ÜBER DIE ANWENDUNG DER VARIATIONSRECHNUNG IN DER THEORIE DER EIGENSCHWINGUNGEN UND ÜBER NEUE KLASSEN VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN.

VON

RICHARD COURANT

in GÖTTINGEN.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

In einigen früheren Arbeiten[1] sowie in einem Buche über Methoden der mathematischen Physik[2] habe ich gezeigt, in wie einfacher Weise man die klassischen Sturm-Liouvilleschen Eigenwertprobleme für gewöhnliche und partielle lineare Differentialgleichungen vom Standpunkt der Variationsrechnung aus beherrschen kann. Wenn auch gerade auf dem Gebiete dieser Eigenwertprobleme die Theorie der Integralgleichungen vielleicht ihre grössten Erfolge aufzuweisen hat, so glaube ich doch, dass letzten Endes nicht der Umweg über die Integralgleichungen sondern der unmittelbar dem Probleme adäquate Ansatz von der Variationsrechnung aus dazu berufen ist, vollständige Klarheit in den hier waltenden einfachen Verhältnissen zu schaffen und zur endgültigen Gestalt der Theorie zu führen. Diesen Gesichtspunkt möchte ich in der vorliegenden Abhandlung zur Geltung bringen, indem ich zeige, dass von der Variationsrechnung aus sich ohne jede Schwierigkeit die Theorie einer sehr umfassenden Klasse von Eigenwertproblemen in völlig naturgemässer Weise entwickeln lässt. Diese Problemklasse enthält die Sturmschen Eigenwertprobleme gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, sowie die neuerdings vor allem von A. Kneser behan-

---

[1] Vgl. vor allem: Ueber die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Math. Zeitschr. Bd. 7.

[2] COURANT-HILBERT, Methoden d. math. Physik. I, Berlin, 1922.

delten Probleme »bei Belastung», ebenso auch Aufgaben, die auf Eigenwertprobleme von Integro-Differentialgleichungen führen, wie sie z. B. in der Theorie der thermo-elastischen Erscheinungen[1] oder in der Theorie der Elektrokapillarität (z. B. bei Schwingungen elektrisch geladener Seifenblasen) oder bei der Behandlung des Wärmeausgleiches in einem Medium mit Wärmeleitung und Wärmestrahlung auftreten. Darüber hinaus aber eröffnet sich ein weites Feld von Fragen, das man bisher wohl kaum beachtet hat, und welches mir eine grosse Mannigfaltigkeit neuartiger Erscheinungen einzuschliessen scheint. Auch abgesehen von dem unmittelbaren Gegenstande dieser Abhandlung dürften diese Probleme für die Weiterentwicklung der Variationsrechnung überhaupt von Interesse sein. Es handelt sich um Variationsprobleme, aus denen statt der üblichen Randwertaufgaben Eulerscher Differentialgleichungen vielgestaltige Typen von Funktionalgleichungen entspringen; für ihre Behandlung liefert durchweg der Variationsansatz den Schlüssel.[2]

Ich möchte nach einigen elementaren Vorbemerkungen im 1. und 2. Kapitel die betreffenden Variationsprobleme und die zugehörigen Eigenwertprobleme aufstellen, sodann im 3. Kapitel die Frage nach der Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen, bezw. die Frage nach der Vollständigkeit dieses Funktionensystemes erörtern und schliesslich im 4. Kapitel auf den Existenzbeweis für die Lösungen unserer Probleme eingehen, wobei ich mich allerdings auf den Fall *einer* unabhängigen Veränderlichen beschränken will, da ich die weitergehenden Fälle an anderer Stelle gemeinsam mit der Theorie der Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen zu behandeln beabsichtige. — Übrigens ist zum Verständnis von Kap. 3 und 4 nicht die vollständige Kenntnis der vorangehenden Entwicklungen notwendig. — In den ersten drei Kapiteln ist die *Existenz* der Lösungen eine überall zugrunde liegende Voraussetzung.

Wenn ich es nicht vermeide, elementare oder schon anderweitig gesagte Dinge hier zu wiederholen, so folge ich dabei dem Bestreben, ohne Heranziehung anderer Literatur und ohne spezielle Vorkenntnisse verständlich zu sein.

---

[1] Auch diese Aufgaben sind von Kneser und einigen seiner Schüler untersucht worden. Vgl. z. B. A. KNESER, Integralgleichungen, 2 Aufl. Braunschweig 1922.

[2] Nach Beendingung des Satzes bemerke ich, dass Herr GUIDO FUBINI schon früher, von der Variationsrechnung ausgehend, Probleme formuliert und behandelt hat, die mit den hier erörterten gewisse Berührungspunkte besitzen. »Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differentiale.» Annali di matematica, Serie 3, Band 20, 1913.

Vorbemerkungen.

Alle Eigenwertprobleme der Analysis erscheinen als sinngemässe Verallgemeinerungen des algebraischen Eigenwertproblemes, welches bei der Hauptachsentransformation der Flächen zweiter Ordnung oder bei der Theorie der kleinen Schwingungen in der Mechanik diskreter Massenpunkte auftritt. Hier handelt es sich stets um die Aufgabe, zwei gegebene quadratische Formen

$$D[x, x] = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

$$H[x, x] = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\, x_i x_k \qquad (b_{ik} = b_{ki})$$

von n Variabeln durch eine lineare Transformation $x_j = \sum_{i=1}^{n} t_j^i y_i$ gleichzeitig in die Gestalt

$$D[x, x] = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i^2 \qquad H[x, x] = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2$$

zu transformieren. Wir setzen dabei voraus, dass eine der beiden Formen, etwa die Form H, positiv definit ist; dann können wir $b_i = 1$, $a_i = \lambda_i$ setzen. Wenn auch die Form D positiv definit ist, so sind die λ_i positive Grössen. Denken wir uns die Werte λ_i so angeordnet, dass $\lambda_i \leqq \lambda_{i+1}$ ist, so erhält man sie der Reihe nach durch die Lösung der folgenden Minimumprobleme: Es soll zunächst der Quotient $D:H$ zum Minimum gemacht werden. Das entsprechende Wertsystem der Variabeln sei $x_i = t_i^1$. Es sei so gewählt, — nur die Verhältnisse der Grössen x_i sind bestimmt — dass $H[x, x] = H[t^1, t^1] = 1$ wird. Dann ist

$$D[x, x] = D[t^1, t^1] = \lambda_1.$$

Zweitens bestimmen wir unter allen Wertsystemen x_i welche der Bedingung

$$H[x, t^1] = 0$$

genügen, — es bedeutet $H[x, y] = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\, x_i y_k$ die Polarform von H, ebenso wie

$D[x, y]$ die Polarform von D bedeutet[1] — ein solches Wertsystem $x_i = t_i^2$ für welches $D:H =$ Min. wird und wählen $H[t^2, t^2] = 1$. Dann wird $D[t^2, t^2] = \lambda_2$.

Fahren wir in derselben Weise fort, so erhalten wir in den Grössen t_j^i die Koeffizienten der gesuchten linearen Transformation und in den Grössen λ_i die »Eigenwerte der quadratischen Form D in Bezug auf die quadratische Form H». Wir haben damit alle Bestimmungsstücke für unser Hauptachsenproblem charakterisiert.

Beiläufig sei daran erinnert, dass in den physikalischen Anwendungen auf Schwingungsprobleme die quadratische Form D der potentiellen, die quadratische Form H der kinetischen Energie entspricht. Unsere Ausdrücke entstehen nämlich aus den Energieausdrücken, wenn man »Synchronismus» für die Bewegung voraussetzt und demgemäss überall einen nur von der Zeit abhängigen gemeinsamen Faktor unterdrückt.[2]

Man kann, was für zahlreiche Anwendungen von der grössten Bedeutung ist, den Eigenwert λ_h auch ohne Rekursion auf die Minimumaufgaben, welche zu vorangehenden Eigenwerten gehören, durch folgenden Satz charakterisieren: Es seien $v_1^i, \ldots, v_n^i$ $(i = 1, \ldots, h-1)$ beliebige $h-1$ Wertsysteme, und es sei $d[v^1, \ldots, v^{h-1}]$ das Minimum von $D[x, x]$ unter den Nebenbedingungen

$$H[x, x] = 1 \quad H[x, v^i] = 0 \quad (i = 1, \ldots, h-1),$$

dann ist λ_h der grösste Wert, den dieses Minimum bei Variation der Wertsysteme $v_1^i, \ldots, v_n^i$ annehmen kann; und zwar wird dieses Maximum-Minimum angenommen für $v_k^i = t_k^i$, $x_k = t_k^h$ $(k = 1, \ldots, n)$, und sein Wert ist λ_h.

In geometrischer Sprechweise drückt sich der obige Satz, wenn auch D positiv definit ist, folgendermassen aus: Ordnet man die Hauptachsen eines n-dimensionalen Ellipsoides nach abnehmender Grösse, so ist die h-te Hauptachse die kür-

---

[1] Die Polarform $Q[x, y] = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} x_i y_k$ einer quadratischen Form $Q[x, x] = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} x_i x_k$ $(\alpha_{ik} = \alpha_{ki})$ ist dadurch charakterisiert, dass für irgendwelche Werte der Parameter α, β die quadratische Form $Q[x', x']$ für das Wertsystem $x_i' = \alpha x_i + \beta y_i$ der Identität genügt $Q[x', x'] = \alpha^2 Q[x, x] + 2\alpha\beta Q[x, y] + \beta^2 Q[y, y]$ aus welcher sofort bei definitem Charakter von Q die Ungleichung

$$(*) \qquad Q[x, x]\, Q[y, y] - Q[x, y]^2 \geqq 0$$

folgt.

[2] Vgl. COURANT-HILBERT, l. c. S. 229.

zeste unter den längsten Hauptachsen aller derjenigen Ellipsoide von $n-h+1$ Dimensionen, welche entstehen, wenn man das gegebene Ellipsoid mit allen möglichen $(h-1)$-dimensionalen Ebenen durch den Mittelpunkt schneidet.

In der Theorie der kleinen Schwingungen besagt der Satz: Ordnet man die Eigenfrequenzen oder Tonhöhen eines schwingungsfähigen Systemes von n Freiheitsgraden nach wachsender Grösse, so ist der h-te Ton der höchste Grundton unter den Tönen aller schwingungsfähigen Systeme, welche aus dem gegebenen durch Auferlegung irgendwelcher $h-1$ linearer Bindungen entstehen.

Auf die ganz elementaren Beweise brauche ich hier nicht einzugehen.[1]

Eine Verallgemeinerung bezw. ein Grenzübergang vom algebraischen zum transzendenten Problem ist bei der Hauptachsentransformation in zwei Hinsichten möglich. Die eine Verallgemeinerung entspricht dem Übergang zu einem System aus unendlich vielen diskreten Massenpunkten, z. B. einem unendlich ausgedehnten Kristall. Sie führt unmittelbar auf quadratische Formen mit unendlich vielen Veränderlichen, deren Hauptachsenproblem in den einfachsten Fällen mit der Theorie der Kettenbrüche und der Differenzengleichungen verknüpft ist. Die andere Verallgemeinerung entspricht dem Grenzübergang von der Mechanik diskreter Systeme zur Mechanik der Kontinua. An Stelle diskreter Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ tritt eine stetige Funktion (bezw. auch mehrere stetige Funktionen) φ von einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen, welche die Lage des Systemes charakterisiert. Aus dem Hauptachsenproblem der quadratischen Form wird ein isoperimetrisches Variationsproblem zur Bestimmung dieser Funktion φ. Die beiden genannten Grenzübergänge lassen sich in wechselseitige Beziehung zu einander bringen. Wir wollen uns jedoch auf die Betrachtung der zuletzt gekennzeichneten Variationsprobleme beschränken, d. h. auf den Fall der Schwingungen kontinuierlicher Medien.[2]

KAPITEL I.

Die Variationsprobleme und Funktionalgleichungen der Schwingungen bei einer unabhängigen Veränderlichen.

§ 1. Das klassische Sturm-Liouvillesche Problem bei festen Endpunkten.

Wir erinnern zunächst an das klassische Sturm-Liouvillesche Problem, welches aus dem Problem der eingespannten Saite entspringt. Ist $\varphi(x)$ die Funk-

[1] Vgl. COURANT-HILBERT, l. c. Kap. I, § 4.

[2] Übrigens sei daran erinnert, dass auch die Probleme der Wärmeleitung ganz ebenso wie die Schwingungstheorie auf Eigenwertprobleme führen. Vgl. z. B. Anhang Nr. 4 und 5.

tion, welche die Lage einer an den Endpunkten eingespannten Saite bestimmt[1]

$$0 \leqq x \leqq 1; \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0$$

so sind die beiden Ausdrücke D und H gegeben durch Integrale der Form[2]

$$D[\varphi] = \int_0^1 p\varphi'^2 dx \tag{1}$$

$$H[\varphi] = \int_0^1 r\varphi^2 dx, \tag{2}$$

wobei wir voraussetzen, dass p und r stetige Funktionen im Grundgebiet $0 \leqq x \leqq 1$ sind, dass p und r durchweg positiv sein sollen und p eine stetige Ableitung p' besitzen möge.[3]

Die zugehörigen Polarausdrücke

$$D[\varphi, \psi] = \int_0^1 p\varphi'\psi' dx, \qquad H[\varphi, \psi] = \int_0^1 r\varphi\psi dx \tag{3}$$

sind durch die Relationen

$$\begin{aligned} D[\alpha\varphi + \beta\psi] &= \alpha^2 D[\varphi] + 2\alpha\beta D[\varphi, \psi] + \beta^2 D[\psi, \psi] \\ H[\alpha\varphi + \beta\psi] &= \alpha^2 H[\varphi] + 2\alpha\beta H[\varphi, \psi] + \beta^2 H[\psi, \psi] \end{aligned} \tag{4}$$

bei konstantem α, β charakterisiert. Da für jedes α und β

$$D[\alpha\varphi + \beta\psi] \geqq 0 \qquad H[\alpha\varphi + \beta\psi] \geqq 0$$

ist, so gelten stets die Ungleichungen

$$\begin{aligned} D[\varphi]\, D[\psi] &\geqq D[\varphi, \psi]^2 \\ H[\varphi]\, H[\psi] &\geqq H[\varphi, \psi]^2. \end{aligned} \tag{5}$$

---

[1] abgesehen von einem von der Zeit periodisch abhängigen Faktor.

[2] Der Einfachheit halber schreiben wir für solche Integralausdrücke $D[\varphi]$ bezw. $H[\varphi]$ an Stelle von $D[\varphi, \varphi]$ und $H[\varphi, \varphi]$.

[3] Diese Differenzierbarkeitsvoraussetzung ist übrigens keineswegs wesentlich.

Von den Funktionen φ und ψ wollen wir voraussetzen, dass sie im abgeschlossenen Grundgebiete stetig und mit stückweise stetiger erster und zweiter Ableitung versehen sind.[1]

Wir merken die Greenschen Formeln an:

$$(6)\quad \begin{aligned} D[\varphi, \psi] &= \int_0^1 p\,\varphi'\,\psi'\,dx = -\int_0^1 \psi L[\varphi]dx + \sum p(x_\nu)\,\psi(x_\nu)\,S_\nu[\varphi] \\ \int_0^1 (\varphi\, L[\psi] - \psi\, L[\varphi])\,dx &= \sum p(x_\nu)(\varphi(x_\nu)\,S_\nu[\psi] - \psi(x_\nu)\,S_\nu[\varphi]) \end{aligned}$$

wobei

$$L[\varphi] = (p\,\varphi')'$$

gesetzt ist, die Summen rechts über die Sprungstellen der Ableitungen von φ bezw. ψ erstreckt sind und mit $S_\nu[\varphi]$ bezw. $S_\nu[\psi]$ die Grösse des Sprunges der Ableitung von φ bezw. ψ an der Stelle x_ν bezeichnet wird. (Vgl. S. 13.) An den Endpunkten des Intervalles ist dabei die Grösse S so zu bilden, als ob ausserhalb des Grundgebietes die Funktionen konstant wären.

Die Eigenwerte λ_i und die zugehörigen Eigenfunktionen u_i $(i = 1, 2, \ldots)$, welche die Differentialgleichungen

$$(7)\quad L[u_i] + \lambda_i r u_i = 0$$

sowie die Randbedingungen

$$(8)\quad u_i(0) = u_i(1) = 0$$

befriedigen, sind durch die folgenden Minimum-Eigenschaften charakterisiert: Unter allen den Randbedingungen $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ genügenden im Grundgebiete stetigen und mit stückweise stetiger erster Ableitung versehenen Funktionen $\varphi(x)$ ist u_1 diejenige, für welche der Quotient $D:H$ einen möglichst kleinen Wert, nämlich λ_1 annimmt. Die weiteren Eigenwerte $\lambda_2, \ldots$ und die zugehörigen Eigenfunktionen $u_2, \ldots$ erhält man als Lösungen der folgenden Minimumprobleme. Unter allen denselben Bedingungen wie oben und den weiteren Bedingungen

$$(9)\quad H[\varphi, u_j] = 0 \qquad (j = 1, \ldots, i-1)$$

[1] Dies bedeutet, dass die Ableitungen nur in einer endlichen Anzahl von Punkten $x_1, \ldots, x_h$ des Intervalles endliche Sprünge erleiden dürfen.

genügenden Funktionen ist diejenige zu suchen, für welche der Quotient $D:H$ einen möglichst kleinen Wert hat. Die Lösung wird gegeben durch $\varphi=u_i$ und der Minimumwert des Quotienten $D:H$ ist gleich λ_i.

Zu den Differentialgleichungen (7) gelangt man von dem Variationsproblem aus ohne weitere Berufung auf die allgemeine Multiplikatorenregel der Variationsrechnung unmittelbar durch die folgende Schlussweise, die wir deswegen hier ausführlich entwickeln, weil sie wörtlich ebenso für alle die später zu behandelnden nicht mehr unter das Schema der klassischen Variationsrechnung fallenden Probleme anwendbar bleibt. Wir gehen, wie überall in diesem Kapitel, von der Voraussetzung aus, dass die betreffenden Minimumprobleme Lösungen besitzen, und dass diese Lösungen im Grundgebiet stetige Funtionen mit stückweise stetiger Ableitung erster und zweiter Ordnung sind. Bei dem vorliegenden Problem dürfen wir von vornherein (wie sich sofort herausstellen wird) durchweg Stetigkeit der ersten und zweiten Ableitungen voraussetzen. Es sei $u=u_1$ bezw. $\lambda=\lambda_1$ die Lösung bezw. der Minimumwert bei dem ersten unserer Minimumprobleme. Wir dürfen dabei die Funktion u so normiert annehmen, dass

$$H[u]=1 \tag{10}$$

ist. Bedeutet nun ζ eine denselben Bedingungen wie φ genügende, im übrigen willkürliche Funktion, ε eine willkürliche Konstante, so muss für jeden Wert dieser Konstanten ε

$$D[u+\varepsilon\zeta] \geqq \lambda H[u+\varepsilon\zeta]$$

sein, oder, was mit Rücksicht auf $D[u]=\lambda H[u]$ auf dasselbe herauskommt,

$$2\varepsilon(D[u,\zeta]-\lambda H[u,\zeta]+\frac{\varepsilon}{2}(D[\zeta]-\lambda H[\zeta])) \geqq 0$$

gelten. Diese Ungleichung kann nur dann für einen beliebigen Wert von ε bestehen, wenn die Gleichung

$$D[u,\zeta]-\lambda H[u,\zeta]=0 \tag{11}$$

gilt. Formen wir nun den Ausdruck $D[u,\zeta]$ nach der Greenschen Formel (6) um, so ergibt sich wegen der Willkür der Funktion ζ unmittelbar die Gleichung (7) für $u=u_1$ und $\lambda=\lambda_1$.[1]

[1] Wenn wir von der Funktion φ tatsächlich nur stückweise Stetigkeit der Ableitungen voraussetzen würden, so würde die Formel (6) dasselbe Resultat liefern, da wegen der Willkür von $\zeta(x_\nu)$ sämtliche Sprungwerte S_ν an den etwa auftretenden Sprungstellen sich als Null erweisen.

