ESSAI SUR LES FONCTIONS Θ DU QUATRIÈME DEGRÉ.

PAR

PAUL APPELL

à PARIS.

Deuxième partie.

XIV. *Sur un problème préliminaire d'algèbre.* Dans la première partie de ce travail, j'ai considéré des fonctions du type général suivant. Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ des variables complexes et ω une constante donnée dont la partie réelle est négative. Les fonctions considérées sont des fonctions uniformes F, holomorphes ou méromorphes, de $x_1, x_2, \ldots x_n$, qui admettent, par rapport à chaque variable, la période $2\pi i$ et qui vérifient, en outre, la relation

$$(35) \qquad F(x_1 + \omega, x_2 + x_1, x_3 + x_2, \ldots, x_n + x_{n-1}) = e^{-\alpha x_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où α est un entier positif, négatif ou nul. En ajoutant une variable de plus x_{n+1}, on peut toujours ramener le cas général au cas où α est nul; il suffit en effet de poser

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = e^{\alpha x_{n+1}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pour que cette fonction admette la période $2\pi i$ aussi par rapport à x_{n+1} et vérifie la relation

$$(36) \qquad \Phi(x_1 + \omega, x_2 + x_1, \ldots, x_{n+1} + x_n) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}).$$

Pour le développement de cette théorie et en particulier pour l'étude de la transformation, il importe de résoudre la question suivante, dans laquelle ω est une constante quelconque différente de zéro:

Former toutes les fonctions uniformes f de n variables complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifiant la relation unique

$$(37) \qquad f(x_1 + \omega, x_2 + x_1, x_3 + x_2, \ldots, x_n + x_{n-1}) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Nous résoudrons cette question à l'aide d'un changement de variables. Posons, pour abréger,

$$X_1 = \frac{x_1}{\omega}, \qquad X_2 = \frac{x_1(x_1-\omega)}{1.2.\omega^2}, \qquad \ldots,$$

$$X_n = \frac{x_1(x_1-\omega)(x_1-2\omega)\ldots[x_1-(n-1)\omega]}{1.2.\ldots n.\omega^n}.$$

Si l'on désigne en général par la notation

$$\Delta\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

la différence

$$\varphi(x_1+\omega, x_2+x_1, \ldots, x_n+x_{n-1}) - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

les fonctions X_p sont des fonctions de x_1 telles que

$$1 = \Delta X_1, \qquad X_1 = \Delta X_2, \qquad \ldots, \qquad X_p = \Delta X_{p+1}.$$

Conservons alors la variable x_1 et introduisons, à la place de $x_2, x_3, \ldots, x_n$, d'autres variables $y_2, y_3, \ldots, y_n$ définies par les relations

$$(38) \qquad \begin{cases} x_1 = \omega X_1, \\ x_2 = y_2 + \omega X_2, \\ x_3 = y_3 + y_2 X_1 + \omega X_3, \\ x_4 = y_4 + y_3 X_1 + y_2 X_2 + \omega X_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = y_n + y_{n-1} X_1 + y_{n-2} X_2 + \ldots + y_{n-p} X_p + \ldots + y_2 X_{n-2} + \omega X_n. \end{cases}$$

On obtient les nouvelles variables, en fonction des anciennes, en résolvant ces équations par rapport à $y_2, y_3, \ldots, y_n$. On peut alors calculer $\Delta y_2, \Delta y_3, \ldots, \Delta y_n$; toutes ces quantités sont *nulles*; c'est ce que nous allons vérifier directement sur les équations (38). En effet, la deuxième des relations (38) donne

$$\Delta x_2 = \Delta y_2 + \omega \Delta X_2;$$

mais on a

$$\Delta x_2 = x_1, \qquad \Delta X_2 = X_1,$$

on a donc, d'après la première des relations (38),

$$\Delta y_2 = 0.$$

La troisième des relations (38) donne alors

$$\Delta x_3 = \Delta y_3 + y_2 \Delta X_1 + \omega \Delta X_3;$$

mais on a

$$\Delta x_3 = x_2, \qquad \Delta X_1 = 1, \qquad \Delta X_3 = X_2;$$

on a donc

$$x_2 = \Delta y_3 + y_2 + \omega X_2,$$

ce qui, d'après la relation précédente [deuxième des relations (38)], donne

$$\Delta y_3 = 0.$$

La quatrième des relations (38), traitée de la même façon, donne, en vertu de la précédente,

$$\Delta y_4 = 0.$$

En général, ayant établi que $\Delta y_2, \ldots, \Delta y_{p-1}$ sont nuls, on tire de la $p^{\text{ième}}$ des relations (38),

