

# ABHANDLUNGEN ZUR THEORIE DER KONFORMEN ABBILDUNG.

## IV. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche.

VON

PAUL KOEBE

in JENA.

### Inhaltsverzeichnis.

A. Einleitung . . . . .	pag. 306
B. Erster Teil. (§§ 1—8): <i>Die Abbildungsaufgaben der beiden ersten Kategorien</i> (die Begrenzungen der Schlitzbereiche sind vollstän- dig einem Orthogonalkreissystem entnommen und enthalten kei- nen Hauptpunkt desselben), <i>mit einer Anwendung</i> (§ 5) . . . . .	» 310
§ 1. Formulierung der Abbildungsaufgaben der ersten und zweiten Kategorie . . . . .	» 310
§ 2. Der Unitätsbeweis . . . . .	» 314
§ 3. Übergang von den Abbildungsfunktionen $f^{(2)}(z)$ zu den zuge- hörenden charakteristischen Potentialen $u^{(2)}$ . . . . .	» 316
§ 4. Bestimmung des Potentials $u^{(1)}$ . . . . .	» 320
§ 5. <i>Eine Anwendung</i> : Abbildungen eines mehrfach zusammen- hängenden schlichten Bereichs auf sich selbst . . . . .	» 323
§ 6. Bestimmung des Potentials $u^{(2)}$ . Herleitung einiger bekann- ter Konvergenzgrundtatsachen bei automorphen Gruppen . . . . .	» 326
§ 7. Bestimmung der Potentiale $u^{(3)}$ , $u^{(4)}$ , $u^{(5)}$ . . . . .	» 328
§ 8. Bestimmung der Potentiale $u^{(6)}$ , $u^{(7)}$ , $u^{(8)}$ , $u^{(9)}$ . . . . .	» 331

C. Zweiter Teil. (§§ 9, 10): Die Abbildungsaufgaben der dritten, vierten und fünften Kategorie, (isogonale Trajektorien des Orthogonalkreissystems als Begrenzungslinien, Hauptpunkte auf der Begrenzung) . . . . .	pag. 334
§ 9. Die Abbildungsaufgaben der dritten und vierten Kategorie, (geradlinige bzw. spirallinige Begrenzungen) . . . . .	» 334
§ 10. Die Abbildungsaufgaben der fünften Kategorie (Hauptpunkte auf der Begrenzung) . . . . .	» 339

### A. Einleitung.

1. Die vorliegende Abhandlung schliesst sich an an eine in selbiger Zeitschrift Band 40 vom Verfasser veröffentlichte Abhandlung, die Abhandlung II der Serie.<sup>1</sup>

In dieser Abhandlung II wurde an erster Stelle die Fundamentalabbildung jedes mehrfach (auch unendlich-vielfach) zusammenhängenden schlichten Bereiches begründet mittels eines als Schmiegunungsverfahren bezeichneten, auf unendlich oft wiederholter Anwendung von Quadratwurzeloperationen beruhenden Verfahrens. Diese Fundamentalabbildung war eine unendlich-eindeutige Abbildung, indem jedem Punkte des gegebenen Bereiches unendlich viele Punkte der Fundamentalkreisfläche, jedem Punkte dieser Kreisfläche umgekehrt ein und nur ein Punkt des gegebenen Bereiches entsprach.

Gegenwärtig wollen wir nun den allgemein vorgelegten endlich-vielfach  $m$ -fach zusammenhängenden schlichten Bereich  $B$  solchen eineindeutigen konformen Abbildungen unterwerfen, durch welche derselbe in gewisse Bereiche spezieller einfacher Gestalten (*charakteristische Bereiche*) übergeführt wird.

Zu diesen von uns hier in Betracht zu ziehenden charakteristischen Bereichen gelangen wir durch *Zugrundelegung entweder eines parabolischen oder eines elliptisch-hyperbolischen Orthogonalsystems von Kreisen*. Im parabolischen Falle legen wir das Orthogonalsystem in seiner durch lineare Transformation erhältlichen einfachen Gestalt als *orthogonales Geradensystem aller Geraden parallel der Achse des Reellen oder Imaginären* zu Grunde. Der unendlich ferne Punkt ist dann der *Hauptpunkt* dieses Orthogonalsystems. Im elliptisch-hyperbolischen Falle hinge-

<sup>1</sup> »Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung, II: Die Fundamentalabbildung beliebiger mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche nebst einer Anwendung auf die Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche»; Acta Math. t. 40, pag. 251—290. Die Abhandlung III der Serie, betitelt »Der allgemeine Fundamentalsatz der konformen Abbildung nebst einer Anwendung auf die konforme Abbildung der Oberfläche einer körperlichen Ecke«, ist im »Journ. f. Math.« t. 147 (S. 67—104) erschienen.

gen wird das System durch lineare Transformation auf die Form eines gewöhnlichen *Geradenbüschels mit zugehörigem konzentrischem Kreisbüschel* gebracht. Als *Hauptpunkte* des Systems wählen wir die Punkte  $o$  und  $\infty$ . Ausser den bereits dem Orthogonalsystem angehörenden Linien werden weiter unten noch die zu denselben *isogonalen Trajektorien* herangezogen, welche beim parabolischen System ihrerseits *Geraden* sind, beim elliptisch-hyperbolischen System jedoch *logarithmische Spiralen*. Wir erhalten so im ersten Falle das System  $\Gamma$  aller Geraden der Ebene, im zweiten Falle, allgemein zu reden, ein von sämtlichen logarithmischen Spiralen mit dem Nullpunkte und dem unendlich fernen Punkte als asymptotischen Punkten gebildetes Liniensystem  $\Sigma$ , welches die Geraden und Kreise des Orthogonalsystems als Spiralen der Neigung null bzw.  $\frac{\pi}{2}$  enthält. Der Neigungswinkel wird dabei aufgefasst als der Winkel, unter welchem die betreffende Spirale das Geradenbüschel selbst schneidet. Je nachdem ob es sich um eine im einen oder anderen Sinne um den Nullpunkt gewundene Spirale handelt, werden wir den Neigungswinkel positiv oder negativ erklären.

*Die verschiedenen charakteristischen Bereichtypen*, welche wir in dieser Abhandlung allein in Betracht ziehen wollen, ergeben sich aus dem Liniensystem  $\Gamma$  bzw.  $\Sigma$  dadurch, dass wir aus diesem System, wenn  $m$  die Anzahl der Begrenzungslinien des abzubildenden Bereiches  $B$  ist,  $m$  Linien ausscheiden, die sich gegenseitig nicht treffen und deren einzelne ganz in einer und derselben Linie des Systems  $\Gamma$  bzw.  $\Sigma$  enthalten ist. Wir unterscheiden dabei hier im ganzen *fünf Kategorien von Bereichtypen*.

Für die Bereichtypen der *vier ersten Kategorien* ist im Gegensatz zu denen der fünften Kategorie charakteristisch, dass keine Begrenzungslinie durch einen Hauptpunkt des Systems hindurchgeht noch in einem solchen endet. Eine Gerade kann auf diese Weise lediglich eine endliche geradlinige Strecke (*geradliniger Schlitz*) liefern, eine Spirale lediglich einen *endlichen spirallinigen Schlitz*, hingegen ein Kreis entweder einen unvollständigen Kreisbogen (*kreisförmiger Schlitz*) oder aber diese *Kreislinie* selbst in ihrer Vollständigkeit. (Kreislinige Begrenzungen können nach den getroffenen Festsetzungen lediglich dem System  $\Sigma$  entnommen werden). Es ist ferner klar, dass, sofern überhaupt vollständige Kreislinien an der Begrenzung eines charakteristischen Bereichs (der vier ersten Kategorien) teilnehmen, diese Kreislinien entweder in der Zahl 1 oder 2 auftreten. Der *Hauptpunkt des parabolischen Systems* ist *stets innerer Punkt* des charakteristischen Bereichs. Hingegen sind die *Hauptpunkte des elliptisch-hyperbolischen Systems* dann und nur dann *innere Punkte*, wenn keine vollständige Kreislinie an der Begrenzung des charakteristischen Bereichs teilnimmt. Andernfalls erscheinen *einer oder beide Hauptpunkte vom Inneren des charakteristischen Bereichs ausgeschlossen*.

Die *erste Kategorie* bilden diejenigen charakteristischen Bereiche, bei welchen nur Linien einer und derselben Schar des Orthogonalsystems selbst bei der Bildung der Begrenzungslinien teilnehmen. (Figg. 1 bis 5, Pag. 311.)

Die *zweite Kategorie* bilden diejenigen charakteristischen Bereiche, bei welchen beide Scharen des vollständigen Orthogonalsystems (unter Ausschluss seiner isogonalen Trajektorien) bei der Bildung der Begrenzungslinien beteiligt sind. (Figg. 6—9, Pag. 312.)

Die *dritte Kategorie* bilden diejenigen charakteristischen Bereiche, bei welchen die Begrenzungen von lauter gleichgeneigten, isogonalen Trajektorien des Orthogonalsystems (Geraden im parabolischen Falle, wirkliche Spiralen im elliptisch-hyperbolischen Falle) gebildet werden. (Figg. 10, 12, Pag. 335.)

Die *vierte Kategorie* bilden diejenigen charakteristischen Bereiche, bei welchen die Begrenzung einem System gleichgeneigter isogonaler Trajektorien des Orthogonalsystems und deren orthogonalen Trajektorien entstammt (Geraden im parabolischen Falle, wirkliche Spiralen im elliptisch-hyperbolischen Falle). (Figg. 11, 13, Pag. 335.)

Die *fünfte Kategorie* schliesslich bilden diejenigen in grosser Mannigfaltigkeit vorhandenen charakteristischen Bereiche (im ganzen *sechszwanzig*), zu welchen man gelangt, wenn man Begrenzungslinien durch die Hauptpunkte hindurchgehen lässt. Die Anzahl dieser besonderen Begrenzungslinien ist im parabolischen Falle stets gleich 1, im elliptisch-hyperbolischen Falle gleich 1 oder 2 wegen der zwei dann vorhandenen Hauptpunkte. Diese beiden Hauptpunkte können jedoch auch auf eine und dieselbe Begrenzungslinie fallen. Eine einen Hauptpunkt enthaltende Begrenzungslinie des charakteristischen Bereichs ist stets gradlinig, nämlich entweder eine vollständige Gerade oder ein geradliniger endlicher oder unendlicher Schlitz, in welchem letzterem Falle der Schlitz entweder durch den unendlich fernen Punkt hindurch geführt sein oder in dem unendlich fernen Punkte endigen kann.

Die Figuren 14—19 (S. 340) zeigen die sechs hierher gehörenden parabolischen Bereichtypen. Entsprechend zeigen die Figuren 20—39 (S. 342, 343) die im ganzen möglichen zwanzig hierher gehörenden elliptisch-hyperbolischen Bereichtypen.

2. Was die *Methode der Behandlung* der im Vorstehenden charakterisierten Abbildungsaufgaben anbetrifft, so ist für uns massgebend der Grundsatz rein funktionentheoretischer Methodik im Sinne der reinen Potenzreihentheorie. Dieses hindert nicht, dass wir an Stelle der Abbildungsfunktion  $f(z)$  in den Fällen von parabolischem Typus die Potentialfunktion

$$u = \Re \{f(z)\} \equiv \text{Reeller Teil von } f(z),$$

in den Fällen von elliptisch-hyperbolischem Typus die Potentialfunktion

$$u = \Re \{ \log f(z) \} = \log |f(z)|$$

betrachten. Es handelt sich dann in den einzelnen Fällen darum, die betreffende, durch bestimmte charakteristische Eigenschaften definierbare Potentialfunktion  $u$  aufzufinden.

Hierzu machen wir die *Fundamentalabbildung* des abzubildenden Bereichs  $B$  bzw., in den Fällen von Schlitzbereichen mit zueinander orthogonalen Begrenzungslinien, einer aus dem Bereiche  $B$  unter Hinzunahme seiner Rückseite in gewisser Weise entstehenden Doppelfläche  $\tilde{B}$  auf eine  $\zeta$ -Ebene; und zwar lassen wir, zum Unterschiede von Abhandlung II, an Stelle der Fläche des Einheitskreises eine obere  $\zeta$ -Halbebene (Halbebene oberhalb der Achse des Reellen) treten, sodass die *Fundamentalgruppe* von lauter reellen Substitutionen gebildet wird. Die zu bestimmenden Potentiale  $u$  werden nun in ihrer Überpflanzung in der  $\zeta$ -Ebene durch Bildung unendlicher Reihen gewonnen. Die dabei in Betracht kommenden Reihen sind von der Art, wie sie H. WEBER in der Abhandlung »Ein Beitrag zu Poincarés Theorie der Fuchsschen Funktionen« (Gött. Nachr. 1886) und gleichzeitig in allgemeinerer Weise SCHOTTKY in der Abhandlung »Über eine spezielle Funktion, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments unverändert bleibt« (Journal für Mathematik, Bd. 101, S. 227—272) gebildet und untersucht hat. Dieselben werden hier, den vorliegenden besonderen Verhältnissen entsprechend, auch in besonderer anschauungsmässiger Weise eingeführt.

In § 5 machen wir eine Anwendung der ersten gewonnenen Abbildung (Abbildung auf eine in konzentrischen Kreisbögen aufgeschlitzte Kreisringfläche)<sup>1</sup> zur Ermittlung der eineindeutigen konformen Abbildungen eines mehrfach zusammenhängenden Bereichs auf sich selbst. Insbesondere gilt es hier, wenn der Zusammenhang grösser als 2 ist, den *Endlichkeitsbeweis* zu erbringen, dass es nämlich eine von der Zahl  $m$  allein abhängende obere Schranke gibt für die Anzahl aller möglichen derartigen Abbildungen eines und desselben Bereichs in sich. Für beliebige dreifach zusammenhängende schlichte Bereiche liefert die Abbildung auf die entsprechende Schlitzfigur unmittelbar die Tatsache der verborgenen analytischen Symmetrie solcher Bereiche.

Der Kreis der in vorliegender Abhandlung behandelten Abbildungsaufgaben

<sup>1</sup> Dieser charakteristische Bereich ist ein *Normalbereich*, d. i. für uns ein charakteristischer Bereich, welcher, von linearen Transformationen abgesehen, nur auf endlich viele Weisen so bestimmt werden kann, dass er einem beliebig gegebenen, allgemein begrenzten Bereiche im Sinne eineindeutiger konformer Abbildung äquivalent wird. Jeder schlichte  $m$ -fach zusammenhängende Normalbereich besitzt  $3m - 3$ , im Falle  $m = 2$  jedoch nur einen wesentlichen Parameter (*Moduln*).

gestattet noch wesentliche Ausdehnungen, auf welche einzugehen wir erst in einer *folgenden Abhandlung* Veranlassung nehmen werden. Einige Mitteilungen über diese möglichen Erweiterungen haben wir u. a. in drei Notizen »Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung, Voranzeige, erste, zweite und dritte Mitteilung« (Göttinger Nachrichten, 1912, 1916, 1917) gemacht.<sup>1</sup>

## B. Erster Teil. (§§ 1—8.)

### Die Abbildungsaufgaben der beiden ersten Kategorien

(die Begrenzungslinien der Schlitzbereiche sind vollständig einem Orthogonalkreis-system entnommen und enthalten keinen Hauptpunkt desselben)  
mit einer Anwendung (§ 5).