Bei dem zweiten Minimumproblem, bei welchem noch die Nebenbedingung $H[\varphi, u_1] = 0$ hinzugefügt ist, können wir zunächst die Gültigkeit der Gleichung (11) für $u = u_2, \lambda = \lambda_2$ nur unter der Voraussetzung

$$H[\zeta, u_1] = 0 \tag{12}$$

schliessen. Ist nun η eine beliebige stetige und mit stückweise stetiger erster Ableitung versehene Funktion, so bestimmen wir die Zahl t derart, dass die Funktion $\zeta = \eta + t u_1$ der Bedingung (12) genügt, d. h. wir setzen $t = -H[u_1, \eta]$. Weiter beachten wir, dass wir in der Gleichung (11) für ζ speziell auch die Funktion u_2 einsetzen können, und dass sich daher wegen der Bedingungsgleichung

$$H[u_2, u_1] = 0 \tag{13}$$

sofort

$$D[u_2, u_1] = 0 \tag{14}$$

ergibt. Setzen wir nun in die Gleichung (11) unsere Funktion $\zeta = \eta + t u_1$ ein, so folgt (für $u = u_2, \lambda = \lambda_2$)

$$D[u, \eta] - \lambda H[u, \eta] + t(D[u, u_1] - \lambda H[u, u_1]) = 0$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (13) und (14)

$$D[u, \eta] - \lambda H[u, \eta] = 0,$$

d. h. die Gleichung (11) gilt auch hier für willkürliche Funktionen η oder ζ ohne Rücksicht auf die Nebenbedingung (12). Hieraus folgt aber unmittelbar wie oben die Gültigkeit der Gleichung (7) für $i = 2$. Indem wir ebenso fortfahren, erkennen wir, dass allgemein aus der Voraussetzung der Lösbarkeit unserer Minimumprobleme für deren Lösungen u_i bezw. die Minimumwerte λ_i das Bestehen der Differentialgleichungen (7) folgt. Für die gemäss (10) normierten Lösungen unserer Probleme bestehen die Relationen

$$\begin{aligned} D[u_i] &= \lambda_i, \qquad & D[u_i, u_k] &= 0, \\ H[u_i] &= 1, \qquad & H[u_i, u_k] &= 0. \end{aligned} \qquad (i \neq k) \tag{15}$$

Wir können nun auch den n-ten Eigenwert λ_n und die zugehörige Eigenfunktion u_n ohne Berufung auf die vorangehenden Eigenfunktionen durch folgende Maximum-Minimum-Eigenschaft charakterisieren. Es seien $v_1, \ldots, v_{n-1}$

stetige Funktionen im Grundgebiet und $d[v_1, \ldots, v_{n-1}]$ die untere Grenze des Quotienten $D[\varphi]:H[\varphi]$, wenn alle am Rande verschwindenden im Grundgebiete stetigen und mit stückweise stetiger Ableitung versehenen Funktionen φ zum Vergleiche zugelassen sind, welche den $n-1$ Bedingungen

$$H[\varphi, v_i] = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{16}$$

genügen; dann ist λ_n der grösste Wert, welchen $d[v_1, \ldots, v_{n-1}]$ annehmen kann, wenn zum Vergleiche alle Systeme stetiger Funktionen v_i zugelassen werden. Dieses Maximum-Minimum wird erreicht für $v_i = u_i, \varphi = u_n$.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus folgenden Bemerkungen: Erstens ist für $v_i = u_i$ $(i > 1)$ tatsächlich nach Definition $d[u_1, \ldots, u_{n-1}] = \lambda_n$, zweitens können wir für jedes System $v_1, \ldots, v_{n-1}$ eine lineare Kombination $\varphi = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n$ mit konstanten Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n$ so bestimmen, dass die Gleichungen $H[\varphi, v_i] = 0$ sowie die Gleichung $H[\varphi] = \Sigma c_i^2 = 1$ erfüllt sind. Denn die ersten $n-1$ dieser Gleichungen stellen $n-1$ lineare homogene Bedingungen für die n Grössen c_i dar, sind also stets erfüllbar; die letzte Gleichung liefert lediglich eine Normierung des noch unbestimmten Proportionalitätsfaktors in den c_i. Nun folgt aus $D[\varphi] = \Sigma c_i c_k D[u_i, u_k]$ sofort wegen (15)

$$D[\varphi] = \Sigma \lambda_i c_i^2$$

und also wegen $\lambda_i \leqq \lambda_{i+1}$

$$D[\varphi] \leqq \lambda_n \Sigma c_i^2 = \lambda_n,$$

sodass in jedem Falle $d[v_1, \ldots, v_{n-1}] \leqq \lambda_n$ gelten muss.[1]

§ 2. Verallgemeinerungen. Andere Rand- und Sprungbedingungen.

Man gelangt sofort zu entsprechenden Sturm-Liouvilleschen Problemen bei anderen Randbedingungen, sowie zu weiteren Verallgemeinerungen, wenn man an Stelle der obigen Ausdrücke D und H etwas allgemeinere Ausdrücke zugrunde legt. Diese allgemeineren Bildungen entsprechen zunächst der physikalischen Möglichkeit, dass ausser der linienhaft gemäss den obigen Integralausdrücken verteilten potentiellen und kinetischen Energie noch weitere Energieanteile in Betracht zu ziehen sind, welche ihren Sitz in einzelnen Punkten, z. B.

[1] Man vergleiche zu dieser Maximum-Minimum-Eigenschaft und den mannigfachen Konsequenzen, die man aus ihr ziehen kann u. a. das oben zitierte Buch, insbes. Kap. VI.

den Endpunkten der Saite, haben. Wenn es sich um potentielle Energie, also um den Ausdrück D handelt, werden diese Energieanteile etwa durch elastische Bindungen einzelner Punkte der Saite an die Ruhelage gegeben sein; wenn es sich um kinetische Energie handelt, also um den Ausdrück H, werden diese Anteile von punktförmigen in einzelnen Stellen der Saite konzentrierten Massen, »Reitern», herrühren.

Es seien $x_1, \ldots, x_h$ die Stellen des Intervalles, in denen solche punktförmig konzentrierte Energie ihren Sitz hat. Dann besteht der mathematische Ansatz einfach darin, dass wir statt der Ausdrücke D und H aus § 1 Ausdrücke der folgenden allgemeineren Gestalt zu betrachten haben

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \sum_{\nu=1}^{h} a_\nu \varphi(x_\nu)^2 = \int_0^1 p\varphi'^2 \, dx + \sum_{\nu=1}^{h} a_\nu \varphi(x_\nu)^2, \tag{17}$$

$$\mathfrak{H}[\varphi] = H[\varphi] + \sum_{\nu=1}^{h} b_\nu \varphi(x_\nu)^2 = \int_0^1 r\varphi^2 \, dx + \sum_{\nu=1}^{h} b_\nu \varphi(x_\nu)^2, \tag{18}$$

zu welchen die Polarausdrücke

$$\mathfrak{D}[\varphi, \psi] = \int_0^1 p\varphi'\psi' \, dx + \sum_{\nu=1}^{h} a_\nu \varphi(x_\nu)\psi(x_\nu), \tag{19}$$

$$\mathfrak{H}[\varphi, \psi] = \int_0^1 r\varphi\psi \, dx + \sum_{\nu=1}^{h} b_\nu \varphi(x_\nu)\psi(x_\nu) \tag{20}$$

gehören. Wir wollen dabei annehmen, dass der Funktion φ am Rande keine Randbedingung auferlegt wird und dass die Randpunkte stets mit zu den Stellen x_ν gerechnet werden, dass also etwa $x_1 = 0, x_h = 1$ ist. Ferner sollen für die Grössen a_ν, b_ν insbesondere der Wert Null zugelassen sein. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass immer $b_\nu \geqq 0$ ist, entsprechend der physikalischen Vorstellung von dem positiv-definiten Charakter der kinetischen Energie. Das Integral $D[\varphi] = \int_0^1 p\varphi'^2 \, dx$, welches den Charakter der zu behandelnden Eigenwertaufgaben wesentlich bestimmt, soll im folgenden als das *Führungsintegral* bezeichnet werden.

Stellen wir nun mit den Ausdrücken für $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ dieselben Minimumprobleme auf wie oben in § 1 für D und H so ergibt sich — immer die Existenz der Lösungen dieser Probleme vorausgesetzt — eine Folge von Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ und zugehörigen Eigenfunktionen $u_1, u_2, \ldots$

Um die Bedingungsgleichungen für diese Grössen λ_i, u_i, ohne Berufung auf die allgemeine Variationsrechnung aufzustellen, betrachten wir zunächst das erste Minimumproblem ohne lineare Nebenbedingungen, nennen die Lösung $u = u_1$, den Minimumwert $\lambda = \lambda_1$ und bemerken, dass wie oben für jede willkürliche den gestellten Stetigkeitsbedingungen genügende Funktion ζ das Bestehen der Gleichung

$$\mathfrak{D}[u, \zeta] - \lambda \mathfrak{H}[u, \zeta] = 0 \tag{21}$$

folgt. Durch Anwendung der Greenschen Formel (6) unter Berücksichtigung der Unstetigkeitsstellen $x_1, \ldots, x_h$ für die Ableitung folgt

$$-\int_0^1 \zeta((p u')' + \lambda r u)\, dx + \sum_{\nu=1}^{h} \{p(x_\nu) S_\nu[u] + (a_\nu - \lambda b_\nu) u(x_\nu)\} \zeta(x_\nu) = 0.$$

Hierbei ist (vgl. S. 8)

$$\begin{aligned} S_1[u] &= -u'(0) \\ S_2[u] &= \lim_{\delta \to 0} (u'(x_2 - \delta) - u'(x_2 + \delta)) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ S_h[u] &= u'(1). \end{aligned}$$

Wegen der Willkür von ζ ergibt sich also für die Lösung u die Differentialgleichung

$$L[u] + \lambda r u = 0 \qquad L[u] = (p u')' \tag{22}$$

und die Rand- bezw. Unstetigkeitsbedingungen

$$p(x_\nu) S_\nu[u] + (a_\nu - \lambda b_\nu) u(x_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, h). \tag{23}$$

Die Eigenfunktion u_1 wird zweckmässig wieder durch die Gleichung

$$\mathfrak{H}[u_1] = 1 \tag{24}$$

normiert.

Den zweiten Eigenwert λ_2 und die zugehörige Eigenfunktion u_2 erhalten wir als Lösung des Problemes, den Quotienten $\mathfrak{D} : \mathfrak{H}$ noch unter den linearen Nebenbedingungen

$$\mathfrak{H}[\varphi, u_1] = 0$$

zum Minimum zu machen. Unter der Voraussetzung, dass eine solche Lösung $u = u_2$ und ein zugehöriger Minimumwert $\lambda = \lambda_2$ existiert, folgt wieder, dass für jede willkürliche Funktion ζ die Gleichung (21) erfüllt sein muss, woraus sofort die Differentialgleichung (22) und die Sprungbedingungen (23) für $\lambda = \lambda_2, u = u_2$ folgen. In genau derselben Weise ergibt sich für die n-te Eigenfunktion u_n und den n-ten Eigenwert λ_n dieselbe Differentialgleichung und dieselben Sprungbedingungen mit der Bedeutung $u = u_n$, $\lambda = \lambda_n$.

Speziell enthalten die aufgestellten Probleme, wenn $h = 2$ ist, d. h. wenn nur die beiden Endpunkte der Saite Träger punktförmiger Energie sind, die gewöhnlichen Eigenwertprobleme mit den Randbedingungen

$$-p(0)\,u'(0) + (a_1 - \lambda b_1)\,u(0) = 0$$

$$p(1)\,u'(1) + (a_2 - \lambda b_2)\,u(1) = 0.$$

Das Auftreten von Koeffizienten b_i kennzeichnet die Probleme der belasteten Systeme, wie sie u. a.[1] von Kneser behandelt worden sind.

Es bedarf keines besonderen Beweises, dass bei geeigneter Normierung der Eigenfunktionen diese den Relationen

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}[u_i] &= \lambda_i, & \mathfrak{D}[u_i, u_k] &= 0 \\ \mathfrak{H}[u_i] &= 1, & \mathfrak{H}[u_i, u_k] &= 0 \end{aligned} \qquad (i \neq k) \tag{25}$$

genügen.

Ein weiterer Schritt zu allgemeineren Problemen liegt sehr nahe. Wir können uns Mechanismen vorstellen, bei welchen die von einzelnen Punkten herrührenden zusätzlichen Energieanteile sich nicht additiv aus Anteilen der einzelnen Punkte, sondern aus einer Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Punkten ergeben. Dem entspricht ein Ansatz für $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$, bei welchem die zusätzlichen von den

[1] Vgl. z. B. auch RAYLEIGH, Theory of sound, 2 Aufl. Bd. I. S. 170 ff.

Punkten $x_1, \ldots, x_h$ abhängigen Ausdrücke allgemeine quadratische Formen der Funktionswerte $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_h)$ sind. Demgemäss setzen wir jetzt $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ in folgender Form an

$$(26) \qquad \mathfrak{D}[\varphi] = \int_0^1 p\,\varphi'^2\,dx + \sum_{i,k=1}^{h} a_{ik}\,\varphi(x_i)\,\varphi(x_k)$$

$$(27) \qquad \mathfrak{H}[\varphi] = \int_0^1 r\,\varphi^2\,dx + \sum_{i,k=1}^{h} b_{ik}\,\varphi(x_i)\,\varphi(x_k)$$

$$a_{ik} = a_{ki}\ ,\ b_{ik} = b_{ki}\,.$$

Die Minimumprobleme, welche die zugehörigen Eigenfunktionen und Eigenwerte definieren, lauten mit der veränderten Bedeutung von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ wörtlich so wie oben. Die Eigenfunktionen u_n genügen nun aber, wie man genau nach dem obigen Muster erkennt, den folgenden Relationen

$$(28) \qquad L[u_n] + \lambda_n\,r\,u_n = (p\,u'_n)' + \lambda_n\,r\,u_n = 0$$

$$(29) \qquad p(x_\nu)\,S_\nu[u_n] + \sum_{k=1}^{h} (a_{\nu k} - \lambda_n\,b_{\nu k})\,\varphi(x_k) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, h),$$

wobei $S_\nu[u_n]$ die obige Bedeutung besitzt. Ferner gelten auch hier bei geeigneter Normierung die Relationen (25).

§ 3. Ergänzende Bemerkungen.

1. Die Randbedingungen.

Bei den Problemen des vorigen Paragraphen haben wir keinerlei besondere Randbedingungen für die zulässigen Funktionen $\varphi(x)$ gestellt. Ich nenne solche Probleme der Variationsrechnung *freie* oder *natürliche* Probleme und die Randbedingungen, welche sich dabei ganz von selbst einstellen, die zugehörigen *natürlichen Randbedingungen.* Sie sind durch die obigen Gleichungen (23) für $\nu = 1$ bezw. $\nu = h$ gegeben.

Das Problem aus § 1 mit der künstlichen Randbedingung $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ ergibt sich als Grenzfall aus einem natürlichen Problem, nämlich aus dem Problem (17) und (18) mit $h = 2$, $b_\nu = 0$, $a_1 = a_2 = t$ im Grenzfall für $t \to \infty$.

Ich bemerke, dass bei unseren Variationsproblemen nur entweder natürliche Randbedingungen zulässig sind, d. h. Randbedingungen, die man ebenso gut weglassen könnte, ohne die Lösung des Problemes zu modifizieren, oder solche künstliche Randbedingungen, in welchen keine Ableitungen auftreten, d. h. da wir es hier nur mit homogenen Randbedingungen zu tun haben, nur »Randbedingungen» der Form

$$\alpha_1 \varphi(x_1) + \cdots + \alpha_h \varphi(x_h) = 0.$$

Um einzusehen, dass andere als die gekennzeichneten künstlichen Randbedingungen unzulässig sind, beachten wir, dass z. B. durch Hinzufügung einer Randbedingung in unserem ersten Minimumproblem der Minimumwert λ_1 des freien Problemes jedenfalls nicht verkleinert wird, sodass für den Minimumwert λ_1^* des künstlichen Problemes $\lambda_1^* \geqq \lambda_1$ gilt; denn für das neue Problem ist der Bereich der zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen verengert. Wenn nun in den künstlichen Randbedingungen Ableitungen vorkommen, so könnte man die Lösung u des natürlichen Problemes durch eine Funktion u^* so approximieren, dass $\mathfrak{D}[u^*] : \mathfrak{H}[u^*]$ sich von $\lambda_1 = \mathfrak{D}[u] : \mathfrak{H}[u]$ um beliebig wenig unterscheidet, dass aber u^* die Bedingungen für das künstliche Problem erfüllt. Man braucht ja u hierzu nur in einer beliebig kleinen Nachbarschaft des Randes bezw. der Stellen x_i abzuändern und zwar den Funktionswert nur um beliebig wenig, den Wert der Ableitung nur um einen beschränkt bleibenden Betrag. Daraus folgt, dass für das neue künstliche Problem zulässige Vergleichsfunktionen $\varphi = u^*$ existieren, für welche $\mathfrak{D}[u^*] : \mathfrak{H}[u^*]$ beliebig nahe an λ_1 liegt. Also muss $\lambda_1^* \leqq \lambda_1 + \varepsilon$ für jedes positive ε gelten, und daher müsste die Lösung des neuen Problemes zugleich auch Lösung des alten natürlichen sein, was nur dann möglich ist, wenn die gestellten Randbedingungen mit den natürlichen übereinstimmen.

Ist z. B. $\mathfrak{D} = D$, $\mathfrak{H} = H$ und wird die künstliche Randbedingung $\varphi(0) = \varphi(1)$ gestellt, so kann nicht etwa als weitere Bedingung $\varphi'(0) = 2\varphi'(1)$ auferlegt werden, weil sich sofort die natürliche Randbedingung $u'(0) = u'(1)$ ergibt.

In den obigen Überlegungen haben wir immer stillschweigend die Existenz der Ableitung von u in den Randpunkten bezw. Sprungpunkten x_ν angenommen. In der Tat ist diese Existenz eine unmittelbare Folge der Differentialgleichung (22); denn aus ihr folgt $p u' = -\lambda \int r u \, dx$, und hier kann die Integration wegen der Stetigkeit von u bis in die Punkte x_ν hinein erstreckt werden.

2. Notwendige Beschränkungen im Ansatz der Zusatzglieder; Bedingung der Koppelung.

Ähnliche Überlegungen wie in Nr. 1 zeigen uns, warum der zunächst sich darbietende Gedanke zu verwerfen ist, dass man in die von einzelnen Punkten abhängigen Zusatzglieder auch die Ableitungen $\varphi'(x_\nu)$ der Funktionswerte aufnehmen könnte. Sobald nämlich derartige Zusatzglieder auftreten, könnte man in ihnen die Ausdrücke $\varphi'(x_\nu)$ durch Parameterwerte t_ν ersetzen und nun das so entstehende Minimumproblem betrachten, bei welchem neben der Funktion φ noch unabhängig von ihr diese Parameterwerte variabel und mit zu bestimmen sind. Die untere Grenze für dieses neue Problem müsste mit dem Minimumwert λ des ursprünglichen übereinstimmen; denn wir können, ohne die Werte von $\mathfrak{D}[\varphi]$ und $\mathfrak{H}[\varphi]$ um mehr zu ändern als um einen unter einer beliebig klein vorgegebenen Schranke gelegenen Betrag, die Funktion φ durch eine solche Funktion φ^* approximieren, dass die Ableitungen $\varphi^{*\prime}(x_\nu)$ vorgegebene Werte t_ν erhalten. Das erste Problem ist also nur dann sinnvoll, d. h. es kann nur dann eine Lösung (ein wirkliches Minimum, nicht bloss eine untere Grenze) besitzen, wenn das zweite Problem eine Lösung $u^*(x)$ und günstigste Parameterwerte $t_\nu = \tau_\nu$ besitzt, und wenn dann zufällig $u^{*\prime}(x_\nu) = \tau_\nu$ wird. Die Ersetzung von $\varphi'(x_\nu)$ durch unabhängige Parameter in einem Variationsprobleme (und ebenso analoge Prozesse bei irgend welchen Variationsproblemen) nenne ich *Entkoppelung*. Variationsprobleme, bei denen eine solche Entkoppelung die untere Grenze nicht modifiziert, werden im allgemeinen keine Lösung besitzen, bezw. zumindest als ausgeartete Fälle anzusprechen sein. Wir wollen sie als »Probleme ohne Koppelung» bezeichnen.

Als Beispiel für ein solches Problem ohne Koppelung betrachten wir das Minimumproblem, welches sich für

$$\mathfrak{H} = H = \int_0^1 \varphi^2\,dx = 1,\quad \mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \sum_{\nu=1}^{h} \varphi'(x_\nu)^2 + \sum_{\nu=1}^{h} \varphi(x_\nu)^2$$

ergibt. Entkoppeln wir hier, indem wir $\varphi'(x_\nu)$ durch t_ν ersetzen, so erhalten wir offenbar als Lösung des Problemes nach Entkoppelung $t_\nu = \tau_\nu = 0$, $\varphi(x) = u(x)$, wo $u(x)$ die erste Eigenfunktion desjenigen Problemes bedeutet, welches sich für $\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \sum_{\nu=1}^{h} \varphi(x_\nu)^2$, $\mathfrak{H}[\varphi] = H[\varphi] = 1$ ergibt, und dessen Minimumwert wir etwa mit λ bezeichnen. Es wird also der Minimumwert nach Entkoppelung ebenfalls gleich λ; andererseits können wir die eben gekennzeichnete Funktion $u(x)$

in unmittelbarer Umgebung der Stellen x_ν derart abändern, dass eine zulässige Vergleichsfunktion $u^*(x)$ entsteht, für welche $u^{*\prime}(x_\nu) = 0$ ist, während sich $\mathfrak{D}[u^*]$ von $D[u] + \Sigma u(x_\nu)^2 = \lambda$ und $\mathfrak{H}[u^*]$ von $\mathfrak{H}[u]$ beliebig wenig unterscheidet. Für diese Funktion wird sich $\mathfrak{D}[u^*] : \mathfrak{H}[u^*]$ beliebig wenig von λ unterscheiden; die untere Grenze des Problemes hat sich also bei Entkoppelung nicht geändert.

Betrachten wir dagegen die Minimumaufgabe $\mathfrak{D}[\varphi] : \mathfrak{H}[\varphi] = \text{Min.}$ mit der Bedeutung $\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \Sigma \varphi'(x_\nu)^2$, $\mathfrak{H}[\varphi] = H[\varphi]$, so erhalten wir mit und ohne Entkoppelung beide Male die Lösung $u(x) = 1$. Wir haben also hier den oben erwähnten Ausnahmefall vor uns. Probleme ohne Koppelung wollen wir von der Betrachtung grundsätzlich ausschliessen.