$$\Delta x_p = \Delta y_p + y_{p-1} \Delta X_1 + y_{p-2} \Delta X_2 + \ldots + y_2 \Delta X_{p-2} + \omega \Delta X_p;$$

mais on a

$$\Delta x_p = x_{p-1}, \quad \Delta X_1 = 1, \quad \Delta X_2 = X_1, \quad \ldots, \quad \Delta X_{p-2} = X_{p-3}, \quad \Delta X_p = X_{p-1};$$

on a donc

$$x_{p-1} = \Delta y_p + y_{p-1} + y_{p-2} X_1 + \ldots + y_2 X_{p-3} + \omega X_{p-1},$$

ce qui, d'après la $(p-1)^{\text{ième}}$ des relations (38) montre que $\Delta y_p = 0$. On arrive ainsi, de proche en proche, à $\Delta y_n = 0$.

En résumé, la substitution qui remplace

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

par

$$x_1 + \omega, \quad x_2 + x_1, \quad \ldots, \quad x_n + x_{n-1}$$

laisse *invariables* les quantités

$$y_2, \quad y_3, \quad \ldots, \quad y_n.$$

Soit alors

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{39}$$

une fonction uniforme de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Par l'effet du changement de variables (38), elle devient une fonction uniforme

$$f[x_1, y_2, y_3, \ldots, y_n] \tag{40}$$

de $x_1, y_2, \ldots, y_n$, et la relation (37) devient

$$f[x_1 + \omega, y_2, y_3, \ldots, y_n] = f[x_1, y_2, y_3, \ldots, y_n]. \tag{41}$$

La fonction (40) admet donc, par rapport à x_1, la période ω. Inversement, si l'on prend une fonction uniforme (40) de $x_1, y_2, \ldots, y_n$, admettant, par rapport à x_1, la période ω, cette fonction exprimée en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ devient une fonction uniforme qui vérifie la relation (37).

En particulier, pour qu'un fonction entière de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifie la relation (37), il faut et il suffit que, dans le système des variables $x_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, elle devienne une fonction entière admettant, par rapport à x_1, la période ω.

Comme application, cherchons à déterminer le *polynôme*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

le plus général en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, vérifiant la relation (37). Par le changement de variables (38) ce polynôme devient un polynôme

$$P[x_1, y_2, y_3, \ldots, y_n] \tag{42}$$

en $x_1, y_2, \ldots, y_n$ admettant la periode ω par rapport à x_1:

$$P[x_1 + \omega] = P[x_1].$$

Mais, pour qu'un polynôme $P[x_1]$ vérifie une telle relation, il faut et il suffit qu'il ne renferme pas x_1. Donc le polynôme (42) est indépendant de x_1, et l'expression la plus générale des polynômes cherchés est

$$P[y_2, y_3, \ldots, y_n],$$

c'est-à-dire un polynôme arbitraire en $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

En résolvant les équations (38) par rapport aux y, on trouve $(n-1)$ polynômes particuliers vérifiant la relation (37):

$$\begin{aligned} y_2 &= P_2(x_1, x_2), \\ y_3 &= P_3(x_1, x_2, x_3), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n &= P_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Le polynôme le plus général vérifiant la relation (37) est alors un polynôme quelconque composé avec ces polynômes fondamentaux. On peut remarquer que le polynôme P_p est du degré p en x_1 et du premier degré par rapport aux autres variables $x_2, x_3, \dots, x_p$. Les équations (38) étant homogènes en ω, x_1, x_2, $\dots$, x_n, $y_2, y_3, \dots, y_n$, les polynômes P_p réduits au même dénominateur sont rationnels en ω et ont pour dénominateur ω^{p-1}.

On voit par un raisonnement analogue que toute fonction rationnelle $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vérifiant la relation (37) est une fonction rationnelle de $y_2, y_3, \dots, y_n$ et inversement.

Dans le cas particulier $n = 4$, en appelant x, y, z, t les quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4, on trouve, tout calcul fait, les expressions suivantes de y_2, y_3, y_4 par trois polynômes fondamentaux:

$$\begin{aligned} y_2 &= P_2(x, y) &&= y - \frac{x(x-\omega)}{2\omega}, \\ y_3 &= P_3(x, y, z) &&= z - y\frac{x}{\omega} + \frac{(x+\omega)x(x-\omega)}{3\omega^2}, \\ y_4 &= P_4(x, y, z, t) &&= t - z\frac{x}{\omega} + y\frac{(x+\omega)x}{2\omega^2} - \frac{(x+2\omega)(x+\omega)x(x-\omega)}{8\omega^3}. \end{aligned}$$

Le polynôme le plus général $P(x, y, z, t)$ vérifiant la relation

$$P(x+\omega, y+x, z+y, t+z) = P(x, y, z, t)$$

est un polynôme arbitraire en P_2, P_3 et P_4.