#### § 1.

*Formulierung der Abbildungsaufgaben der ersten und zweiten Kategorie.*

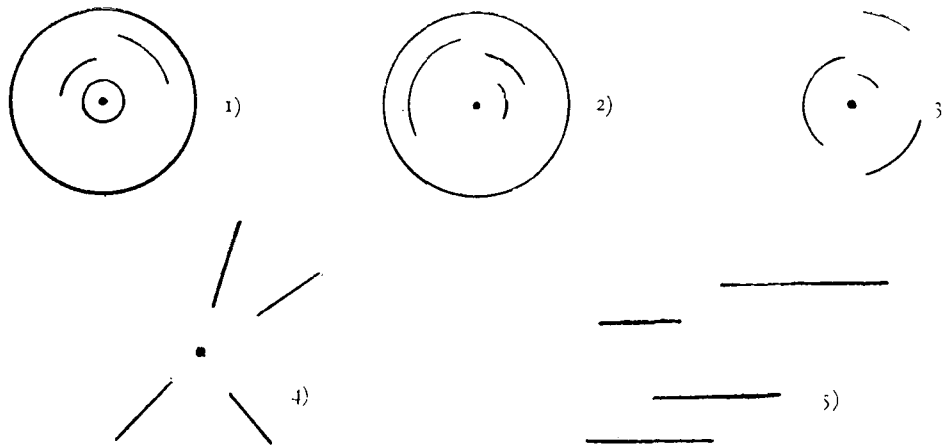
Unsere Absicht ist, für den allgemein gegebenen Bereich  $B$  wichtige charakteristische Formen seiner Gestalt zu ermitteln, auf welche jeder derartige Bereich durch eineindeutige konforme Abbildung gebracht werden kann. Wie wir bereits wissen, kann jeder Bereich  $B$  in einen solchen mit  $m$  *geschlossenen*

<sup>1</sup> Einige der hier behandelten Abbildungsaufgaben sind schon früher, sei es vom Verfasser, sei es von anderen, (*potentialtheoretisch*) behandelt worden. Die erste Abbildung eines beliebigen mehrfach zusammenhängenden Bereichs auf einen Schlitzbereich wurde von SCHOTTKY in seiner Abhandlung »Über die Wertschwankungen der harmonischen Funktionen zweier reeller Veränderlichen und der Funktionen eines komplexen Arguments« (Journal f. Math., Bd. 117, insbesondere S. 248) u. a. ausgeführt und zwar auf der Grundlage der von uns hier nicht benutzten SCHWARZ'schen potentialtheoretischen Resultate der Integration der partiellen Differentialgleichung  $\Delta u = 0$  unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. Es war dies die Abbildung auf eine längs lauter konzentrischer Kreisbögen aufgeschlitzte Vollebene. (Fig. 3, S. 311.) Die Abbildung auf eine von endlichen geradlinigen, untereinander parallelen Schlitzern begrenzte Vollebene (Fig. 5, S. 311) wurde vom Verfasser in Math. Ann. Bd. 69 (§ 13) und F. CECIONI in Circolo Mat. di Palermo (1908) behandelt. Sie findet bereits Erwähnung in SCHOTTKY's Dissertation (Journal f. Math. Bd. 83, S. 330). Auf den Typus 4 (radiale Schlitz) habe ich selbst zuerst in Gött. Nachr. 1909 (S. 356), auf andere Schlitzbereichstypen (Fig. 9 unten und allgemeinere Typen) habe ich in Gött. Nachr. 1912 und 1916 (Voranzeigen zur »Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung«) hingewiesen. Den von zwei zu einander senkrechten endlichen Schlitzern begrenzten zweifach zusammenhängenden Bereich hat THOMAE abgebildet (Leipziger Berichte 1905, S. 79 ff. und 1906, S. 172 ff.).

Wegen Ausdehnung der Schlitztheoreme auf Bereiche *unendlich hohen Zusammenhanges* sehe man nach in meinen Abhandlungen »über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Vierte Mitteilung« und »über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode« (Gött. Nachr., 1909 bezw. 1910), sowie die dort zitierten Arbeiten von HILBERT (Gött. Nachr. 1909) und COURANT (Dissertation, Göttingen 1910, erschienen in Math. Ann. Bd. 71).

regulären analytischen Begrenzungslinien  $L_1, L_2, \dots, L_m$  konform transformiert werden. Wir können deswegen annehmen, dass unseren gegenwärtigen Betrachtungen ein solcher Bereich zugrunde liegt. Auch können wir Bereiche mit *punktförmigen Begrenzungslinien* jetzt ausser Betracht lassen, weil die für einen solchen Bereich zu ermittelnde Abbildungsfunktion über diesen Punkt hinaus gemäss dem Satze III Pag. 204 der Abhandlung I (Journ. f. Math. Bd. 145) sich regulär verhalten muss und folglich die ganze Fläche ebenso zu behandeln ist, als wenn die vorhandenen isolierten Begrenzungspunkte innere Punkte des Bereichs wären.

Zu den von uns hier zunächst (§§ 1 u. 2) in Betracht zu ziehenden *charakteristischen Gestalten* des Bereichs  $B$  gelangen wir, wenn wir irgend ein *Orthogonalkreissystem*



in der  $z$ -Ebene ins Auge fassen entweder mit getrennten Hauptpunkten (*elliptisch-hyperbolisches Kreissystem*) oder mit einem einzigen Hauptpunkte (*parabolisches Kreissystem*), und wenn wir in diesem System  $m$  geschlossene oder ungeschlossene Linien (Schlitze) ziehen, welche sich gegenseitig nicht treffen und auch keinen der Hauptpunkte treffen mögen und welche ausserdem einen schlichten  $m$ -fach zusammenhängenden Bereich begrenzen.

Wir unterscheiden auf diese Weise *neun charakteristische Gestalten* im ganzen und werden beweisen, dass *jeder vorgelegte Bereich  $B$  durch eineindeutige konforme Abbildung in jede dieser charakteristischen Gestalten übergeführt werden kann.*

Wir teilen die sich ergebenden charakteristischen Gestalten in zwei Kategorien ein, wobei wir die Orthogonalsysteme in ihrer in der Einleitung bezeichneten einfachsten Gestalt (konzentrisches Kreissystem mit zugehörndem orthogonalem Geradensystem (Hauptpunkte  $o$  und  $\infty$ ) bzw. Parallelbüschel der Geraden parallel der Achse des Reellen und zugehörndes orthogonales Parallelbüschel der Geraden parallel der Achse des Imaginären) zugrundelegen.

*Erste Kategorie (A):* Von dem zugrunde liegenden Orthogonalsystem nimmt nur eines der beiden sich durchsetzenden Büschel an der Bildung des Bereiches teil.

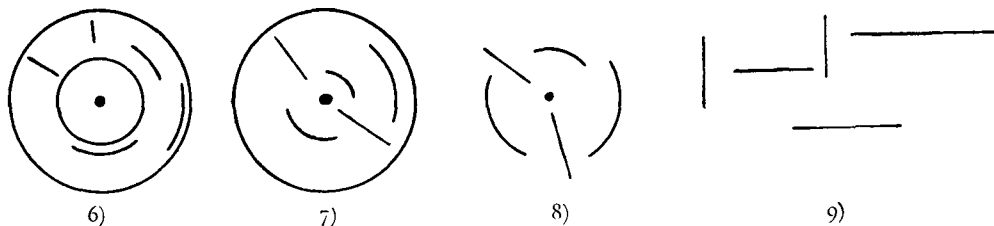
A<sub>I</sub>. *Hyperbolisches Büschel.* Das Büschel wird in Form eines Systems *konzentrischer Kreise* mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt angenommen.

1. *Kein Hauptpunkt* liegt innerhalb des Bereiches. Der Bereich hat die Form einer *kreisförmig geschlitzten Kreisringfläche*. Siehe Fig. 1, in welcher  $m$  gleich 4 gewählt ist.

2. *Ein Hauptpunkt* liegt innerhalb des Bereiches. Der Bereich hat die Form einer *kreisförmig geschlitzten gewöhnlichen Kreisfläche*. (Fig. 2,  $m = 4$ .) Der Fall, in welchem der unendlich ferne Punkt der in den Bereich aufgenommene Hauptpunkt ist, bietet nicht wesentlich neues dar.

3. *Beide Hauptpunkte* liegen innerhalb des Bereiches. Der Bereich hat die Form einer *kreisförmig geschlitzten Vollebene*. (Fig. 3,  $m = 4$ .)

A<sub>II</sub>. *Elliptisches Büschel.* Das Büschel wird in Gestalt des *Geradenbüschels* mit den Nullpunkt als Zentrum angenommen. In diesem Falle ist unvermeidlich,



dass die beiden Hauptpunkte dem Innern des charakteristischen Bereiches zugeordnet werden, da jeder einzelne Schlitz auf einer Geraden durch den Nullpunkt verlaufen muss und, einer oben allgemein gegebenen Vorschrift entsprechend, den Hauptpunkt selbst nicht enthalten soll. Wir bekommen so

4. *Beide Hauptpunkte* gehören zum Innern des Bereiches. Der Bereich hat die Form einer *geradlinig geschlitzten Vollebene*. Siehe Fig. 4.

A<sub>III</sub>. *Parabolisches Büschel.* Das Büschel wird in Gestalt des Systems der zur Achse des Reellen parallelen Geraden (*Parallelbüschel*) angenommen. Alsdann soll gemäss der allgemeinen Vorschrift der unendlich ferne Punkt, d. i. der Hauptpunkt des Büschels dem Innern des Bereiches angehören. Wir finden

5. *der Hauptpunkt* liegt innerhalb des Bereiches. Der Bereich hat die Form einer *geradlinig und parallel der Achse des Reellen geschlitzten Vollebene*. (*Parallelschlitzbereich*.) Fig. 5.

*Zweite Kategorie (B):* *Beide Büschel* des zugrunde liegenden Orthogonalsystems nehmen an der Begrenzung Anteil.



B<sub>I</sub>. *Elliptisch-hyperbolisches Kreissystem*. Es entstehen aus den charakteristischen Gestalten 1, 2, 3, die charakteristischen Gestalten 6, 7, 8, in welchen die Anzahl der dem elliptischen und der dem hyperbolischen Kreissystem angehörenden Begrenzungslinien beliebig ist. S. Figg. 6, 7, 8.

B<sub>II</sub>. *Parabolisches Orthogonalsystem*. Es ergibt sich aus 5 die Figur 9, in welcher die Anzahl der zur Achse des Reellen, bzw. Imaginären parallelen Strecken beliebig bleibt.

Den besprochenen neun charakteristischen Bereichtypen entsprechend stellen wir nunmehr neun verschiedene Abbildungsaufgaben auf, die wir in folgender Weise zusammenfassend formulieren:

*Formulierung der Abbildungsaufgaben*: Es soll der gegebene schlichte Bereich, *B*, dessen Begrenzung von *m* geschlossenen regulären analytischen Linien gebildet wird, eindeutig und konform in jede der charakteristischen Gestalten transformiert werden, wobei vorzuschreiben ist:

bei *Typus 1*, welche Begrenzungslinie ( $L_1$ ) in den äusseren und welche Linie ( $L_2$ ) in den inneren geschlossenen Begrenzungskreis übergehen soll;

bei *Typus 2*, welche Begrenzungslinie ( $L_1$ ) in die geschlossene Kreislinie und welcher innere Punkt ( $z_1$ ) in den Hauptpunkt (Nullpunkt) übergehen soll;

bei *Typus 3*, welcher innere Punkt ( $z_1$ ) in den Nullpunkt und welcher innere Punkt ( $z_2$ ) in den unendlich fernen Punkt übergehen soll;

bei *Typus 4*, welcher innere Punkt ( $z_1$ ) in den Nullpunkt und welcher innere Punkt ( $z_2$ ) in den Punkt  $\infty$  übergehen soll;

bei *Typus 5*, welcher Punkt ( $z_1$ ) in den unendlich fernen Punkt übergehen soll und welches hierbei die Zuordnung der in  $z_1$  und  $\infty$  liegenden Richtungselemente sein soll;

bei *Typus 6*, welche Begrenzungslinie ( $L_1$ ) in den äusseren und welche ( $L_2$ ) in den inneren geschlossenen Begrenzungskreis übergehen soll, ferner welche Begrenzungslinien ( $L_3, L_4, \dots, L_k$ ) in kreisbogenförmige und welche Begrenzungslinien ( $L_{k+1}, \dots, L_m$ ) in geradlinige Schlitze übergehen sollen;

bei *Typus 7*, welche Begrenzungslinie ( $L_1$ ) in die Kreislinie und welcher Punkt ( $z_1$ ) in den Nullpunkt übergehen soll, ferner welche Begrenzungslinien ( $L_2, \dots, L_k$ ) in kreisbogenförmige Schlitze und welche Begrenzungslinien ( $L_{k+1}, \dots, L_m$ ) in geradlinige Schlitze übergehen sollen;

bei *Typus 8*, welcher Punkt ( $z_1$ ) in den Nullpunkt und welcher Punkt ( $z_2$ ) in den unendlich fernen Punkt übergehen soll, ferner welche Begrenzungslinien ( $L_1, L_2, \dots, L_k$ ) in kreisbogenförmige Schlitze und welche Begrenzungslinien ( $L_{k+1}, \dots, L_m$ ) in geradlinige Schlitze übergehen sollen;

bei *Typus 9*, welcher Punkt ( $z_1$ ) in den unendlich fernen Punkt übergehen

soll und welches hierbei die Zuordnung der in  $z_1$  und  $\infty$  befindlichen Richtungselemente sein soll, ferner welche Begrenzungslinien  $(L_1, L_2, \dots, L_k)$  in Schlitze parallel der Achse des Reellen und welche  $(L_{k+1}, \dots, L_m)$  in Schlitze parallel der Achse des Imaginären übergehen sollen.

## § 2.

### *Der Unitätsbeweis.*

Auf die gestellten neun Abbildungsaufgaben fällt ein besonderes Licht durch die für diese Aufgaben geltenden Unitätssätze.

*Allgemeiner Unitätssatz:* Die gestellten neun Abbildungsaufgaben gestatten, sofern sie überhaupt eine Lösung besitzen, wesentlich nur eine Lösung. Hierbei werden allgemein zwei Lösungen als nicht wesentlich verschieden bezeichnet, wenn sie durch eine Ähnlichkeitstransformation auseinander hervorgehen, d. i. in den Fällen des elliptischen, hyperbolischen und elliptisch-hyperbolischen Kreissystems (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8,) sofern sie durch Multiplikation mit einer reellen oder komplexen Konstanten ineinander übergehen (zentrische Ähnlichkeitstransformation mit dem Hauptpunkte des Kreissystems als Fixpunkt), hingegen in den Fällen des parabolischen Kreissystems (5, 9), sofern sie durch eine ganze lineare Substitution mit positiven reellen Koeffizienten ineinander übergehen (allgemeinste richtungstreue Ähnlichkeitstransformation der Ebene).

Ein *Beweis dieses allgemeinen Unitätssatzes* ergibt sich aus folgendem Hilfssatze:

*Hilfssatz:* Es sei  $F(z)$  eine im Bereiche  $B$  (mit  $m$  geschlossenen regulären analytischen Begrenzungslinien) bis in die Begrenzung hinein reguläre und eindeutige analytische Funktion, welche die Eigenschaft hat, auf jeder einzelnen der  $m$  Begrenzungslinien nur Werte anzunehmen, für welche entweder der reelle Teil oder der imaginäre Teil konstant ist; alsdann reduziert sich diese Funktion auf eine Konstante.

Zum Beweise dieses Satzes bemerken wir noch ausdrücklich, dass für eine und dieselbe zu betrachtende Funktion  $F(z)$  zugelassen wird, dass auf einigen Begrenzungslinien der reelle, auf anderen der imaginäre Teil konstant ist. Wir nehmen nun an, dass  $F(z)$  keine Konstante sei. Alsdann wird durch die Funktion  $F(z)$  eine konforme Abbildung bewirkt, bei welcher den einzelnen Begrenzungslinien geradlinigen Schlitze entsprechen, die teils zur Achse des Reellen, teils zur Achse des Imaginären parallel sind. Betrachten wir nun die Abbildung in der Nachbarschaft einer der Begrenzungslinien, so beobachten wir, dass sich ein dieser Begrenzungslinie anschliessender schmaler Streifen des Bereichs  $B$  auf einen entsprechenden Streifen der Bildebene abbilden wird, und es ist unmit-

telbar ersichtlich, dass die Gesamtheit der durch den letzteren Streifen bedeckten Punkte der  $F$ -Ebene den betreffenden Schlitz vollständig einbetten wird, wobei es übrigens nichts ausmacht, ob die der Durchlaufung der Begrenzungslinie von  $B$  entsprechende Durchlaufung des betrachteten Schlitzes in einem einfachen Hin- und Hergang oder in wiederholten Hin- und Hergängen auf dem Schlitze besteht. Wir bemerken in jedem Falle die Tatsache, dass die für den Bereich  $B$  (einschliesslich seiner Begrenzung) betrachtete Funktion  $F(z)$  auf keiner Begrenzungslinie dieses Bereichs ein Maximum des absoluten Betrages ihrer Werte erreichen wird. Dies steht aber im Widerspruch mit dem andern allgemeinen Satze der Funktionentheorie, dass eine in einem Bereich eindeutige und reguläre analytische Funktion stets auf der Grenze des Bereichs das Maximum ihres absoluten Betrages erreicht. Dieser Widerspruch löst sich nur dadurch, dass angenommen wird, die Funktion  $F(z)$  reduziere sich, wie unser Hilfssatz behauptet, auf eine Konstante. *Q. e. d.*

Gehen wir nunmehr zur Anwendung des Hilfssatzes zum Beweise unseres Unitätssatzes über. Wir betrachten dazu zwei voneinander verschiedene analytische Funktionen  $F_1(z)$ , und  $F_2(z)$ , welche unter genau denselben im Abbildungsproblem formulierten sonstigen Nebenbedingungen die konforme Abbildung des Bereichs  $B$  auf eine der neun charakteristischen Gestalten liefern. Wir können dann in den parabolischen Fällen (Figg. 5 u. 9) die Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  durch eine richtungstreue Ähnlichkeitstransformation einer der beiden Ebenen ( $F_1$ -Ebene oder  $F_2$ -Ebene) noch in der Weise einander anpassen, dass die Funktion  $F_1(z) - F_2(z)$  im Punkte  $z_1$  regulär wird.