3. Definite und indefinite Probleme.

Endlich sei noch hervorgehoben, dass für die vorangehende und folgende Untersuchung die Voraussetzung der Definitheit unseres Ausdruckes $\mathfrak{D}[\varphi]$ nicht ausdrücklich gemacht zu werden braucht. Wesentlich ist nur, dass die Grösse p im Führungsintegral $D[\varphi]$ positiv bleibt. Wie wir in § 11 sehen werden, ist dann das Führungsintegral für die Grössenordnung des Ausdruckes $\mathfrak{D}$ der ausschlaggebende Teil; in diesem Falle können immer nur endlich viele negative Eigenwerte auftreten.

Wenn man dagegen die Voraussetzung des definiten Charakters von $\mathfrak{H}[\varphi]$ fallen lässt, so ist man zu einer Modifikation unserer Überlegungen genötigt. Man muss dann bei unserem Minimumproblem statt des Quotienten $\mathfrak{D}[\varphi] : \mathfrak{H}[\varphi]$ den Ausdruck $|\mathfrak{D}[\varphi] : \mathfrak{H}[\varphi]|$ zum Minimum machen. Die zugehörigen Eigenwerte λ_i werden dann in unendlich grosser Anzahl positiv und in unendlich grosser Anzahl negativ ausfallen. Wir wollen jedoch, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, in dieser Abhandlung überall positiv-definiten Charakter von $\mathfrak{H}[\varphi]$ voraussetzen.

§ 4. Erweiterung der Problemstellung durch Grenzübergang.

Von dem im § 2 gewonnenen Standpunkte führt uns ein weiterer naturgemässer Schritt, nämlich ein Grenzübergang, zu Problemen neuartigen Charakters. Wir fragen, was geschieht, wenn wir die Stellen $x_1, \ldots, x_h$ immer mehr verdichten, indem wir gleichzeitig die Grössen a_i, b_i bezw. a_{ik}, b_{ik} geeignet gegen Null streben lassen. In der Grenze werden dann die ursprünglich diskreten Stellen x_i — allgemein zu reden — das Grundgebiet $0 \leqq x \leqq 1$ wieder kontinuierlich erfüllen.

Gehen wir bei dem Grenzübergang von den Ausdrücken (17) und (18) aus, so wird aus den Werten a_ν etwa eine stetige Funktion werden, die wir mit $q(x)$ bezeichnen, während die b_ν in eine stetige Funktion $b(x)$ übergehen mögen. Es ergibt sich also für $\mathfrak{D}[\varphi]$ ein Ausdruck

$$(30) \qquad \mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_0^1 q(x)\,\varphi(x)^2\,dx = \int_0^1 (p\,\varphi'^2 + q\,\varphi^2)\,dx,$$

für $\mathfrak{H}[\varphi]$ ein Ausdruck der oben betrachteten Gestalt (2), wobei nur $r(x)$ durch $r(x) + b(x)$ zu ersetzen ist. Die Behandlung der entsprechenden Variationsprobleme führt zu nichts Neuem; nur muss der Ausdruck $L[u_i]$ in der Differentialgleichung (7) durch $L[u_i] - q\,u_i$ ersetzt werden.

Ganz anders aber liegt es, wenn wir von der allgemeineren Gestalt

$$\sum_{i,k=1}^{h} a_{ik}\,\varphi(x_i)\,\varphi(x_k) \quad \text{bezw.} \quad \sum_{i,k=1}^{h} b_{ik}\,\varphi(x_i)\,\varphi(x_k)$$

der Zusatzausdrücke in $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ ausgehen. Hier liegen drei verschiedene Möglichkeiten für den Grenzübergang vor. Betrachten wir etwa den Zusatzausdruck in $\mathfrak{D}[\varphi]$, so kann der Grenzübergang einmal so ausgeführt werden, dass in der Grenze eine Summe der Form

$$(31) \qquad 2\sum_{\nu=1}^{h} \varphi(x_\nu) \int_0^1 a_\nu(x)\,\varphi(x)\,dx$$

entsteht, wo wiederum die Werte x_ν irgendwelche feste Stellen des Intervalles bedeuten. Entsprechend würden sich in $\mathfrak{H}$ Zusatzglieder der Form

$$(32) \qquad 2\sum_{\nu=1}^{h} \varphi(x_\nu) \int_0^1 b_\nu(x)\,\varphi(x)\,dx$$

ergeben. Die Funktionen $a_\nu(x)$, $b_\nu(x)$ setzen wir der Einfachheit halber als stetige oder stückweise stetige Funktionen voraus.

Zweitens kann der Grenzübergang sich gewissermassen gleichzeitig und unabhängig nach beiden Indizes i und k erstrecken und führt dann zu Zusatzausdrücken der Form

$$\int\int A(x,y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy \tag{33}$$

$$\int\int B(x,y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy \tag{34}$$

wobei $A(x,y) = A(y,x)$, $B(x,y) = B(y,x)$ symmetrische etwa als stückweise stetig anzunehmende Kerne sind.

Endlich kann man sich vorstellen, dass der Grenzübergang sich zwar auf beide Indizes erstreckt, dass diese dabei aber nicht unabhängig bleiben, sodass sich im Limes Ausdrücke folgender Form ergeben

$$\int_0^1 A(x)\,\varphi(\xi)\,\varphi(\eta)\,dx \tag{35}$$

$$\int_0^1 B(x)\,\varphi(\xi)\,\varphi(\eta)\,dx \tag{36}$$

wobei ξ und η mit der unabhängigen Variabeln durch gegebene Gleichungen

$$\xi = f(x), \qquad \eta = g(x) \tag{37}$$

zusammenhängen und jede dieser Gleichungen eine umkehrbar eindeutige stetige Transformation des Grundgebietes in sich darstellen möge. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass die Funktionen f und g stückweise stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen.

Es bedarf keiner besonderen Hervorhebung, dass auch mehrere, etwa k, Zusatzglieder der eben betrachteten Art additiv nebeneinander stehen können; wir bezeichnen sie dann durch einen Index μ der von 1 bis k läuft.

Das einfachste Beispiel solcher Zusatzglieder der dritten Art bietet der Fall, wo das Grundgebiet nicht die Strecke $0 \leqq x \leqq 1$ sondern die ganze unendliche Gerade $-\infty < x < \infty$ ist, und wo einfach

$$\xi = x, \qquad \eta = x + 1$$

gesetzt wird. Wir gelangen dann zu Zusatzgliedern der folgenden Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(x)\,\varphi(x)\,\varphi(x+1)\,dx. \tag{38}$$

Indem wir Zusatzglieder der verschiedenen hier beschriebenen Typen zu dem Ausdrucke $D[\varphi]$ bezw. $H[\varphi]$ hinzufügen, erhalten wir Ausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi]$ bezw. $\mathfrak{H}[\varphi]$, denen vermöge der bei konstanten α und β geltenden Relationen

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}[\alpha\varphi+\beta\psi] &= \alpha^2\,\mathfrak{D}[\varphi] + 2\,\alpha\beta\,\mathfrak{D}[\varphi,\psi] + \beta^2\,\mathfrak{D}[\psi] \\ \mathfrak{H}[\alpha\varphi+\beta\psi] &= \alpha^2\,\mathfrak{H}[\varphi] + 2\,\alpha\beta\,\mathfrak{H}[\varphi,\psi] + \beta^2\,\mathfrak{H}[\psi] \end{aligned} \tag{39}$$

Polarausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi,\psi]$ bezw. $\mathfrak{H}[\varphi,\psi]$ zugeordnet sind.

Die physikalische Bedeutung der in diesem Paragraphen aufgestellten Zusatzglieder ist die, dass neben die Energieausdrücke, welche die lokale Energie und potentielle Energie der Nahewirkung benachbarter Teilchen darstellen, noch solche Energieanteile treten, welche von wechselseitiger Fernwirkung der kontinuierlich ausgebreiteten und gegebenenfalls auch punktförmig konzentrierten Substanz herrühren.

§ 5. Aufstellung der zugehörigen Integro-Differentialgleichungen und Funktionalgleichungen.

Wie lauten nun die Gleichungen, denen die Lösungen unserer Minimumprobleme, d. h. die Eigenfunktionen, genügen? Genau wie oben ergibt sich für alle betrachteten Probleme, wenn wir mit λ den Minimumswert, mit u die zugehörige Funktion bezeichnen, und wenn ζ eine willkürliche stetige Funktion mit stückweise stetiger erster Ableitung ist, die Gleichung

$$\mathfrak{D}[u,\zeta] - \lambda\,\mathfrak{H}[u,\zeta] = 0 \tag{40}$$

aus welcher ohne weiteres je nach der Bedeutung von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ die entsprechenden Bedingungen für u folgen.

Beispiel 1.

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int q(x)\,\varphi(x)^2\,dx + \iint A(x,y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy$$

$$\mathfrak{H}[\varphi] = H[\varphi] + \int\int B(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy.$$

Die Gleichung (40) geht mit Rücksicht auf (6) über in

$$\int \zeta(x)\left\{-L[u] + (q(x) - \lambda r(x))\,u(x) + \int (A(x, y) - \lambda B(x, y))\,u(y)\,dy\right\}dx -$$

$$- \zeta(0)\,p(0)\,u'(0) + \zeta(1)\,p(1)\,u'(1) = 0.$$

Es ergibt sich also sofort das Eigenwertproblem für die Integro-Differentialgleichung

$$L[u] - (q - \lambda r)\,u - \int (A(x, y) - \lambda B(x, y))\,u(y)\,dy = 0 \tag{41}$$

mit den Randbedingungen

$$u'(0) = u'(1) = 0 \tag{42}$$

statt deren man auch ebenso erlaubte künstliche Randbedingungen, z. B. die Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ stellen könnte. Für den speziellen Fall $A(x, y) = 0$ enthält dieser Typus die von A. Kneser ausführlich diskutierten Probleme, auf welche die Theorie der thermo-elastischen Erscheinungen führt.

Die unendliche Folge von Eigenfunktionen $u_1, u_2, \ldots$ genügt bei geeigneter Normierung wieder den Relationen[1]

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}[u_i] &= \lambda_i, & \mathfrak{D}[u_i, u_k] &= 0 \\ \mathfrak{H}[u_i] &= 1, & \mathfrak{H}[u_i, u_k] &= 0. \end{aligned} \qquad (i \neq k) \tag{43}$$

Beispiel 2.

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + 2\sum_{\nu=1}^{h} \varphi(x_\nu) \int a_\nu(x)\,\varphi(x)\,dx$$

[1] Kneser und seine Schüler schreiben die beiden letzten Relationen als Biorthogonal-Relationen zwischen den beiden Funktionensystemen $u_i(x)$ und $v_i(x) = u_i(x) + \int B(x, y)\,u_i(y)\,dy$ und führen die Behandlung des Problemes auf eine unsymmetrische Integralgleichung zurück. Es scheint mir aber, als ob die obige Darstellung den Sachverhalt deutlicher zu Tage treten lässt. (Siehe auch Anhang Nr. 4.)

$$\mathfrak{H}[\varphi] = H[\varphi] + 2\sum_{\nu=1}^{h} \varphi(x_\nu) \int b_\nu(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Dann ist also wegen (40) und (6)

$$0 = \mathfrak{D}[u, \zeta] - \lambda\,\mathfrak{H}[u, \zeta]$$

$$= \int_0^1 \zeta(x) \left\{ -L[u] - \lambda r u + \sum_{\nu=1}^{h} u(x_\nu)(a_\nu - \lambda b_\nu) \right\} dx$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{h} \zeta(x_\nu) \left\{ S_\nu[u]\,p(x_\nu) + \int_0^1 (a_\nu - \lambda b_\nu)\,u(x)\,dx \right\}.$$

Es ergibt sich also wegen der Willkür von ζ

(44) $$L[u] + \lambda r u - \sum_{\nu=1}^{h} u(x_\nu)\,(a_\nu - \lambda b_\nu) = 0$$

mit den »Randbedingungen«

(45) $$S_\nu[u]\,p(x_\nu) + \int_0^1 (a_\nu(x) - \lambda b_\nu(x))\,u(x)\,dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, h).$$

Man sieht, dass hier die Randbedingungen oder besser die Sprungbedingungen keine eigentlichen Bedingungen für den Funktionsverlauf in der Umgebung der Punkte x_ν mehr sind, sondern dass die Randwerte und Sprungwerte der Ableitung durch Integrationsprozesse mit dem Gesamtverlauf der Eigenfunktionen verknüpft erscheinen.

Beispiel 3.

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} (p(x)\,\varphi'(x)^2 + \varphi(x)\,\varphi(x+1))\,dx$$

$$\mathfrak{H}[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\,\varphi(x)^2\,dx.$$

Es ergibt sich als Eigenwert-Gleichung

$$L[u]+\lambda r u+\frac{u(x-1)+u(x+1)}{2}=0 \tag{46}$$

während wir auf die Form der natürlichen Randbedingung hier nicht eingehen wollen. Wir erhalten also hier als Extremalen-Gleichung des Problemes eine Differenzen-Differentialgleichung.

Beispiel 4.

Es seien $\xi=f(x)$, $\eta=g(x)$ zwei umkehrbar eindeutige und stetige Abbildungen des Grundgebietes auf sich selbst mit stückweise stetigen ersten Ableitungen (vgl. (37) S. 20). Die inversen Abbildungen seien durch $x=\psi(\xi)$, $x=\gamma(\eta)$ gegeben; dann setzen wir

$$\mathfrak{D}[\varphi]=D[\varphi]+\int_0^1 A(x)\,\varphi(\xi)\,\varphi(\eta)\,dx$$

$$\mathfrak{H}[\varphi]=H[\varphi].$$

Es wird

$$\mathfrak{D}[u,\zeta]=\int_0^1 p u'(x)\,\zeta'(x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 A(x)\,u(\xi)\,\zeta(\eta)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 A(x)\,u(\eta)\,\zeta(\xi)\,dx.$$

Führen wir in dem ersten der beiden Zusatzintegrale η, in dem zweiten ξ als unabhängige Veränderliche ein und nehmen dann in beiden Integralen eine Umbenennung der Integrationsvariabeln vor, indem wir sie beide Male mit x bezeichnen, so geht die Summe dieser beiden Zusatzintegrale über in

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \zeta(x)\,\{A(\gamma(x))\,u(f(\gamma(x)))\,\gamma'(x)+A(\psi(x))\,u(g(\psi(x)))\,\psi'(x)\}\,dx. \tag{48}$$

Im Hinblick auf die späteren Verallgemeinerungen für mehrere unabhängige Veränderliche ist es zweckmässig die obigen Transformationen des Grundgebietes symbolisch folgendermassen zu bezeichnen

(49) $$x=\mathfrak{s}\,|\,\xi \qquad x=\mathfrak{t}\,|\,\eta$$

bezw.

(50) $$\xi=\mathfrak{s}^{-1}\,|\,x \qquad \eta=\mathfrak{t}^{-1}\,|\,x$$

und für die Ableitungen

(51) $$\frac{dx}{d\xi}=\sigma(\xi) \qquad \frac{dx}{d\eta}=\tau(\eta)$$

zu schreiben. Führen wir nun zur Abkürzung den Funktionalausdruck ein

(52) $$\Phi_{\mathfrak{s},\mathfrak{t}}[A\,u;\,x]=\frac{1}{2}A\,(\mathfrak{t}|x)\,u\,(\mathfrak{s}^{-1}\,\mathfrak{t}\,|\,x)\,\tau(x)+\frac{1}{2}A\,(\mathfrak{s}|x)\,u\,(\mathfrak{t}^{-1}\,\mathfrak{s}\,|\,x)\,\sigma(x)$$

so erhalten wir für die obige Summe (48) den Ausdruck

$$\int_0^1 \zeta(x)\,\Phi_{\mathfrak{s},\mathfrak{t}}[A\,u;\,x]\,dx$$

sowie für den Funktionsverlauf $u(x)$ die Bedingungsgleichung

(53) $$L[u]+\lambda r u-\Phi_{\mathfrak{s},\mathfrak{t}}[A\,u;\,x]=0$$

also eine Funktionalgleichung, welche eine neuartige Verallgemeinerung der Differenzengleichungen darstellt. Die Rand- bezw. Sprungbedingungen ergeben sich genau wie früher.

Das allgemeine Problem.

Alle die bei den einzelnen Beispielen erwähnten Möglichkeiten können natürlich auch in mannigfaltiger Kombination miteinander sowie mit Zusatzausdrücken der in § 2 erörterten Art gemischt auftreten. So wird der allgemeine Ansatz für $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ folgender sein

$$\mathfrak{D}[\varphi]=D[\varphi]+\sum_{i,k=1}^{h} a_{ik}\,\varphi(x_i)\,\varphi(x_k)+2\sum_{\nu=1}^{h}\varphi(x_\nu)\int_0^1 a_\nu(x)\,\varphi(x)\,dx$$
$$+\sum_{\mu=1}^{k}\int_0^1 A_\mu(x)\,\varphi(\mathfrak{s}_\mu^{-1}|x)\,\varphi(\mathfrak{t}_\mu^{-1}|x)\,dx+\int_0^1\!\!\int_0^1 A(x,y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy$$

$$\mathfrak{H}[\varphi] = H[\varphi] + \sum_{i,k=1}^{h} b_{ik}\,\varphi(x_i)\,\varphi(x_k) + 2\sum_{\nu=1}^{h} \varphi(x_\nu) \int_0^1 b_\nu(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{k} \int_0^1 B_\mu(x)\,\varphi(\mathfrak{s}_\mu^{-1}|x)\,\varphi(\mathfrak{t}_\mu^{-1}|x)\,dx + \int_0^1\int_0^1 B(x,y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy$$

wobei $\mathfrak{s}_\mu|x$ und $\mathfrak{t}_\mu|x$ wieder umkehrbar eindeutige Transformationen des Grundgebietes in sich mit den oben gekennzeichneten Eigenschaften und den inversen Transformationen $\mathfrak{s}_\mu^{-1}|x$ bezw. $\mathfrak{t}_\mu^{-1}|x$ sind.[1]

Das zugehörige Eigenwertproblem fordert die Bestimmung von Konstanten λ und Funktionen u, für welche $\mathfrak{H}[u] = 1$ ist und die Relationen

$$(54) \qquad \begin{aligned} &(pu')' + \lambda r u - \sum_{\nu=1}^{h} u(x_\nu)(a_\nu - \lambda b_\nu) - \int_0^1 (A(x,y) - \lambda B(x,y))\,u(y)\,dy \\ &\qquad - \sum_{\nu=1}^{h} \Phi_{\mathfrak{s}_\nu, \mathfrak{t}_\nu}[(A_\nu - \lambda B_\nu)\,u;\, x] = 0 \end{aligned}$$

mit den Sprung- bezw. Randbedingungen

$$(55) \qquad S_\nu[u]\,p(x_\nu) + \sum_{k=1}^{h} (a_{\nu k} - \lambda b_{\nu k})\,u(x_k) + \int_0^1 (a_\nu(x) - \lambda b_\nu(x))\,u(x)\,dx = 0$$

$$(\nu = 1, \ldots, h)$$

gelten.

Wir haben also hier eine Klasse von Eigenwertproblemen linearer recht allgemeiner Funktionalgleichungen vor uns, die in ihrer Mischung von Differential-, Integral- und Funktionalausdrücken und ihrer Verknüpfung zwischen Randwerten und Gesamtverlauf der Funktionen weit über die bisher in der Analysis behandelten Typen hinausgehen, und welche dennoch entsprechend ihrer naturgemässen Entstehung sich beinahe ebenso einfach behandeln lassen, wie die bekannten klassischen Probleme.

---

[1] Das in den üblichen Darstellungen auftretende Zusatzglied $\int_0^1 q\,\varphi^2\,dx$ führen wir hier nicht gesondert an, weil es als spezieller Fall in den Zusatzgliedern $\int A(x)\,\varphi(\mathfrak{s}^{-1}|x)\,\varphi(\mathfrak{t}^{-1}|x)\,dx$ für $A(x) = q(x)$ enthalten ist, wenn die Transformationen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ beide die Identität sind.

Aus der Existenz der Lösungen u_n unserer Minimumprobleme $\mathfrak{D}[\varphi]$: $\mathfrak{H}[\varphi] =$ Min. unter den Nebenbedingungen

$$\mathfrak{H}[\varphi, u_i] = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

folgt genau wie oben, dass bei geeigneter Normierung zwischen den Funktionen u_n und den zugehörigen Minimumwerten λ_n die Relationen

$$\begin{aligned} &\mathfrak{D}[u_n] = \lambda_n, \qquad &&\mathfrak{D}[u_i, u_k] = 0 \\ &\mathfrak{H}[u_n] = 1, \qquad &&\mathfrak{H}[u_i, u_k] = 0 \end{aligned} \qquad (i \neq k) \tag{56}$$

bestehen.

§ 6. Weitere Verallgemeinerungen; Auftreten höherer Ableitungen.

Ebenso wie wir in unseren Betrachtungen von dem Führungsintegral D in § 1 ausgingen, welches der potentiellen Energie einer Saite entspricht, hätten wir auch einen Ausdruck D an die Spitze stellen können, welcher Ableitungen zweiter Ordnung enthält, etwa den Ausdruck für die potentielle Energie eines Stabes. Wenn wir unseren Betrachtungen von Anfang an ein solches Führungsintegral z. B.

$$\int_0^1 p(x)\, \varphi''(x)^2\, dx$$

zugrunde legen, so ergeben sich bei jedem Schritte der Verallgemeinerung und des Grenzüberganges neue Möglichkeiten.