Remarque. Les polynômes précédents sont entiers en $x_1, x_2, \dots, x_n$ et seulement rationnels en ω. Mais il est évident que pour obtenir le polynôme le plus général entier en $\omega, x_1, x_2, \dots, x_n$ et ne changeant pas quand on ajoute chacune de ces lettres à la précédente, il suffit de prendre le polynôme le plus général en $\omega, \omega y_2, \omega^2 y_3, \dots, \omega^{n-1} y_n$.

XV. *Première application: dérivées partielles des fonctions F.* Soit une fonction $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ possédant, par rapport à chaque variable, la période $2\pi i$ et vérifiant la relation (36). Quand $n = 3$, nous avons formé, dans le § XII de la première partie, des combinaisons entières des dérivées partielles de F possédant ces mêmes propriétés. Le résultat que nous venons d'obtenir permet, pour n quelconque, de former toutes les combinaisons entières des dérivées partielles du premier ordre possédant ces mêmes propriétés.

En effet, désignons par

$$\overline{F}$$

avec un trait, la fonction

$$F(x_1+\omega, x_2+x_1, \ldots, x_n+x_{n-1}),$$

par $F_1, F_2, \ldots, F_n$ les dérivées partielles de F par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et par $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ ce que deviennent ces dérivées quand on y remplace

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

par

$$x_1+\omega, x_2+x_1, \ldots, x_n+x_{n-1}.$$

L'équation

$$F=\overline{F}$$

donne par dérivation

$$\begin{aligned} F_n &= \overline{F}_n \\ F_{n-1} &= \overline{F}_{n-1}+\overline{F}_n \\ F_{n-2} &= \overline{F}_{n-2}+\overline{F}_{n-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_1 &= \overline{F}_1+\overline{F}_2. \end{aligned}$$

Formons alors un polynôme entier en

$$F_n, F_{n-1}, \ldots, F_1$$

qui ne change pas quand, laissant F_n invariable, on augmente chacune des autres lettres de la précédente. Nous obtiendrons le polynôme le plus général P remplissant ces conditions, en prenant le polynôme entier en $\omega, \omega y_2, \omega^2 y_3, \ldots, \omega^{n-2} y_{n-1}$ du calcul précédent et en y remplaçant

$$\omega, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

par

$$F_n, F_{n-1}, F_{n-2}, \ldots, F_1.$$

Le polynôme

$$P(F_n, F_{n-1}, \ldots, F_1)$$

ainsi obtenu est le polynôme le plus général, formé avec les dérivées premières, conservant la même valeur quand une des variables x_p augmente de $2\pi i$ ou quand $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont remplacés par $x_1+\omega, x_2+x_1, \ldots, x_n+x_{n-1}$.

XVI. *Sur les zéros des fonctions précédemment définies.*

L'étude des zéros des fonctions

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

admettant la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifiant en outre la relation

$$F(x_1+\omega, x_2+x_1, \ldots, x_n+x_{n-1}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{43}$$

conduit à des fonctions de même nature, d'un nombre moindre de variables.

A. Soit d'abord une fonction analytique uniforme $f(x, y)$ de deux variables x et y, vérifiant les relations

$$\left\{\begin{array}{l} f(x+2\pi i, y) = f(x, y), \\ f(x, y+2\pi i) = f(x, y), \\ f(x+\omega, y+x) = f(x, y), \end{array}\right. \tag{44}$$

Considérons l'équation

$$f(x, y) = 0$$

qui définit y en fonction de x.

Supposons que, pour une valeur de x, cette équation admette, dans une bande du plan des y limitée par deux parallèles distantes d'une période $2\pi i$, les solutions

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots;$$

elle admettra, dans le plan entier des y, les solutions

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x) + 2k_1\pi i, \\ y_2 &= \varphi_2(x) + 2k_2\pi i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x) + 2k_n\pi i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ désignant des entiers quelconques.

Quand x augmente de $2\pi i$, ces solutions se permutent entre elles.

D'après la troisième des relations (44), quand x augmente de ω, les novelles solutions sont, dans un autre ordre,

$$y_1 + x, \; y_2 + x, \; \ldots, \; y_n + x, \; \ldots.$$

Donc, les dérivées secondes des $y_1, y_2, \ldots$, par rapport à x,

$$y_1'' = \varphi_1''(x), \; y_2'' = \varphi_2''(x), \; \ldots, \; y_n'' = \varphi_n''(x), \; \ldots$$

forment un ensemble dont les termes se permutent quand x augmente soit de $2\pi i$, soit de ω. Les fonctions symétriques de ces dérivées secondes sont des fonctions uniformes *doublement périodiques*, aux périodes $2\pi i$ et ω.