Nach diesen speziell auf die Fälle 5 und 9 Bezug nehmenden Vorbemerkungen bilden wir nunmehr, den einzelnen Figuren entsprechend, folgende Funktionen:

1. in allen nichtparabolischen Fällen (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8) die Funktion

$$\log \frac{F_1(z)}{F_2(z)} = \Phi_1(z)$$

2. in den parabolischen Fällen (5 und 9) die Funktion

$$F_1(z) - F_2(z) = \Phi_2(z)$$

und bemerken, dass auf die so gebildeten Funktionen  $\Phi_1(z)$  und  $\Phi_2(z)$  die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes zutreffen. Insbesondere ist auch die Voraussetzung der Regularität bei den Funktionen  $\Phi_1(z)$  und  $\Phi_2(z)$  auf der Begrenzung des Bereichs  $B$  erfüllt: denn jede der Abbildungsfunktionen  $F_1(z)$  und  $F_2(z)$  muss sich, wenn sie zunächst nur für das Innere (exklusive Begrenzung) des Be-

reichs  $B$  erklärt gedacht wird, auf jeder Begrenzungslinie von  $B$  regulär verhalten, nach unseren Entwicklungen über Ränderzuordnung in der Abhandlung I (Journ. f. Math., Bd. 145).

### § 3.

*Übergang von den Abbildungsfunktionen  $f^{(\lambda)}(z)$  zu den zugehörigen charakteristischen Potentialen  $u^{(\lambda)}$ .*

1. Um im Folgenden die gerade ins Auge gefasste unter den neun Abbildungsaufgaben bequem durch die Bezeichnung selbst kennzeichnen zu können, wollen wir nunmehr die betreffenden Funktionen, welche die konformen Abbildungen des Bereiches  $B$  auf die neun charakteristischen Bereiche leisten, der Reihe nach mit

$$f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), \dots, f^{(9)}(z)$$

bezeichnen und die Bezeichnung  $f(z)$  lassen für die früher behandelte Abbildung des Bereiches  $B$  auf das volle Innere des Einheitskreises (*Fundamentalabbildung*).

Wir betrachten nunmehr in den elliptischen, hyperbolischen und elliptisch-hyperbolischen Fällen an Stelle der eigentlich zu ermittelnden Funktion  $f^{(\alpha)}(z)$  die Potentialfunktion

$$u^{(\alpha)} = \log |f^{(\alpha)}(z)|, [\alpha = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8],$$

d. i. den reellen Teil der Funktion  $\log f^{(\alpha)}(z)$ ; in den parabolischen Fällen jedoch betrachten wir statt der eigentlich zu ermittelnden Abbildungsfunktion  $f^{(\beta)}(z)$  die Funktion

$$u^{(\beta)} = \Re(f^{(\beta)}(z)) \equiv \text{Reeller Teil von } f^{(\beta)}(z).$$

Wir wollen diese Funktionen  $u$  als Funktionen in  $B$  durch ein System analytischer Eigenschaften vollständig charakterisieren, und zwar die Funktionen  $u^{(\alpha)}$  abgesehen von einer reellen additiven Konstanten, und die Funktionen  $u^{(\beta)}$  abgesehen von einer reellen additiven und von einer positiv reellen multiplikativen Konstanten.

Das Potential  $u^{(1)}$  ist eine in  $B$  einschliesslich der vollständigen Begrenzung eindeutige und reguläre Funktion, welche längs jeder einzelnen Begrenzungslinie einen gewissen (unbekannten) konstanten Wert annimmt und deren konjugierte Potentialfunktion  $v^{(1)}$  längs  $L_1$  den Periodizitätsmodul  $2\pi$ , längs  $L_2$  den Periodizitätsmodul  $-2\pi$  besitzt, längs allen übrigen Begrenzungslinien jedoch den Periodizitätsmodul null.

Das Potential  $u^{(2)}$  ist eine in  $B$  mit Ausnahme des Punktes  $z_1$  eindeutige und reguläre Funktion, welche im Punkte  $z_1$  unendlich wird wie  $\log|z - z_1| \equiv \log r_1$  und auf jeder Begrenzungslinie je einen (unbekannten) konstanten Wert annimmt,

deren konjugierte Funktion  $v^{(2)}$  ferner längs  $L_1$  den Periodizitätsmodul  $2\pi$  besitzt, längs allen übrigen Begrenzungslinien den Periodizitätsmodul null.

Das *Potential*  $u^{(3)}$  ist eine in  $B$  mit Ausnahme der beiden Punkte  $z_1$  und  $z_2$  eindeutige und reguläre Funktion, welche im Punkte  $z_1$  wie  $\log|z - z_1| \equiv \log r_1$  und im Punkte  $z_2$  wie  $-\log(z - z_2) \equiv -\log r_2$  unendlich wird, längs jeder anderen Begrenzungslinie je einen (unbekannten) konstanten Wert annimmt, deren konjugierte Funktion  $v^{(3)}$  ferner schliesslich längs allen Begrenzungslinien den Periodizitätsmodul null besitzt.

Das *Potential*  $u^{(4)}$  ist eine im Bereich  $B$  mit Ausnahme der Punkte  $z_1$  und  $z_2$  eindeutig und regulär erklärte Funktion, welche in  $z_1$  unendlich wird wie  $\log r_1$ , in  $z_2$  wie  $-\log r_2$ , welche ferner längs des ganzen Randes die normale Ableitung null besitzt, oder anders ausgedrückt, deren konjugierte Funktion  $v^{(4)}$  längs jeder Begrenzungslinie je einen (unbekannten) konstanten Wert besitzt.

Das *Potential*  $u^{(5)}$  ist eine in  $B$  eindeutige und, abgesehen vom Punkte  $z_1$  reguläre Funktion, die in  $z_1$  unstetig wird wie  $r_1^{-1} \cos(\varphi - \varphi_1)$  und längs des ganzen Randes die normale Ableitung null besitzt, oder anders ausgedrückt, deren konjugierte Funktion  $v^{(5)}$  längs jeder Begrenzungslinie je einen (unbekannten) konstanten Wert besitzt.

Das *Potential*  $u^{(6)}$  ist eine im ganzen Bereich  $B$  eindeutige und reguläre Funktion, welche längs den Begrenzungslinien  $L_1, L_2, \dots, L_k$  je einen (unbekannten) konstanten Wert hat, längs den Begrenzungslinien  $L_{k+1}, \dots, L_m$  die normale Ableitung null oder anders ausgedrückt je einen (unbekannten) konstanten Wert ihrer konjugierten Funktion  $v^{(6)}$  hat. Die genannte konjugierte Funktion hat ferner längs  $L_1$  den Periodizitätsmodul  $2\pi$ , längs  $L_2$  den Periodizitätsmodul  $-2\pi$ , schliesslich längs  $L_3, \dots, L_m$  den Periodizitätsmodul null.

Das *Potential*  $u^{(7)}$  ist eine im ganzen Bereich  $B$  eindeutige und mit Ausnahme des Punktes  $z_1$  reguläre Funktion, welche längs den Linien  $L_1, L_2, \dots, L_k$  je einen (unbekannten) konstanten Wert, längs  $L_{k+1}, \dots, L_m$  die normale Ableitung null, oder anders ausgedrückt, je einen konstanten Wert der zugehörigen konjugierten Funktion  $v^{(7)}$  besitzt. Diese konjugierte Potentialfunktion besitzt ferner längs  $L_1$  den Periodizitätsmodul  $2\pi$ , längs  $L_2, \dots, L_k$  den Periodizitätsmodul null.

Das *Potential*  $u^{(8)}$  ist eine im ganzen Bereich  $B$  mit Ausnahme der beiden Punkte  $z_1$  und  $z_2$  reguläre Funktion, welche in  $z_1$  unstetig wird wie  $\log r_1$ , in  $z_2$  unstetig wie  $-\log r_2$ , welche ferner längs  $L_1, \dots, L_k$  je einen (unbekannten) konstanten Wert, längs  $L_{k+1}, \dots, L_m$  die normale Ableitung null hat oder, anders ausgedrückt, je einen (ebenfalls unbekanntem) konstanten Wert der konjugierten Funktion  $v^{(8)}$ . Diese konjugierte Funktion besitzt schliesslich längs  $L_1, \dots, L_k$  den Periodizitätsmodul null.

Das Potential  $u^{(0)}$  ist eine im ganzen Bereich  $B$  eindeutige und mit Ausnahme des Punktes  $z_1$  reguläre Funktion, welche in  $z_1$  unstetig wird wie  $r_1^{-1} \cos(\varphi - \varphi_1)$ , längs  $L_1, \dots, L_k$  die normale Ableitung null oder, anders ausgedrückt, je einen (unbekannten) konstanten Wert der konjugierten Potentialfunktion darbietet, längs  $L_{k+1}, \dots, L_m$  hingegen je einen (unbekannten) konstanten Wert und den Periodizitätsmodul null der konjugierten Funktion  $v^{(0)}$  darbietet.

Die in der angegebenen Weise durch Eigenschaften charakterisierten Potentiale  $u^{(1)}, \dots, u^{(9)}$  sind durch diese Eigenschaften vollständig bestimmt bis auf additive Konstante. Bildet man nämlich die Differenz zweier solcher Potentiale desselben Index, von welchen angenommen wird, dass bei beiden die dem Index entsprechenden Eigenschaften vorhanden sind, so wird die Differenz dieser beiden Potentiale ein Potential werden, welches zusammen mit dem zugehörigen konjugierten Potential eine analytische Funktion  $F(z)$  liefert, auf welche die Voraussetzungen des Hilfssatzes Pag. 314 zutreffen, eine Differenzfunktion, welche sich folglich auf eine Konstante reduzieren muss.

2. Wir wollen uns jetzt noch, bevor wir die Frage nach der Existenz der Potentialfunktionen  $u^{(1)}, \dots, u^{(9)}$  erledigen, überlegen, wie wir von den als gefunden angenommenen Funktionen  $u^{(\lambda)}$  [ $\lambda = 1, 2, \dots, 9$ ] zu den eigentlich gesuchten Abbildungsfunktionen  $f^{(\lambda)}(z)$  gelangen, und den Beweis führen, dass diese Funktionen tatsächlich die gewünschten Abbildungen leisten.

Die Abbildungsfunktionen werden, wenn mit  $v^{(\lambda)}$  in allen Fällen die zu  $u^{(\lambda)}$  konjugierte Potentialfunktion bezeichnet wird, durch die Ausdrücke geliefert

$$f^{(\alpha)}(z) = e^{u^{(\alpha)} + i v^{(\alpha)}} \quad [\alpha = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8]$$

$$f^{(\beta)}(z) = u^{(\beta)} + i v^{(\beta)} \quad [\beta = 5, 9]$$

Die Existenz der Potentiale  $v^{(\alpha)}$  und  $v^{(\beta)}$  wird bei der Art und Weise, wie wir unten die Funktionen  $u^{(\alpha)}$  und  $u^{(\beta)}$  finden werden, für uns nicht problematisch sein, insofern als wir die Funktionen  $u^{(\alpha)}$  und  $u^{(\beta)}$  unmittelbar oder mittelbar durch gleichmässig konvergente Reihen mit rationalen oder logarithmischen komplexen Gliedern finden werden, deren reelle oder imaginäre Teile uns sofort konjugierte Potentiale liefern.

Betrachten wir speziell die durch die Funktion

$$f^{(1)}(z) = e^{u^{(1)} + i v^{(1)}}$$

vermittelte konforme Abbildung. Wir stellen sofort fest, dass die Funktion  $f^{(1)}(z)$  in  $B$  einschliesslich des ganzen Randes eine reguläre und eindeutige analytische

Funktion ist, die weder den Wert 0, noch den Wert  $\infty$  annimmt, ferner die Eigenschaft hat, dass die Amplitude ihres Wertes längs  $L_1$  die vollständige Änderung  $2\pi$ , längs  $L_2$  die vollständige Änderung  $-2\pi$ , längs allen übrigen Begrenzungslinien jedoch die vollständige Änderung null erfährt, ferner die Eigenschaft, auf allen Begrenzungslinien einen konstanten absoluten Betrag zu besitzen.

Da die Funktion  $z' = f^{(1)}(z)$  im Bereiche  $B$  einschliesslich seiner Begrenzung regulär und eindeutig ist, ist es möglich, den dadurch gesetzten Vorrat der umgekehrten Wertzuordnungen  $z(z')$  mittels einer endlichen Anzahl von Funktionselementen regulären oder algebraischen Charakters mit  $z'$  als unabhängiger Variablen vollständig zur Darstellung zu bringen. Das Bild des Bereichs  $B$  wird so ein den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt nicht enthaltendes endlich-vielblättriges Flächenstück  $B'$  mit höchstens endlich vielen Windungspunkten sein müssen, dessen vollständige Begrenzung sich auf höchstens  $m$  Kreise  $K$  verteilt, die den Nullpunkt zum Mittelpunkte haben. Aus dem Angeführten folgt schon ohne weiteres, dass das Flächenstück  $B'$  mit keinem seiner Punkte ausserhalb des grössten und innerhalb des kleinsten jener Kreise sich erstrecken kann und dass daher dieser grösste und kleinste Kreis nur als einfache und ohne Umkehr durchlaufene Begrenzung auftreten kann. Die Vielblättrigkeit des Bereichs  $B'$  für jede Stelle der Ebene wird nun nach einem Analysis-Situs-Satz angegeben durch die für die Stelle ermittelt zu denkende Umlaufungszahl der vollständigen Begrenzung des Bereichs  $B'$  bei Durchlaufung derselben in positivem Sinne, wobei der Bereich selbst zur Linken liegt. Diese aber kann in der Tat sofort festgestellt werden, da die betreffenden Umlaufszahlen für den Nullpunkt als Orientierungszentrum bekannt sind. Es ergibt sich insbesondere, dass jede nicht auf einem Kreise  $K$  liegende, zwischen dem kleinsten und grössten Kreise  $K$  befindliche Stelle einfach bedeckt wird. Damit aber ist sofort klar, dass der ganze Bereich  $B'$  ein einblättriger Bereich sein muss, wie es gewünscht wird.

Wir betrachten zweitens den Fall der Funktion

$$f^{(5)}(z) = u^{(5)} + iv^{(5)}.$$

Die Begrenzungslinien von  $B$  gehen jedenfalls alle in endliche Schlitz über, von welchen allerdings nicht ohne weiteres klar ist, dass ihre vollständige Durchlaufung in einem einfachen Hin- und Hergang besteht. Dies wird jedoch sofort klar, wenn wir zeigen können, dass die Bildebene bei der durch  $f^{(5)}(z)$  vermittelten Abbildung in keinem zweidimensionalen Teile mehrblättrig bedeckt werden kann.

Das aber ergibt sich aus dem Umstande, dass die Annahme einer zweiblättrigen Bedeckung eines Gebietes ohne weiteres dazu führt, dass auch die Nachbarschaft des unendlich fernen Punktes zweiblättrig bedeckt sein muss; denn es setzen sich die betreffenden zwei Blätter in Richtung der Achse des Reellen, wobei keiner der Grenzschnitte passiert wird, notwendig grenzstellenfrei fort. Nun wird aber die unmittelbare Umgebung des unendlich fernen Punktes nur einfach bedeckt, weil nur eine Unendlichkeitsstelle erster Ordnung der Funktion  $f^{(6)}(z)$  existiert. Hiermit ist der Abbildungscharakter der Funktion  $f^{(6)}(z)$  festgestellt, und es ist wieder klar, dass die begrenzenden Schnitte alle getrennt voneinander liegen und dass ihre vollständige Durchlaufung in Form eines einfachen Hin- und Herganges stattfindet.