Zunächst sind neben einem solchen Führungsintegral nicht nur Zusatzglieder möglich, welche durch eine quadratische Form der Funktionswerte in einer endlichen Anzahl von Punkten x_i gebildet werden, sondern es dürfen nunmehr in den Zusatzgliedern auch noch die ersten Ableitungen $\varphi'(x_i)$ auftreten. Denn das Führungsintegral, welches *zweite* Ableitungen enthält, ist nunmehr in der Sprechweise von § 3 auch mit solchen Zusatzgliedern noch gekoppelt, in denen erste Ableitungen auftreten; Ersetzung der Grössen $\varphi'(x_i)$ durch unabhängig variable Parameter würde nämlich den Charakter des Problemes zerstören.

Von dieser Bemerkung ausgehend, erkennt man, dass auch bei den Grenzübergängen von diskreten Werten x_ν zu einer kontinuierten Verteilung eine Reihe neuer Möglichkeiten auftreten.

Ich verzichte darauf, diese hier im einzelnen zu diskutieren und betone nur, dass alle so entstehenden Funktional-Probleme ebenso wie solche, die zu Führungsintegralen mit noch höheren Ableitungen gehören, sich ganz nach demselben Schema anordnen lassen, wie die in den vorigen Paragraphen erörterten Aufgaben. Es versteht sich von selbst, dass dieselben Typen von Zusatzausdrücken wie im Ausdruck $\mathfrak{D}$ auch bei dem Ausdruck $\mathfrak{H}$ erlaubt sind.

KAPITEL II.

Probleme mit mehreren unabhängigen Veränderlichen.

§ 7. Aufstellung der Variationsprobleme.

Ganz neue mannigfaltige Klassen von Problemen ergeben sich im Falle mehrerer unabhängiger Veränderlicher. Ich will hier nicht systematisch alle Fälle aufzählen und diskutieren, sondern begnüge mich damit, an charakteristischen Beispielen die auftretenden Möglichkeiten darzulegen.

Betrachten wir etwa zwei unabhängige Veränderliche x und y in einem Grundgebiet G, dessen Berandung aus einer endlichen Anzahl analytischer abgeschlossener Kurvenbögen bestehe und keine Spitzen, höchstens Ecken, aufweisen möge. Ferner seien in dem Gebiete noch eine weitere Anzahl von abgeschlossenen analytischen Kurvenbögen gegeben; die Gesamtheit dieser Kurvenbögen, einschliesslich der Randkurvenbögen wollen wir mit C_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, h)$ bezeichnen. Eine Funktion soll in dem Gebiete G stückweise stetig heissen, wenn sie überall stetig bleibt, ausser beim Überschreiten der Kurvenbögen C_ν.

Die klassischen Eigenwertaufgaben, wie sie etwa dem Probleme der unhomogenen schwingenden am Rande des Gebietes eingespannten Membran entsprechen, knüpfen sich an Ausdrücke der Form

$$(57)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{D}[\varphi] &= \iint_G p\,(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\,dx\,dy = D[\varphi] \qquad (p>0) \\ \mathfrak{H}[\varphi] &= \iint_G r\,\varphi^2\,dx\,dy = H[\varphi] \qquad (r>0). \end{aligned}$$

Das Integral $D[\varphi]$, welches über einen positiv-definiten homogenen quadratischen Ausdruck in den partiellen Ableitungen der Funktion φ erstreckt ist und welches den Charakter der folgenden Probleme wesentlich beherrscht, wollen wir wieder das *Führungsintegral* nennen.[1]

Es handelt sich in dem einfachsten Falle um die Aufgabe, das Minimum $\lambda = \lambda_1$ des Quotienten $D[\varphi] : H[\varphi]$ zu bestimmen. Dabei wird für die Funktion φ ausser Stetigkeit noch stückweise Stetigkeit der ersten Ableitungen in G und die Erfüllung der Randbedingung $\varphi = 0$ vorausgesetzt. Die Lösung $u = u_1$ des Variationsproblemes — wie immer setzen wir die Existenz der Lösung voraus — muss in G der partiellen Differentialgleichung

$$(58) \qquad L[u] + \lambda r u = 0 \qquad L[u] = (p u_x)_x + (p u_y)_y$$

für $\lambda = \lambda_1$, $u = u_1$ genügen.

Die weiteren Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ und zugehörigen Eigenfunktionen $u_2, u_3, \ldots$ erhalten wir als Lösungen der Minimumprobleme

$$D[\varphi] : H[\varphi] = \text{Min.}$$

unter den linearen Nebenbedingungen

$$(59) \qquad H[\varphi, u_i] = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

wobei

$$(60) \qquad H[\varphi, u_i] = \int\int r \varphi u_i \, dx \, dy$$

den Polarausdruck von $H[\varphi]$ bedeutet, ebenso wie wir unter

$$(61) \qquad D[\varphi, \psi] = \int\int p (\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y) \, dx \, dy$$

den Polarausdruck von $D[\varphi]$ verstehen wollen.

Wir modifizieren nunmehr unser Problem, indem wir zu dem Führungsintegral auf der rechten Seite noch weitere Zusatzglieder hinzufügen. Dabei ist ein erster Unterschied gegen die Probleme mit einer unabhängigen Veränderlichen der, dass jetzt keine Zusatzglieder zulässig sind, welche nur von den Funktionswerten in einer endlichen Anzahl von Punkten abhängen. Derartige Zusatzglieder würden

---

[1] Es ist im Falle zweier unabhängiger Veränderlicher, wenn wir von einer Transformation der unabhängigen Veränderlichen absehen, das allgemeinste derartige Integral.

mit dem Führungsintegral des Problemes nicht gekoppelt sein; denn man kann eine gegebene Funktion $\varphi(x, y)$ stets durch eine zweite, den vorgeschriebenen Rand- uud Stetigkeitsbedingungen genügende Funktion φ^* ersetzen, derart, dass φ^* in gegebenen endlich vielen Punkten vorgegebene Werte enthält, und dass $D[\varphi^*]$ bezw. $H[\varphi^*]$ sich von $D[\varphi]$ bezw. $H[\varphi]$ nur beliebig wenig unterscheidet.[1]

Es kommen aus diesem Grunde nur solche Zusatzglieder in Frage, bei welchen Funktionswerte φ nicht isoliert, sondern über gewisse ein- oder zweidimensionale Gebiete integriert auftreten. Solche Zusatzglieder können sowohl zu dem Führungsintegral $D[\varphi]$ als auch zu dem Normierungsintegral $H[\varphi]$ in derselben Weise hinzutreten. Wir unterscheiden folgende Typen:

Typus 1.

$$\int\int\int\int A(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(x, y)\, \varphi(\xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta$$

bezw.

$$\int\int\int\int B(x\, y; \xi\, \eta)\, \varphi(x, y)\, \varphi(\xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta$$

wobei $A(x, y; \xi, \eta) = A(\xi, \eta; x, y)$, $B(x, y; \xi, \eta) = B(\xi, \eta; x, y)$ stückweise stetige symmetrische Kerne sind, und die Integrale sowohl in x, y als auch in ξ, η über das ganze Gebiet G erstreckt werden sollen.

Typus 2.

$$\int\int\int A_\nu(x, y; s)\, \varphi(x, y)\, \varphi(s)\, dx\, dy\, ds$$

bezw.

$$\int\int\int B_\nu(x, y; s)\, \varphi(x, y)\, \varphi(s)\, dx\, dy\, ds$$

wobei s die Bogenlänge auf einer der stückweise analytischen Kurven C_ν in G bedeutet und wobei mit $\varphi(s)$ der Funktionswert von $\varphi(x, y)$ auf dieser Kurve als Funktion von s bezeichnet ist. Die Integration ist in x, y über das ganze Gebiet G, in s über die ganze Kurve C_ν zu erstrecken. Allgemein können wir für jede der Kurven C_ν je einen mit Funktionen $A_\nu(x, y; s)$ bezw. $B_\nu(x, y; s)$ gebildeten derartigen Zusatzausdruck in Betracht ziehen und hätten dann jedesmal die Summe dieser Ausdrücke zu bilden.[2]

---

[1] Der sehr einfache Beweis dieser Tatsache mag hier übergangen werden.

[2] Den Fall, dass die Kurve C_ν noch von dem Punkte x, y abhängt, wollen wir hier ausser Acht lassen.

Typus 3.

$$\int\int A(x, y)\,\varphi(\xi, \eta)\,\varphi(\varrho, \omega)\,dx\,dy$$

bezw.

$$\int\int B(x, y)\,\varphi(\xi, \eta)\,\varphi(\varrho, \omega)\,dx\,dy$$

wobei in symbolischer Schreibweise

$$(62)\qquad \begin{aligned} x, y &= \mathfrak{S}\,|\,(\xi, \eta) \\ x, y &= \mathfrak{T}\,|\,(\varrho, \omega) \end{aligned}$$

zwei umkehrbare eindeutige und stückweise stetig differenzierbare Transformationen des Grundgebietes auf sich selbst darstellen mögen. Die inversen Transformationen seien entsprechend durch die Gleichungen

$$(63)\qquad \begin{aligned} \xi, \eta &= \mathfrak{S}^{-1}\,|\,(x, y) \\ \varrho, \omega &= \mathfrak{T}^{-1}\,|\,(x, y) \end{aligned}$$

gegeben. Ferner führen wir für die Funktionaldeterminanten $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$ und $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varrho, \omega)}$ der Transformationen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ die Bezeichnungen ein

$$(64)\qquad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \sigma(\xi, \eta), \qquad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varrho, \omega)} = \tau(\varrho, \omega).$$

Wenn speziell beide Transformationen die Identität sind, so erhalten wir als Zusatzintegral einen Ausdruck der Form $\int\int q(x, y)\,\varphi(x, y)^2\,dx\,dy$.

Typus 4.

$$\int\int A_{\nu\mu}(s, t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt$$

wobei über die Kurve C_ν mit der Bogenlänge s sowie über die Kurve C_μ mit der Bogenlänge t zu integrieren ist und mit $\varphi(s)$ bezw. $\varphi(t)$ die Funktionswerte von $\varphi(x, y)$ auf diesen Kurven bezeichnet werden. Speziell können diese beiden Kurven auch zusammenfallen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir für das Folgende die Symmetriebedingung $A_{\mu\nu}(s, t) = A_{\nu\mu}(t, s)$ voraussetzen.

Typus 5.

$$\int_{C_\nu} A_\nu(s)\, \varphi(\mathfrak{s}_\nu^{-1} \mid s)\, \varphi(\mathfrak{t}_\nu^{-1} \mid s)\, d s$$

wobei

$$\mathfrak{s}_\nu \mid s \text{ und } \mathfrak{t}_\nu \mid s$$

zwei umkehrbare eindeutige stetige und stückweise stetig differenzierbare Transformationen der Kurve C_ν mit der Bogenlänge s in sich bedeuten. Speziell erhalten wir, wenn die Transformationen $\mathfrak{s}_\nu$ und $\mathfrak{t}_\nu$ beide die Identität sind, für das Zusatzintegral die Form

$$\int_{C_\nu} A_\nu(s)\, \varphi(s)^2\, d s.$$

Typus 6.

$$\int_{C_\nu} Q_\nu[\varphi]\, d s$$

wobei $Q_\nu[\varphi]$ ein beliebiger quadratischer homogener Differentialausdruck erster oder auch höherer Ordnung in der Funktion $\varphi(s)$ und den Ableitungen $\varphi'(s)$, $\varphi''(s), \ldots$ ist und wo s die Bogenlänge auf C_ν bedeutet. Noch allgemeiner könnten in einem solchen Differentialausdruck sogar wieder die Funktionswerte und Werte der Ableitungen in verschiedenen miteinander gekoppelten Punkten auftreten, bezw. könnte auf der Kurve C_ν ein aus mehreren verschiedenen Summanden gemäss den Überlegungen von Kapitel I gebildeter, von der Funktion $\varphi(s)$ abhängender, quadratischer Ausdruck $\mathfrak{d}[\varphi]$ gegeben sein und additiv in $\mathfrak{D}[\varphi]$ auftreten, etwa

$$\mathfrak{d}[\varphi] = \int_{C_\nu} \pi(s)\, \varphi'(s)^2\, d s + \sum_{\mu, \nu = 1}^{h} a_{\mu\nu}\, \varphi(s_\mu)\, \varphi(s_\nu)$$

wo $\pi(s) > 0$ ist. Auch solche Zusatzintegrale haben einen guten physikalischen Sinn. Z. B. treten sie bei den Problemen schwingender Systeme auf, welche längs einzelner Linien versteift sind, etwa bei den Schwingungen von Betondecken mit eingelassenen Eisenträgern. Doch wollen wir auf diese allgemeineren Möglichkeiten hier nicht eingehen.[1]

Wir unterscheiden wieder künstliche von natürlichen Randbedingungen, welche sich von selbst einstellen, wenn für den Rand in dem Variationsproblem

[1] Vgl. jedoch Anhang Nr. 1 und 2.

keinerlei besondere Forderungen an die konkurrenzfähigen Funktionen φ gestellt werden. Aus ähnlichen Gründen, wie schon oben in § 3 ausgeführt wurde, dürfen in den künstlichen Randbedingungen keine normal zu den Kurven C_ν genommene Ableitungen von φ auftreten. Wir brauchen uns allerdings nicht auf die einfachste Randbedingung $\varphi = 0$ zu beschränken, sondern können z. B. Randbedingungen der Form

$$\alpha(s)\,\varphi(s) = \beta(s)\,\varphi(\mathfrak{f}^{-1}\,|\,s)$$

stellen, wo $\alpha(s)$ und $\beta(s)$ stetige Funktionen auf dem Rande und $\mathfrak{f}\,|\,s$ eine umkehrbar eindeutige und stetige Transformation des Randes in sich bedeutet. Man kann auch noch weiter gehen, indem man als Bedingungen derartige homogene Relationen aufstellt, bei denen nicht nur die Funktionswerte am Rande, sondern auch noch Funktionswerte an vorgegebenen Kurven im Innern mit eingehen, oder bei denen Funktionswerte linear unter einem Integralzeichen auftreten. Endlich besteht sogar noch die Möglichkeit, in derartige künstliche Randbedingungen tangentiale Ableitungen der Funktionen mit aufzunehmen.

Um die Erörterungen nicht zu weit auszuspinnen, will ich im folgenden auf die Betrachtung solcher und anderer künstlicher Randbedingungen verzichten — irgendwelche besondere Schwierigkeiten oder Komplikationen bieten sie nicht — und mich auf die Behandlung der natürlichen oder freien Probleme beschränken. Ich weise im übrigen darauf hin, dass man auch hier wie in Kap. I (vgl. § 3) die künstlichen Randbedingungen als Grenzfall natürlicher auffassen kann.

Wir bemerken zum Schluss, dass die Relationen (56) von S. 27 im Falle mehrerer unabhängiger Veränderlicher genau so gelten wie bei einer unabhängigen Veränderlichen.

§ 8. **Aufstellung der zugehörigen Funktionalgleichungen.**

Zu den oben charakterisierten Variationsproblemen ergeben sich nun Funktionalgleichungsprobleme genau ebenso wie bei dem Fall einer unabhängigen Veränderlichen aus der Relation

$$\mathfrak{D}[u,\zeta] - \lambda\,\mathfrak{H}[u,\zeta] = 0, \tag{65}$$

welche für jeden Index n durch die zugehörigen Werte $\lambda = \lambda_n$ bezw. $u = u_n$ erfüllt sein muss, wenn ζ eine willkürliche denselben Stetigkeitsbedingungen wie φ genügende Funktion ist. Diese Relation folgt hier wörtlich so wie oben in

§ 1. Aus ihr gewinnen wir die Funktionalgleichungen, indem wir nach der Greenschen Formel das Führungsintegral in $\mathfrak{D}$ so umformen, dass daraus die Ableitungen von φ verschwinden. Diese Greensche Formel lautet:

$$D[\varphi, \zeta] = -\int\int \zeta L[\varphi]\, dx\, dy + \sum_{\nu=1}^{h} \int_{C_\nu} \zeta(s) S_\nu[\varphi]\, ds, \tag{66}$$

wobei die einfachen Integrale über diejenigen Kurven C_ν zu erstrecken sind, bei welchen die Stetigkeit der Ableitungen von φ unterbrochen ist, und $S_\nu[\varphi]$ den Sprung der normalen Ableitung von φ längs dieser Kurve als Funktion der Bogenlänge s bedeutet.

Wenn dabei über Existenz der Ableitungen von φ bei den fraglichen Kurven selbst nichts Näheres vorausgesetzt wird, so sind die Kurvenintegrale bezw. ihre Summe in verallgemeinerter Weise als Grenzwerte zu verstehen, welche man folgendermassen erhält: Man approximiert die fragliche Kurve C_ν von beiden Seiten durch je eine Kurve C_ν' und C_ν'', deren Punkte man ebenfalls durch die Bogenlänge s' bezw. s'' festlegt und einander so zuordnet, dass entsprechende Punkte beim Grenzübergang in den Punkt s auf C_ν übergehen. Wir betrachten dann die Summe

$$-\int_{C_\nu'} \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \zeta(s')\, ds' - \int_{C_\nu''} \frac{\partial \varphi}{\partial n''} \zeta(s'')\, ds'',$$

wobei die Differentiation $\frac{\partial}{\partial n'}$ bezw. $\frac{\partial}{\partial n''}$ sich auf die zur Kurve C_ν' bezw. C_ν'' normale, von der Kurve ins Innere von G weisende Richtung bezieht. Der Grenzwert dieser Summe, wenn die Kurven C_ν' und C_ν'' gegen die Kurve C_ν rücken, wird mit $\int_{C_\nu} \zeta(s) S[\varphi]\, ds$ bezeichnet.[1]

[1] Dass dieser Grenzwert für jede den Stetigkeitsbedingungen des Problemes genügende Funktion ζ existiert, wenn für φ die Lösung des Variationsproblemes eingesetzt wird, erkennt man folgendermassen. Zunächst folgt aus der Voraussetzung der Lösbarkeit des Variationsproblemes, wie sich in § 8 ergeben wird, die Stetigkeit des Ausdruckes $L[u]$ im ganzen Gebiet. Wenden wir nun die Greensche Formel (66) auf dasjenige Gebiet G' an, welches aus G entsteht, wenn man um jede der Kurven C_ν einen schmalen, durch die Kurven C_ν' und C_ν'' begrenzten Streifen herausschneidet, so folgt die Existenz des fraglichen Grenzwertes sofort aus der Bemerkung, dass in dieser Greenschen Formel sowohl $D[u, \zeta]$ als auch das Integral von $\zeta L[u]$ mit abnehmender Streifenbreite gegen bestimmte Grenzwerte konvergiert.

Im übrigen brauchen wir in Formel (66) nachher ausser dem Rande von G rechts nur noch Kurven C_ν zu berücksichtigen, über welche in den Zusatzgliedern integriert wird; denn für alle anderen müssen die Kurvenintegrale wegen der Willkür von ζ und dem Verschwinden des Ausdruckes (65) selbst verschwinden.[1]

Nunmehr können wir der Reihe nach den Einfluss der verschiedenen Bestandteile von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ auf die entsprechenden Funktionalgleichungen feststellen; zunächst ergibt bei der Umformung von $\mathfrak{D}[u, \zeta]$ das Führungsintegral den Ausdruck

$$D[u, \zeta] = -\int\int \zeta L[u]\, dx\, dy + \sum_{\nu=1}^{h} \int_{C_\nu} \zeta(s) S_\nu[u]\, ds \tag{67}$$

wobei über alle in den Zusatzgliedern auftretenden Kurven, sowie über die Randkurven zu summieren ist und auf dem Rande $-S_\nu[\varphi]$ die nach der Richtung der inneren Normalen genommene Ableitung bedeutet.

Weiter gibt ein Zusatzausdruck in $\mathfrak{D}$ vom Typus 1 in § 7 wegen der Symmetrie von $A(x, y; \xi, \eta)$ einen Beitrag

$$\int\int \zeta(x, y)\, dx\, dy \int\int A(x, y; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{68}$$

während entsprechend ein Zusatzausdruck in $\mathfrak{H}$ zu einem Beitrag

$$-\lambda \int\int \zeta(x, y)\, dx\, dy \int\int B(x, y; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

führt.

Sodann erhalten wir von einem Ausdruck des Typus 2 zwei wesentlich verschiedene Beiträge, nämlich

$$\frac{1}{2} \int\int \zeta(x, y)\, dx\, dy \int_{C_\nu} A_\nu(x, y; s)\, u(s)\, ds \tag{69}$$

und

$$\frac{1}{2} \int_{C_\nu} \zeta(s)\, ds \int\int A_\nu(x, y; s)\, u(x, y)\, dx\, dy \tag{70}$$

sowie entsprechende zwei Terme für einen analogen Zusatzausdruck in $\mathfrak{H}$.