C'est ce qu'on peut vérifier par dérivation directe de l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

en calculant y'' par la formule des fonctions implicites.

Soient, par exemple, $\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots, \theta_p(x)$ des fonctions θ elliptiques, aux périodes $2\pi i$ et ω vérifiant des relations telles que

$$\theta_\nu(x + 2\pi i) = \theta_\nu(x), \qquad \theta_\nu(x + \omega) = e^{-a_\nu x}\theta_\nu(x)$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p$ étant des entiers positifs.

La fonction

$$f(x, y) = C_1 e^{a_1 y}\theta_1(x) + C_2 e^{a_2 y}\theta_2(x) + \cdots + C_p e^{a_p y}\theta_p(x)$$

où les C_ν sont constants, vérifie les relations (44) et les fonctions y de x définies par l'équation $f(x, y) = 0$ possédent la propriété que nous venons d'indiquer.

B. Soit maintenant une fonction uniforme $F(x, y, z)$ de trois variables, vérifiant les relations

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} F(x + 2\pi i, y, z) &= F(x, y, z), \\ F(x, y + 2\pi i, z) &= F(x, y, z), \\ F(x, y, z + 2\pi i) &= F(x, y, z), \\ F(x + \omega, y + x, z + y) &= F(x, y, z). \end{aligned} \right.$$

Admettons que l'équation en z,

$$F(x, y, z) = 0,$$

ait, à la période $2\pi i$ près, les solutions

$$z_1 = \varphi_1(x, y), \quad z_2 = \varphi_2(x, y), \quad \ldots, \quad z_n = \varphi_n(x, y), \quad \ldots.$$

Ces solutions se permutent quand x ou y augmente de $2\pi i$; d'après la dernière des relations (45), les fonctions $\varphi_\nu(x + \omega, y + x)$ sont, dans un certain ordre, égales à

$$z_1 + y, \; z_2 + y, \; \ldots, \; z_n + y, \; \ldots.$$

Donc les dérivées secondes des z_ν par rapport à y,

$$z''_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}, \quad z''_2 = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}, \quad \ldots, \quad z''_n = \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2}, \quad \ldots.$$

forment un ensemble de fonctions qui se permutent, quand on change x en $x + 2\pi i$, ou y en $y + 2\pi i$, ou x en $x + \omega$ et y en $y + x$. Les fonctions symétriques de ces dérivées secondes sont donc des fonctions uniformes de x et y, vérifiant les relations (44).

C'est ce qu'on peut vérifier par dérivation de l'équation

$$F(x, y, z) = 0.$$

C. Soit $G(x, y, z)$ une autre fonction vérifiant des relations de la forme (45). Considérons les deux équations simultanées

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0$$

qui définissent y et z en fonctions de x. Admettons qu'en négligeant des multiples de $2\pi i$ ajoutés à y et à z, ce système admette un ensemble de solutions

$$(y_1, z_1), \quad (y_2, z_2), \quad \ldots, \quad (y_n, z_n), \quad \ldots.$$

Les dérivées secondes de ces solutions par rapport à x,

$$(y''_1, z''_1), \quad (y''_2, z''_2), \quad \ldots, \quad (y''_n, z''_n), \quad \ldots,$$

forment un ensemble déterminé.

Quand x augmente de $2\pi i$, ces dérivées des solutions se permutent.

D'après la dernière des relations (45), appliquée aux deux fonctions F et G, quand x augmente de ω, les solutions sont, dans un autre ordre,

$$(y_1 + x, \; z_1 + y_1), \quad (y_2 + x, \; z_2 + y_2), \quad \ldots;$$

leurs dérivées secondes par rapport à x sont, dans un autre ordre,

$$(y''_1, z''_1 + y''_1), \quad (y''_2, z''_2 + y''_2), \quad \ldots, \quad (y''_n, z''_n + y''_n), \quad \ldots.$$

Donc les fonctions symétriques des y''_ν, si elles existent, sont des fonctions uniformes de x, doublement périodiques aux périodes ω et $2\pi i$.

Puis, si l'on désigne par z'''_ν et y'''_ν les dérivées troisièmes par rapport à x, les fonctions symétriques des quantités

$$z'''_\nu \; y''_\nu - y'''_\nu \; z''_\nu,$$

où

$$\nu = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

sont des fonctions uniformes de x, doublement périodiques aux mêmes périodes.