Fassen wir schliesslich noch das Beispiel der Funktion

$$f^{(9)}(z) = u^{(9)} + i v^{(9)}$$

ins Auge, in welchem Falle wir zwischen Schlitten parallel der Achse des Reellen und parallel der Achse des Imaginären zu unterscheiden haben. Wir wissen hier von vornherein, dass die Umgebung des unendlich fernen Punktes einfach bedeckt wird auch von dem Bildbereich  $B'$ . Wir können nun den unendlich fernen Flächenteil durch einen hinreichend grossen Hilfskreis von  $B'$  abtrennen und erhalten so einen Bereich  $B''$ , der aussen von jenem Hilfskreise, innen von endlich vielen schlitzförmigen Linien begrenzt wird. Nun ist aber wiederum klar, dass für jede Stelle der  $B'$ -Ebene, welche innerhalb des Hilfskreises liegt und nicht mit einem Begrenzungspunkte von  $B'$  koinzidiert, die Umlaufungszahl der vollständigen Begrenzung von  $B''$  den Wert 1 hat, welcher Wert eben von dem Hilfskreise herrührt. Damit ist gezeigt, dass die Fläche  $B''$  eine überall einblättrige Bedeckung jenes Kreisinneren darbietet und dass somit diese Fläche nach innen von jenen schlitzförmigen Linien begrenzt wird, deren jede einzelne in einem einfachen Hin- und Hergang durchlaufen zu denken ist.

#### § 4.

##### *Bestimmung des Potentials $u^{(1)}$ .*

Die Lösung aller neun Abbildungsaufgaben ist zurückgeführt auf den Nachweis der Existenz der Potentialfunktionen  $u^{(1)}, \dots, u^{(9)}$ . Um nun zu diesen zu gelangen, werden wir noch gewisse weitere Reduktionen vornehmen.

Wir beginnen damit, das Potential  $u^{(1)}$  zu bestimmen. Dieses Potential ist auf allen Begrenzungslinien konstant, jedoch sind diese konstanten Werte unbekannt. Sie werden durch die Eigenschaften des Potentials näher bestimmt, ein



zugehörendes konjugiertes Potential  $v^{(1)}$  zu besitzen, welches längs  $L_1$  den Periodizitätsmodul  $2\pi$ , längs  $L_2$  den Periodizitätsmodul  $-2\pi$ , längs allen übrigen jedoch den Periodizitätsmodul null hat. Diese letztere Aufgabe erledigt sich, wie wir sehen werden, verhältnismässig leicht durch Auflösung gewisser nicht homogener linearer Gleichungen, sobald es uns gelungen ist, die folgenden  $m$  Potentiale zu ermitteln

$$I_\nu^{(1)}[\nu = 1, 2, \dots, m],$$

nämlich  $I_\nu^{(1)}$  als diejenige in  $B$  eindeutige und einschliesslich des Randes reguläre Potentialfunktion, welche längs  $L_\nu$  den konstanten Wert 1, längs allen übrigen Begrenzungslinien den konstanten Wert 0 annimmt. Nehmen wir an, dass es uns gelungen sei, diese Funktionen herzustellen, so besitzen wir in  $\sum_{\nu=1}^{m-1} c_\nu I_\nu^{(1)}$  diejenige in  $B$  eindeutige und reguläre Potentialfunktion, die auf  $L_\nu$  den konstanten Wert  $c_\nu$  annimmt [ $\nu = 1, \dots, m-1$ ], auf  $L_m$  jedoch den konstanten Wert null. Die genannten  $m-1$  Funktionen  $I_\nu^{(1)}[\nu = 1, \dots, m-1]$  werden jede ein System  $\omega_{\nu,k}[k = 1, \dots, m-1]$  von  $m-1$  Periodizitätsmoduln der konjugierten Funktionen  $I_\nu^{(1)'}$  besitzen, entsprechend der Durchlaufung der Linien  $L_1, \dots, L_{m-1}$ . Die Determinante des Systems der  $(m-1)^2$  Grössen  $\omega_{\nu,k}$  kann nun nicht verschwinden;<sup>1</sup> denn sonst würde man eine nicht verschwindende homogene lineare Kombination der  $I_\nu^{(1)}[\nu = 1, \dots, m-1]$  aufstellen können, welche längs  $L_1, \dots, L_{m-1}$ , d. h. auch längs  $L_m$  den Periodizitätsmodul null des imaginären Teils aufweist, welche also zusammen mit ihrer konjugierten Funktion eine in  $B$  eindeutige reguläre Funktion liefern würde, deren reeller Teil auf allen Begrenzungslinien konstant ist. Nachdem das Nichtverschwinden der erwähnten Determinante feststeht, ist es möglich, eine nicht verschwindende lineare homogene Kombination der Grössen  $I_\nu^{(1)}[\nu = 1, \dots, m-1]$  so zu bestimmen, dass die zugehörende konjugierte Potentialfunktion längs  $L_1$  den Periodizitätsmodul  $2\pi$ , längs  $L_2$  den Periodizitätsmodul  $-2\pi$ , längs  $L_3, \dots, L_{m-1}$  den Periodizitätsmodul null, daher auch längs  $L_m$  den Periodizitätsmodul null besitzt. Damit wäre die Funktion  $u^{(1)}$  gefunden.

Alles reduziert sich somit auf die eine Frage der Existenz der Funktionen  $I_\nu^{(1)}$ . Diese Funktionen aber ergeben sich uns nun durch Reihenbildung bei Zugrundelegung der in der Abhandlung II als existierend nachgewiesenen Fundamentalfunktion

<sup>1</sup> Vgl. SCHOTTKY l. c. (Journ. f. Math. Bd. 117).

$$f(z) = \zeta,$$

welche den Bereich  $B$  auf die obere  $\zeta$ -Halbebene abbildet (*Fundamentalabbildung*). In der  $\zeta$ -Ebene konstruieren wir ein Fundamentalpolygon  $II_0$ , von  $2m - 2$  Halbkreisen und  $2m - 2$  Stücken der Achse des Reellen begrenzt. Ein solches Polygon  $II_0$  erhalten wir, indem wir den Bereich  $B$  durch  $m - 1$  Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden Bereich  $B_0$  verwandeln, dessen Bild  $II'_0$  in der  $\zeta$ -Ebene ermitteln und nunmehr die  $2m - 2$  paarweise zugeordneten Seiten von  $II'_0$  direkt durch Halbkreise mit denselben Endpunkten ersetzen.

Wir denken uns das zu bestimmende Potential  $I_v^{(1)}$  in die  $\zeta$ -Ebene überpflanzt und bemerken folgende Eigenschaften des Potentials. Die Grösse  $I_v^{(1)}$  ist in der ganzen oberen Halbebene, einschliesslich der Achse des Reellen, bis auf die auf ihr befindlichen Grenzpunkte (Indiskontinuitätspunkte) eine endliche und eindeutige Potentialfunktion. Sie nimmt auf allen der Linie  $L_v$  entsprechenden Strecken  $s_v$  der Achse des Reellen den konstanten Wert 1 an, auf den übrigen Strecken, welche den von  $L_v$  verschiedenen Begrenzungslinien des Bereichs  $B$  entsprechen, den konstanten Wert null. Die Funktion ist ferner beschränkt in der ganzen oberen  $\zeta$ -Halbebene und hat die Eigenschaft, gegenüber den Substitutionen der Fundamentalgruppe unverändert zu bleiben. Eine solche Funktion lässt sich nun bilden als reeller Teil einer gleichmässig konvergenten Reihe von analytischen Funktionen. Wir wollen, um eine einfache Vorstellung zu haben, annehmen, dass alle Strecken  $s_v$  in einem endlichen Intervall der Achse des Reellen enthalten sind. Wir erreichen dies jedenfalls durch eine eventuelle lineare Transformation, welche die obere  $\zeta$ -Halbebene in sich transformiert. Wir bezeichnen dann mit  $a_v$  den linken Endpunkt und mit  $b_v$  den rechten Endpunkt einer Strecke  $s_v$  und bilden die Summe

$$\sum_{s_v} \log \frac{\zeta - a_v}{\zeta - b_v},$$

wobei über alle Endpunkte  $a_v, b_v$  von den Strecken  $s_v$  zu summieren ist. Die gleichmässige Konvergenz dieser unendlichen Reihe zunächst in der oberen Halbebene, dann aber auch in der ganzen Ebene mit Ausnahme der genannten Grenzpunkte ergibt sich aus der Bemerkung der Endlichkeit der Summe der Längen aller Strecken  $s_v$ . Man muss dabei für den Logarithmus den Hauptwert gesetzt denken oder doch, für die weiteren Zweige der dargestellten Funktion, den Hauptwert für alle Grössen der Summe von einem gewissen ab. Nun ist zu berücksichtigen, dass die Grössen  $|\zeta - a_v|$  und  $|\zeta - b_v|$  alle zwischen zwei von 0 und  $\infty$  verschiedenen endlichen Schranken bleiben und dass daher

$$\left| 1 - \frac{\bar{\zeta} - a_\nu}{\zeta - b_\nu} \right| = \left| \frac{a_\nu - b_\nu}{\bar{\zeta} - b_\nu} \right| < \alpha \cdot s_\nu$$

gesetzt werden kann, unter  $\alpha$  eine endliche, von der Wahl der Strecke  $s_\nu$  unabhängige Schranke verstanden, und unter  $s_\nu$  jetzt die Länge der gleichbezeichneten Strecke  $s_\nu$ .

Nun stellen wir aber auch sofort fest, dass der imaginäre Teil des in der oberen Halbebene erklärten Hauptzweiges der obigen Funktion von  $\zeta$  längs jeder Strecke  $s_\nu$  den Wert  $\pi$  erhält, längs jeder Strecke  $s_\mu$  [ $\mu \neq \nu$ ] jedoch den Wert 0, wie es sein soll. Beides ergibt sich nämlich aus der geometrischen Deutung des imaginären Teils der Grösse  $\log \frac{\bar{\zeta} - a_\nu}{\zeta - b_\nu}$  als scheinbarer Grösse der Strecke  $s_\nu$ , gesehen vom Punkte  $\zeta$ . In der Tat wird, wenn wir auf eine bestimmte Strecke  $s_\nu$  lossteuern, die scheinbare Grösse dieser Strecke gleich  $\pi$ , während sie dabei gleichzeitig für jede andere Strecke 0 wird.

Noch ist der automorphe Charakter des imaginären Teils der obigen Funktion zu beweisen. Dieser aber folgt aus seiner geometrischen Deutung als der gesamten scheinbaren Grösse aller Strecken  $s_\nu$ , vom Punkte  $\zeta$  aus gesehen. Bei einer Substitution der Fundamentalgruppe wird das System aller Strecken  $s_\nu$  in sich transformiert. Geht dabei der Punkt  $\zeta$  in  $\zeta'$  über, die Strecke  $s_\nu$  in  $s'_\nu$ , so ist die scheinbare Grösse der Strecke  $s'_\nu$ , vom Punkte  $\zeta'$  gesehen, gleich der scheinbaren Grösse der Strecke  $s_\nu$ , vom Punkte  $\zeta$  gesehen. Man erkennt dies z. B. durch die Schreibweise ( $\text{Am} \equiv \text{Amplitude von}$ )

$$\text{Am} \left( \frac{\zeta - a_\nu}{\zeta - b_\nu} \right) = \frac{1}{2} \text{Am} \left( \frac{\zeta - a_\nu}{\zeta - b_\nu} : \frac{\bar{\zeta} - a_\nu}{\bar{\zeta} - b_\nu} \right),$$

unter  $\bar{\zeta}$  die zu  $\zeta$  konjugiert komplexe Grösse verstanden. In letzterer Schreibung haben wir ein invariantes Doppelverhältnis stehen. Einen anderen geometrischen Grund hat man, wenn man bedenkt, dass der fragliche Winkel halb so gross ist als der seinerseits invariante Winkel, welchen die von  $\zeta$  nach  $a_\nu$  und  $b_\nu$  führenden Orthogonalkreisbögen der Achse des Reellen im Punkte  $\zeta$  bilden.

## § 5.

*Abbildungen eines mehrfach zusammenhängenden Bereichs auf sich selbst.*

1. Im Besitze der Abbildungsfunktion  $f^{(1)}(z)$  (Abbildung auf die geschlitzte Kreisringfläche, im Falle  $m = 2$  ungeschlitzte Kreisringfläche) sind wir in der Lage, in einfachster Weise die Frage nach der Gesamtheit möglicher eindeutiger

konformer Transformationen eines  $m$ -fach ( $m \geq 2$ ) zusammenhängenden schlichten Bereichs in sich selbst zu beantworten.

1. Die wichtige hier bei  $m > 2$  bestehende bekannte Tatsache ist, dass die Anzahl der verschiedenen derartigen Transformationen eine *durch  $m$  allein bestimmte ganze Zahl nicht überschreiten* kann. Zum Beweise dieses Satzes zeigen wir, dass, wenn ein  $m$ -fach zusammenhängender Bereich  $B$  in der Weise auf sich selbst eindeutig abgebildet ist, dass dabei gewisse drei der Begrenzungslinien einzeln jede in sich selbst transformiert werden, so ist diese Abbildung die identische Abbildung.

Bringen wir in der Tat den Bereich  $B$  in die Form der kreisbogenförmig geschlitzten Kreisringfläche  $B'$  mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, indem wir insbesondere zwei der sich selbst entsprechenden Randlinien des Bereiches  $B$  in den innern und äussern Begrenzungskreis des Bereichs  $B'$  überführen, so gewinnen wir durch Übertragung vom Bereiche  $B$  auf den Bereich  $B'$  eine Abbildung des letzteren Bereiches auf sich selbst, bei welcher der innere und äussere Begrenzungskreis jeder sich selbst entsprechen. Es sei  $F(z)$  die Funktion, welche diese letztere Abbildung vermittelt. Diese Funktion  $F(z)$  wird sich dann notwendiger Weise auf der Begrenzung des Bereiches  $B'$  regulär verhalten nach unseren allgemeinen Prinzipien der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Betrachten wir nunmehr die Funktion

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{z}$$

und nehmen an, dieselbe sei keine Konstante, so wird jeder einzelnen Begrenzungslinie des Bereichs  $B'$  eine Wertefolge der Funktion  $\Phi(z)$  entsprechen, welche, geometrisch gesprochen, einen Kreisbogen  $K$  beschreibt, in einem einfachen oder verschiedenen Hin- und Hergängen. Es wird insbesondere dabei nicht zu einer vollständigen Umlaufung des Nullpunktes kommen können, weil die vollständige Amplitudenänderung der Grösse  $\Phi(z)$  für alle Begrenzungslinien des Bereichs  $B'$  gleich null ist. Man gelangt vielmehr bei Durchlaufung jeder Linie notwendig zu einem Umkehrpunkte  $\zeta^*$ . Ist  $z^*$  der diesem Umkehrpunkte entsprechende Punkt des Bereiches  $B'$ , so muss in diesem Punkte die Ableitung der Funktion  $\Phi(z)$  verschwinden. Es wird daher ein der Stelle  $z^*$  benachbarter Flächenteil von  $B'$  auf eine vollständige Umgebung der Stelle  $\zeta^*$  abgebildet. Darin liegt, dass jene Nachbarschaft Stellen in ihrem Innern enthält, an welchen der absolute Betrag der Funktion  $\Phi(z)$  grösser ist, als in  $z^*$ , mithin auch grösser als an allen Stellen der Begrenzungslinie, zu welcher  $z^*$  gehört; denn der absolute Betrag der Grösse  $\Phi(z)$  ist ja auf jeder Begrenzungslinie von  $B'$  konstant. Hiermit ist aber

ein Widerspruch gefunden mit dem nach allgemeinen Prinzipien geltenden Satze, dass die Funktion  $\Phi(z)$  für den Bereich  $B'$  das Maximum des absoluten Betrages ihrer Werte auf einer ihrer Begrenzungslinien annehmen muss.