Ein Zusatzausdruck des Typus 3 führt zu folgender Bildung

[1] Wir könnten auch von vornherein in den Zulassungsbedingungen überall ausser auf den Kurven C_ν Stetigkeit der Ableitungen von φ verlangen.

$$(71)\qquad \frac{1}{2}\int\!\!\int A(x,y)\,u(\xi,\eta)\,\zeta(\varrho,\omega)\,dx\,dy+\frac{1}{2}\int\!\!\int A(x,y)\,u(\varrho,\omega)\,\zeta(\xi,\eta)\,dx\,dy.$$

Wenn wir nun im ersten dieser beiden Integrale ϱ, ω im zweiten ξ, η als unbhängige Veränderliche einführen, so erhalten wir mit den Bezeichnungen (62) (63) (64)

$$\frac{1}{2}\int\!\!\int A(\mathfrak{T}\,|\,(\varrho,\omega))\,u(\mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{T}\,|\,(\varrho,\omega))\,\tau(\varrho,\omega)\,\zeta(\varrho,\omega)\,d\varrho\,d\omega$$

$$+\frac{1}{2}\int\!\!\int A(\mathfrak{S}\,|\,(\xi,\eta))\,u(\mathfrak{T}^{-1}\,\mathfrak{S}\,|\,(\xi,\eta))\,\sigma(\xi,\eta)\,\zeta(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Nehmen wir jetzt in beiden Integralen eine Umbenennung der unabhängigen Veränderlichen vor, indem wir diese beide Male mit x, y bezeichnen, so erhalten wir schliesslich für (71), wenn wir zur Abkürzung

$$(72)\qquad \Phi_{\mathfrak{S},\mathfrak{T}}[A\,u;x,y]=\frac{1}{2}A(\mathfrak{T}\,|\,(x,y))\,u(\mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{T}\,|\,(x,y))\,\tau(x,y)$$

$$+\frac{1}{2}A(\mathfrak{S}\,|\,(x,y))\,u(\mathfrak{T}^{-1}\,\mathfrak{S}\,|\,(x,y))\,\sigma(x,y)$$

setzen, den Ausdruck

$$(73)\qquad \int\!\!\int \zeta(x,y)\,\Phi_{\mathfrak{S},\mathfrak{T}}[A\,u;x,y]\,dx\,dy.$$

Setzen wir beispielsweise speziell

$$A(x,y)=1,\qquad \xi=x+1,\qquad \eta=y,\qquad \varrho=x,\qquad \omega=y,$$

so geht $\Phi_{\mathfrak{S},\mathfrak{T}}[A\,u;x,y]$ in den einfachen Differenzenausdruck $\frac{1}{2}(u(x+1,y)-u(x-1,y))$ für die Funktion u über, sodass wir durch Summen analoger Zusatzausdrücke, wie man sieht, beliebige Differenzenausdrücke der Funktion u erhalten können.

Zusatzausdrücke des Typus 4 ergeben einen Beitrag

$$\frac{1}{2}\int\!\!\int A_{\mu\nu}(s,t)\,u(s)\,\zeta(t)\,ds\,dt+\frac{1}{2}\int\!\!\int A_{\mu\nu}(s,t)\,u(t)\,\zeta(s)\,ds\,dt$$

oder

$$(74)\qquad \frac{1}{2}\int_{C_\mu}\zeta(t)\,dt\int_{C_\nu}A_{\mu\nu}(s,t)\,u(s)\,ds+\frac{1}{2}\int_{C_\nu}\zeta(s)\,ds\int_{C_\mu}A_{\mu\nu}(s,t)\,u(t)\,dt.$$

Sodann erhalten wir bei Zusatzausdrücken des Typus 5 einen Beitrag

$$\frac{1}{2}\int\limits_{C_\nu} A_\nu(s)\, u(\mathfrak{f}_\nu^{-1}\,|\,s)\,\zeta(\mathfrak{t}_\nu^{-1}\,|\,s)\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_{C_\nu} A_\nu(s)\, u(\mathfrak{t}_\nu^{-1}\,|\,s)\,\zeta(\mathfrak{f}_\nu^{-1}\,|\,s)\,ds.$$

Führen wir hier wieder neue Veränderliche ein, und zwar in dem einen Integral $\mathfrak{t}_\nu^{-1}\,|\,s$ in dem anderen $\mathfrak{f}_\nu^{-1}\,|\,s$, so ergibt sich, wenn wir die Integrationsvariable wieder mit s bezeichnen und die Abkürzung

(75) $$\Phi_{\mathfrak{f}_\nu \mathfrak{t}_\nu}[A_\nu u; s] = \frac{1}{2} A_\nu(\mathfrak{t}_\nu\,|\,s)\, u(\mathfrak{f}_\nu^{-1}\,|\,s)\,\tau_\nu(s) + \frac{1}{2} A_\nu(\mathfrak{f}_\nu\,|\,s)\, u(\mathfrak{t}_\nu^{-1}\,\mathfrak{f}_\nu\,|\,s)\,\sigma_\nu(s)$$

einführen, wobei

(76) $$\sigma_\nu(s) = \frac{d}{ds}(\mathfrak{f}_\nu\,|\,s) \qquad \tau_\nu(s) = \frac{d}{ds}(\mathfrak{t}_\nu\,|\,s)$$

bedeutet, der Ausdruck

(77) $$\int\limits_{C_\nu} \zeta(s)\,\Phi_{\mathfrak{f}_\nu \mathfrak{t}_\nu}[A_\nu u; s]\,ds.$$

Speziell entsteht aus dem Zusatzausdruck

$$\int\limits_{C_\nu} A_\nu(s)\,\varphi(s)^2\,ds$$

der Term

$$\int\limits_{C_\nu} A_\nu(s)\,u(s)\,\zeta(s)\,ds.$$

Endlich ergibt sich aus den Zusatzausdrücken des Typus 6 ein Beitrag von der Gestalt

(78) $$\int\limits_{C_\nu} \zeta(s)\,L_\nu[u(s)]\,ds + \Big[\zeta(s)\,U_\nu[u(s)] + \zeta'(s)\,V_\nu[u(s)] + \cdots\Big]_{s_1}^{s_2},$$

wo sich s_1 und s_2 auf die Endpunkte von C_ν beziehen. Dabei bedeutet

$(79)_1$ $$2\,L_\nu[u(s)] = \frac{\partial}{\partial u} Q_\nu - \frac{d}{ds}\frac{\partial Q_\nu}{\partial u'} + \frac{d^2}{ds^2}\frac{\partial Q_\nu}{\partial u''} - + \cdots$$

den zu $Q_\nu[u]$ gehörigen Eulerschen Differentialausdruck; und

$$
(79)_2 \qquad
\begin{aligned}
2\,U_\nu[u(s)] &= \frac{\partial}{\partial u'}\,Q_\nu - \frac{d}{d\,s}\frac{\partial\,Q_\nu}{\partial\,u''} + \frac{d^2}{d\,s^2}\frac{\partial\,Q_\nu}{\partial\,u'''} - + \cdots \\
2\,V_\nu[u(s)] &= \frac{\partial}{\partial u''}\,Q_\nu - \frac{d}{d\,s}\frac{\partial\,Q_\nu}{\partial\,u'''} + \frac{d^2}{d\,s^2}\frac{\partial\,Q_\nu}{\partial\,u^{(\mathrm{IV})}} - + \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

sind die zugehörigen Randausdrücke.

Auf die weiter möglichen Verallgemeinerungen wollen wir hier nicht eingehen.

Die Ausdrücke (67) (68) (69) (70) (73) (74) (77) und (78) liefern uns nun vermöge der für willkürliche Funktionen ζ bestehenden Relation

$$
\mathfrak{D}[u,\zeta] - \lambda\,\mathfrak{H}[u,\zeta] = 0
$$

unmittelbar die Bedingungsgleichungen, welche die Lösungen $u(x,y)$ bezw. λ unserer Variationsprobleme erfüllen müssen. Indem wir die sämtlichen angegebenen Umformungen berücksichtigen, können wir verschiedene zusammengehörige Bestandteile zusammenfassen; der eine stellt sich dar als ein über G erstrecktes Integral eines Produktes von $\zeta(x,y)$ mit einem Funktionalausdruck in u, der zweite Bestandteil als eine Summe von Integralen über die Kurven C_ν, wobei die Integranden für jede Kurve C_ν die Form besitzen: Produkt aus $\zeta(s)$ und einem Funktionalausdruck in u. Die weiteren Bestandteile beziehen sich auf die Endpunkte der Kurven C_ν und ergeben sich ohne weiteres aus Formel (78); sie treten nur auf, wenn Randausdrücke des Typus 6 vorhanden sind.

Indem wir die einzelnen Faktoren von $\zeta(x,y)$ bezw. $\zeta(s)$ für jede Kurve C_ν gleich Null setzen, erhalten wir Funktionalgleichungen der folgenden Form

$$
(80) \qquad
\begin{aligned}
L[u] + \lambda\,r\,u - \iint (A(x,y;\ \xi,\eta) - \lambda\,B(x,y;\ \xi,\eta))\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\
- \sum_{\nu=1}^{h} \int_{C_\nu} (A_\nu(x,y;\ s) - \lambda\,B_\nu(x,y;\ s))\,u(s)\,ds \\
- \sum_{\mu=1}^{k} \Phi_{\mathfrak{S}_\mu,\,\mathfrak{T}_\mu}[(A_\mu - \lambda\,B_\mu)\,u;\ x,y] = 0
\end{aligned}
$$

wo mit $\mathfrak{S}_\mu$, $\mathfrak{T}_\mu$ Transformationen der oben gekennzeichneten Arten bezeichnet sind und ferner für die Kurve C_ν eine »Randbedingung» bezw. »Sprungbedingung»

$$S_\nu[u] + \int\int (A(x,y;\,s) - \lambda B_\nu(x,y;\,s))\, u(x,y)\, dx\, dy \tag{81}$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{h} \int_{C_\mu} (A_{\nu\mu}(s,t) - \lambda B_{\nu\mu}(s,t))\, u(t)\, dt$$

$$+ \Phi_{\mathfrak{f}_\nu,\mathfrak{t}_\nu}[(A_\nu - \lambda B_\nu)\, u;\, s] + L_\nu[u(s)] - \lambda M_\nu[u(s)] = 0$$

$$(\nu = 1, \ldots, h)$$

wo $L_\nu[u(s)]$ und $M_\nu[u(s)]$ Differentialausdrücke der Form $(79)_1$ sind.

Endlich erhalten wir für jeden Punkt E des Gebietes, in welchem eine oder mehrere der Kurven C_ν endigen eine Reihe von Eckenbedingungen, sobald in dem Problem Zusatzglieder vom Typus 6 auftreten. Diese Bedingungen ergeben sich daraus, dass man die Werte von ζ, ζ_x, $\zeta_y, \ldots$ in den Eckpunkten willkürlich wählen kann. Treten die Zusatzglieder etwa nur in $\mathfrak{D}[\varphi]$ auf, so bestehen die Eckenbedingungen darin, dass an der Stelle E die Summen

$$\Sigma\, U_\nu[u]$$

$$\Sigma\, x_\nu'\, V_\nu[u],\quad \Sigma\, y_\nu'\, V_\nu[u]$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

über sämtliche dort endigenden Kurven C_ν verschwinden. $x_\nu(s), y_\nu(s)$ ist dabei die Darstellung von C_ν durch die Bogenlänge s und diese ist so gerechnet, dass sie von der Ecke ausgehend auf allen Kurven C_ν wächst.

Das Eigenwertproblem, welches mit unserem Minimumproblem äquivalent ist, verlangt die Bestimmung eines Parameters λ und einer nicht identisch verschwindenden Funktion u, welche überall im Grundgebiet abgesehen vom Rande und von den sonstigen Kurven C_ν mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig ist, derart dass die Funktionalgleichung (80) und die Randbedingungen (81) erfüllt sind.

Es ist bemerkenswert, dass in diesen Gleichungen der Unterschied zwischen der eigentlichen Funktionalgleichung und den Randbedingungen teilweise verwischt ist. Denn ebenso wie in der Gleichung (80) explizite die Funktionswerte von u auf gewissen der »Randlinien» C_ν auftreten, geht in die Bedingungen (81) der Gesamtverlauf der Funktion im Grundgebiet ein.

Es mag dem Leser überlassen bleiben, die Überlegungen dieses Kapitels für den Fall zu verallgemeinern, dass es sich um mehr als zwei unabhängige Veränderliche handelt, oder dass höhere als erste Ableitungen im Führungsintegral auftreten. In allen diesen Fällen wächst natürlich die Mannigfaltigkeit der möglichen Zusatzglieder ausserordentlich.

KAPITEL III.

Die Darstellung willkürlicher Funktionen durch die Eigenfunktionen und das Verhalten der Eigenwerte.

§ 9. Die Vollständigkeit der Eigenfunktionen.

Die wichtigste Eigenschaft der Eigenfunktionen beim klassischen Sturm-Liouvilleschen Problem ist ihre Vollständigkeit, d. h. die Tatsache, dass man jede willkürliche im Grundgebiete stetige Funktion durch eine lineare Kombination von endlich vielen Eigenfunktionen im Mittel beliebig genau approximieren kann. Dieser Satz dehnt sich nun sinngemäss auf alle in den vorigen Kapiteln aufgestellten Eigenwertprobleme aus, wobei wir ausdrücklich die Voraussetzung wiederholen, dass $\mathfrak{H}$ ein positiv-definiter Ansdruck ist. Es gilt dann der Satz: Wenn λ_n mit wachsendem n gegen Unendlich strebt, dann ist das System der Eigenfunktionen $u_1, u_2, \ldots$ »vollständig in Bezug auf den Ausdruck $\mathfrak{H}$»; d. h.: für jede stetige Funktion f und jede noch so kleine positive Grösse ε kann eine lineare Kombination

$$(82) \qquad \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \omega_n$$

aus endlich vielen Eigenfunktionen gebildet werden, sodass

$$(83) \qquad \mathfrak{H}[f - \omega_n] < \varepsilon$$

wird.

Wir bemerken vorab: Die in Bezug auf den Ausdruck $\mathfrak{H}$ günstigste mittlere Approximation von f durch eine Kombination der ersten n Eigenfunktionen, d. h. der kleinste Wert von $\mathfrak{H}[f - \omega_n]$ wird erreicht für

$$(84) \qquad \alpha_i = c_i = \mathfrak{H}[f, u_i].$$

Die durch (84) definierten Grössen c_i nennen wir die Entwicklungskoeffizienten der Funktion f in Bezug auf das System unserer Eigenfunktionen. Die Minimumseigenschaft dieser Entwicklungskoeffizienten ergibt sich hier genau in der üblichen Weise wie bei beliebigen Orthogonalfunktionen, indem wir in dem Ausdruck $\mathfrak{H}[f-\omega_n]$ die Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ durch die Relationen

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \mathfrak{H}[f-\omega_n] = -2\,\mathfrak{H}[f-\omega_n,\ u_i] = 0$$

bestimmen, was sofort mit Rücksicht auf

$$\mathfrak{H}[u_i] = 1,\ \mathfrak{H}[u_i, u_k] = 0 \qquad \text{für } i \neq k$$

die Gleichung (84) ergibt. Aus der Beziehung

$$0 \leqq \mathfrak{H}[f - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i] = \mathfrak{H}[f] - \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

folgt unmittelbar die Konvergenz der unendlichen Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ und genauer die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqq \mathfrak{H}[f].$$

Die oben behauptete Vollständigkeitseigenschaft besagt, dass stets nicht nur diese Ungleichung sondern genauer die Gleichung *(Vollständigkeitsrelation)*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \mathfrak{H}[f] \tag{85}$$

gilt.

Um nun diese Vollständigkeit zu beweisen, nehmen wir zunächst an, dass die Funktion f den Stetigkeitsbedingungen und gegebenenfalls den gestellten künstlichen Randbedingungen des Problemes genügt, und bilden mit der Funktion $f_n = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ den Ausdruck

$$\mathfrak{D}[f-f_n] = \mathfrak{D}[f] + \sum_{i=1}^{n} c_i^2\,\mathfrak{D}[u_i] - 2\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathfrak{D}[f, u_i]$$

welcher sich mit Rücksicht auf (56) und (65) in die Gestalt

$$\mathfrak{D}[f-f_n]=\mathfrak{D}[f]-\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i$$

setzen lässt. Da nach Voraussetzung mit wachsendem n der n-te Eigenwert λ_n gegen Unendlich strebt und daher nur endlich viele Eigenwerte negativ sein können, und da ferner die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ konvergiert, so bleiben die Ausdrücke $\mathfrak{D}[f-f_n]$ sicherlich bei wachsendem n unterhalb einer festen positiven Schranke M. Andererseits erfüllt die Funktion $\varphi=f-f_n$ alle Bedingungen

$$\mathfrak{H}[\varphi, u_\nu]=0 \qquad (\nu=1, \ldots, n);$$

also ist wegen der Minimumseigenschaft des Eigenwertes λ_{n+1}

$$\mathfrak{D}[\varphi]=\mathfrak{D}[f-f_n] \geqq \lambda_{n+1}\,\mathfrak{H}[f-f_n].$$

Dividieren wir durch λ_{n+1} und gehen zur Grenze für $n \to \infty$ über, so folgt wegen $M \geqq \mathfrak{D}[\varphi]$ unmittelbar die Relation

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{H}[f-f_n]=0,$$

welche die behauptete Vollständigkeitseigenschaft ausspricht.

Genügt die stetige Funktion f nicht den Stetigkeits- und Randbedingungen des Problemes, (ist sie z. B. nicht differenzierbar) so kann man sicherlich f durch eine diesen Bedingungen genügende Funktion f^* so approximieren, dass $\mathfrak{H}[f-f^*]<\frac{\varepsilon}{4}$ wird, sodann f^* durch eine Funktion f_n^*, sodass $\mathfrak{H}[f^*-f_n^*]<\frac{\varepsilon}{4}$ wird. Dann ist mit Rücksicht auf

$$\mathfrak{H}[f-f_n^*]=\mathfrak{H}[f-f^*]+\mathfrak{H}[f^*-f_n^*]+2\,\mathfrak{H}[f^*-f_n^*, f-f^*]$$

und die Ungleichung

$$\mathfrak{H}[\varphi, \psi]^2 \leqq \mathfrak{H}[\varphi]\,\mathfrak{H}[\psi]$$

(vergl. S. 5) gewiss $\mathfrak{H}[f-f_n^*]<\varepsilon$ und wegen der Minimumseigenschaft von f_n erst recht $\mathfrak{H}[f-f_n]<\varepsilon$, womit die Vollständigkeitseigenschaft auch für solche allgemeinere Funktionen f bewiesen ist.

Ausdrücklich verdient bei unserem Resultat der Fall hervorgehoben zu werden, in dem der Ausdruck $\mathfrak{H}$ gar kein Integral über das Grundgebiet enthält, sondern nur aus Integralen über Rand- oder Sprungkurven C_ν besteht. Ist z. B.

$$\mathfrak{H}[\varphi]=\int \varphi^2\, ds$$

wo dieses Integral über den Rand von G erstreckt wird, so besagt unsere Vollständigkeitseigenschaft lediglich Vollständigkeit im gewöhnlichen Sinne für die Randwerte der Eigenfunktionen. Ist etwa

$$\mathfrak{D}=D=\int\int (\varphi_x^2+\varphi_y^2)\, dx\, dy$$

so werden die Eigenfunktionen solche der Potentialgleichung $\Delta u=0$ genügende Funktionen, welche am Rande eine Randbedingung der Form

$$u+\lambda\frac{\partial u}{\partial n}=0$$

erfüllen. Die Vollständigkeitseigenschaft besagt, dass man durch die Randwerte dieser Eigenfunktionen im Mittel jede stetige Funktion auf dem Rande beliebig genau approximieren kann.

Unser Beweis zeigt als wesentliche Grundlage für den Vollständigkeitssatz das unbegrenzte Anwachsen der Eigenwerte. Dieses Anwachsen müssen wir untersuchen, um der Vollständigkeitseigenschaft ein sicheres Fundament zu geben. In der Tat werden wir zeigen, dass bei allen Problemen mit gewissen allgemeinen Definitheitseigenschaften diese Bedingung erfüllt ist.

§ 10. Maximum-Minimumeigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Der Ausgangspunkt für jede genauere Untersuchung der Eigenwerte ist deren Maximum-Minimumeigenschaft, welche sich genau wie bei dem einfachsten Problem von § 1 in folgendem Satz ausdrückt: Sind $v_1, \dots, v_{n-1}$ willkürliche stetige Funktionen in G, und ist $d[v_1, \dots, v_{n-1}]$ das Minimum (bezw. die untere Grenze) von $\mathfrak{D}[\varphi] : \mathfrak{H}[\varphi]$ unter den Nebenbedingungen

$$\mathfrak{H}[\varphi, v_i]=0 \qquad (i=1, \dots, n-1) \tag{86}$$

und den vorgeschriebenen Stetigkeitsbedingungen, (gegebenenfalls auch Randbedingungen), dann ist der n-te Eigenwert λ_n $(n>1)$ das Maximum von $d[v_1, \dots, v_{n-1}]$, wenn zum Vergleiche alle Systeme von $n-1$ stetigen Funktionen $v_1, \dots, v_{n-1}$ zugelassen werden. Dieses Maximum-Minimum wird angenommen für

$$\varphi=u_n,\ v_i=u_i, \qquad (i=1, \dots, n-1).$$

Der Beweis verläuft hier wörtlich so wie dort und braucht deshalb hier nicht wiederholt zu werden. Nur einige ergänzende Bemerkungen seien hinzugefügt. Zunächst bemerken wir, dass wir bei dem Minimumproblem für $\mathfrak{D}[\varphi]:\mathfrak{H}[\varphi]$ irgend eine quadratische Normierungsbedingung für die Funktion φ stellen können, dass wir z. B. statt der Normierungsbedingung

$$\mathfrak{H}[\varphi]=1 \tag{87}$$

irgend eine andere Bedingung

$$\mathfrak{H}'[\varphi]=1 \tag{88}$$

wählen dürfen, wobei $\mathfrak{H}'[\varphi]$ einen von $\mathfrak{H}[\varphi]$ verschiedenen quadratischen definiten Ausdruck bedeutet, der stets zugleich mit $\mathfrak{H}[\varphi]$ von Null verschieden ist.

