MÉMOIRE

sur

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

PAR

KARL F. SUNDMAN

à HELSINGFORS.

L'objet du présent Mémoire, rédigé sur l'invitation de M. MITTAG-LEFFLER, est de présenter une exposition d'ensemble et un résumé des recherches sur le problème des trois corps que j'ai publiées dans les *Acta Societatis Scientiarum Fennicae.*[1]

Les coordonnées et les composantes des vitesses des corps, que nous choisissons en première ligne comme inconnues du problème, satisfont à un système bien connu d'équations différentielles qui les définissent comme fonctions du temps t. Nous nous bornons à étudier un mouvement réel, c'est à dire un mouvement où les coordonnées des corps sont réelles pour les valeurs réelles de t.

Ayant défini un tel mouvement en fixant les valeurs des inconnues à l'instant initial, soit $t = 0$, si l'on fait varier t en passant par des valeurs réelles, on trouve que les inconnues restent fonctions holomorphes de t tant que les trois distances entre les corps sont plus grandes que zéro. Quand une des inconnues cesse d'être régulière, on dit aussi que le mouvement cesse d'être régulier. Si cela se produit quand t converge vers une valeur finie t_1, alors, comme l'a montré d'abord M. PAINLEVÉ,[2] ou les trois distances convergent vers zéro, ou bien l'une des distances converge vers zéro tandis que les deux autres convergent vers une

---

[1] *Recherches sur le problème des trois corps*, l. c. tome 34, et *Nouvelles recherches sur le problème des trois corps*, l. c. tome 35.

[2] P. PAINLEVÉ, *Leçons etc.*, professées à Stockholm, Paris 1897.

valeur finie. Donc, dans le premier cas, tous les trois corps se choquent, et dans le second deux des corps. La question soulevée par M. PAINLEVÉ, de savoir quelles relations doivent exister entre les valeurs des inconnues à l'instant initial pour que les corps se choquent pour une valeur finie donnée t_1, a été étudiée par M. LEVI-CIVITA[1] pour le cas spécial bien connu appelé »problème restreint», et, sous une forme générale, par M. BISCONCINI[2] pour le cas où deux seulement des corps se choquent au temps t_1. Les équations de condition posées par M. BISCONCINI, et qui s'expriment à l'aide de séries infinies, sont très compliquées, et ne sont directement applicables que quand l'intervalle de temps qui s'écoule entre l'instant initial et t_1 est suffisamment court, condition pour la vérification de laquelle on ne possède pas de criterium. On doit encore noter que M. BISCONCINI, pour obtenir ces résultats, avait fait l'hypothèse que la vitesse angulaire du rayon vecteur entre les deux corps qui se choquent reste finie quand t tend vers t_1. La limitation qui en résulterait dans les résultats de M. BISCONCINI n'est pourtant qu'apparente, car nous avons démontré que l'hypothèse en question est toujours vraie.

Dans le présent Mémoire, nous étudions d'abord le caractère analytique des inconnues au voisinage d'un instant t_1 où deux des corps se choquent. D'après le principe du prolongement analytique, nous définissons ensuite d'une manière univoque les coordonnées des corps pour les valeurs réelles de t situées au delà de la valeur t_1, et nous obtenons ainsi un prolongement réel du mouvement après le choc. En prolongeant de la même manière le mouvement au delà de chaque nouveau choc entre deux des corps, nous définissons les coordonnées des corps pour des valeurs de t de plus en plus grandes. Après avoir constaté que les valeurs du temps pour lesquelles on peut ainsi définir les coordonnées ne sauraient admettre une limite supérieure *finie* $\bar{t}$ que si les trois distances entre les corps tendent toutes vers zéro quand t tend vers $\bar{t}$, nous faisons voir que cette dernière éventualité ne peut se présenter que dans le cas où les constantes des aires sont nulles toutes les trois[3], d'où résulte enfin que les coordonnées des corps peuvent être définies d'une manière univoque pour toutes les valeurs de t comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, si l'on excepte ce cas spécial.

---

[1] T. LEVI-CIVITA, *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, *Annali di Matematica*, Ser. III, T. 9, 1903.

[2] G. BISCONCINI, *Sur le problème des trois corps*, *Acta Mathematica*, T. 30.

[3] Au cours de la rédaction définitive de ce travail, M. MITTAG-LEFFLER m'a fait part d'une lettre à lui adressée par WEIERSTRASS et en date du 2 févr. 1889, où WEIERSTRASS dit avoir démontré que les constantes des aires doivent toutes être nulles pour que les trois corps puissent se choquer tous en un même point de l'espace. Cette lettre est publiée pages 55—58 du tome 35 de ce journal.

En continuant nos recherches, nous démontrons ensuite ce théorème intéressant:

Si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, on peut, les circonstances initiales étant données, indiquer une limite positive au dessous de laquelle les deux plus grandes des distances entre les corps ne descendent jamais.

En nous appuyant sur ce résultat, nous arrivons enfin au théorème suivant, qui constitue le résultat principal de nos recherches:

Si les constantes des aires dans le mouvement des trois corps par rapport à leur centre commun de gravité ne sont pas toutes nulles, on peut trouver une variable τ telle que les coordonnées des corps, leurs distances mutuelles et le temps soient développables en séries convergentes suivant les puissances de τ qui représentent le mouvement pour toutes les valeurs réelles du temps, et cela quels que soient les chocs qui se produisent entre les corps.

Je saisis cette occasion d'exprimer ma vive gratitude à M. Ernst Lindelöf pour les conseils précieux qu'il m'a donnés concernant la rédaction du présent Mémoire.

I.

