l'ensemble $E(q, \varrho)$ des points p_0 pour lesquels les caractéristiques $C(p_0)$ correspondantes ne coupent pas $D(q, \varrho)$ est mesurable. Introduisons maintenant dans la formule (21) deux fonctions $U(p_0)$ et $V(p_0)$ définies de la manière suivante:

$$\begin{array}{lcc} U(p_0) = 1 & \text{si } p_0 \text{ appartient à} & E(q, \varrho) \\ U(p_0) = 0 & » & S - E(q, \varrho) \\ V(p_0) = 1 & » & D(q, \varrho) \\ V(p_0) = 0 & » & S - D(q, \varrho). \end{array}$$

Le premier membre de (21) est, dans ce cas, identiquement nul. Il s'ensuit

$$\int_S U(p_0)\, d\sigma_{p_0} = \text{mesure de } E(q, \varrho) = 0.$$

Considérons un ensemble dénombrable de points $q_1, q_2, \ldots q_\nu, \ldots$ qui est partout dense sur S et une suite de nombres positifs $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n, \ldots$ tendant vers zéro. Il est clair que l'ensemble

$$P = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} E(q_\nu, \varrho_m) + \sum_{\nu=1}^{\infty} C(q_\nu)$$

est de mesure nulle. D'après la définition des ensembles $E(q, \varrho)$ on trouve que chaque caractéristique $C(p_0)$ issue d'un point de l'ensemble $S - P$ passe une infinité de fois aussi près qu'on voudra de tous les points q_ν. Comme les points q_ν forment un ensemble partout dense sur S on en déduit le théorème suivant:

Si $\Omega(U) = 0$ n'a pas d'autre solution uniforme et à carré intégrable sur S que $U =$ constante presque partout, presque toutes les trajectoires sur S passent finalement aussi près qu'on voudra de tout point de S.

Considérons maintenant deux ensembles mesurables P et Q sur S et désignons par $l(t, p_0)$ la mesure des valeurs de τ dans l'intervalle $0 \leq \tau \leq t$ pour lesquelles le point mobile $T(p_0, \tau)$ appartient à l'ensemble Q. En prenant dans la formule (21)

$$\begin{array}{lcc} U(p_0) = 1 & \text{si } p_0 \text{ appartient à} & Q \\ U(p_0) = 0 & » & S - Q \\ V(p_0) = 1 & » & P \\ V(p_0) = 0 & » & S - P \end{array}$$

on trouve

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_P l(t, p_0)\, d\sigma_{p_0} = \frac{P_0 Q_0}{S_0}$$

où P_0 et Q_0 désignent les mesures des ensembles P et Q. M. BIRKHOFF[1] a récemment obtenu un résultat plus profond en démontrant que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{l(t, p_0)}{t} \text{ existe presque partout.}$$

Voici un autre corollaire de la formule (21):

Si $\Omega(U) = 0$ n'a pas d'autre solution uniforme à carré intégrable que U — constante presque partout, chaque ensemble Q mesurable qui reste invariant sous la transformation $T(p_0, t)$ est ou de la mesure nulle ou de la mesure S_0.

Pour le démontrer nous poserons dans la formule (21)

$$\begin{array}{lll} U(p_0) = 1 & \text{si } p_0 \text{ appartient à} & Q \\ U(p_0) = 0 & \quad » & S - Q \\ V(p_0) = 1 & \quad » & S - Q \\ V(p_0) = 0 & \quad » & Q. \end{array}$$

Le premier membre de (21) est dans ce cas identiquement nul et l'on obtient

$$(S_0 - Q_0)\, Q_0 = 0$$

ce qui démontre notre proposition.