Wenn wir ferner die untere Grenze $d^*[v_1, \ldots, v_{n-1}]$ von $\mathfrak{D}[\varphi]:\mathfrak{H}[\varphi]$ suchen unter den Bedingungen

$$\mathfrak{H}'[\varphi, v_i]=0 \qquad (i=1, \ldots, n-1) \tag{89}$$

so bleibt die Schlussweise von § 1 bestehen, dass man eine lineare Kombination $c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n = \varphi$ aus den ersten n Eigenfunktionen $u_1, \ldots, u_n$ bilden kann, welche den Bedingungen (89) genügt. Denn diese Bedingungen stellen $n-1$ lineare homogene Gleichungen für die n Unbekannten $c_1, \ldots, c_n$ dar. Genau wie dort schliessen wir also, dass $d^*[v_1, \ldots, v_{n-1}] \leqq \lambda_n$ ist und, da die Funktionen $v_1, \ldots, v_{n-1}$ ganz willkürlich sind, so gilt auch für das Maximum λ_n^* des Minimums von $\mathfrak{D}[\varphi]:\mathfrak{H}[\varphi]$ (bezw. für die obere Grenze der unteren Grenzen) unter den Bedingungen (89) die Beziehung

$$\lambda_n^* \leqq \lambda_n. \tag{90}$$

Diese Bemerkung dient uns zum Beweise des folgenden wichtigen Satzes: Wenn neben $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ zwei entsprechende Ausdrücke $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{H}'$ gegeben sind, und wenn für jede den Stetigkeitsbedingungen genügende Funktion φ

$$\mathfrak{D}[\varphi] \geqq \mathfrak{D}'[\varphi] \geqq 0 \qquad 0 \leqq \mathfrak{H}[\varphi] \leqq \mathfrak{H}'[\varphi] \tag{91}$$

gilt, wenn ferner λ'_n der n-te Eigenwert zu den Ausdrücken $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{H}'$ ist, so gilt für alle n

$$\lambda_n \geqq \lambda'_n. \tag{92}$$

Nach (90) ist nämlich $\lambda_n \geqq \lambda_n^*$; wobei definitionsgemäss λ_n^* das Maximum-Minimum von $\mathfrak{D}:\mathfrak{H}$ bei den Nebenbedingungen (89) bedeutet. Andererseits ist λ'_n das

Maximum-Minimum von $\mathfrak{D}' : \mathfrak{H}'$ unter denselben Nebenbedingungen; und für jedes System von Funktionen $v_1, \ldots, v_{n-1}$ und jede Funktion φ ist

$$\mathfrak{D} : \mathfrak{H} \geqq \mathfrak{D}' : \mathfrak{H}'.$$

Mithin gilt diese Ungleichheitsbeziehung bei gegebenen Funktionen $v_1, \ldots, v_{n-1}$ auch für die untere Grenze der beiden Seiten, und daher auch für die obere Grenze dieser unteren Grenzen bei veränderlichen Funktionssystemen $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Daher ist $\lambda_n^* \geqq \lambda'_n$, womit der Beweis unserer Behauptung erbracht ist.

Der bewiesene Satz lässt sich als das transzendente Analogon zu dem algebraischen Satze auffassen, dass die n-te Hauptachse eines Ellipsoides, welches ein zweites ganz umschliesst, grösser als die n-te Hauptachse dieses zweiten sein muss.

§ 11. Das Anwachsen der Eigenwerte.

Die Anwendung des eben dargelegten Verfahrens zum Vergleiche verschiedener Variationsprobleme gestattet uns, die Abschätzung der Eigenwerte nach einer Art Majorantenmethode auszuführen. Wir wollen die Methode, welche in vielen Fällen bis zu einer feineren asymptotischen Abschätzung der Eigenwerte führen kann, hier nur dazu benutzen, um das Anwachsen der Eigenwerte festzustellen; und zwar wollen wir den für die Fundierung der Vollständigkeitsrelation ausreichenden Satz beweisen: Wenn der Normierungsausdruck $\mathfrak{H}[\varphi]$ je nach dem, ob es sich um eine oder zwei unabhängige Veränderliche handelt, Ungleichungen der Form

$$c'' \int \varphi^2 dx \leqq \mathfrak{H}[\varphi] \leqq c \int \varphi^2\, dx + c' \sum_{\nu=1}^{h} \varphi(x_\nu)^2 \tag{93}$$

oder

$$c'' \int\!\!\int \varphi^2 dx\, dy \leqq \mathfrak{H}[\varphi] \leqq c \int\!\!\int \varphi^2\, dx\, dy + c' \sum_{\nu=1}^{h} \int_{C_\nu} \varphi^2\, ds \tag{94}$$

$$(c>0,\ c'>0,\ c''>0)$$

genügt, wobei c, c' und c'' drei von φ unabhängige Konstante bedeuten und die Punkte x_ν bezw. die Kurven C_ν im Grundgebiet fest vorgegeben sind, dann strebt der n-te Eigenwert λ_n mit wachsendem n gegen Unendlich.

Wir führen den Beweis für den Fall von zwei unabhängigen Veränderlichen durch, indem wir bemerken, dass für eine unabhängige Veränderliche dieselben

Betrachtungen mit entsprechenden Vereinfachungen ihre Gültigkeit behalten. Zum Beweise führen wir folgende Bezeichnung ein

$$(95)\quad V[\varphi] = \iint (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy \qquad N[\varphi] = \iint \varphi^2\, dx\, dy \qquad R[\varphi] = \sum_{\nu=1}^{h} \int_{C_\nu} \varphi^2\, ds.$$

Dann gilt der wichtige Hilfssatz: Wenn $N[\varphi] = 1$ ist, so besteht immer die Ungleichung

$$(96)\qquad R[\varphi] < C\sqrt{V[\varphi]} + C'$$

und die aus ihr folgende

$$(97)\qquad \sqrt{R[\varphi]} < C''\sqrt{V[\varphi]} + C'''$$

wo C, C', C'', C''' positive Konstante sind, die nicht von φ, sondern höchstens vom Gebiete G abhängen. Entsprechend gelten für eine unabhängige Veränderliche, wenn wir

$$(98)\qquad V[\varphi] = \int_0^1 \varphi'^2\, dx \qquad N[\varphi] = \int_0^1 \varphi^2\, dx \qquad R[\varphi] = \sum_{\nu=1}^{h} \varphi(x_\nu)^2$$

setzen, für alle Funktionen φ, für welche $N[\varphi] = 1$ ist, Ungleichungen derselben Form wie (96) und (97). Wegen des nicht schwierigen Beweises dieser Integralungleichung verweise ich auf eine schon genannte frühere Arbeit.[1]

Wir können nun leicht den Ausdruck $\mathfrak{D}$ mit Hilfe von V, N und R abschätzen. Sicherlich gilt

$$D[\varphi] > \alpha\, V[\varphi]$$

wo α eine Konstante ist. Weiter gilt für jeden Zusatzausdruck des Typus Nr. 1 aus § 7 eine Ungleichung der Form

$$(99)\qquad \left| \iiiint A(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(x, y)\, \varphi(\xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta \right| < \alpha_1 N[\varphi];$$

denn es ist, wenn M das Maximum von $A(x, y; \xi, \eta)$ bedeutet,

$$\left| \iiiint A(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(x, y)\, \varphi(\xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta \right| \leqq M\left(\iint |\varphi(x, y)|\, dx\, dy \right)^2$$

[1] Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Math. Zeitschr. Bd. 7, S. 13.

und hieraus folgt wegen der Schwarzschen Ungleichung sofort

$$\left|\iiiint A(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(x, y)\, \varphi(\xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta\right| < M_1 N[\varphi].$$

Weiter erkennt man in ganz ähnlicher Weise für die sämtlichen Typen von Zusatzausdrücken Z aus den Nr. 2 bis 6 von § 7 dass sie unter der Voraussetzung $N[\varphi] = 1$ Ungleichungen der Form

$$|Z| < \alpha_1 R[\varphi] + a_2 \sqrt{R[\varphi]} + a_3 \tag{100}$$

genügen, sodass wir schliesslich mit Rücksicht auf (96) und (97) unter der Voraussetzung $N[\varphi] = 1$ für $\mathfrak{D}[\varphi]$ eine Abschätzung der Gestalt

$$\mathfrak{D}[\varphi] \geqq \alpha V[\varphi] - 2\alpha\beta \sqrt{V[\varphi]} - \gamma \geqq \alpha(\sqrt{V[\varphi]} - \beta)^2 - \delta \tag{101}$$

erhalten, wo α, β, γ, δ positive von φ unabhängige Konstante sind. Also ergibt sich mit Rücksicht auf (94) immer unter der Bedingung

$$N[\varphi] = 1$$

das Bestehen einer Relation der Form

$$\frac{\mathfrak{D}[\varphi]}{\mathfrak{H}[\varphi]} \geqq \alpha \frac{(\sqrt{V[\varphi]} - \beta)^2}{c + c' R[\varphi]} - \frac{\delta}{c''}$$

und daher

$$\frac{\mathfrak{D}[\varphi]}{\mathfrak{H}[\varphi]} > \alpha \frac{(\sqrt{V[\varphi]} - \beta)^2}{\alpha' \sqrt{V[\varphi]} + \beta'} - \gamma', \tag{102}$$

wo α', β', γ', ebenfalls positive Konstante sind.

Das Maximum-Minimum λ_n^* der linken Seite bei den Nebenbedingungen $N[\varphi, v_i] = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ ist nach § 10 nicht grösser als λ_n; andererseits ist zufolge der Ungleichung (102) der Wert λ_n^* nicht kleiner als das Maximum-Minimum der rechten Seite. Nun ist das Maximum-Minimum von $V[\varphi]$ unter der Normierungsbedingung $N[\varphi] = 1$ und den Nebenbedingungen $N[\varphi, v_i] = 0$ gerade der n-te Eigenwert μ_n des Eigenwertproblemes von

$$\Delta u + \mu u = 0$$

bei freiem Rand (d. h. also bei der Randbedingung: normale Ableitung gleich Null). Es ist bekannt[1], dass bei wachsendem n dieser Eigenwert μ_n gegen Un-

[1] Vgl. COURANT-HILBERT, l. c. Kap. 6.

endlich strebt. Bezeichnen wir die Eigenfunktionen dieses Problemes mit w_1, $w_2, \ldots$ und wählen wir speziell $v_i = w_i$, so wird sicherlich $V[\varphi] \geqq \mu_n$ werden und daher gewiss auch bei hinreichend grossem n

$$\frac{\alpha\,(\sqrt{V[\varphi]} - \beta)^2}{\alpha'\sqrt{V[\varphi]} + \beta'} - \gamma' > k\sqrt{\mu_n}$$

sein, wo k eine nur vom Gebiet abhängige Zahl ist. Daher ist auch für $v_i = w_i$ das Minimum der rechten Seite von (102) und somit auch das Minimum der linken Seite grösser als diese Zahl; folglich gilt dieses erst recht von dem Maximum-Minimum λ_n^*. Es besteht also bei hinreichend grossem n die Beziehung

$$\lambda_n^* > k\sqrt{\mu_n},$$

und aus ihr folgt unmittelbar wegen $\lambda_n \geqq \lambda_n^*$ die Behauptung $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, welche zugleich die Aussage in sich schliesst, dass bei unserem Problem nur endlich viele Eigenwerte negativ sein können.

Die oben zugrunde gelegte Annahme (94) schliesst den Fall aus, dass, z. B. für zwei Variable,

$$\mathfrak{H}[\varphi] = \sum c_\nu \int\limits_{C_\nu} \varphi^2\,ds$$

oder allgemeiner

$$\mathfrak{H}[\varphi] = \sum \int\limits_{C_\nu} p_\nu^2 \varphi^2\,ds$$

ist, wo p_ν eine stetige positive Ortsfunktion auf C_ν ist. Um auch in diesem Falle die Tatsache des unendlichen Anwachsens der Eigenwerte sicher zu stellen, machen wir die beschränkende Annahme, dass alle Zusatzglieder, welche in $\mathfrak{D}$ zu D hinzukommen, positiv definit sind. Dann erhalten wir ohne weiteres die Abschätzung:

$$\frac{\mathfrak{D}[\varphi]}{\mathfrak{H}[\varphi]} > \frac{V[\varphi]}{\alpha'\sqrt{V[\varphi]} + \delta'},$$

aus der wir alle weiteren Schlüsse wie oben ziehen können. Mithin ist auch in diesem Falle die Vollständigkeit der Eigenfunktionen erwiesen.

KAPITEL IV.

Die Existenz der Lösung.

Wir wenden uns nun der Frage nach der Existenz der Lösungen unserer Variationsprobleme zu. Für die Probleme mit einer unabhängigen Veränderlichen wollen wir den Beweis hier durch Grenzübergang vom entsprechenden algebraischen Problem durchführen, während wir hinsichtlich der Probleme mit mehreren unabhängigen Veränderlichen auf eine demnächst erscheinende weitere Publikation verweisen. Der Kürze halber wollen wir uns auf natürliche Probleme beschränken, d. h. von künstlichen Randbedingungen absehen. Der Fall künstlicher Randbedingungen lässt sich analog erledigen.

§ 12. Das einfachste Problem.

Der Gedanke des Beweises tritt am deutlichsten bei dem einfachsten Problem hervor, bei welchem

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \int_0^1 (p\varphi'^2 + q\varphi^2)\,dx + t\varphi(0)^2 + t'\varphi(1)^2 = D[\varphi] + \int_0^1 q\varphi^2\,dx + t\varphi(0)^2 + t'\varphi(1)^2$$

$$\mathfrak{H}[\varphi] = \int_0^1 r\varphi^2\,dx = H[\varphi]$$

gesetzt ist.

Wir weisen darauf hin, dass, auch wenn t und t' nicht als positive Grössen vorausgesetzt sind, dennoch aus der Integralungleichung (96) Kap. III die Beschränktheit von D folgt, sobald die Beschränktheit von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ feststeht, und dass $\mathfrak{D}$ jedenfalls oberhalb einer festen Schranke liegt, sobald $\mathfrak{H}$ beschränkt ist.

Wir teilen das Grundintervall $0 \leqq x \leqq 1$ in n gleiche Teile der Länge l. Mit $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\nu, \ldots, \varphi_n$ bezw. $p_0, \ldots, p_n$; $q_0, \ldots, q_n$; $r_0, \ldots, r_n$ bezeichnen wir die Werte von $\varphi(x)$ bezw. $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ in den Teilpunkten, wobei Anfangspunkt und Endpunkt des Intervalles als nullter bezw. n-ter Teilpunkt zu zählen sind.

Neben den Ausdrücken $\mathfrak{D}[\varphi]$ und $\mathfrak{H}[\varphi]$ betrachten wir die beiden quadratischen Formen in den Variabeln φ_ν

$$\mathfrak{D}_n[\varphi, \varphi] = l\sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu \left(\frac{\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu}{l}\right)^2 + l\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu \varphi_\nu^2 + t\varphi_0^2 + t'\varphi_n^2$$

$$\mathfrak{H}_n[\varphi,\varphi] = l\sum_{\nu=1}^{n-1} r_\nu\,\varphi_\nu^2.$$ [1]

Wir bezeichnen mit λ die untere Grenze des Quotienten $\mathfrak{D}[\varphi] : \mathfrak{H}[\varphi]$, wenn zum Vergleich im Grundgebiet stetige, mit stückweise stetiger Ableitung versehene Funktionen zugelassen werden; zu zeigen, dass diese untere Grenze für eine solche Funktion $\varphi(x) = u(x)$ angenommen wird, ist gerade das Hauptziel unseres Beweises. Das Minimum des Quotienten $\mathfrak{D}_n[\varphi,\varphi] : \mathfrak{H}_n[\varphi,\varphi]$ d. h. der kleinste Eigenwert der quadratischen Form $\mathfrak{D}_n$ mit Bezug auf die quadratische Form $\mathfrak{H}_n$ sei $\lambda^{(n)}$; dass dieses Minimum erreicht wird, ist hier selbstverständlich. Das Wertsystem $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$, für welches es angenommen wird, bezeichnen wir mit $\varphi_\nu = u_\nu^{(n)}$ oder kurz mit $\varphi_\nu = u_\nu$; wir dürfen voraussetzen, dass es der Normierungsbedingung

$$\mathfrak{H}_n[u^{(n)}, u^{(n)}] = 1$$

genügt.

Das Wertsystem $u_0^{(n)},\ldots,u_n^{(n)}$ ergänzen wir zu einer stetigen Funktion $u^{(n)}(x)$, der zugehörigen »Polygonfunktion«, welche in jedem der Teilintervalle linear ist und in den Teilpunkten die Funktionswerte $u_\nu^{(n)}$ besitzt.

Wir wollen nun beweisen: erstens dass der untere Grenzwert (limes inferior) der $\lambda^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nicht grösser als λ ist, (es wird sich später zeigen, dass er ihm gleich ist), zweitens dass wir aus den Polygonfunktionen $u^{(n)}(x)$ eine geeignete Teilfolge auswählen können, welche im ganzen Grundgebiete gleichmässig gegen eine stetige Funktion $u(x)$ konvergiert, und, drittens dass diese Grenzfunktion die gesuchte erste Eigenfunktion unseres Variationsproblemes ist.

Um die erste dieser Behauptungen zu beweisen, betrachten wir irgend eine zulässige Funktion $\varphi(x)$, für welche $\mathfrak{H}[\varphi] = 1$ und $\lambda \leqq \mathfrak{D}[\varphi] < \lambda + \varepsilon$ ist, unter ε eine beliebig klein vorgegebene Konstante verstanden. Nach der Definition von λ muss es eine solche Funktion zu jedem noch so kleinen ε geben. Offenbar wird, wenn wir n hinreichend gross wählen, der entsprechende Ausdruck $\mathfrak{H}_n[\varphi,\varphi]$, bezw. der Ausdruck $\mathfrak{D}_n[\varphi,\varphi]$, sich nur beliebig wenig von $\mathfrak{H}[\varphi] = 1$ bezw. von $\mathfrak{D}[\varphi]$ unterscheiden, sodass der Quotient $\mathfrak{D}_n[\varphi,\varphi] : \mathfrak{H}_n[\varphi,\varphi]$ höchstens etwa um 2ε von λ abweicht. Also ist auch das Minimum $\lambda^{(n)}$ von $\mathfrak{D}_n[\varphi,\varphi] : \mathfrak{H}_n[\varphi,\varphi]$ sicher nicht grösser als $\lambda + 2\varepsilon$

[1] Dass ausser in der ersten Summe die Summation nicht mehr über die Werte für $\nu = 0$ und $\nu = n$ erstreckt wird, geschieht absichtlich mit Rücksicht auf eine sich später daraus ergebende kleine Vereinfachung.

$$\lambda^{(n)} \leqq \lambda + 2\varepsilon,$$

und für den unteren Grenzwert gilt dann[1]:

$$\varliminf_{n \to \infty} \lambda^{(n)} = \underline{\lambda} \leqq \lambda.$$

Bevor wir den Beweis der zweiten Behauptung durchführen, schicken wir folgende Bemerkung voraus, welche auch für die Untersuchung des nächsten Paragraphen von Bedeutung ist: Die Gesamtheit aller stetigen Funktionen $\varphi(x)$ mit stückweise stetiger Ableitung, für welche ein Integral der Form $\int\limits_0^1 p\varphi'^2\,dx$ unterhalb einer festen Schranke M bleibt, ist gleichartig (d. h. gleichmässig in Bezug auf die gesamte Funktionenmenge) stetig, sobald nur überall $p(x) > m$ wird, unter m eine feste positive Konstante verstanden.

In der Tat ist:

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqq \int\limits_{x_1}^{x_2} |\varphi'(x)|\,dx$$

und daher zufolge der Schwarzschen Ungleichung

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|^2 \leqq |x_1 - x_2| \int\limits_0^1 \varphi'^2\,dx \leqq |x_1 - x_2| \frac{M}{m}.$$

Diese Gleichung drückt die behauptete gleichartige Stetigkeit aus. Wenn also eine solche Funktionenmenge auch noch gleichmässig beschränkt ist, so lässt sich aus ihr nach einem bekannten Fundamentalsatz der Analysis stets eine gleichmässig konvergente Teilfolge auswählen. Die gleichmässige Beschränktheit einer solchen Funktionenmenge ist aber gesichert, wenn es für jede Funktion eine Stelle des Intervalles gibt, für die der Funktionswert unter einer festen Schranke liegt, also sicherlich z. B., wenn $\mathfrak{H}[\varphi]$ unterhalb einer solchen Schranke bleibt.

Da hiernach die Funktionen $u^{(n)}(x)$ gleichartig stetig und somit wegen $\mathfrak{H}_n[u^{(n)}, u^{(n)}] = 1$ auch gleichmässig beschränkt sind, so können wir aus ihnen eine Teilfolge auswählen, welche gleichmässig gegen eine stetige Grenzfunktion $u(x)$ konvergiert.

---

[1] Man könnte schon an dieser Stelle unmittelbar erkennen, dass $\lambda^{(n)}$ gegen λ konvergiert. Hierzu braucht man sich nur davon Rechenschaft zu geben, dass bei hinreichend grossem n auch umgekehrt der Quotient $\mathfrak{D}[u^{(n)}] : \mathfrak{H}[u^{(n)}]$ beliebig nahe an $\lambda^{(n)}$ kommt; da dieser Quotient nicht kleiner als λ ist, so gilt dies auch für den unteren Grenzwert.

Im folgenden wollen wir unter einer Wertfolge $1, 2, \ldots, n, \ldots$ immer nur eine solche verstehen, für welche die Beziehungen $\lim \lambda^{(n)} = \underline{\lambda}$ und $\lim u^{(n)}(x) = u(x)$ gelten.