Les dérivées premières par rapport à x sont, dans un autre ordre

$$(y'_1 + 1, \; z'_1 + y'_1), \quad (y'_2 + 1, \; z'_2 + y'_2), \ldots.$$

Si donc on considère le polynôme

$$P(y', z') = z' - \frac{y'(y' - 1)}{2}$$

qui, d'après les considérations du N° XIV ne change pas quand y' croît de 1 et z' de y', les fonctions symétriques de

$$P(y'_1, z'_1), \quad P(y'_2, z'_2), \quad \ldots$$

sont des fonctions uniformes de x doublement périodiques aux périodes $2\pi i$ et ω.

D. Prenons, en général, une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, admettant par rapport à chaque variable la période $2\pi i$ et vérifiant la relation (43). L'équation

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{46}$$

définit x_n en fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Admettons que, dans une bande du plan des x_n limitée par deux parallèles distantes de $2\pi i$, cette équation admette des solutions

$$(x_n)_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$
$$(x_n)_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots. x_{n-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans le plan entier des x_n, elle admettra les solutions

$$(x_n)_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + 2k_1\pi i$$
$$(x_n)_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + 2k_2\pi i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$k_1, k_2, \ldots$ désignant des entiers quelconques. Quand l'une des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ augmente de $2\pi i$, ces solutions se permutent entre elles; quand x_1 augmente de ω, x_2 de x_1, $\ldots$, x_{n-1} de x_{n-2} les nouvelles déterminations des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont, dans un certain ordre

$$(x_n)_1 + x_{n-1}, \ (x_n)_2 + x_{n-1}, \ \ldots.$$

Donc les dérivées secondes des $(x_n)_\nu$ par rapport à x_{n-1}

$$(x''_n)_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_{n-1}^2}, \quad (x''_n)_2 = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_{n-1}^2}, \quad \ldots$$

forment un ensemble de fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ qui se permutent quand on ajoute $2\pi i$ à l'une des variables et quand on change

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

en

$$x_1 + \omega, \ x_2 + x_1, \ \ldots, \ x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Les fonctions symétriques de ces dérivées secondes $(x''_n)_1$, $(x''_n)_2$, $\ldots$ sont donc des fonctions uniformes de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ laissées invariables par ces mêmes substitutions.

En résumé, si l'on résoud l'équation (46) contenant n variables par rapport à x_n, les fonctions symétriques des diverses déterminations de

$$\frac{\partial^2 x_n}{\partial x_{n-1}^2}$$

sont des fonctions uniformes $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, de $n-1$ variables, admettant la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifiant la relation

$$\Phi(x_1 + \omega, x_2 + x_1, \ldots, x_{n-1} + x_{n-2}) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

analogue à (43).

E. Prenons enfin le cas le plus général. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_{n-p}$, $n-p$ fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, admettant la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifiant la relation (43). Les équations simultanées

$$(47)\qquad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_{n-p}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

définissent $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{p+1}$ en fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Soient

$$(48)\qquad \begin{cases} x_{p+1,\nu} = \varphi_{1\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \\ x_{p+2,\nu} = \varphi_{2\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n,\nu} = \varphi_{n-p,\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \end{cases}$$

$$\nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

un des systèmes de solutions: ces systèmes de solutions sont déterminés à des multiples de $2\pi i$ près; ils se permutent quand on augmente $x_1, x_2, \ldots$ ou x_p de $2\pi i$.

Quand on change $x_1, x_2, \ldots, x_p$ en $x_1 + \omega$, $x_2 + x_1, \ldots, x_p + x_{p-1}$ ces systèmes de solutions deviennent, dans un autre ordre

$$x_{p+1,\nu} + x_p,\ x_{p+2,\nu} + x_{p+1,\nu},\ \ldots,\ x_{n,\nu} + x_{n-1,\nu}$$

à des multiples de $2\pi i$ près. Désignons par des accent les dérivées partielles de ces solutions par rapport à x_p. Les dérivées premières $x'_{p+1,\nu}, x'_{p+2,\nu}, \ldots, x'_{n,\nu}$ forment un système déterminé de solutions, et quand $x_1, x_2, \ldots, x_p$ subissent la substitution

$$(49)\qquad x_1 + \omega,\ x_2 + x_1,\ \ldots,\ x_p + x_{p-1}$$

ces dérivées subissent la substitution analogue

$$(50)\qquad x'_{p+1,\nu} + 1,\ x'_{p+2,\nu} + x'_{p+1,\nu},\ \ldots,\ x'_{n,\nu} + x'_{n-1,\nu}$$