En terminant ce paragraphe remarquons que la théorie des équations intégrales singulières n'est pas nécessaire pour la déduction de la relation (21). Nous pouvons aussi procéder de la manière suivante. Considérons l'expression

$$\psi = C + i\,\Omega(\varphi),$$

où c est une constante arbitraire et φ une fonction arbitraire ayant des dérivées partielles continues sur S. L'ensemble des fonctions ψ est un ensemble linéaire; cela veut dire qu'il contient la fonction $\gamma_1\psi_1 + \gamma_2\psi_2$, γ_1 et γ_2 étant des constantes quelconques, en même temps que ψ_1 et ψ_2. D'après un théorème de M. E. Schmidt nous pouvons affirmer qu'une fonction à carré intégrable quelconque peut être approchée en moyenne aussi près qu'on voudra par une fonction de l'ensemble (ψ) pourvu qu'il n'existe pas de fonction ω à carré intégrable avec $\int\limits_S |\omega|^2\, d\sigma \neq 0$

[1] Proceedings of the National Academy of Sciences, December 1931.

qui soit orthogonale à toutes les fonctions ψ. Or si l'on suppose que la relation

$$\int_S (C + i\Omega(\varphi))\,\omega\,d\sigma$$

ait lieu pour toutes les fonctions φ et pour toutes les constantes C, on déduit aisément (en modifiant s'il y a lieu les valeurs de ω dans un ensemble de mesure nulle)

$$\Omega(\omega) = 0, \quad \int_S \omega\,d\sigma = 0.$$

Si l'on suppose que l'équation $\Omega(u) = 0$ n'a pas d'autre solution uniforme et à carré intégrable que $u =$ constante presque partout, on en déduit $\omega(p) = 0$ presque partout. Ceci posé, étant donnée une fonction $U(p)$ à carré intégrable, nous pouvons faire correspondre à tout nombre positif ε une fonction $\varphi_\varepsilon(p)$ et une constante C_ε telles qu'on ait

$$U(p) = C_\varepsilon + i\Omega(\varphi_\varepsilon(p)) + h(p), \tag{22}$$

où

$$\int_S |h(p)|^2\,d\sigma_p < \varepsilon.$$

Une intégration donne immédiatement

$$S_0 C_\varepsilon = \int_S U(p_0)\,d\sigma_{p_0} - \int_S h(p_0)\,d\sigma_{p_0}.$$

En posant $p = T(p_0, t)$ nous pouvons écrire (22) sous la forme

$$U(p) = -\frac{d}{dt}\varphi_\varepsilon(p) + \int_S U(p_0)\,d\sigma_{p_0} + h(p) - \int_S h(p_0)\,d\sigma_{p_0}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{t}\int_0^t U(p_0, t)\,dt - \frac{1}{S_0}\int_S U(p_0)\,d\sigma_{p_0} = \frac{\varphi_\varepsilon(p_0) - \varphi_\varepsilon(p)}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t h(p)\,dt - \frac{1}{S_0}\int_S h(p_0)\,d\sigma_{p_0}.$$

En multipliant par $V(p_0)$ et en intégrant on retrouve par un passage à la limite la formule (21). On démontre aussi

$$\lim_{t\to\infty}\int_S\left(\frac{1}{t}\int_0^t U(p_0,t)\,dt-\frac{1}{S_0}\int_S U(p_0)\,d\sigma_{p_0}\right)^2 d\sigma_{p_0}=0.$$

Si l'on applique, d'une manière analogue, un théorème de M. F. Riesz[1] sur l'approximation des fonctions continues on arrive à formuler des conditions qui entraînent l'existence de la limite $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}U(p_0,t)$ pour toutes les valeurs de p_0.

§ 4. Développements des solutions comme fonctions des valeurs initiales.

Nous allons étudier les développements des solutions du système (8), considerées comme fonctions des valeurs initiales, suivant certains systèmes de fonctions orthogonales. Soit $\varphi_\nu(p)$ un système orthogonal et normal de fonctions analytiques et régulières sur S et jouissant de la propriété que toute autre fonction analytique et régulière sur S puisse se développer en série uniformément convergente suivant les fonctions $\varphi_\nu(p)$. Au lieu de nous borner à l'étude des solutions

$$x_\nu=X_\nu(x_1^0,x_2^0,\dots x_n^0,t)\qquad \nu=1,2,\dots n$$

nous considérerons, plus généralement, l'expression

$$U(x_1,x_2,\dots x_n)=U(p)=U(T(p_0,t))=U(p_0,t),$$

où U est une fonction quelconque régulière et analytique sur S. D'après les hypothèses que nous avons faites nous savons que $U(p_0,t)$ admet un développement uniformément convergente (par rapport à p_0) de la forme

$$U(p_0,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(t)\,\varphi_\nu(p_0), \tag{23}$$

où les coefficients sont donnés par la formule

$$a_\nu(t)=\int_S U(p_0,t)\,\varphi_\nu(p_0)\,d\sigma_{p_0}.$$

[1] Annales de l'École Normale supérieure, 1911.