Nachdem feststeht, dass  $F(z) = cz$  ist, unter  $c$  eine Konstante verstanden, kann die betrachtete Abbildung des Bereiches  $B'$  auf sich selbst nur eine Drehung mit dem Nullpunkte als Fixpunkt sein. Da nun noch ein innerer Begrenzungsschlitz des Bereiches  $B'$  vorhanden ist, welcher durch die Transformation ebenfalls in sich übergehen sollte, so muss die Konstante  $c$  den Wert 1 haben.

Die gegebene Beweismethode lässt auch die Sachlage im Falle  $m = 2$  vollständig erkennen. In diesem Falle haben wir einen ungeschlitzten Kreisring  $B'$ . Wir können annehmen, dass der Symmetriekreis desselben mit dem Einheitskreis zusammenfällt. Diejenigen Transformationen, welche  $B'$  unter Festlassung der einzelnen Begrenzungslinien als Ganzes in sich transformieren, sind die Drehungen mit dem Nullpunkt als Fixpunkt. Diejenigen Transformationen, welche eine Vertauschung der Begrenzungskreise bewirken, gehen in die ersteren über, wenn man sie mit der Transformation  $z' = \frac{1}{z}$  zusammensetzt, welche den äusseren Begrenzungskreis in den inneren überführt.

2. Man kann wünschen, die obige Frage *ohne Bezugnahme auf die Entwicklungen über Ränderzuordnung* zu behandeln. Dies ist folgendermassen möglich.

Unsere Funktion  $\Phi(z)$  wird, sofern sie nicht eine Konstante ist, jedenfalls eine Abbildung auf ein Gebiet vermitteln, welches zwischen zwei endlichen Kreisen vollständig enthalten ist. Bei Annäherung an die Begrenzungslinien des Bereiches  $B'$  werden die Werte der Funktion  $\Phi(z)$  sich, geometrisch gesprochen, gewissen Kreislinien nähern, deren Mittelpunkt im Nullpunkt liegt und deren Anzahl nicht grösser als  $m$  sein kann. Nehmen wir nun in der  $\Phi$ -Ebene einen von den genannten  $m$  Kreisen verschiedenen, jedoch mit ihnen konzentrischen Kreis  $K$  an, so wird die Funktion  $\Phi(z)$  zweifellos innerhalb  $B'$  auch solche Werte annehmen, die, geometrisch gesprochen, auf dem Kreise  $K$  liegen. Dieser Kreis ist nun aber grenzstellenfrei. Betrachtet man an Stelle der Funktion  $\Phi(z)$  jetzt die Funktion  $\log \Phi(z)$ , so ist auch diese Funktion eindeutig in  $B'$ . Die Kreislinie  $K$  geht über in eine grenzstellenfreie Gerade parallel der Achse des Imaginären. Man kann jetzt auf dieser Geraden in beliebige Entfernung wandern, ohne auf eine Grenzstelle zu treffen. Es würde also der absolute Betrag der, wie gesagt, eindeutigen Funktion  $\log \Phi(z)$  beliebig grosser Werte fähig sein, während diese Funktion doch offenbar beschränkt ist.

3. Durch die vorstehenden Entwicklungen ist offenbar der Endlichkeitsbeweis auch in dem weiteren Umfange geführt, welcher sich ergibt durch Zulassung

auch der symmetrischen Umformungen (d. i. konformen Abbildungen mit Umliegung der Winkel). Liegt ein *dreifach zusammenhängender schlichter Bereich*  $B$  vor, so liefert die Abbildung desselben auf die konzentrisch kreisförmig geschlitzte Kreisringfläche  $B'$  das Resultat, dass jeder derartige Bereich  $B$  auf eine und nur eine Weise durch drei regulär analytische Querschnittlinien in zwei zu einander im analytischen Sinne in bezug auf dieselben spiegelbildlich symmetrische einfach zusammenhängende Hälften zerlegt werden kann. Bei dem Bereiche  $B'$  wird die gemeinte Zerlegung, wie unmittelbar ersichtlich ist, von drei, einer und derselben durch den Ringmittelpunkt gehenden Geraden angehörenden Strecken bewirkt.

### § 6.

*Bestimmung des Potentials  $u^{(2)}$ . Herleitung einiger bekannter Konvergenzgrundsachen bei automorphen Gruppen.*

1. Die *Bestimmung des Potentials  $u^{(2)}$*  kommt mit Rücksicht auf das über die Funktionen  $I_\nu^{(1)}$  Gesagte offenbar darauf hinaus, diejenige Potentialfunktion  $I^{(2)}$  zu ermitteln, welche im ganzen Bereich  $B$ , abgesehen von dem Punkte  $z_1$ , eindeutig und regulär ist, auf der ganzen Begrenzung von  $B$  den konstanten Wert 0 annimmt und im Punkte  $z_1$  unendlich wird wie  $\log |z - z_1|$ . Lassen wir dem Punkte  $z_1$  in der  $\zeta$ -Halbebene den Punkt  $\zeta_1$  im Innern des Fundamentalpolygons  $\Pi_0$  entsprechen und bezeichnen wir mit  $\bar{\zeta}_1$  den zu  $\zeta_1$  gehörenden konjugiert imaginären Wert, so ergibt sich die Funktion  $I^{(2)}$  direkt als der reelle Teil einer analytischen Funktion in der Gestalt

$$I^{(2)} = \Re \sum \log \frac{\zeta - \bar{\zeta}_1}{\zeta - \zeta_1} \quad (\Re \equiv \text{Reeller Teil von}),$$

wobei die Summe zu erstrecken ist über unendlich viele Terme, die man erhält, wenn man an Stelle der Punkte  $\zeta_1$  und  $\bar{\zeta}_1$  die mit diesen äquivalenten Punkte  $\zeta_1, \bar{\zeta}_1$  treten lässt. Die gleichmässige Konvergenz der Reihen ergibt sich, wenn man beachtet, dass die Summe  $\sum |\zeta_1 - \bar{\zeta}_1|$ , d. i. die Summe der Abstände je zweier konjugierter logarithmischer Unendlichkeitsstellen konvergent ist. (Siehe unter 2. dieses Paragraphen.)

Wiederum folgt der automorphe Charakter des reellen Teiles dieser Funktion und das Verschwinden dieses reellen Teiles längs allen Strecken  $s_\nu$  [ $\nu = 1, \dots, m$ ] aus der Bemerkung, dass der einzelne Term des reellen Teiles in der oberen Halbebene eine eindeutige Potentialfunktion ist, die längs der Achse des Reellen verschwindet und nur in mit  $\zeta_1$  und  $\bar{\zeta}_1$  äquivalenten Punkten logarithmisch unend-

lich wird, sodass man sagen kann, dass die sämtlichen unendlich vielen Terme nichts anderes darstellen, als die unendlich vielen Überpflanzungen der Funktion  $\log \left| \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \bar{\zeta}_1} \right|$  gemäss den Substitutionen der Fundamentalgruppe, eine Auffassung, welche den automorphen Charakter der Summe der reellen Teile als selbstverständlich erscheinen lässt.

2. Die vorher benützte Konvergenztatsache ist eine einfache Folge von der unmittelbar in Evidenz tretenden Konvergenz der Summe aller Bildstrecken der  $2m - 2$  Strecken  $\sigma_\mu$  der Achse des Reellen, die an der Begrenzung des Fundamentalbereichs  $\Pi_0$  teilnehmen. Bei Ausübung aller Substitutionen der Fundamentalgruppe gehen diese Strecken  $\sigma_\mu$  in lauter verschiedene Strecken der Achse des Reellen über, von welchen eine, bei der Summierung auszuschliessende, den unendlich fernen Punkt enthält.

Zieht man irgend eine Kreislinie  $K$ , welche auf der Achse des Reellen eines der  $2m - 2$  Grundintervalle ausschneidet, indem sie diese Achse unter einem von null verschiedenen, sonst beliebigen Winkel trifft, so wird nun auch *die Summe der Umfänge aller Bildkreise von  $K$*  konvergent sein müssen, da wegen der Invarianz des Schnittwinkels mit der Achse des Reellen auch das Verhältnis zwischen Umfang des Kreises und Länge des ausgeschnittenen Achsenabschnittes dasselbe bleibt.

Nun ist jeder Kreis  $K'$ , der ganz in der oberen Halbebene enthalten ist, einschliessbar in einen Kreis der Gattung  $K$ . Also ist auch für einen Kreis  $K'$  die Summe der Umfänge aller seiner Bildkreise konvergent. Ebenso steht es mit jedem Kreise  $K''$ , der die Achse des Reellen berührt, jedoch nicht in einem Grenzpunkte der Fundamentalgruppe. Jeder die Achse des Reellen schneidende Kreis  $K'''$  ferner lässt sich, sofern er nur keine Grenzpunkte trifft, durch Einführung eines Teilpunktes oberhalb und eines Teilpunktes unterhalb der Achse des Reellen unter Hinzunahme seiner Schnittpunkte mit der Achse des Reellen in vier Stücke zerlegen, deren jedes einzelne in einen besonderen Kreis der Gattung  $K''$  eingeschlossen werden kann, wobei dann die Länge des eingeschlossenen Bogens jedesmal kleiner ist als der Umfang des einschliessenden Kreises  $K''$ . Hiermit ist auch für die Kreise der Gattung  $K'''$  die Konvergenz der Summe ihrer Umfänge bewiesen. Insbesondere ist hiermit auch die *Konvergenz der Summe der Umfänge aller Grundkreisbilder* dargetan, d. i. der Bilder der Begrenzungskreise des Fundamentalpolygons.

Betrachtet man jetzt die *Summe der Abstände eines vollständigen Systems äquivalenter Punkte* der oberen oder unteren Halbebene von der Achse des Reellen, so muss nun auch diese Summe *konvergent* sein; denn jeder solche Abstand ist

kleiner als die Länge eines Orthogonalkreisbogens, geführt von dem betrachteten Punkte nach einem Diskontinuitätspunkte (d. i. jeder von den Grenzpunkten verschiedene Punkt) der Achse des Reellen. Die letzteren Bögen aber können wir sämtlich untereinander äquivalent wählen so, dass jeder in einen Kreis der Gattung  $K''$  eingeschlossen werden kann.

Wir bemerken ferner jetzt sofort, dass man überhaupt sagen kann, dass die *Summen der Längen aller Bilder irgend eines Kreisbogenpolygonzuges*, welcher nicht bis an die Grenzpunkte der Gruppe heranreicht, *konvergent* ist. Denn man kann einen solchen Polygonzug in endlich viele Stücke zerlegen, die ihrerseits je von einem Kreise der einen oder anderen obigen Gattung umschlossen werden können. Schliesslich finden wir ganz allgemein den Satz, dass, wenn  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  irgend zwei Punkte der  $\zeta$ -Ebene, nur nicht Grenzpunkte sind, dass die *Summe der Abstandsgrössen*  $\Sigma |\zeta_2 - \zeta_1|$ , erstreckt über alle Bildpunktpaare des Paares  $(\zeta_1, \zeta_2)$  *konvergent* ist. Diese Abstandsgrössen sind nämlich jedenfalls kleiner als die Längen von Kreisbogenpolygonzügen, welche die Punkte miteinander verbinden.

### § 7.

#### *Bestimmung der Potentiale $u^{(3)}, u^{(4)}, u^{(5)}$ .*

1. Die *Bestimmung des Potentials  $u^{(3)}$*  mit zwei entgegengesetzt gleichen logarithmischen Unstetigkeiten in  $B$  reduziert sich, abgesehen von einer durch eine lineare Kombination der  $I_v^{(1)}$  zu bewirkenden Regulierung der Periodizitätsmoduln des imaginären Teiles auf die Bestimmung desjenigen Potentials  $I^{(3)}$ , welches in  $B$  die zwei logarithmischen Unstetigkeiten bei  $z_1$  und  $z_2$  hat und längs des ganzen Randes den Wert null annimmt. Lassen wir den Stellen  $z_1$  und  $z_2$  die Stellen  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  im Fundamentalpolygon entsprechen, so finden wir  $I^{(3)}$  in der Gestalt

$$I^{(3)} = \Re \sum \log \frac{\zeta - \bar{\zeta}_1}{\zeta - \zeta_1} : \frac{\zeta - \bar{\zeta}_2}{\zeta - \zeta_2} = \Re \sum \log \frac{\zeta - \bar{\zeta}_1}{\zeta - \zeta_1} - \Re \sum \log \frac{\zeta - \bar{\zeta}_2}{\zeta - \zeta_2}.$$

4. Das *Potential  $u^{(4)}$*  soll in  $z_1$  und  $z_2$  mit entgegengesetzt gleichen Koeffizienten logarithmisch unendlich werden und ausserdem die normale Ableitung null längs der ganzen Begrenzung haben. Dies führt zur Betrachtung des folgenden Ansatzes

$$I^{(4)} = \Re \sum \log \frac{\zeta - \bar{\zeta}_1}{\zeta - \zeta_2} \frac{\zeta - \bar{\zeta}_1}{\zeta - \bar{\zeta}_2} = \sum [(\log |\zeta - \zeta_1| + \log |\zeta - \bar{\zeta}_1|) - (\log |\zeta - \zeta_2| + \log |\zeta - \bar{\zeta}_2|)].$$



Dieser Ansatz liefert uns in  $I^{(4)}$  eine in der oberen Halbebene eindeutige Potentialfunktion mit den verlangten Unstetigkeiten in  $\zeta_1, \zeta_2$  und den äquivalenten Punkten  $\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}$ , ferner ersichtlich mit verschwindender normaler Ableitung längs der Achse des Reellen, jedoch noch nicht der Bedingung genügend, sich gegenüber den Substitutionen der Fundamentalgruppe zu reproduzieren.

Die gleichmässige Konvergenz der Reihe folgt aus der gleichmässigen Konvergenz der beiden Bestandteile  $\sum \log \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2}$  und  $\sum \log \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_2}$ , wenn man

beachtet, dass die Summe der Abstandsgrössen  $|\zeta_2 - \zeta_1|$  und  $|\bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_1|$  nach § 6<sub>2</sub> konvergiert. Das Potential  $I^{(4)}$  wird sich, wie schon gesagt, im allgemeinen nicht reproduzieren gegenüber den Substitutionen der Fundamentalgruppe, vielmehr dabei Änderungen um additive Konstanten erleiden. Es geht nämlich der einzelne Term der Summe, betrachtet als Funktion von  $\zeta$ , bei Ausübung einer Substitution der Fundamentalgruppe in eine neue Funktion von  $\zeta$  über, welche mit einem Term der Summe in den Unstetigkeitsformen übereinstimmt und sich folglich von demselben nur um eine additive Konstante unterscheidet.

Es handelt sich nun noch darum, eine Modifikation mit dem Potential  $I^{(4)}$  vorzunehmen, durch welche  $I^{(4)}$  in das eigentlich zu bestimmende Potential  $u^{(4)}$  übergeht. Um diese Modifikation vorzunehmen, wollen wir uns vorstellen, dass wir das Potential  $I^{(4)}$  auf den Bereich  $B$  überpflanzen, wo es dann längs den Begrenzungslinien die von uns nicht gewünschten Periodizitätsmoduln erleidet, jedoch die richtigen Unstetigkeiten besitzt und auch die normale Ableitung null längs des ganzen Randes. Die Modifikation muss stattfinden in Form der Addition eines unstetigkeitenfreien Potentials, welches ebenfalls die normale Ableitung null längs des ganzen Randes besitzt und dieselben Periodizitätsmodul wie  $I^{(4)}$  hat.

Eine solche in Abzug zu bringende Funktion lässt sich aber bestimmen durch Heranziehung des Potentials  $v^{(1)}$ , d. i. des konjugierten Potentials zu  $u^{(1)}$ . Dieses Potential hat den Typus der in Abzug zu bringenden Funktion, und zwar sind die auftretenden Periodizitätsmoduln  $2\pi$  längs  $L_1$ ,  $-2\pi$  längs  $L_2$ , auf allen übrigen Linien null. Wir können nun mit  $v^{(1)} \equiv v_1^{(1)}$  analoge Funktionen  $v_2^{(1)}, v_3^{(1)}, \dots, v_m^{(1)}$  bilden, indem wir die Linie  $L_2$  bzw. durch  $L_3, L_4, \dots, L_m$  ersetzen. Durch Abzug einer linearen Kombination können wir so die Periodizitätsmoduln des Potentials  $I^{(4)}$  längs  $L_2, L_3, \dots, L_m$  beseitigen. Dann muss von selbst auch der Periodizitätsmodul auf  $L_1$  wegfallen und also die Funktion  $u^{(4)}$  entstehen.