Soit alors

$$P(x'_{p+1}, x'_{p+2}, \ldots, x'_n)$$

le polynôme le plus général en $x'_{p+1}, x'_{p+2}, \ldots, x'_n$ laissé invariable par la substitution (50) qui consiste à remplacer

$$x'_{p+1},\ x'_{p+2},\ \ldots,\ x'_n$$

par

$$x'_{p+1}+1,\ x'_{p+2}+x'_{p+1},\ \ldots,\ x'_n+x'_{n-1};$$

on sait former ce polynôme d'après la méthode du N° XIV en prenant $\omega=1$ et en désignant les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}$ par $x'_{p+1}, x'_{p+2}, \ldots, x'_n$.

Les diverses valeurs P_ν que prend ce polynôme pour les divers systèmes de solutions des équations (47) sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qui ne font que se permuter quand ces variables augmentent de $2\pi i$ ou subissent la substitution (49). Toute fonction symétrique des diverses valeurs de ce polynôme est donc une fonction uniforme

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

qui admet pour chaque variable la période $2\pi i$ et qui est inaltérée par la substitution (49).

XVII. *Deuxième forme des fonctions Θ; transformation.* On sait que les fonctions θ elliptiques, sont susceptibles de deux formes différentes, suivant le rôle particulier que l'on fait jouer à l'une ou à l'autre des deux périodes. Ces deux formes sont ordinairement désignées par les notations θ et ϑ. Un problème de même nature se présente pour les fonctions Θ de degrés supérieurs.

J'ai amorcé la question dans les Comptes Rendus de la Séance du 7 septembre 1914: je vais, comme dans cette note, prendre d'abord les θ elliptiques, sous le point de vue actuel, afin de suivre la même voie dans le cas général.

A. Soit donc

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\left[\alpha\frac{n(n-1)}{2}+\beta n\right]\omega+(\alpha n+\beta)x}$$

une fonction θ où α et β sont des entiers, $\alpha>0$. Cette fonction vérifie les relations

$$\theta(x+2\pi i)=\theta(x), \quad \theta(x+\omega)=e^{-\alpha x}\theta(x).$$

Posons

$$f(x, y)=e^{\alpha y}\theta(x); \tag{51}$$

cette fonction entière vérifie les trois relations

$$\begin{aligned} f(x+2\pi i, y)&=f(x, y)\\ f(x, y+2\pi i)&=f(x, y)\\ f(x+\omega, y+x)&=f(x, y). \end{aligned} \tag{52}$$

Faisons le changement de variable (38) qui consiste à conserver x et à poser

$$y = y_2 + \frac{x(x-\omega)}{2\omega}, \tag{53}$$

y_2 étant la nouvelle variable qui remplace y. On a alors

$$f(x, y) = f[x, y_2]$$

et d'après les résultats généraux du N° XIV, la fonction $f[x, y_2]$ admet la période ω par rapport à x. C'est ce que nous allons voir directement.

On a

$$f(x, y) = e^{\alpha y} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\left[\alpha \frac{n(n-1)}{2} + \beta n\right]\omega + (\alpha n + \beta) x}.$$

Faisons le changement de variables (53); nous aurons, par un calcul facile

$$f[x, y_2] = e^{\alpha y_2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\alpha}{2\omega}(x+n\omega)(x+n\omega-\omega) + \beta(x+n\omega)}$$

où la période ω est en évidence, car ajouter ω à x, revient à changer n en $n+1$.

On peut alors écrire

$$f[x, y_2] = e^{\alpha y_2} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu e^{\frac{2\nu\pi x i}{\omega}}$$

avec

$$\omega A_\nu = \sum_n \int_0^\omega e^{-\frac{2\nu\pi x i}{\omega} + \frac{\alpha}{2\omega}(x+n\omega)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)(x+n\omega)} dx$$

ce qu'on peut écrire en ajoutant à l'exposant $-2\nu n\pi i$

$$\omega A_\nu = \sum_n \int_0^\omega e^{\frac{\alpha}{2\omega}(x+n\omega)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha}{2} - \frac{2\nu\pi i}{\omega}\right)(x+n\omega)} dx.$$

Faisons, dans chaque intégrale, le changement de variable

$$\frac{x+n\omega}{\omega} = \xi,$$

nous aurons

$$A_\nu = \sum_n \int_n^{n+1} e^{\frac{\alpha\omega}{2}\xi^2 + \left(\beta\omega - \frac{\alpha}{2}\omega - 2\nu\pi i\right)\xi} d\xi,$$

c'est-à-dire, d'après une transformation classique

$$A_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\alpha\omega}{2}\xi^2 + \left(\beta\omega - \frac{\alpha}{2}\omega - 2\nu\pi i\right)\xi} d\xi, \tag{56}$$

la variable d'intégration étant réelle. Cette dernière intégrale, portant sur une exponentielle dont l'exposant est un trinôme du second degré, est bien connue. En terminant le calcul, on obtient la formule de transformation cherchée.