Um schliesslich zu zeigen, dass diese Grenzfunktion $u(x)$ stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzt, und dass sie die Lösung unseres Eigenwertproblemes ist, betrachten wir die Bedingungsgleichungen, welchen die Werte $u_\nu = u_\nu^{(n)}$ genügen müssen. Wir gelangen zu ihnen unmittelbar entweder nach den elementaren Regeln der Differentialrechnung oder in vollkommener Analogie zu den Erörterungen aus § 1, indem wir beachten, dass für ein willkürliches Wertsystem $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_\nu, \ldots, \zeta_n$ die Relation

$$\mathfrak{D}_n[\zeta, u^{(n)}] - \lambda^{(n)} \mathfrak{H}_n[\zeta, u^{(n)}] = 0$$

erfüllt sein muss, welche ausgeschrieben lautet:

$$\frac{1}{l} \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu \varDelta u_\nu \varDelta \zeta_\nu + l \sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu u_\nu \zeta_\nu + t u_0 \zeta_0 + t' u_n \zeta_n - \lambda l \sum_{\nu=1}^{n-1} r_\nu u_\nu \zeta_\nu = 0$$

$$\varDelta u_\nu = u_{\nu+1} - u_\nu.$$

Eine unmittelbar sich ergebende Umformung (partielle Summation) liefert uns

$$\zeta_0 \left(t u_0 - p_0 \frac{\varDelta u_0}{l} \right) + \zeta_n \left(t' u_n + p_{n-1} \frac{\varDelta u_{n-1}}{l} \right)$$
$$- \frac{1}{l} \sum_{\nu=1}^{n-1} \zeta_\nu (p_\nu \varDelta u_\nu - p_{\nu-1} \varDelta u_{\nu-1}) + l \sum_{\nu=1}^{n-1} \zeta_\nu q_\nu u_\nu - \lambda l \sum_{\nu=1}^{n-1} \zeta_\nu r_\nu u_\nu = 0,$$

woraus sich wegen der Willkürlichkeit des Wertsystemes $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ zunächst die Randbedingungen

$$t u_0 - p_0 \frac{\varDelta u_0}{l} = 0 \tag{103}$$

$$t' u_n + p_{n-1} \frac{\varDelta u_{n-1}}{l} = 0 \tag{104}$$

und sodann die Differenzengleichung

$$\frac{1}{l^2} (p_\nu \varDelta u_\nu - p_{\nu-1} \varDelta u_{\nu-1}) - q_\nu u_\nu + \lambda r_\nu u_\nu = 0 \tag{105}$$

oder

$$\frac{1}{l^2} \varDelta (p_{\nu-1} \varDelta u_{\nu-1}) - q_\nu u_\nu + \lambda r_\nu u_\nu = 0$$

ergibt.

Die Summierung dieser Differenzengleichung (105) vom Summationsindex 1 bis zum Summationsindex ν $(1 \leqq \nu \leqq n-1)$ bezw. $n-1$ ergibt mit Rücksicht auf (103) und (104)

(106)
$$\frac{1}{l} p_\nu \Delta u_\nu = l \sum_{\mu=1}^{\nu} q_\mu u_\mu - \lambda l \sum_{\mu=1}^{\nu} r_\mu u_\mu + t u_0$$

(107)
$$\frac{1}{l} p_{n-1} \Delta u_{n-1} = -t' u_n = l \sum_{\mu=1}^{n-1} q_\mu u_\mu - \lambda l \sum_{\mu=1}^{n-1} r_\mu u_\mu + t u_0.$$

Nochmalige Summierung von (106) nach dem Index ν von 1 bis $m-1$ $(m \leqq n)$ ergibt, wenn vorher durch p_ν dividiert wird,

$$u_m = u_1 - l \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{1}{p_\nu} \left(l \sum_{\mu=1}^{\nu} (\lambda r_\mu - q_\mu) u_\mu - t u_0 \right).$$

Wegen der gleichmässigen Konvergenz der Wertmenge $u_\nu^{(n)}$ gegen die stetige Funktion $u(x)$ folgt nun unmittelbar auf Grund der elementarsten Tatsachen der Integralrechnung

(108)
$$u(x) = u(0) - \int_0^x d\xi \frac{1}{p(\xi)} \left\{ \int_0^\xi (\underline{\lambda} r(\eta) - q(\eta)) u(\eta) \, d\eta - t u(0) \right\}$$

und aus dieser Gleichung durch Differentiation die weitere

(109)
$$p(x) u'(x) = -\int_0^x (\underline{\lambda} r(\eta) - q(\eta)) u(\eta) \, d\eta + t u(0)$$

und durch nochmalige Differentiation

(110)
$$(p u')' = -\underline{\lambda} r u + q u,$$

woraus wir ersehen, dass tatsächlich u stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzt und der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung für $\lambda = \underline{\lambda}$ genügt. Es konvergiert aber nicht nur $u^{(n)}(x)$ gleichmässig gegen $u(x)$, sondern auch der erste Differenzenquotient gleichmässig gegen die erste Ableitung; man erkennt das unmittelbar daraus, dass die rechte Seite von (106) gleichmässig gegen die rechte Seite von (109) konvergiert. Hieraus folgt sofort die Konvergenz der Form $l \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu \left(\frac{\Delta u_\nu}{l} \right)^2$ gegen $\int_0^1 p u'^2 \, dx$; da auch die Integrale $\int_0^1 q u^2 \, dx$ und $\int_0^1 r u^2 \, dx$

Grenzwerte der entsprechenden Formen $l\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu u_\nu^2$ und $l\sum_{\nu=1}^{n-1} r_\nu u_\nu^2$ sind, so erhalten wir wegen

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{D}_n[u^{(n)}, u^{(n)}] = \underline{\lambda}, \quad \mathfrak{H}_n[u^{(n)}, u^{(n)}] = 1$$

für die Grenzfunktion $u(x)$

$$\mathfrak{D}[u] = \underline{\lambda}, \qquad \mathfrak{H}[u] = 1. \tag{111}$$

Der Quotient $\underline{\lambda} = \mathfrak{D}[u] : \mathfrak{H}[u]$ kann aber nicht kleiner sein, als die untere Grenze λ, und da $\underline{\lambda}$ auch nicht grösser ist, muss

$$\underline{\lambda} = \lim \lambda^{(n)} = \lambda \tag{112}$$

gelten. Damit ist erwiesen, dass $u(x)$ eine Lösung des Variationsproblemes und somit die erste Eigenfunktion $u_1(x)$, während λ der erste Eigenwert λ_1 ist.

Dass $u(x)$ der Eigenwertgleichung

$$(pu')' - qu + \lambda r u = 0 \tag{113}$$

genügt, folgt nun sofort aus (110); dass die erste Randbedingung

$$p(0)\,u'(0) = t u(0) \tag{114}$$

erfüllt ist, ergibt sich aus (109) für $x = 0$.

Für die zweite Randbedingung ziehen wir die Formel

$$-t'\,u(1) = -\int_0^1 (\lambda r - q)\,u\,d\eta + t u(0)$$

heran, die sich aus (107) durch Grenzübergang ergibt. Gleichung (109) liefert dann für $x = 1$

$$p(1)\,u'(1) = -t'\,u(1). \tag{115}$$

Beide Randbedingungen sowie die Gleichung (113) folgen selbstverständlich auch unmittelbar als natürliche Randbedingungen bezw. als Eulersche Differentialgleichung aus der Tatsache, dass u die Lösung des Variationsproblemes ist.

Durch eine ganz ähnliche Betrachtung erweisen wir nun die Existenz des zweiten Eigenwertes und der zweiten Eigenfunktion. Wir bezeichnen die eben gefundene erste Eigenfunktion mit u_1, den ersten Eigenwert mit λ_1 und definieren jetzt die Grösse $\lambda = \lambda_2$ als die untere Grenze des Quotienten $\mathfrak{D}[\varphi] : \mathfrak{H}[\varphi]$, wenn die Funktion φ ausser den Stetigkeitsbedingungen noch der linearen Nebenbedingung

$$\mathfrak{H}[\varphi, u_1] = 0 \tag{116}$$

unterworfen wird. Bezeichnen wir nunmehr mit $\lambda^{(n)}$ den zweiten Eigenwert der quadratischen Form $\mathfrak{D}_n[\varphi, \varphi]$ in Bezug auf $\mathfrak{H}_n[\varphi, \varphi]$, so behaupten wir, dass

$$\underline{\lim}\ \lambda^{(n)} = \underline{\lambda} \leqq \lambda = \lambda_2$$

wird. Der Wert $\lambda^{(n)}$ ist definiert als der kleinste Wert von $\mathfrak{D}_n[\varphi, \varphi]$ unter der Nebenbedingung

$$(117) \qquad \mathfrak{H}_n[\varphi, \varphi] = 1, \ \mathfrak{H}_n[\varphi, u_1^{(n)}] = 0,$$

wenn wir mit $u_1^{(n)}$ das oben kurz $u^{(n)}$ genannte Wertsystem bezeichnen, für welches

$$\mathfrak{D}_n[u_1^{(n)}, u_1^{(n)}] = \lambda_1^{(n)}, \ \mathfrak{H}_n[u_1^{(n)}, u_1^{(n)}] = 1$$

ist.

Ist nun φ eine den Stetigkeitsbedingungen und der Nebenbedingung (116) genügende Funktion, für welche

$$\mathfrak{D}[\varphi] < \lambda + \varepsilon, \ \mathfrak{H}[\varphi] = 1$$

gilt, so wird sicherlich bei hinreichend grossem n wieder $\mathfrak{D}_n[\varphi, \varphi]$ und $\mathfrak{H}_n[\varphi, \varphi]$ beliebig wenig von $\mathfrak{D}[\varphi]$ und $\mathfrak{H}[\varphi]$ verschieden sein und auch $\mathfrak{H}_n[\varphi, u_1^{(n)}]$ beliebig klein werden.

Wir ersetzen nun φ durch eine Funktion ψ, für die genau $\mathfrak{H}_n[\psi, u_1^{(n)}] = 0$ gilt; wir setzen sie mit konstantem α in der Form $\psi(x) = \varphi(x) + \alpha\, u_1^{(n)}(x)$ an und finden $\mathfrak{H}_n[\varphi, u_1^{(n)}] + \alpha = 0$; es wird also α bei hinreichend grossem n beliebig klein.

Sodann folgt wegen

$$\mathfrak{D}_n[\varphi, u_1^{(n)}] = -\lambda_1^{(n)}\, \mathfrak{H}_n[\varphi, u_1^{(n)}]$$

und wegen

$$\mathfrak{H}_n[\psi, \psi] = \mathfrak{H}_n[\varphi, \varphi] + 2\alpha\, \mathfrak{H}_n[\varphi, u_1^{(n)}] + \alpha^2 = \mathfrak{H}_n[\varphi, \varphi] - \alpha^2,$$

die Gleichung

$$\mathfrak{D}_n[\psi, \psi] = \mathfrak{D}_n[\varphi, \varphi] + 2\alpha\, \mathfrak{D}_n[\varphi, u_1^{(n)}] + \alpha^2 \lambda_1^{(n)} = \mathfrak{D}_n[\varphi, \varphi] - \alpha^2 \lambda_1^{(n)}.$$

Wir haben somit für hinreichend grosses n ein Wertsystem $\psi_0, \ldots, \psi_n$ gefunden, das der Bedingung (116) genügt, und für das $\mathfrak{D}_n[\psi, \psi] : \mathfrak{H}_n[\psi, \psi]$ beliebig nahe an λ liegt. So können wir wie früher schliessen, dass der untere Grenzwert der $\lambda^{(n)}$ nicht grösser ist als λ; es ist also

$$\underline{\lambda} = \underline{\lim}\ \lambda^{(n)} \leqq \lambda.$$

Alle weiteren Schlüsse verlaufen genau wie früher. Bezeichnen wir das Wertsystem, für welches

$$\mathfrak{D}_n[\varphi, \varphi] = \lambda_2^{(n)} \qquad \mathfrak{H}_n[\varphi, \varphi] = 1$$
$$\mathfrak{H}_n[\varphi, u_1^{(n)}] = 0$$

wird, mit $u_2^{(n)}$ oder kurz mit $u^{(n)}$, so erkennen wir unmittelbar wie oben, dass dieses Wertsystem für ein willkürliches Wertsystem $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ der Relation

$$\mathfrak{D}_n[u^{(n)}, \zeta] - \lambda^{(n)}\mathfrak{H}_n[u^{(n)}, \zeta] = 0$$

genügen muss.

Freilich besteht diese Relation zunächst nur für Wertsysteme ζ_ν, welche die Relationen

$$\mathfrak{H}_n[\zeta, u_1^{(n)}] = 0$$

erfüllen. Aber man befreit sich sofort genau nach dem Muster von § 1 von dieser einschränkenden Bedingung.

Dann vollendet sich der Beweis wörtlich so wie beim ersten Eigenwert, und in derselben Weise vollzieht sich der Existenzbeweis für den zweiten, dritten usw. Eigenwert und die entsprechenden Eigenfunktionen.

§ 13. Die allgemeineren Probleme.

Für die Lösungen der übrigen im Kapitel I behandelten Probleme kann der Existenzbeweis ganz nach dem Muster von § 12 geführt werden. Es wird genügen, etwa folgende Fälle zu betrachten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}[\varphi] &= D[\varphi] + Z[\varphi] + W[\varphi] \\ \mathfrak{H}[\varphi] &= H[\varphi] \end{aligned} \tag{118}$$

wobei

$$D[\varphi] = \int_0^1 p\varphi'^2\,dx \qquad H[\varphi] = \int_0^1 r\varphi^2\,dx$$

$$Z[\varphi] = \sum_{i,k=1}^{h} a_{ik}\varphi(\xi_i)\varphi(\xi_k) \qquad (a_{ik} = a_{ki}), \tag{119}$$

$$W[\varphi] = \int_0^1\int_0^1 A(x, y)\varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy \qquad (A(x, y) = A(y, x))$$

gesetzt ist.[1]

Unter den h Werten ξ_i soll $\xi_1 = 0$ und $\xi_h = 1$ sein. Wir bemerken wieder,

[1] Die Stellen ξ_i bedeuten in diesem Paragraphen dasselbe wie die Stellen x_i in Kap. I.

dass mit Rücksicht auf die Überlegungen vom § 12 aus der Beschränktheit von $\mathfrak{D}$ die Beschränktheit von D folgt, selbst wenn die Zusatzglieder Z und W nicht positiv definit sind.

Wir teilen das Grundgebiet in n Intervalle und stellen die quadratischen Formen auf, die den Integralen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ entsprechen. Hierbei ist es zweckmässig, den Punkt ξ_i durch den am nächsten liegenden Punkt x_{ν_i} der Einteilung des Intervalles $0 \leqq x \leqq 1$ zu ersetzen, wobei wir n so gross voraussetzen, dass zu einem Teilpunkt höchstens ein Punkt ξ_i gehört. Die Integralausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi]$ und $\mathfrak{H}[\varphi]$ ersetzen wir nun durch die quadratischen Formen in den Variabeln $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$:

$$\mathfrak{D}_n[\varphi, \varphi] = l \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu \left(\frac{\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu}{l}\right)^2 + \sum_{i,k=1}^{h} a_{ik}\, \varphi_{\nu_i} \varphi_{\nu_k} + l^2 \sum_{\nu,\mu}{}' A_{\nu\mu}\, \varphi_\nu \varphi_\mu$$

$$\mathfrak{H}_n[\varphi, \varphi] = l \sum_{\nu}{}' r_\nu \varphi_\nu^2.$$

Dabei ist $A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu} = A(x_\nu, x_\mu)$ gesetzt und Σ' bedeutet eine Summe über alle Werte der Indizes mit Ausnahme der h Werte ν_i.

Wiederum gilt auf Grund genau derselben Überlegungen wie in § 12, dass der untere Grenzwert $\underline{\lambda}$ der Eigenwerte $\lambda^{(n)}$ des Problemes für $\mathfrak{D}_n[\varphi, \varphi] : \mathfrak{H}_n[\varphi, \varphi]$ nicht grösser ist als der Eigenwert λ des Problemes $\mathfrak{D}[\varphi] : \mathfrak{H}[\varphi]$, und weiter, dass die Polygonfunktionen $u^{(n)}(x)$, die wir aus den zu $\lambda^{(n)}$ gehörenden Wertsystemen $u_\nu^{(n)}$ bilden, eine Teilfolge enthalten, die gleichmässig gegen eine stetige Grenzfunktion $u(x)$ konvergiert.

Für das Wertsystem $u_\nu^{(n)} = u_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ erhalten wir die Beziehung:

$$\mathfrak{D}_n[u^{(n)}, \zeta] - \lambda^{(n)} \mathfrak{H}_n[u^{(n)}, \zeta] = 0 \tag{120}$$

oder ausgeschrieben

$$\frac{1}{l} \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu \Delta u_\nu \Delta \zeta_\nu + \sum_{i,k=1}^{h} a_{ik}\, u_{\nu_k} \zeta_{\nu_i} + l^2 \sum_{\nu,\mu}{}' A_{\nu\mu}\, u_\mu \zeta_\nu - \lambda l \sum_{\nu}{}' r_\nu u_\nu \zeta_\nu = 0. \tag{121}$$

Die Umordnung nach ζ_ν liefert die Randbedingungen

$$\frac{1}{l} p_0 \Delta u_0 - \sum_{k=1}^{h} a_{1k}\, u_{\nu_k} = 0; \quad -\frac{1}{l} p_{n-1} \Delta u_{n-1} - \sum_{k=1}^{h} a_{nk}\, u_{\nu_k} = 0, \tag{122}$$

ferner die Sprungbedingungen an den Stellen x_{ν_i}

$$\frac{1}{l}(p_{\nu_i}\varDelta u_{\nu_i}-p_{\nu_i-1}\varDelta u_{\nu_i-1})-\sum_{k=1}^{h}a_{ik}\,u_{\nu_k}=0 \qquad (i=2,\ldots,h-1) \tag{123}$$

und für alle anderen Teilpunkte die Differenzengleichung

$$\frac{1}{l^2}(p_\nu\varDelta u_\nu-p_{\nu-1}\varDelta u_{\nu-1})-l\sum_{\mu}{}' A_{\nu\mu}\,u_\mu+\lambda r_\nu u_\nu=0. \tag{124}$$

Summierung von (124) über den Index ν gibt mit Rücksicht auf (122) und (123)

$$\frac{1}{l}p_\nu\varDelta u_\nu=\sum_{\substack{i\\ \nu_i\leqq\nu}}\sum_{k=1}^{h}a_{ik}\,u_{\nu_k}+l^2\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\sum_{\mu}{}' A_{\varkappa\mu}\,u_\mu-\lambda l\sum_{\mu=1}^{\nu}{}' r_\mu u_\mu \tag{125}$$

und

$$0=\sum_{i,k=1}^{h}a_{ik}\,u_{\nu_k}+l^2\sum_{\varkappa=1}^{n-1}\sum_{\mu}{}' A_{\varkappa\mu}\,u_\mu-\lambda l\sum_{\mu=1}^{n-1}r_\mu u_\mu. \tag{126}$$

Die zweite Summierung von (125) über ν von 1 bis $m-1$ $(m\leqq n)$ liefert:

$$u_m=u_1+l\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{p_\nu}\sum_{\substack{i\\ \nu_i\leqq\nu}}\sum_{k=1}^{h}a_{ik}\,u_{\nu_k}+l^3\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{p_\nu}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\sum_{\mu}{}' A_{\varkappa\mu}\,u_\mu-\lambda l^2\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{p_\nu}\sum_{\mu=1}^{\nu}{}' r_\mu u_\mu. \tag{127}$$

Führt man nun den Grenzübergang $n\to\infty$ aus, so erhält man:

$$\begin{aligned}u(x)=u(0)&+\int_0^x d\xi\frac{1}{p}\sum_{\substack{i\\ \xi_i\leqq\xi}}\sum_{k=1}^{h}a_{ik}u(\xi_k)\\&+\int_0^x d\xi\frac{1}{p}\int_0^\xi d\eta\int_0^1 A(\eta,\xi)\,u(\xi)\,d\xi-\lambda\int_0^x d\xi\frac{1}{p}\int_0^\xi ru\,d\eta.\end{aligned} \tag{128}$$

Für die Ableitung ergibt sich hieraus

$$pu'=\sum_{\substack{i\\ \xi_i\leqq x}}\sum_{k=0}^{h}a_{ik}\,u(\xi_k)+\int_0^x d\xi\int_0^1 A(\xi,\eta)\,u(\eta)\,d\eta-\lambda\int_0^x ru\,d\xi \tag{129}$$

und durch nochmalige Differentiation

$$(130) \qquad (p u')' + \underline{\lambda} r u - \int_0^1 A(x, \xi) u(\xi) d\xi = 0.$$

Da aus Formel (129) und (125) nunmehr auch die gleichmässige Konvergenz des ersten Differenzenquotienten von $u^{(n)}$ gegen die Ableitung $u'(x)$ folgt, so ergibt sich für die Grenzfunktion unmittelbar wie in § 12

$$\mathfrak{D}[u] = \underline{\lambda}, \qquad \mathfrak{H}[u] = 1.$$

Da $\underline{\lambda} \leqq \lambda$ und sicherlich wegen der Definition von λ andererseits $\mathfrak{D}[u] \geqq \lambda$ sein muss, so folgt

$$\mathfrak{D}[u] = \lambda,$$

d. h. u löst unser Variationsproblem. Somit erfüllt u gemäss § 5 auch die Randbedingungen bezw. Sprungbedingungen

$$p(0) u'(0) = \sum_{k=1}^{h} a_{1k} u(\xi_k); \qquad -p(1) u'(1) = \sum_{k=1}^{h} a_{hk} u(\xi_k)$$

$$p(\xi_i)(u'(\xi_i + 0) - u'(\xi_i - 0)) = \sum_{k=1}^{h} a_{ik} u(\xi_k)$$

welche sich naturgemäss auch unmittelbar durch Grenzübergang aus (122) und (123) vermöge (126) und (129) ergeben.