5. Zur Bildung des Potentials  $u^{(5)}$  gehen wir von der allgemeinen SCHOTTKYschen Reihenbildung

$$F(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} (R(\zeta^{(n)}) - R(\alpha^{(n)}))$$

aus, indem wir unter  $R(\zeta)$  eine rationale Funktion von  $\zeta$  verstehen, welche nur im Fundamentalbereich und seinem Spiegelbilde in der unteren Halbebene unendlich wird, ferner unter  $\zeta^{(n)}$  das durch eine beliebige Substitutionen der Fundamentalgruppe entstehende Bild der Stelle  $\zeta$ , unter  $\alpha^{(n)}$  das entsprechende Bild des festen Punktes  $\alpha$ . Die Reihenbildung ergibt sich auf natürlichste Weise, indem aus der Grundfunktion  $R(\zeta)$  durch Überpflanzung gemäss allen Substitutionen der Fundamentalgruppe die neuen rationalen Funktionen  $R_n(\zeta) \equiv R(\zeta^{(n)})$  von  $\zeta$  bildet und sodann dieselben zur Erzielung der Konvergenz noch um die Konstanten  $R(\alpha^{(n)})$  vermindert, so dass sämtliche so modifizierten rationalen Funktionen nunmehr im Grundpunkte  $\alpha$  verschwinden. Die obige Reihe ist dann nach SCHOTTKY in der ganzen  $\zeta$ -Ebene mit Ausnahme der Grenzpunkte der Gruppe gleichmässig konvergent, weil die Summe der Längen  $|\zeta^{(n)} - \alpha^{(n)}|$  konvergiert und die obige Summe mit letzterer Term für Term vergleichbar wird, da der Differentialquotient

$$\left| \frac{R(\zeta^{(n)}) - R(\alpha^{(n)})}{\zeta^{(n)} - \alpha^{(n)}} \right| < \gamma$$

gesetzt werden kann, unter  $\gamma$  eine von  $n$  unabhängige positive Konstante verstanden. Die durch die unendliche Reihe dargestellte Funktion ändert sich ferner bei Ausübung der Substitutionen  $\zeta' = L(\zeta)$  der Fundamentalgruppe nur um additive Konstanten, aus dem einfachen Grunde, weil nach der Entstehung der einzelnen Terme die Werte derselben an der Stelle  $\zeta'$  sich von den Werten der vermöge  $\zeta' = L(\zeta)$  korrespondierenden Terme immer nur um additive Konstanten unterscheiden.

Die rationale Funktion  $R(\zeta)$  kann nun so gewählt werden, dass sie für reelle  $\zeta$  ebenfalls reell ist. Alsdann besitzt die Funktion  $F(\zeta)$  die Eigenschaft, auf der ganzen Achse des Reellen reell zu sein, sodass also ihr reeller Teil die normale Ableitung null, während der imaginäre Teil auf den einzelnen Diskontinuitätsintervallen der Achse des Reellen immer den konstanten Wert null annimmt. Wählen wir speziell

$$R(\zeta) = \frac{a}{\zeta - \zeta_1} + \frac{\bar{a}}{\zeta - \bar{\zeta}_1}$$

mit  $a$  eine komplexe Konstante, mit  $\bar{a}$  ihren konjugiert komplexen Wert bezeichnend, so gewinnen wir, wenn wir den Normierungspunkt  $\alpha$  mit  $\infty$  zusammenfallen lassen, eine Funktion

$$F(\zeta) = I^{(6)} + I^{(6)'}$$

in Gestalt einer Reihe

$$F(\zeta) = \sum_{(n)} \left\{ \frac{a_n}{\zeta - \zeta_1^{(n)}} + \frac{\bar{a}_n}{\zeta - \bar{\zeta}_1^{(n)}} \right\},$$

in welcher  $\bar{a}_n$  die zu  $a_n$  konjugierte Grösse ist, welche letztere den Wert  $\left(\frac{d\zeta^{(n)}}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_1}$  hat. Die Funktion  $I^{(6)'}$  bleibt gegenüber den Substitutionen der Fundamentalgruppe ungeändert. Sie verschwindet längs der ganzen Achse des Reellen. Der reelle Teil ist jetzt nur so zu modifizieren, dass die additiven Konstanten, welche sich bei Ausübung der Fundamentalsubstitutionen der Gruppe ergeben, den Wert null bekommen. Dies erreichen wir aber durch Hinzufügung einer linearen Kombination der Funktionen  $I_v^{(1)'}$  zu  $I^{(6)}$  oder, was auf dasselbe hinauskommt, der  $I_v^{(1)}$  zu  $I^{(6)'}$ , wobei mit  $I_v^{(1)'}$  die zu  $I_v^{(1)}$  gehörende konjugierte Funktion bezeichnet ist. Die obige Bemerkung, dass  $a_n = \left(\frac{d\zeta^{(n)}}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_1}$  ist, kann ebenfalls dazu dienen, die Konvergenz der obigen Reihe darzutun. Denn es ist bekanntlich für alle auf der Achse des Reellen eigentlich diskontinuierlichen Gruppen reeller Substitutionen der Satz zutreffend, dass die Reihe  $\sum_{(n)} \frac{d\zeta^{(n)}}{d\zeta}$  konvergiert für jede von den Grenzpunkten der Gruppe verschiedene Stelle  $\zeta$ .

## § 8.

*Bestimmung der Potentiale  $u^{(6)}, u^{(7)}, u^{(8)}, u^{(9)}$ .*

1. Die *Bestimmung des Potentials  $u^{(6)}$*  wird uns auf einem Wege gelingen, der analog ist dem zur Bestimmung von  $u^{(1)}$  eingeschlagenen Wege. Wir definieren zunächst gewisse Potentiale  $I_\mu^{(6)}$  [ $\mu = 1, \dots, k$ ] und zwar bezeichnen wir mit  $I_\mu^{(6)}$  dasjenige in  $B$  eindeutige und reguläre Potential, welches auf  $L_\mu$  den konstanten Wert 1, auf den übrigen  $k-1$  Linien der Folge  $L_1, \dots, L_k$  den konstanten Wert null annimmt, hingegen längs  $L_{k+1}, \dots, L_m$  die normale Ableitung null besitzt. Sofern ein solches Potential überhaupt existiert, was, wie wir sehen werden, tatsächlich der Fall ist, erkennen wir an dieser Stelle bereits, dass es durch die angegebenen Bedingungen völlig bestimmt wird. Denn die Differenz zweier den gestellten Bedingungen genügenden Potentialfunktionen würde eine Potentialfunktion sein, welche längs  $L_1, \dots, L_k$  den konstanten Wert null annimmt, längs den übrigen Begrenzungslinien die normale Ableitung null hat, für welche letztere Bedingung auch die andere gesetzt werden kann, dass der imaginäre Teil der durch das Potential als reeller Teil definierten analytischen Funktion konstant sein soll. Diese Potentialfunktion würde demnach an je zwei in be-

zug auf eine solche Begrenzungslinie spiegelbildlich symmetrischen Punkten dieselben Werte annehmen. Es kann daher ein Maximum oder Minimum der Werte dieser Potentialfunktion für das Innere von  $B$  nicht auf einer solchen Begrenzungslinie erreicht werden, weil sonst in den betreffenden Stellen die Funktion ein Maximum bzw. Minimum haben würde mit bezug auf die vollständige Umgebung der betreffenden Stelle. Das Resultat ist, dass Maximum und Minimum der betreffenden Differenzfunktion auf einer der Linien  $L_1, \dots, L_k$  angenommen werden, wo dieses Potential verschwindet. Das heisst aber, dass die genannte Differenzfunktion identisch verschwindet.

Wir können durch eine ähnliche Argumentation sofort feststellen, dass

$$\sum_{\mu=1}^k I_{\mu}^{(6)} = 1$$

ist, dass hingegen zwischen weniger als  $k$  dieser Potentiale weder eine homogene noch eine nichthomogene lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten bestehen kann. Ferner bemerken wir, dass es keine homogene lineare Kombination von  $I_1^{(6)}, \dots, I_{k-1}^{(6)}$  geben kann von der Art, dass der zugehörige imaginäre Teil dieser linearen Kombination längs  $L_1, \dots, L_{k-1}$  den Periodizitätsmodul null hat. Denn dann würde der betreffende imaginäre Teil, der längs  $L_{k+1}, \dots, L_m$  ja jedenfalls keinen Periodizitätsmodul hat, auch längs  $L_k$  keinen Periodizitätsmodul haben, sodass die betreffende analytische Funktion eine eindeutige Funktion wäre, von welcher längs  $L_1, \dots, L_k$  der reelle Teil auf jeder einzelnen Linie konstant ist, längs  $L_{k+1}, \dots, L_m$  jedoch der imaginäre Teil. Eine solche Funktion gibt es aber, abgesehen von der Konstanten, nicht nach dem Satze Pag. 314.

Nunmehr können wir, wie oben Pag. 321 mit dem Nichtverschwinden einer Determinante von Periodizitätsmoduln operierend, schliessen, dass man stets eine lineare homogene Kombination der  $I_{\mu}^{(6)} [u = 1, \dots, k-1]$  aufstellen kann und auch nur auf eine Weise, sodass ihr konjugiertes Potential längs  $L_1, \dots, L_{k-1}$  vorgeschriebene Periodizitätsmoduln erhält. Damit erledigt sich die Bestimmung des Potentials  $u^{(6)}$ . Dasselbe ergibt sich als eine lineare homogene Kombination der  $I_{\mu}^{(6)} [u = 1, \dots, k-1]$ .

Die Frage der Existenz der Potentiale  $I_{\mu}^{(6)}$  ist jedoch damit noch nicht beantwortet. Zu dem Zwecke fassen wir eine dieser Funktionen ins Auge, etwa  $I_1^{(6)}$ , und setzen sie über die Linien  $L_{k+1}, \dots, L_m$  auf die Rückseite von  $B$  hin fort. (Vgl. hierzu die Bemerkungen auf Pag. 337 über die analytische Fortsetzung von Funktionen auf Doppelflächen.) Die so fortgesetzte Funktion  $I_1^{(6)}$  nimmt an je zwei koinzidierenden Punkten der Vorderseite und Rückseite

von  $B$  denselben Wert an. Sie ist in ihrem doppelflächenförmigen Gebiete  $\tilde{B}$  eindeutig und regulär und nimmt an den beiden Linien  $L_1$  (auf Vorder- und Rückseite) den Wert  $+1$ , auf den Linien  $L_2, \dots, L_k$  (auf Vorder- und Rückseite) den Wert null an. Die erwähnten, der Symmetrie der Fläche  $\tilde{B}$  Rechnung tragenden Regularitäts- und Randwerteigenschaften genügen umgekehrt, um auf Grund der eindeutigen Bestimmtheit der Funktion durch ihre Randwert- und Regularitätseigenschaften zu schliessen, dass die Funktion an irgend zwei koinzidierenden Punkten der Vorder- und Rückseite denselben Wert annehmen und mithin auf den Begrenzungslinien  $L_{k+1}, \dots, L_m$  die normale Ableitung null haben muss. Man könnte in der Tat aus einer unsymmetrischen Funktion durch die symmetrische Übertragung selbst sofort eine zweite, von ersterer verschiedene Funktion herleiten.

2. Es kommt somit das ganze Problem der Bestimmung der Potentiale  $I_\mu^{(6)}$  darauf hinaus, die *Fundamentalabbildung der Doppelfläche  $\tilde{B}$*  auszuführen, welche durch Hinzunahme der Rückseite zur Vorderseite des Bereichs  $B$  entsteht, wobei die Linien  $L_{k+1}, \dots, L_m$  als innere Linien, hingegen die Linien  $L_1, \dots, L_k$  jede zweimal als Randlinien auftreten. Diese Fundamentalabbildung gewinnen wir, indem wir zunächst für die Fläche  $B$  selbst die Fundamentalabbildung durchführen. Diese Abbildung kann dann auch als eine Abbildung der Doppelfläche  $\tilde{B}$  dadurch aufgefasst werden, dass man dem Übergang über die Linien  $L_{k+1}, \dots, L_m$  von Vorderseite zu Rückseite den Übergang von oberer Halbebene zu unterer Halbebene entsprechen lässt. Auf diese Weise wird die Fläche  $\tilde{B}$  zunächst  $(\infty, \infty)$ -deutig auf ein die ganze Ebene bedeckendes schlichtes Gebiet  $\beta$  abgebildet, welches als Begrenzungslinien diejenigen Strecken der Achse des Reellen besitzt, die den Linien  $L_1, \dots, L_k$  bei der betrachteten Fundamentalabbildung des Bereichs  $B$  entsprechen. Das Gebiet  $\beta$  kann nun seinerseits auf Grund unseres Schmiegungsverfahrens auf eine schlichte obere  $\tilde{\zeta}$ -Halbebene abgebildet werden, womit dann die Fundamentalabbildung der Doppelfläche  $\tilde{B}$  auf eine  $\tilde{\zeta}$ -Ebene geleistet ist, von welcher ausgehend wir die Potentiale  $I_\mu^{(6)}$  in derselben Weise gewinnen, wie oben die Potentiale  $I_\nu^{(1)}$ , ausgehend von der  $\tilde{\zeta}$ -Ebene.

3. Was nun schliesslich die *Bestimmung der Potentiale  $u^{(7)}, u^{(8)}, u^{(9)}$*  anbetrifft, so bietet deren Bestimmung keine prinzipiell neuen Schwierigkeiten dar. Diese Funktionen sind, abgesehen von den additiv hinzutretenden linearen Kombinationen der  $I_\mu^{(6)}$ , durch diejenigen Potentiale gegeben, welche mit  $u^{(7)}, u^{(8)}, u^{(9)}$  in allen Bedingungen übereinstimmen mit dem einen Unterschied, dass auf den Randlinien  $L_1, \dots, L_k$  der konstante Wert null vorgeschrieben wird. Diese neuen Potentiale mögen mit  $I^{(7)}, I^{(8)}, I^{(9)}$  bezeichnet werden. Ihre Herstellung erfolgt in der  $\tilde{\zeta}$ -Ebene wesentlich in derselben Weise, in welcher wir oben die Potentiale

$I^{(2)}$  u. s. w. in der  $\zeta$ -Ebene konstruierten. Es treten z. B. bei der Herstellung des Potentials  $I^{(6)}$  im ganzen acht paarweise symmetrisch angeordnete nichtäquivalente Unstetigkeitsstellen auf. Um ferner etwa von  $I^{(7)}$  zu  $u^{(7)}$  zu gelangen, hat man nur nötig, zu  $I^{(7)}$  eine solche lineare Kombination der  $I_{\mu}^{(6)}$  zu addieren, durch welche das Verschwinden der Periodizitätsmoduln der konjugierten Potentialfunktionen längs  $L_2, \dots, L_k$  bewirkt wird, was nach einer Bemerkung oben (Pag. 332) tatsächlich möglich ist. Dann wird von selbst der Periodizitätsmodul längs  $L_1$  den Wert  $2\pi$  erhalten wegen des Auftretens einer logarithmischen Unstetigkeitsstelle innerhalb  $B$ . Analog verfährt man bei  $u^{(8)}$  und  $u^{(9)}$ .