B. La même méthode s'applique aux fonctions Θ de degrés supérieurs. Nous nous bornerons à l'exposer pour les fonctions Θ du quatrième degré.

D'après des notations déjà employées, désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des entiers dont le premier est positif, et posons

$$\varphi\,(\lambda) = \alpha \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1.2.3.4} + \beta\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2.3} + \gamma\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} + \delta\lambda,$$

$$\varphi_1(\lambda) = \varphi(\lambda+1) - \varphi(\lambda) = \alpha\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2.3} + \beta\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} + \gamma\lambda + \delta,$$

$$\varphi_2(\lambda) = \varphi_1(\lambda+1) - \varphi_1(\lambda) = \alpha\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} + \beta\lambda + \gamma,$$

$$\varphi_3(\lambda) = \varphi_2(\lambda+1) - \varphi_2(\lambda) = \alpha\lambda + \beta.$$

Soit n un entier quelconque, la fonction Θ la plus générale du quatrième degré est

$$\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\omega\varphi(n) + x\varphi_1(n) + y\varphi_2(n) + z\varphi_3(n)}.$$

Introduisons une quatrième variable t, en posant

$$F(x, y, z, t) = e^{\alpha t}\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}.$$

Cette nouvelle fonction entière F possède la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifie la relation

$$F(x+\omega, y+x, z+y, t+z) = F(x, y, z, t).$$

Ceci rappelé, faisons le changement de variables indiqué au paragraphe XIV: ce changement consiste à conserver x et à remplacer y, z, t, par trois nouvelles variables y_2, y_3, y_4, définies par

$$(55)\qquad \begin{cases} y = y_2 + \dfrac{x(x-\omega)}{2\omega}, \\ z = y_3 + y_2\dfrac{x}{\omega} + \dfrac{x(x-\omega)(x-2\omega)}{2 \cdot 3\omega^2}, \\ t = y_4 + y_3\dfrac{x}{\omega} + y_2\dfrac{x(x-\omega)}{2\omega^2} + \dfrac{x(x-\omega)(x-2\omega)(x-3\omega)}{2 \cdot 3 \cdot 4\omega^3}. \end{cases}$$

La fonction $F(x, y, z, t)$ devient alors une fonction entière

$$F[x, y_2, y_3, y_4],$$

qui admet, par rapport à x, la période ω. C'est ce que nous allons vérifier.

Le changement de variables donne une expression de la forme

$$(56)\qquad F[x, y_2, y_3, y_4] = e^{\alpha y_4}\sum_n e^{u\omega + v y_2 + w y_3}$$

où l'exposant est ordonné par rapport à y_2, y_3, y_4, les quantités u, v, w ayant pour expressions

$$u = \varphi(n) + \frac{x}{\omega}\varphi_1(n) + \frac{x(x-\omega)}{2\omega^2}\varphi_2(n) + \\ + \frac{x(x-\omega)(x-2\omega)}{2 \cdot 3\omega^3}\varphi_3(n) + \frac{x(x-\omega)(x-2\omega)(x-3\omega)}{2 \cdot 3 \cdot 4\omega^4}\alpha,$$

$$v = \varphi_2(n) + \frac{x}{\omega}\varphi_3(n) + \frac{x(x-\omega)}{2\omega^2}\alpha,$$

$$w = \varphi_3(n) + \frac{x}{\omega}\alpha.$$

D'après la théorie élémentaire des différences, on a

$$\varphi(n+h) = \varphi(n) + \frac{h}{1}\varphi_1(n) + \frac{h(h-1)}{1 \cdot 2}\varphi_2(n) + \frac{h(h-1)(h-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\varphi_3(n) + \\ + \frac{h(h-1)(h-2)(h-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\varphi_4(n).$$