Nous nous proposons de calculer effectivement les coefficients $a_\nu(t)$. Pour abréger l'écriture nous allons introduire le symbole

$$I[U, V; t] = \frac{1}{2}\int\limits_S [U(p_0, t) + U(p_0, -t)]\, V(p_0)\, d\sigma_{p_0}.$$

On vérifie immédiatement les formules

$$I[U, V; t] = I[V, U; t], \quad I[U+V, W; t] = I[U, W; t] + I[V, W; t]$$

$$I[U, V; t] = \frac{1}{4}(I[U+V, U+V; t] - I[U-V, U-V; t]).$$

La fonction $a_\nu(t)$ peut s'écrire

$$a_\nu(t) = \frac{1}{2}\int\limits_S [U(p_0, t) + U(p_0, -t)]\, \varphi_\nu(p_0)\, d\sigma_{p_0} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_S [U(p_0, t) - U(p_0, -t)]\, \varphi_\nu(p_0) d\sigma_{p_0} = I[U, \varphi_\nu; t] - i\int\limits_0^t I[\Omega(U), \varphi_\nu; t]\, dt.$$

Il est donc clair que nous pouvons trouver la fonction $a_\nu(t)$ dès que nous savons calculer les expressions

$$I[U, U; t]$$

pour toutes les fonctions U régulières sur S. Or on a par la formule (19)

$$I[U, U; t] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{\lambda}} d\lambda \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \theta(\xi, \eta|\lambda)\, U^*(\xi)\, U^*(\eta)\, d\xi\, d\eta + \sum\left[\int\limits_S U(p_0)\,\omega_\nu(p_0)\, d\sigma_{p_0}\right]^2.$$

Si l'on introduit la fonction non décroissante:

$$\varrho(\lambda) = \frac{1}{2}\int\limits_S U(p_0)^2 d\sigma_{p_0} - \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \theta\left(\xi, \eta \,\Big|\, \frac{1}{\lambda}\right) U^*(\xi)\, U^*(\eta)\, d\xi\, d\eta \quad \text{pour } \lambda > 0$$

$$\varrho(\lambda) = -\frac{1}{2}\int\limits_S U(p_0)^2 d\sigma_{p_0} - \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \theta\left(\xi, \eta \,\Big|\, \frac{1}{\lambda}\right) U^*(\xi)\, U^*(\eta)\, d\xi\, d\eta \quad \text{pour } \lambda < 0$$

cette formule peut encore s'écrire

$$I[U, U; t] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\varrho(\lambda).$$

En multipliant par $e^{-\zeta t}$ et en intégrant par rapport à t il vient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\zeta - i\lambda} d\varrho(\lambda) = \int_{0}^{\infty} e^{-\zeta t} I[U, U; t]\, dt. \tag{24}$$

Le second membre admet le développement asymptotique

$$\frac{1}{\zeta}\int_S U^2 d\sigma - \frac{1}{\zeta^3}\int_S \Omega^2(U)\, U\, d\sigma + \frac{1}{\zeta^5}\int_S \Omega^4(U)\, U\, d\sigma - \cdots,$$

où l'on a posé

$$\Omega[\Omega(U)] = \Omega^2(U), \quad \Omega[\Omega(\Omega(U))] = \Omega^3(U) \text{ etc.}$$

Cela posé, on déduit aisément de la formule (23) que toutes les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2n} d\varrho(\lambda)$$

sont convergentes et qu'on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2n} d\varrho(\lambda) = \int_S \Omega^{2n}(U)\, U\, d\sigma.$$

En écrivant, pour abréger,

$$\int_S \Omega^{2n}(U)\, U\, d\sigma = c_n$$

et en remarquant que $\varrho(\lambda)$ est une fonction impaire de λ, on obtient finalement[1]

$$2\int_{0}^{\infty} \lambda^n d\varrho(\sqrt{\lambda}) = c_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Comme on a $c_n < k^n \lfloor 2n$ (où k est une constante) il suit d'un théorème de

[1] Nous poserons $\varrho(0) = 0$.