### C. Zweiter Teil (§§ 9, 10).

#### Die Abbildungsaufgaben der dritten, vierten und fünften Kategorie.

*(Isogonale Trajektorien der Orthogonalkreissysteme als Begrenzungslinien; Hauptpunkte auf der Begrenzung.)*

#### § 9.

*Die Abbildungsaufgaben der dritten und vierten Kategorie. (Geradlinige bezw. spirallinige Begrenzungen.)*

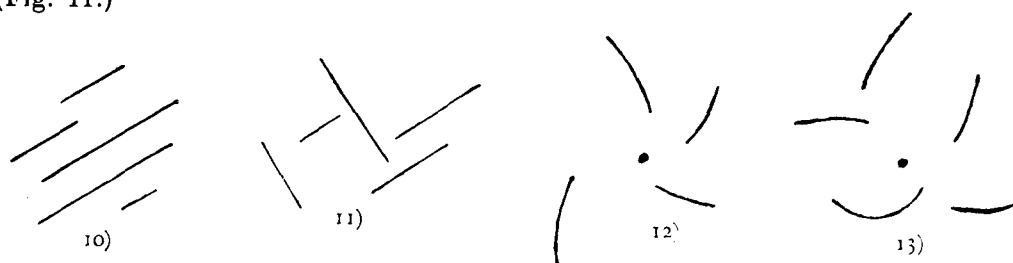
1. Die bisher betrachteten Normalformen mehrfach zusammenhängender Bereiche waren dadurch charakterisiert, dass ihre Begrenzungslinien entnommen waren einem Orthogonalsystem von Kreisen, welches wir in seiner einfachsten Gestalt, nämlich entweder als Orthogonalsystem von Geraden parallel der Achse des Reellen bzw. des Imaginären (entsprechend dem parabolischen Kreissystem) oder in Form eines gewöhnlichen Geradenbüschels mit dem Nullpunkt als Zentrum nebst zugehörigem konzentrischem Kreissystem (entsprechend dem elliptisch-hyperbolischen Kreissystem) zugrundelegten. Dabei unterschieden wir noch zwei Kategorieen nach dem Gesichtspunkte, ob beide Orthogonalscharen oder nur die eine Schar zur Verwendung kam. Wir werden uns in einer folgenden Abhandlung dieser Serie *allgemein* mit denjenigen Erweiterungen der Gestalten der Normalbereiche zu befassen haben, die sich ergeben, wenn man die zu den genannten Kreissystemen *isogonalen Trajektorien*, d. s. *Geraden* beim parabolischen System, *logarithmische Spiralen* beim elliptisch-hyperbolischen System, mitheranzieht zur Bildung der Begrenzung.

Gewisse besondere Fälle dieser neuen Allgemeinheit gestatten eine Behandlung nach denselben Methoden, die wir im Vorhergehenden dargelegt haben. Wir stellen sie deswegen der allgemeinen Behandlung voran. Im ganzen handelt es

sich hier um vier Abbildungsaufgaben, welche den folgenden Normalgestalten entsprechen.

10. Der Bildbereich soll begrenzt sein von  $m$  untereinander *parallelen*, aber *gleichgerichteten endlichen geradlinigen Schlitten* *gebener Richtung*. Bei der Abbildung ist vorzuschreiben, welcher innere Punkt des zur Abbildung vorgelegten Bereiches  $B$  in den unendlich fernen Punkt übergehen soll und welches die dabei stattfindende Zuordnung der Richtungselemente in jenen Punkten ist. (Fig. 10.)

11. Der Bildbereich soll begrenzt sein von  $m$  *geradlinigen endlichen Schlitten*, deren je zwei entweder untereinander *parallel* oder *zueinander orthogonal* sind. Für jede Begrenzungslinie ist die Richtung des entsprechenden Schlittes zu geben. Im übrigen gilt die unter 10 gegebene Vorschrift betr. die Zuordnung eines inneren Punktes zum unendlich fernen Punkte einschliesslich der Richtungselemente. (Fig. 11.)



12. Der Bildbereich soll begrenzt sein von  $m$ , gegen das fundamentale Geradenbüschel *gleichgeneigten Spiralbögen* *gebener Neigung*. Bei der Abbildung ist ferner vorzuschreiben, welche beiden inneren Punkte des abzubildenden Bereiches in den Nullpunkt und in den unendlich fernen Punkt übergehen sollen. (Fig. 12.)

13. Der Bildbereich soll begrenzt sein von  $m$  teils *gleichgeneigten*, teils zu diesen *orthogonalen, unter sich ebenfalls gleichgeneigten Spiralbögen*. Für jede einzelne Begrenzungslinie ist die Neigung des entsprechenden Spiralbogens vorzuschreiben. Ferner ist wiederum vorzuschreiben, welche beiden inneren Punkte des gegebenen Bereiches  $B$  in den Nullpunkt und in den unendlich fernen Punkt übergehen sollen. (Fig. 13.)

2. Was zunächst die Abbildungsaufgaben 10 und 11 anbetrifft, so bemerken wir ohne weiteres, dass sie in die Abbildungsaufgaben 5 und 9 übergehen, indem man eine Drehung der Bildebene um einen durch die gegebene Neigung der Schlitten bestimmten Winkel vornimmt. Wir erkennen auf diese Weise sofort, dass die Abbildungsaufgaben, abgesehen von der richtungstreuen Ähnlichkeitstransformation nur eine Lösung besitzen und dass die Auffindung der Abbildungsfunktionen selbst durch die Auffindung der Abbildungsfunktionen  $f^{(5)}(z)$  und  $f^{(9)}(z)$  ebenfalls mit erledigt ist.

Um für die Abbildungsaufgaben 12 und 13 den *Unitätsbeweis* zu führen, bilden wir den Quotienten zweier als Lösungen vorgestellten Abbildungsfunktionen  $f_1(z)$  und  $f_2(z)$ . Die Funktion  $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$  ist dann eine im Bereiche  $B$  eindeutige und reguläre Funktion, welche in diesem Bereiche weder null noch unendlich wird, deren Randwerte ferner wiederum endliche spiralförmige Bögen beschreiben, welche auch dem Nullpunkte nicht beliebig nahe kommen. Wäre nun die durch den obigen Quotienten dargestellte Funktion keine Konstante, so bedecken die in  $B$  angenommenen Werte derselben, geometrisch gesprochen, ein Gebiet, welches die erwähnten Spiralbögen vollständig einbettet. Die genannte Funktion würde daher weder Maximum noch Minimum des absoluten Betrages ihrer Werte auf dem Rande annehmen können, entgegen einem allgemeinen Satze über reguläre Funktionen. Demnach muss der obige Quotient sich auf eine Konstante reduzieren.

Was die Bestimmung der gesuchten Abbildungsfunktionen  $f^{(12)}(z)$  und  $f^{(13)}(z)$  anbetrifft, so schlagen wir einen Weg ein, analog demjenigen, den wir bei Bestimmung der Funktionen  $f^{(3)}(z)$  und  $f^{(4)}(z)$  bzw.  $f^{(6)}(z)$  und  $f^{(8)}(z)$  beschritten haben.

Wir betrachten anstelle der Funktion  $f(z)$  (d. i.  $f^{(12)}(z)$  oder  $f^{(13)}(z)$ ) die Funktion  $\log f(z)$ , welche in  $B$  zwei logarithmische Unstetigkeiten, nämlich  $\log(z - z_1)$  und  $-\log(z - z_2)$  darbietet. Bei Durchlaufung irgend einer Randlinie des Bereichs  $B$  kehren die Funktionswerte jedesmal zu ihren Ausgangswerten zurück. Sie beschreiben dabei geradlinige endliche Strecken in einem einfachen Hin- und Hergange von bekannter Neigung gegen die Achse des Reellen. Ist  $\alpha$  der Neigungswinkel der Strecken der einen Kategorie, so ist  $\alpha + \frac{\pi}{2}$  der Neigungswinkel der Strecken der andern Kategorie. Indem wir jetzt anstelle der Funktion  $\log f(z)$  die Funktion  $e^{-i\alpha} \log f(z)$  treten lassen, haben wir damit eine wesentlich nach den alten Methoden bestimmbare Funktion.

Die Funktion  $\Phi(z) \equiv e^{-i\alpha} \log f^{(12)}(z)$  wird in  $B$  nur unstetig bei  $z_1$  und  $z_2$  und zwar logarithmisch mit den entgegengesetzt gleichen Koeffizienten  $e^{-i\alpha}$  und  $-e^{-i\alpha}$ . Sie reproduziert sich bei Durchlaufung jeder Randlinie und nimmt dort nur Werte von konstantem imaginären Teile an.

Die Funktion  $\Psi(z) \equiv e^{-i\alpha} \log f^{(13)}(z)$  besitzt bei  $z_1$  und  $z_2$  dieselben Unstetigkeiten wie  $\Phi(z)$ ; sie nimmt auf den Randlinien periodisch in sich zurückkehrende Randwerte an, welche bei den Randlinien der einen Kategorie konstanten imaginären Teil, bei den Randlinien der anderen Kategorie konstanten reellen Teil besitzen.

Wir können die Funktionen  $\Phi(z)$  und  $\Psi(z)$  auf die Rückseite der Fläche  $B$  fortsetzen. Dabei stellen sich an den entsprechenden Stellen der Rückseite wie-



derum logarithmische Unstetigkeiten ein. Gehen wir über eine Linie mit konstantem imaginärem Teile auf die Rückseite, so bekommen wir logarithmische Unstetigkeiten mit konjugiert komplexen Koeffizienten; gehen wir hingegen über die Linien konstanten reellen Teiles auf die Rückseite, so bekommen wir die ursprünglichen Koeffizienten ersetzt durch die negativ genommenen konjugiert komplexen Werte, d. s. Werte, welche aus den Originalwerten, geometrisch gesprochen, durch Spiegelung an der Achse des Imaginären entstehen.

Die Beurteilung des Verhaltens einer analytischen Funktion in einem Punkte der Rückseite ist dabei nach Massgabe der Bestimmung vorzunehmen, dass man sich die Rückseite umgeklappt und die dort bestehenden Funktionswerte an die entsprechenden Stellen übertragen denkt und nunmehr die Beurteilung des Verhaltens in der gewöhnlichen Weise vornimmt, eben an der durch den genannten Überpflanzungsprozess gewonnenen, im gewöhnlichen Sinne analytischen Funktion.

Analog ist das analytische Verhalten längs einer Übergangslinie (Linie, über welche hinweg der Übergang von der Vorderseite auf die Rückseite stattfindet) zu beurteilen. Die Übergangslinie werde dabei regulär analytisch vorausgesetzt, was bei den Übergangslinien der Doppelfläche  $\tilde{B}$  tatsächlich der Fall ist. Man mache eine konforme Hilfsabbildung der Ebene, in welcher die Doppelfläche liegt, in der Weise, dass ein Stück der Übergangslinie, für dessen Nachbarschaft man die Beurteilung vornehmen will, in ein geradliniges Liniestück transformiert wird. Dabei geht ein das Liniestück enthaltender Teil  $\tilde{\beta}$  der Doppelfläche in ein an jene geradlinige Strecke anschliessendes Doppelflächenstück  $\tilde{\beta}'$  über. Das Flächenstück  $\tilde{\beta}'$  wird nun seinerseits in ein gewöhnliches Flächenstück  $\beta$  verwandelt, indem man die rückseitige Hälfte von demselben unter Festhaltung der genannten geradlinigen Begrenzungsstrecke umklappt, wodurch die beiden Hälften von  $\tilde{\beta}$  nunmehr nebeneinander zu liegen kommen und so den Bereich  $\beta$  bilden.

Eine in  $\tilde{\beta}$  erklärte Funktion hat man sich jetzt zur Beurteilung ihrer analytischen Natur nach  $\beta$  überpflanzt zu denken. Insbesondere gilt eine Funktion in  $\tilde{\beta}$  als den Prinzipien der analytischen Fortsetzung entsprechend definiert, wenn sie nach ihrer Überpflanzung in den Bereich  $\beta$  dort eine im gewöhnlichen Sinne über analytischen Fortsetzung erklärte Funktion liefert.

Die Beurteilung des analytischen Verhaltens von Potentialfunktionen auf Doppelflächen hat nach denselben Regeln zu erfolgen.

3. Zwecks Bestimmung der Funktionen  $\Phi(z)$  und  $\Psi(z)$  richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die reellen Teile derselben, welche wir mit  $u^{(12)}$  bzw.  $u^{(13)}$  bezeichnen wollen, während wir entsprechend die imaginären Teile mit  $v^{(12)}$  und  $v^{(13)}$  bezeichnen. Die Potentiale  $u^{(12)}$  und  $u^{(13)}$  werden in  $z_1$  und  $z_2$  unstetig in der Form

$$a \log r + b \varphi \text{ bzw. } -a \log r - b \varphi,$$

wobei ist  $r = |z - z_1|$  bzw.  $|z - z_2|$ ,

$$\varphi = \text{Am}(z - z_1) \text{ bzw. } \text{Am}(z - z_2).$$

Die Vieldeutigkeit dieser Funktionen innerhalb des Bereichs  $B$  rührt lediglich von ihren durch die Arcus-Unstetigkeiten bei  $z_1$  und  $z_2$  gegebenen Verzweigungen her. Zieht man in  $B$  irgend eine geschlossene Linie, welche diese beiden Punkte einfach und in gleichem Sinne umschlingt, so kehren die genannten Potentialfunktionen zu ihren Ausgangswerten zurück. Die Begrenzungslinien von  $B$  zerfallen in solche der ersten Kategorie, auf welchen ein konstanter Randwert besteht, und solche der zweiten Kategorie, längs welchen die Normalableitung null ist. Die ersteren seien mit  $L_1, L_2, \dots, L_k$ , die letzteren mit  $L_{k+1}, \dots, L_m$  bezeichnet. Bei  $u^{(12)}$  fallen die Randlinien der zweiten Kategorie weg.

Von den Potentialen  $u^{(12)}$  und  $u^{(13)}$  gelangen wir durch Subtraktion homogener linearer Verbindungen entweder der Funktionen  $I_\nu^{(1)}$  oder der Funktionen  $I_\mu^{(6)}$  zu analog beschaffenen Funktionen  $I^{(12)}$  und  $I^{(13)}$ , welche sich von  $u^{(12)}$  und  $u^{(13)}$  hinsichtlich der hervorgehobenen charakteristischen Eigenschaften nur dadurch unterscheiden, dass ihre konstanten Randwerte auf den Linien  $L_1, \dots, L_k$  sämtlich gleich null sind. Diese Funktionen  $I^{(12)}$  und  $I^{(13)}$  zerlegen wir ihrerseits wieder in der Form

$$I^{(12)} = a I^{(12)'} + b I^{(12)''}$$

$$I^{(13)} = a I^{(13)'} + b I^{(13)''},$$

indem wir, anstelle der oben angegebenen Unstetigkeiten allgemeiner Form, für die einfach gestrichenen Funktionen  $I^{(12)'}$  und  $I^{(13)'}$  die Unstetigkeiten  $\pm \log r$ , für die zweifach gestrichenen Funktionen  $I^{(12)''}$  und  $I^{(13)''}$  die Unstetigkeiten  $\pm \varphi$  bei  $z_1$  bzw.  $z_2$  treten lassen.

Die Potentiale  $I^{(12)'}$  und  $I^{(12)''}$  denken wir uns jetzt zum Zwecke ihrer Bestimmung durch unendliche Reihen in die  $\zeta$ -Ebene überpflanzt, die Potentiale  $I^{(13)'}$  und  $I^{(13)''}$  hingegen in die  $\tilde{\zeta}$ -Ebene, nämlich die Ebene der Variablen  $\tilde{\zeta}$ , welche durch die zur Doppelfläche  $\tilde{B}$  (Pag. 333) gehörende Fundamentalfunktion geliefert wird. Nach dieser Überpflanzung lassen sich die erwähnten Potentiale unmittelbar als die reellen oder die durch  $i$  dividierten imaginären Teile von Funktionen auffassen, die durch Reihen mit lauter logarithmischen Gliedern dargestellt werden. So wird die Funktion  $I^{(12)''}$  geometrisch folgendermassen erklärt. Man bestimme  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  im Fundamentalbereich der  $\zeta$ -Ebene als Bildpunkte der Punkte  $z_1$  und  $z_2$ .  $\tilde{\zeta}_1$  und  $\tilde{\zeta}_2$  seien die konjugiert komplexen Punkte. Ein variabler Punkt  $\zeta$  liefert dann eine Winkelsumme bei  $\zeta$ , nämlich

$$[(\zeta_1 \zeta_2) + (\bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2)].$$

Diese Grösse ist auf der Achse des Reellen im Hauptzweige gleich null. Die Summe aller Grössen

$$I^{(12)''} = \sum_n [(\zeta_1 \zeta_2) - (\bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2)],$$

erstreckt über alle vermöge der Substitutionen der Fundamentalgruppe aus dem Quadrupel  $(\zeta_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2)$  sich ergebenden Bildquadrupel, ist die Grösse  $I^{(12)''}$ , welche wir suchen. Sie kann auch durch den Ausdruck

$$I^{(12)''} = \Re \left\{ \frac{1}{i} \sum \left( \log \frac{\zeta_1 - \bar{\zeta}_2}{\zeta_2 - \bar{\zeta}_1} + \log \frac{\bar{\zeta}_1 - \zeta_2}{\bar{\zeta}_2 - \zeta_1} \right) \right\}$$

dargestellt werden, in welchem die unendliche Reihe nach früheren Gründen gleichmässig konvergiert.