En faisant $h = \dfrac{x}{\omega}$, on voit que les quantités u, v, w qui dépendent de x et de n sont des fonctions de la seule quantité $x+n\omega$, qu'on peut écrire comme il suit

$$u=\varphi\left(n+\frac{x}{\omega}\right)=\varphi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right),$$

$$v=\varphi_2\left(n+\frac{x}{\omega}\right)=\varphi_2\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right),$$

$$w=\varphi_3\left(n+\frac{x}{\omega}\right)=\varphi_3\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right);$$

l'exposant dans la série (56) est donc une certaine fonction de $x+n\omega$

$$u\omega+vy_2+wy_3=\psi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right)$$

en posant

$$\psi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right)=\omega\varphi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right)+y_2\varphi_2\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right)+y_3\varphi_3\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right), \tag{57}$$

et l'on a

$$F[x, y_2, y_3, y_4]=e^{ay_4}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\psi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right)}.$$

Il est alors évident que la fonction $F[x, y_2, y_3, y_4]$ admet la période ω par rapport à x, puisque le changement de x en $x+\omega$ donne le même résultat que le changement de n en $n+1$ dans la série. On peut donc écrire

$$F[x, y_2, y_3, y_4]=e^{ay_4}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu e^{\frac{2\nu\pi x i}{\omega}},$$

A_ν étant une fonction entière de y_2 et y_3. Ce coefficient est donné par la formule classique

$$\omega A_\nu=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\int_0^\omega e^{-\frac{2\nu\pi x i}{\omega}+\psi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right)}dx;$$

comme n est entier, on peut, en ajoutant $-2\nu n\pi i$ à l'exposant, écrire

$$\omega A_\nu=\sum_n\int_0^\omega e^{-2\nu\pi i\frac{x+n\omega}{\omega}+\psi\left(\frac{x+n\omega}{\omega}\right)}dx.$$

Mais alors, en faisant, dans chaque intégrale, le changement de variable

$$\frac{x+n\omega}{\omega}=\xi,$$

on a

$$A_\nu=\sum_n\int_n^{n+1}e^{-2\nu\pi i\xi+\psi(\xi)}d\xi$$

et enfin

$$A_\nu=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\psi(\xi)-2\nu\pi i\xi}d\xi,$$

$$(58)\qquad A_\nu=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\omega\varphi(\xi)+y_2\varphi_2(\xi)+y_3\varphi_3(\xi)-2\nu\pi i\xi}d\xi,$$

la variable d'intégration étant réelle.

Le coefficient A_ν, fonction entière de y_2 et y_3, est ainsi exprimé par une intégrale définie, dans laquelle l'exposant de e est un polynôme du quatrième degré par rapport à la variable d'intégration.

Le coefficient A_ν étant calculé, on a la nouvelle forme de la fonction Θ:

$$(59)\qquad e^{at}\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}=e^{ay_4}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}A_\nu e^{\frac{2\nu\pi xi}{\omega}},$$

ce qui, en vertu des relations (55), réalise la transformation cherchée.

XVIII. *Remarque sur une intégrale définie.* Dans le numéro précédent, nous avons rencontré une intégrale définie portant sur une exponentielle dont l'exposant est un polynôme du quatrième degré.

Considérons, d'une manière générale, une intégrale définie de la forme

$$(60)\qquad \Phi_\nu(x, y, z, t)=e^{at}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\omega\varphi(u)+x\varphi_1(u)+y\varphi_2(u)+z\varphi_3(u)-2\nu\pi ui}du,$$

ν désignant un entier et la variable d'intégration u étant réelle. Cette intégrale est une fonction entière de x, y, z, t, qui vérifie la relation

$$\Phi_\nu(x+\omega, y+x, z+y, t+z)=\Phi_\nu(x, y, z, t),$$

comme il est aisé de le constater en changeant u en $u+1$.

Le changement de variables (55), conduit à un calcul analogue à celui du numéro précédent et transforme l'intégrale Φ_ν en

$$\Phi_\nu[x, y_2, y_3, y_4] = \epsilon^{a y_4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\omega\varphi\left(u+\frac{x}{\omega}\right)+y_2\varphi_2\left(u+\frac{x}{\omega}\right)+y_3\varphi_3\left(u+\frac{x}{\omega}\right)-2\nu\pi u i}\, du.$$

En posant

$$u + \frac{x}{\omega} = \xi,$$

on trouve

$$\Phi_\nu[x, y_2, y_3, y_4] = e^{a y_4} e^{\frac{2\nu\pi x i}{\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\omega\varphi(\xi)+y_2\varphi_2(\xi)+y_3\varphi_3(\xi)-2\nu\pi\xi i}\, d\xi,$$

où, dans le plan complexe des ξ, l'intégration est faite sur une parallèle à l'axe des quantités réelles. Mais il est aisé de voir que cette intégrale conserve la même valeur si on suppose la variable d'intégration ξ réelle. L'intégrale Φ_ν est alors le terme général de la série (59), donnant la deuxième forme de la fonction Θ.