Wir haben damit die Existenz der ersten Eigenfunktion nachgewiesen und erkennen sofort, dass die Existenz der weiteren Eigenwerte und Eigenfunktionen sich ohne jede neue Modifikation ganz nach dem Muster des vorigen Paragraphen ergibt.

§ 14. Schlussbemerkungen.

Die in diesem Kapitel dargelegte Methode lässt sich auch ohne weitere Modifikation zum Existenzbeweise benutzen, wenn das Führungsintegral des Problemes höhere als erste Ableitungen enthält. Dagegen ist eine unmittelbare Übertragung unserer Methode für den Fall mehrerer unabhängiger Variablen nicht möglich. Immerhin ist auch hier der Weg gangbar, das Differential- oder Funktionalgleichungsproblem durch ein entsprechendes Problem für Differenzengleichungen bezw. Differenzensummengleichungen zu ersetzen und dann einen Grenzübergang auszuführen, wie ich an anderer Stelle[1] näher darlegen will.

Die Ausdehnung der in dieser Arbeit entwickelten Theorie auf den Fall, dass es sich um die Bestimmung mehrerer unbekannter Funktionen handelt, macht, wie zum Schluss bemerkt werden mag, keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten.

ANHANG.

Beispiele aus der mathematischen Physik.

Als Anhang seien einige kurze Bemerkungen über mehrere der mathematischen Physik entnommene Beispiele hinzugefügt, welche zum Teil insofern über den Rahmen der oben entwickelten Theorie hinausgehen, als es sich bei ihnen um die Bestimmung mehrerer unbekannter Funktionen handelt.

1. Eigenschwingungen einer Membran, welche in ein Netz von elastischen Fäden eingespannt ist.

Eine ebene homogene und gleichmässig gespannte Membran, die in der Ruhelage das Gebiet G bedecke, sei durchsetzt von einem System geradliniger elastischer Fäden, den Kurven C_ν. Der Rand sei ein aus einigen der Kurven C_ν gebildetes Polygon. Bei festgehaltenen Ecken des Randpolygons sollen die Transversalschwingungen dieser Membran betrachtet werden. Der potentiellen bezw. kinetischen Energie der um $\varphi(x, y)$ von der Ruhelage abweichenden Fläche entspricht:

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \iint\limits_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy + \sum_\nu \int\limits_{C_\nu} a_\nu \varphi'(s)^2\, ds$$

bezw.

$$\mathfrak{H}[\varphi] = \iint\limits_G \varphi^2\, dx\, dy + \sum_\nu \int\limits_{C_\nu} \varrho_\nu \varphi(s)^2\, ds.$$

Hierbei sind die Konstanten a_ν bezw. ϱ_ν der Spannung bezw. der Dichte des Fadens C_ν proportional.

Die Eigenschwingungen dieser Membran werden durch das Maximum-Minimumproblem für $\mathfrak{D}[\varphi] : \mathfrak{H}[\varphi]$ geliefert. Sie erfüllen die Differentialgleichung

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0.$$

[1] Vgl. auch meinen Aufsatz: Über die Theorie der linearen partiellen Differenzengleichungen. Göttinger Nachrichten 23.X. 1925.

Dazu treten auf den Kurven C_ν die Sprung- bezw. Randbedingungen

$$S_\nu[\varphi] - a_\nu \varphi''(s) - \lambda_\nu \varrho_\nu \varphi(s) = 0.$$

In jeder Ecke des Kurvennetzes besteht die Eckenbedingung:

$$\Sigma a_\nu \varphi' = 0,$$

wobei die Summe über alle in der Ecke endigenden Kurven C_ν zu nehmen ist und φ' die Ableitung von φ nach der von der Ecke aus wachsenden Bogenlänge bedeutet (vgl. S. 38 f.). In den Ecken des Randpolygons gilt, wie von vornherein gefordert, $\varphi = 0$.

2. Eigenschwingungen einer durch Träger versteiften Platte.

Die Platte G sei durchsetzt und berandet von einem System von geradlinigen Trägern C_ν. Platte und Träger leisten Widerstand gegen Biegung; ihre potentiellen Energien hängen also von den zweiten Ableitungen der Durchbiegung $\varphi(x, y)$ ab. Der gesamten potentiellen bezw. kinetischen Energie entsprechen Ausdrücke von der Form:

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \iint\limits_G \{(\Delta\varphi)^2 - 2(1-\sigma)(\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)\}\, dx\, dy + \sum_\nu \int\limits_{C_\nu} a_\nu \varphi''(s)^2\, ds$$

bezw.

$$\mathfrak{H}[\varphi] = \iint\limits_G \varphi^2\, dx\, dy + \sum_\nu \int\limits_{C_\nu} \varrho_\nu \varphi(s)^2\, ds;$$

σ ist die Querdehnungszahl.

Die Eigenschwingungen dieser Platte erfüllen die Differentialgleichung

$$\Delta\Delta\varphi - \lambda\varphi = 0.$$

Um die Sprungbedingungen, die sich an den Kurven C_ν ergeben, zu formulieren, bilden wir die folgenden Ausdrücke

$$P[\varphi] = \left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)^2 \varphi_{xx} + 2\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\varphi_{xy} + \left(\frac{\partial y}{\partial n}\right)^2 \varphi_{yy}$$

$$Q[\varphi] = x'\frac{\partial x}{\partial n}\varphi_{xx} + \left(y'\frac{\partial x}{\partial n} + x'\frac{\partial y}{\partial n}\right)\varphi_{xy} + y'\frac{\partial y}{\partial n}\varphi_{yy},$$

wobei sich die Differentiation $\frac{\partial}{\partial n}$ auf die Ableitung nach der Richtung denjenigen Normalen bezieht, die ins Innere der in C_ν zusammenstossenden Gebietsteile weisen; x' und y' bezeichnen die tangentialen Ableitungen.

Die erste Sprungbedingung besteht dann in der Forderung, dass der Ausdruck

$$\sigma \varDelta \varphi + (1-\sigma) P[\varphi]$$

bei der Annäherung an C_ν von beiden Seiten denselben Wert ergibt.

Zweitens muss gelten:

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\varDelta \varphi + (1-\sigma)\frac{d}{ds} Q[\varphi]\right)_1 + \left(\frac{\partial}{\partial n}\varDelta \varphi + (1-\sigma)\frac{d}{ds} Q[\varphi]\right)_2$$
$$= -a_\nu \varphi^{(\mathrm{IV})}(s) + \lambda \varrho_\nu \varphi(s),$$

wobei der untere Index 1 bezw. 2 bedeutet, dass der Ausdruck in der Klammer das eine Mal durch Annäherung von der einen, das andere mal von der anderen Seite an die Kurve C_ν gewonnen werden soll.

Als Eckenbedingungen ergeben sich:

$$\Sigma\{(1-\sigma) Q[\varphi] + a_\nu \varphi'''\} = 0$$

$$\Sigma a_\nu \varphi'' x' = 0, \quad \Sigma a_\nu \varphi'' y' = 0.$$

Wieder ist die Summe über alle in der Ecke endigenden Kurven C_ν zu nehmen.

3. Schwingungen einer elektrisch geladenen Seifenblase.

Ein besonderes mathematisches Interesse bieten die Probleme der Elektro-Kapillarität, weil hier Integrodifferentialgleichungen mit singulären Integranden auftreten. Ein Beispiel dafür ist die elektrisch geladene Seifenblase, die um ihre Gleichgewichtslage kleine Schwingungen ausführt.

Das Gleichgewicht kommt dadurch zustande, dass dem Überdruck der eingeschlossenen Luft und den elektrischen Kräften die Oberflächenspannung entgegenwirkt. In der Ruhelage wird die Seifenblase Kugelgestalt annehmen. R sei der Radius und v die radiale Abweichung von der Ruhelage. Die potentielle Energie der Kapillarität ist das Produkt aus dem Oberflächeninhalt und der doppelten Oberflächenspannung $2\,T$. Die elektrische Ladung e wird sich in der Ruhelage gleichmässig über die Kugel verteilen; wir machen die Annahme, dass bei Verbiegungen die Ladung eines Flächenelementes erhalten bleibt. Die Abhängigkeit des inneren Druckes p von dem von der Seifenblase umschlossenen Volumen V sei durch die Gleichung $pv^{\alpha} = \text{const.}$ festgelegt; bei adiabatischen Vorgängen wird $\alpha = \frac{c_p}{c_v}$ der Quotient der spezifischen Wärmen sein. Als potentielle Energie des Druckes in einem beliebigen Zustand setzen wir die Arbeit an, die der Überdruck q leistet, wenn die Fläche aus der Ruhelage gleichmässig in jenen Zustand übergeführt wird.

Auf Grund dieser Annahmen lässt sich die gesamte potentielle Energie der um v verschobenen Seifenblase berechnen. Man findet hiernach leicht die Gleichgewichtsbedingung:

$$4\,T - \frac{e^2}{4\pi}\frac{1}{R^3} - q\,R = 0.$$

Vernachlässigen wir in der Entwicklung der potentiellen Energie nach v die Glieder von höherer als zweiter Ordnung in v und sehen wir von der konstanten Energie der Ruhelage ab, so erhalten wir, da wegen der Gleichgewichtsbedingung die linearen Glieder wegfallen, einen in v quadratischen Ausdruck $\mathfrak{D}[v]$.

Um ihn anzugeben, führen wir Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein. Das Flächenelement der Einheitskugel K sei $d\omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$. Mit r_{12} bezeichnen wir den Abstand zweier Punkte P_1 und P_2 der Kugel in der Ruhelage. Dann wird:

$$\mathfrak{D}[v] = T\int\limits_K \left\{\frac{1}{\sin^2\vartheta}\, v_\varphi^2 + v_\vartheta^2\right\} d\omega$$

$$-a\int\limits_{K_1}\int\limits_{K_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{r_{12}^3}\, d\omega_2\, d\omega_1$$

$$-\frac{a}{4R^2}\int\limits_{K_1}\int\limits_{K_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{r_{12}}\, d\omega_2\, d\omega_1$$

$$+b\left(\int\limits_K v\, d\omega\right)^2 + c\int\limits_K v^2\, d\omega.$$

Der kinetischen Energie entspricht:

$$\mathfrak{H}[v] = \varrho\int\limits_K v^2\, d\omega.$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$a=\frac{1}{2}\frac{e^2}{(4\pi)^2}, \qquad b=\frac{3}{8}\alpha p R,$$

$$c=2T+\frac{e^2}{4\pi}\frac{1}{R^3}-qR$$

und es ist offenbar $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$. $\frac{\varrho}{R^2}$ ist die Dichte der Seifenblase, p und q beziehen sich auf die Ruhelage.

Der erste Anteil in $\mathfrak{D}[v]$ rührt von der Kapillarität her, der zweite und dritte von der Elektrizität und der vierte vom Druck; in den letzten beiden Anteilen kommt zum Ausdruck, dass schon einer konstanten Dehnung Widerstand entgegengesetzt wird.

Die in den Integranden der Doppelintegrale auftretenden Singularitäten ($r_{12}=0$) stören die Existenz der Integrale nicht. Man muss diese Integrale nur im üblichen Sinne so verstehen, dass man zunächst bei der Integration nach $d\omega_2$ einen kleinen Kreis um den Punkt P_1 ausschliesst und dann zur Grenze übergeht. Bei derselben Erklärung existiert auch das Integral $\int\limits_{K_2} \frac{f_1-f_2}{r_{12}^3}\, d\omega_2$, wenn f stetig und einmal stetig differenzierbar ist; zwar verschwindet f_1-f_2 nur von derselben Grössenordnung wie r_{12}; aber das Integral von f_1-f_2 über einen Kreis um die singuläre Stelle P_1 wird Null wie r_{12}^2, und infolgedessen ist $\frac{f_1-f_2}{r_{12}^3}$ integrierbar.

Wenn man dies beachtet, macht es keine Schwierigkeit, die aus dem Verschwinden der ersten Variation folgende Integrodifferentialgleichung als Eigenwertgleichung abzuleiten:

$$\begin{aligned} &T\left(\frac{1}{\sin^2\vartheta}v_{\varphi\varphi}+\frac{1}{\sin\vartheta}(\sin\vartheta\, v_\vartheta)_\vartheta\right)\\ &+2a\int\limits_{K_1}\frac{v-v_1}{r_1^3}\,d\omega_1+\frac{a}{4R^2}\int\limits_{K_1}\frac{v-v_1}{r_1}\,d\omega_1-b\int\limits_{K} v\,d\omega\\ &-cv+\lambda\varrho v=0. \end{aligned}$$

An Stelle der Randbedingungen tritt die Bedingung der Regularität auf der ganzen Fläche.[1]

[1] Ich möchte ausdrücklich darauf hinweisen, dass es sich in diesem Abschnitt nur um einen Ansatz handelt und dass ich die Theorie dieses Problems nicht durchgeführt habe.

4. Thermoelastische Erscheinungen bei Stäben.

Ein elastischer Körper dehnt sich bei einer Temperaturerhöhung aus. Berücksichtigt man dies, so erhält man nach Franz Neumann[1] und Duhamel[2] für das Gleichgewicht des Körpers und für die Temperaturströmung ein simultanes System von Differentialgleichungen, das wieder auf Eigenwertprobleme führt. Wir betrachten zuerst einen geraden Stab. Er bedecke das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$. Die longitudinale Verschiebung, d. h. die Abweichung eines seiner Punkte aus der Ruhelage in der Längsrichtung, sei $w(x, t)$, t die Zeit. Die Temperatur des Stabes und seiner Umgebung im Ruhezustand sei Null; $\Theta(x; t)$ sei die (kleine) Temperatur während des Vorganges. Dann lautet die Gleichgewichtsbedingung für den Druck:

$$w_{xx} - \delta\, \Theta_x = 0 \tag{1}$$

und die Wärmestromgleichung:

$$k\, \Theta_{xx} - \varrho\, c_v\, \Theta_t + \varrho \frac{c_p - c_v}{\delta} w_{xt} = 0. \tag{2}$$

Dabei ist δ der lineare Ausdehnungskoeffizient, k die Wärmeleitfähigkeit, ϱ die Dichte, c_p und c_v sind die spezifischen Wärmen.

Nach dem Ansatz:

$$w = e^{-\lambda t} \varphi(x)$$

$$\Theta = e^{-\lambda t} \tau(x)$$

für exponentiell zum Ruhezustand zurückkehrende synchrone Vorgänge, wird aus den Differentialgleichungen (1) und (2):

$$\varphi'' - \delta\, \tau' = 0 \tag{3}$$

$$\lambda(\delta\, \varphi' + \gamma\, \tau) + \varepsilon\, \tau'' = 0 \tag{4}$$

mit

$$\gamma = \frac{\delta^2 c_v}{c_p - c_v}; \quad \varepsilon = \frac{k \delta^2}{\varrho(c_p - c_v)}.$$

Dies sind die Eigenwertgleichungen des Maximum-Minimumproblems:

---

[1] Abhandl. d. Berl. Akad. aus d. Jahre 1841.

[2] Journal de l'Ecole polytechnique cah. 25. 36.

$$\mathfrak{D}[\tau, \varphi] = \varepsilon \int_0^1 \tau'^2 \, dx = \text{Max.-Min.}$$

$$\mathfrak{H}[\tau, \varphi] = \gamma \int_0^1 \tau^2 \, dx + 2\delta \int_0^1 \tau \varphi' \, dx - \int_0^1 \varphi'^2 \, dx = 1 .$$

Als natürliche Randbedingungen treten auf: $\tau' = 0$ d. h. das Temperaturgefälle verschwindet an den Enden, und $\varphi' - \delta\tau = 0$, d. h. gegen die Enden wirkt kein Druck.

Als künstliche Randbedingungen kommen vorzugsweise in Frage

$\tau = 0$ d. h. an den Enden behält der Stab die Temperatur seiner Umgebung, und $\varphi = 0$ d. h. die Enden bleiben fest.

Wir haben hier ein Maximum-Minimumproblem vor uns, bei dem es sich um die Bestimmung zweier unbekannter Funktioen handelt. Es lässt sich aber[1] ganz nach dem Muster der in Kap. I—IV entwickelten Theorie behandeln und führt zu entsprechenden Resultaten über die Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und über das Verhalten der Eigenwerte.

Im übrigen kann man ohne weiteres, wenn man φ aus den beiden Differentialgleichungen (3) und (4) und etwa der Randbedingung $\varphi = 0$ eliminiert, sofort zu der Integrodifferentialgleichung für eine unbekannte Funktion τ

$$\lambda \left((\delta^2 + \gamma)\tau - \delta^2 \int_0^1 \tau \, dx \right) + \varepsilon \tau'' = 0$$

gelangen, die zu den Ausdrücken

$$\mathfrak{D}[\tau] = \varepsilon \int_0^1 \tau'^2 \, dx$$

$$\mathfrak{H}[\tau] = (\delta^2 + \gamma) \int_0^1 \tau^2 \, dx - \delta^2 \left(\int_0^1 \tau \, dx \right)^2$$

gehört (vgl. Beispiel 1. S. 21).

[1] Vgl. eine demnächst erscheinende Dissertation von O. H. MALIK.

5. Thermoelastische Erscheinungen bei zwei- und dreidimensionalen Körpern.

Wir können uns auf den Fall eines zweidimensionalen Körpers beschränken, etwa einer Membran, die in der Ruhelage ein Gebiet G der x, y-Ebene bedecke. Die Verschiebung eines Punktes aus der Ruhelage in der Ebene sei durch einen Vektor $\mathfrak{w}$ mit den Komponenten u, v gegeben. Θ sei wieder die Temperatur, die im Ruhezustand und in der Umgebung des Körpers verschwindet.

Die Gleichgewichtsbedingungen haben hier folgende Gestalt, wenn wir die Differentiation nach x und y durch tiefgestellte Indizes bezeichnen

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{\alpha}{2}\Delta u + \frac{1}{2}(u_x + v_y)_x - \delta\,\Theta_x = 0 \\ &\frac{\alpha}{2}\Delta v + \frac{1}{2}(u_x + v_y)_y - \delta\,\Theta_y = 0 \end{aligned}$$

und die Wärmestromgleichung:

$$(6)\qquad k\,\Delta\,\Theta - \varrho\, c_v\, \Theta_t - \varrho\frac{c_p - c_v}{\delta}\frac{1}{2}(u_x + v_y)_t = 0.$$

Es ist dabei $\alpha = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$, wo σ die Querdehnungszahl bedeutet. Der Ansatz

$$\begin{aligned} \mathfrak{w} &= \mathfrak{u}\, e^{-\lambda t} \\ \Theta &= \tau\, e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

liefert die Eigenwertgleichungen — wir bezeichnen die Komponenten von $\mathfrak{u}$ wieder mit u, v —:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{\alpha}{2}\Delta u + \frac{1}{2}(u_x + v_y)_x - \delta\,\tau_x = 0 \\ &\frac{\alpha}{2}\Delta v + \frac{1}{2}(u_x + v_y)_y - \delta\,\tau_y = 0 \end{aligned}$$

$$(8)\qquad \lambda\left(\delta\frac{1}{2}(u_x + v_y) + \gamma\tau\right) + \varepsilon\,\Delta\tau = 0.$$

Das Maximum-Minimumproblem, aus dem sie entspringen, ist bestimmt durch

$$\mathfrak{D}[\tau, \varphi] = \varepsilon \iint\limits_G (\tau_x^2 + \tau_y^2)\, dx\, dy$$

$$\mathfrak{H}[\tau, \varphi] = \gamma \iint\limits_G \tau^2\, dx\, dy + \delta \iint\limits_G \tau (u_x + v_y)\, dx\, dy$$

$$- \frac{1}{4} \iint\limits_G (u_x + v_y)^2\, dx\, dy - \frac{\alpha}{4} \iint\limits_G \left\{ (u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2 \right\} dx\, dy.$$

Die natürlichen Randbedingungen lauten:

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\alpha}{2} \left\{ (u_x - v_y) \frac{\partial x}{\partial n} + (u_y + v_x) \frac{\partial y}{\partial n} \right\} + \frac{1}{2} (u_x + v_y) \frac{\partial x}{\partial n} - \delta \tau \frac{\partial x}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\alpha}{2} \left\{ (v_y - u_x) \frac{\partial y}{\partial n} + (v_x + u_y) \frac{\partial x}{\partial n} \right\} + \frac{1}{2} (u_x + v_y) \frac{\partial y}{\partial n} - \delta \tau \frac{\partial y}{\partial n} = 0.$$

Als künstliche Randbedingungen kommen $\tau = 0$ und $u = v = 0$ in Frage.

Die ganze Theorie dieses Problems (Verhalten der Eigenwerte, Vollständigkeit des Lösungssystems) lässt sich nach den Methoden der vorliegenden Abhandlung entwickeln.

Auch hier würden wir, wenn wir aus dem simultanen System (3), (4) u und v oder τ eliminieren zu Eigenwertproblemen vom Integrodifferentialgleichungstypus für eine unbekannte Funktion bezw. einen unbekannten Vektor geführt werden.