#### § 10.

*Die Abbildungsaufgaben der fünften Kategorie. (Hauptpunkte auf der Begrenzung.)*

Wir haben im bisherigen sowohl den Hauptpunkt der parabolischen, als auch die Hauptpunkte des elliptisch-hyperbolischen Orthogonalsystems von der Begrenzung ausgeschlossen, indem wir sie entweder dem Inneren oder dem Äusseren des Bereichs zuwiesen. Nunmehr wollen wir eine fünfte Kategorie von charakteristischen Bereichen aufstellen, bei welchen ein Hauptpunkt oder auch beide Hauptpunkte auf der Begrenzung desselben liegen. Dabei beobachten wir jedoch, wie bei den ersten beiden Kategorieen, bei der Bildung der einzelnen Begrenzungslinien das Prinzip, dass jede Begrenzungslinie ganz einer und derselben Linie (Gerade oder Kreis) des Orthogonalsystems entstammen soll.

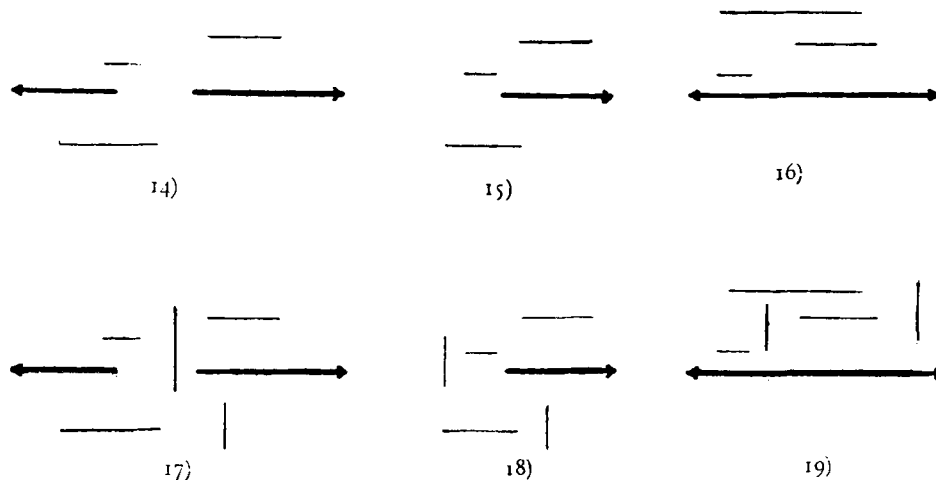
1. Betrachten wir zunächst das *orthogonale Geradensystem*, so kann der Hauptpunkt auf drei typisch unterschiedene Weisen in die Begrenzung eingeführt werden. Die Figuren 14, 15, 16, zeigen die Gestalt der jeweiligen, den Hauptpunkt enthaltenden Begrenzung (stark ausgezogen). Sie sind nach dem Grade der Allgemeinheit geordnet. Die Pfeile bedeuten, dass man sich die betreffende Linie in der durch den Pfeil angezeigten Richtung ins Unendliche fortgesetzt zu denken hat. Zeigt der Pfeil nur in einer Richtung ins Unendliche, so hat man sich die Linie dort endigend zu denken. Weisen zwei Pfeile in entgegengesetzter Richtung ins Unendliche, so hat man die Linie als eine einheitliche, durch das Unendliche hindurchgehende Linie aufzufassen. Für die Abbildungsprobleme können wir annehmen, dass die den Hauptpunkt enthaltende Begrenzungslinie

in der *Achse des Reellen* liege. Sie ist dann im Falle der Figur 16 mit der Achse des Reellen geradezu identisch. Die Bereiche haben in den Fällen der Figuren 14 und 15 die Form einer *geschlitzten Vollebene*, in den Fällen der Figur 16 die Form einer *geschlitzten Halbebene*. Die hinzukommenden weiteren Begrenzungsschlitzte sind dabei entweder auch parallel der Achse des Reellen oder parallel der Achse des Imaginären zu denken, jedenfalls aber endlich.

Die sich nun einstellenden sechs neuen Abbildungsaufgaben (s. die Figuren 14–19, von welchen die letzteren drei durch die hinzutretenden vertikalen Schlitzte von den drei ersten unterschieden sind), geben zu neuen Potentialen

$$U = \Re(f(z))$$

Anlass, die wir nicht weiter besonders durch Indizes charakterisieren wollen.



Das Wesentliche übersehen wir ohne Schwierigkeit. Sei  $L_1$  diejenige Randlinie des Bereichs  $B$ , deren Bildlinie den Hauptpunkt enthalten soll.

Wir werden jetzt dem Typus der Fig. 14 entsprechend zwei verschiedene dipolare Unstetigkeiten auf der Begrenzung von  $B$  vorschreiben. An beiden Unstetigkeitsstellen ist die Achse der Dipole zusammenfallend mit der Tangente der Linie  $L_1$  in diesem Punkte zu geben, jedoch das eine mal den positiven (bei welchem der Bereich einem auf der Ebene fortschreitenden Beobachter zur Linken liegend erscheint), das andere mal dem negativen Umlaufssinn der Linie  $L_1$  folgend. Als Richtung der Achse bezeichnen wir bei einem Dipol diejenige zur Nullgeraden (Symmetrale des Dipols, auf welcher die die Unstetigkeit darstellende Funktion  $Cr^{-1} \cos(\varphi - \varphi_0)$  den Wert null annimmt) senkrechte Richtung, bei deren Verfolgung man zu positiven Werten der angegebenen Funktion gelangt,

nämlich die Richtung  $\varphi = \varphi_0$ . Diejenige Dipolachse, welche in den der oberen Halbebene angehörenden Hauptpunkt des Normalbereichs übergehen soll, hat dem negativen Umlaufsinne zu folgen. Beliebig verfügbar bleiben nun noch zwei multiplikative reelle positive Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ .

Dem Typus der Fig. 15 entsprechend haben wir auf  $L_1$  einen und nur einen Punkt  $z_1$  zu geben, welcher in den Hauptpunkt übergehen soll, und ferner nach konformer Übertragung eines  $z_1$  enthaltenden Stückes der Linie  $L$  auf ein den Nullpunkt als Bild von  $z_1$  enthaltendes Stück der Achse des Reellen eine Unstetigkeit der Form

$$Cr^{-2} \cos 2\varphi + C'r^{-1} \cos \varphi = \Re \left\{ \frac{C}{z^2} + \frac{C'}{z} \right\},$$

wobei  $C$  und  $C'$  beliebig vorgebbare reelle Konstanten sind, von welchen nur  $C > 0$  sein muss.

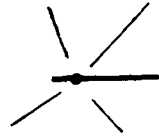
Dem Typus der Fig. 16 entsprechend haben wir auf  $L_1$  nur einen Punkt  $z_1$  vorzugeben, in welchem von der Potentialfunktion ein Verhalten gemäss der Form  $Cr^{-1} \cos(\varphi - \varphi_0)$  zu verlangen ist, wobei  $\varphi_0$  die positive Tangentenrichtung im Punkte  $z_1$  bezeichnet. Die Grösse  $C$  ist beliebig, jedoch negativ.

In allen sechs Fällen wird hier von der Potentialfunktion  $u$  zu verlangen sein, dass sie auf der Linie  $L_1$  die *normale Ableitung null* habe, während sie auf den übrigen Begrenzungslinien entweder auch die normale Ableitung null haben soll oder aber einen unbekanntem konstanten Wert, der durch die Bestimmung normiert wird, dass der Periodizitätsmodul der zugehörigen konjugierten Potentialfunktion längs der betreffenden Begrenzungslinie verschwinden muss.

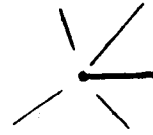
Der durch Differenzbildung zu führende Unitätsbeweis bietet nichts prinzipiell neues dar gegenüber den früheren Unitätsbeweisen. Desgleichen erfordert der Existenzbeweis der Funktion  $u$  keine neuen Überlegungen. Es sind wieder, den bezeichneten Unstetigkeiten entsprechend, SCHOTTKYSche Reihen anzusetzen und sodann durch Zusatzfunktionen die Periodizitätsmoduln in der vorgeschriebenen Weise zu regulieren.

Was die Frage der durch die sich ergebende Funktion  $f(z)$  geleisteten Abbildung anbetrifft, so ergeben sich ebenfalls keine neuen Schwierigkeiten für die Beweisführung. Es ist in jedem einzelnen Falle der Abbildungscharakter an den Unstetigkeitsstellen der Abbildungsfunktion ersichtlich, womit zunächst das richtige Eingehen der Hauptpunkte in die Begrenzung der Bildbereiche feststeht. Im übrigen ergibt sich die Einblättrigkeit der Bildbereiche wieder nach der Methode der Charakteristik. Dadurch ist dann auch von selbst die Art und Weise der Durchlaufung des Randes des Bildbereiches in Form eines einfachen Hinganges bzw. Hin- und Herganges bestimmt.

2. Gehen wir nun zu dem *elliptisch-hyperbolischen Orthogonalsystem* über. Hier haben wir zwei Hauptpunkte, nämlich  $o$  und  $\infty$ ; und wir können als Linien des Orthogonalsystems, welche durch diese Hauptpunkte hindurchgehen, lediglich die Geraden des fundamentalen Geradenbüschels heranziehen. Es kann dabei



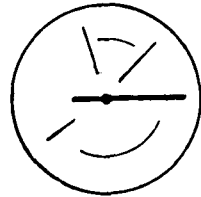
20)



21)



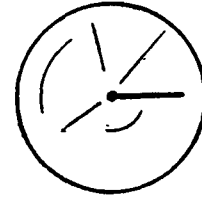
23)



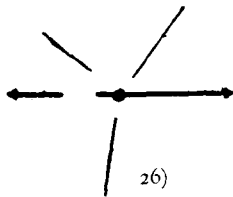
25)



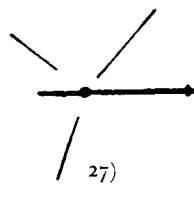
24)



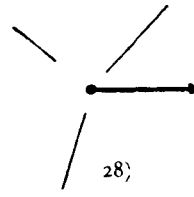
25)



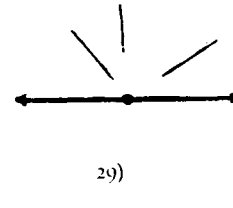
26)



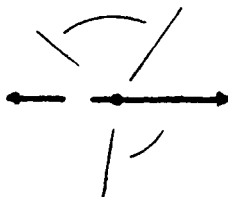
27)



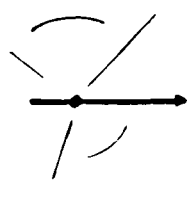
28)



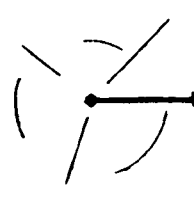
29)



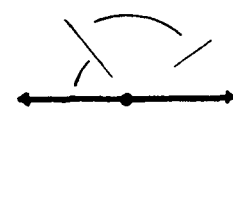
30)



31)



32)



33)

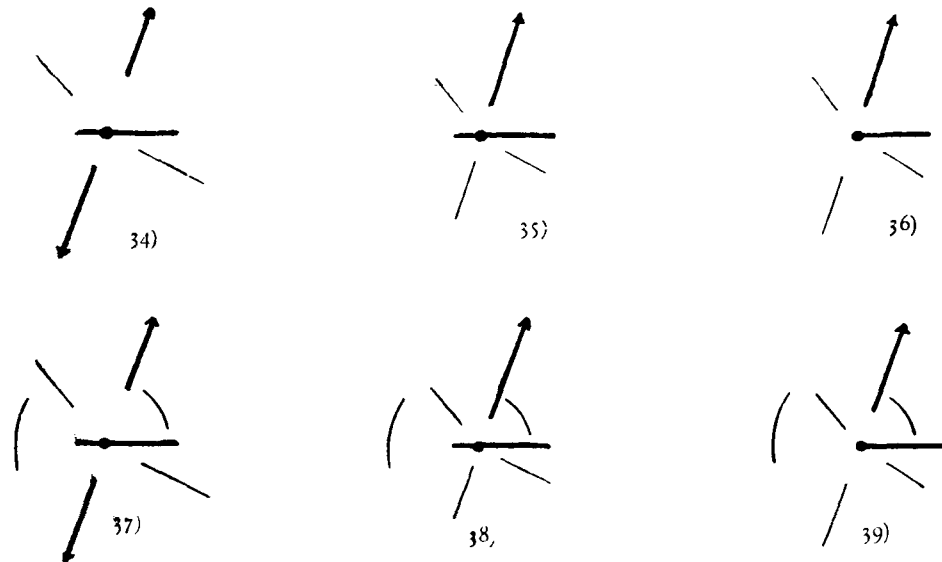
sein, dass eine *Begrenzung des Schlitzbereichs* nur einen *Hauptpunkt* enthält, indem dann der andere entweder garnicht an der *Begrenzung* teilnimmt oder seinerseits auf einer anderen *Begrenzungslinie* liegt; oder aber es kann auch eine *Begrenzungslinie* beide *Hauptpunkte* enthalten. Die so möglichen *Hauptbegrenzungslinientypen*

sind in den Figuren 20—39 der Reihe nach angegeben (Hauptbegrenzungslinien stark ausgezogen). Es ergeben sich *zwanzig neue* Schlitzbereichtypen. Bereichstypen, welche durch Transformation durch reziproke Radien aus einander hervorgehen, sind nicht als verschieden betrachtet. Die Figuren 20—33 zeigen diejenigen Typen, bei welchen nur eine Begrenzungslinie einen oder zwei Hauptpunkte enthält; die Figuren 34—39 diejenigen Typen, bei welchen zwei Begrenzungslinien je einen Hauptpunkt enthalten.

Die Bestimmung der Abbildungsfunktion  $f(z)$  bzw. der Potentialfunktion

$$u = \log |f(z)|$$

begegnet grundsätzlich neuen Schwierigkeiten nicht. Wir erhalten *logarithmische*



*Unstetigkeiten* auf der Begrenzung. Die Stellen, an welchen diese Unstetigkeiten auftreten, sind zu geben. Der Koeffizient einer Unstetigkeit ist entweder  $+1$  oder  $-1$  oder auch  $+2$  bzw.  $-2$ . Die letzteren beiden Koeffizienten treten nämlich bei den folgenden Bereichstypen auf: 21 ( $+2$ ), 24 ( $+2$ ), 25 ( $+2$ ), 28 ( $+2$  und  $-2$ ), 32 ( $+2$  und  $-2$ ), 35 ( $-2$ ), 36 ( $+2$  und  $-2$ ), 38 ( $-2$ ), 39 ( $+2$  und  $-2$ ). Wir haben beispielsweise im Falle der Figur 34 vier logarithmische Unstetigkeiten zu geben, zwei mit dem Koeffizienten  $+1$  auf einer Begrenzungslinie und zwei mit dem Koeffizienten  $-1$  auf einer anderen Begrenzungslinie, im Falle der Figur 26 haben wir vier Unstetigkeiten der Form  $\pm \log r$  auf einer und derselben Begrenzungslinie des abzubildenden Bereichs  $B$  zu geben, welche bei Durchlaufung der betreffenden Randlinie so aufeinander folgen müssen, dass die positiven und negativen Unstetigkeiten einander benachbart liegen.

Bei der Reihenbildung verfährt man in Bezug auf die Unstetigkeiten mit den Koeffizienten  $\pm z$  zweckmässig so, dass man sie als Summe von zwei Unstetigkeiten mit den Koeffizienten  $\pm 1$  auffasst; jede derartige einfache Unstetigkeit kann alsdann mit einer anderen stets vorhandenen, entgegengesetzten Vorzeichens entweder im Fundamentalbereich oberhalb der Achse des Reellen oder in seinem Spiegelbild in bezug auf die Achse des Reellen für die Zwecke der Reihenbildung zusammengefasst werden.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Die vorliegende Abhandlung findet ihre Fortsetzung in einer später voraussichtlich auch in den Acta Mathematica erscheinenden Abhandlung VI. Die Abhandlung V der Serie soll im Journal für Mathematik erscheinen, in welchem auch die Abhandlungen I und III erschienen sind.