M. Hamburger que le problème des moments de Stieltjes défini par les équations (25) est déterminé. Il s'ensuit que la fraction continue de la forme

$$G(z) = \frac{1}{b_1 z} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3 z} \cdots \tag{26}$$

qui correspond à la série

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \cdots$$

est convergente et qu'on a

$$2\int_0^\infty \frac{d\varrho(\sqrt{\lambda})}{z+\lambda} = G(z).$$

En remplaçant z par ζ^2 et λ par λ^2 on obtient

$$2\int_0^\infty \frac{d\varrho(\lambda)}{\zeta^2+\lambda^2} = G(\zeta^2).$$

Cette formule peut encore s'écrire sous la forme

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{d\varrho(\lambda)}{\zeta - i\lambda} = \zeta G(\zeta^2).$$

Il s'ensuit

$$\int_0^\infty e^{-\zeta t} I[U, U; t]\, dt = \zeta G(\zeta^2),$$

d'où l'on conclut, par une formule d'inversion connue,

$$I[U, U; t] = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{t\zeta} G(\zeta^2)\zeta\, d\zeta \qquad (a > 0).$$

Il est ainsi démontré que les coefficients $a_\nu(t)$ dans la formule (23) peuvent s'exprimer au moyen de certaines fractions continues de Stieltjes. Les développements obtenus sont valables pour toutes les valeurs positives de t.

En appliquant un théorème de Stieltjes (Œuvres complètes II p. 510), on démontre le théorème suivant:

Pour que l'hypothèse ergodique soit vraie il faut et il suffit que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{2\nu+1}$$

formée avec les coefficients d'ordre impair de la fraction continue (26) *soit divergente pour toutes les fonctions U qui satisfont à la relation*

$$\int_S U(p_0)\, d\sigma_{p_0} = 0.$$

Revenons maintenant au système

$$\frac{dx_\nu}{dt} = A_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{27}$$

(où les A_ν sont des polynômes) considéré dans le paragraphe 1, et supposons qu'il existe un invariant intégral positif $\mu(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Dans ce cas il faut tenir compte du fait qu'une trajectoire peut s'éloigner à l'infini au bout d'un temps fini. On démontre néanmoins la relation

$$\int_{E_n} U\Omega(V)\mu\, d\sigma = \int_{E_n} V\overline{\Omega(\overline{U})}\mu\, d\sigma,$$

d'où l'on conclut que les coefficients $a_{\nu r}$ du système (5) satisfont à la relation (7). Ceci entraîne qu'un grand nombre des résultats des paragraphes 2, 3 et 4 subsistent, convenablement modifiés, pour le système (27).

Remarquons finalement qu'on peut toujours ramener un système hamiltonien

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad r = 1, 2, \ldots n,$$

où $H(p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n)$ est une fonction *algébrique,* à la forme (27) ou, plus précisément à un autre système hamiltonien

$$\frac{dq_r}{d\tau} = \frac{\partial G}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{d\tau} = -\frac{\partial G}{\partial q_r},$$

où G est un polynôme des variables $p_1, p_2, \ldots p_n,\ q_1, q_2, \ldots q_n$. Comme H est algébrique on a, en effet, une relation de la forme

$$G(p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n, H) = 0,$$

où G est un polynôme. On en déduit

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = -\frac{\dfrac{\partial G}{\partial p_r}}{\dfrac{\partial G}{\partial H}}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_r} = -\frac{\dfrac{\partial G}{\partial q_r}}{\dfrac{\partial G}{\partial H}}.$$

En posant

$$d\tau = -\frac{dt}{\dfrac{\partial G}{\partial H}}$$

et en remarquant que $H =$ constante $= H_0$ pour tous les points de la trajectoire considérée on trouve

$$\frac{d q_r}{d\tau} = \frac{\partial G(p_1, \ldots, q_1, \ldots, H_0)}{\partial p_r}, \quad \frac{d p_r}{d\tau} = -\frac{\partial G(p_1, \ldots, q_1, \ldots, H_0)}{\partial q_r}$$

ce qui démontre la proposition.

Djursholm le 10 Février 1932.