Les équations différentielles du mouvement et leurs intégrales connues.

1. Considérons trois corps (points matériels) P_0, P_1, P_2, qui se meuvent suivant la loi de Newton et dont nous supposerons les masses m_0, m_1, m_2 toutes *finies et plus grandes que zéro.* Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées du corps P_i par rapport à trois axes rectangulaires passant par le centre commun de gravité des trois corps et ayant des directions fixes dans l'espace.

En désignant encore par t le temps et par r_0, r_1, r_2 les distances P_1P_2, P_2P_0 et P_0P_1, les équations différentielles du mouvement seront

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{dx_0}{dt} = x'_0, \quad \frac{dx'_0}{dt} = m_1\frac{x_1 - x_0}{r_2^3} + m_2\frac{x_2 - x_0}{r_1^3},\\
&\frac{dy_0}{dt} = y'_0, \quad \frac{dy'_0}{dt} = m_1\frac{y_1 - y_0}{r_2^3} + m_2\frac{y_2 - y_0}{r_1^3},\\
&\frac{dz_0}{dt} = z'_0, \quad \frac{dz'_0}{dt} = m_1\frac{z_1 - z_0}{r_2^3} + m_2\frac{z_2 - z_0}{r_1^3},
\end{aligned}\right.$$

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x'_1, & \dfrac{dx'_1}{dt} = m_2 \dfrac{x_2 - x_1}{r_0^3} + m_0 \dfrac{x_0 - x_1}{r_2^3}, \\[2mm] \dfrac{dy_1}{dt} = y'_1, & \dfrac{dy'_1}{dt} = m_2 \dfrac{y_2 - y_1}{r_0^3} + m_0 \dfrac{y_0 - y_1}{r_2^3}, \\[2mm] \dfrac{dz_1}{dt} = z'_1, & \dfrac{dz'_1}{dt} = m_2 \dfrac{z_2 - z_1}{r_0^3} + m_0 \dfrac{z_0 - z_1}{r_2^3}, \\[4mm] \dfrac{dx_2}{dt} = x'_2, & \dfrac{dx'_2}{dt} = m_0 \dfrac{x_0 - x_2}{r_1^3} + m_1 \dfrac{x_1 - x_2}{r_0^3}, \\[2mm] \dfrac{dy_2}{dt} = y'_2, & \dfrac{dy'_2}{dt} = m_0 \dfrac{y_0 - y_2}{r_1^3} + m_1 \dfrac{y_1 - y_2}{r_0^3}, \\[2mm] \dfrac{dz_2}{dt} = z'_2, & \dfrac{dz'_2}{dt} = m_0 \dfrac{z_0 - z_2}{r_1^3} + m_1 \dfrac{z_1 - z_2}{r_0^3}. \end{cases}$$

On a supposé les unités déterminées de manière à rendre la constante de GAUSS égale à 1.

Les équations (1) admettent les intégrales connues suivantes

$$(2)\quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i x_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i y_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i z_i = 0,$$

$$(3)\quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i x'_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i y'_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i z'_i = 0,$$

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{i=2} m_i (x_i y'_i - y_i x'_i) = c_0, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{i=2} m_i (y_i z'_i - z_i y'_i) = c_1, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{i=2} m_i (z_i x'_i - x_i z'_i) = c_2, \end{cases}$$

$$(5)\quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i) - 2 \frac{m_0 m_1 m_2}{M} U = - \frac{m_0 m_1 m_2}{M} K,$$

où c_0, c_1, c_2 et K sont des constantes d'intégration et où l'on a

$$(6)\quad U = \frac{M}{m_0 r_0} + \frac{M}{m_1 r_1} + \frac{M}{m_2 r_2},$$

$$M = m_0 + m_1 + m_2. \tag{7}$$

Les distances r_0, r_1 et r_2 sont données comme fonctions des inconnues x_i, y_i, z_i par les formules

$$\begin{cases} r_0^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \\ r_1^2 = (x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 + (z_0 - z_2)^2, \\ r_2^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2, \end{cases} \tag{8}$$

où l'on doit prendre la détermination positive des r_i pour les valeurs réelles de t.

2. Dans ce travail nous aurons avant tout à étudier le mouvement des trois corps quand l'une des distances r_0, r_1, r_2 ou tend vers zéro ou reste petite par rapport aux deux autres. Supposons pour fixer les idées que r_2 soit cette distance. Il sera alors avantageux de prendre pour variables les coordonnées rectangulaires x, y, z de P_1 par rapport à P_0 et les coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ de P_2 par rapport au centre de gravité des corps P_0 et P_1.

Pour abréger les formules, nous poserons

$$\lambda = \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \qquad \mu = \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \tag{9}$$

$$g = \frac{M}{m_2(m_0 + m_1)}, \quad h = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}. \tag{10}$$

Alors on aura entre ces nouvelles coordonnées et les coordonnées du n:o 1 les relations

$$\begin{cases} x_0 = -\lambda x - \frac{m_2}{M}\xi, \quad x_1 = \mu x - \frac{m_2}{M}\xi, \quad x_2 = \frac{m_0 + m_1}{M}\xi, \\ y_0 = -\lambda y - \frac{m_2}{M}\eta, \quad y_1 = \mu y - \frac{m_2}{M}\eta, \quad y_2 = \frac{m_0 + m_1}{M}\eta, \\ z_0 = -\lambda z - \frac{m_2}{M}\zeta, \quad z_1 = \mu z - \frac{m_2}{M}\zeta, \quad z_2 = \frac{m_0 + m_1}{M}\zeta, \end{cases} \tag{11}$$

ou réciproquement

$$\begin{cases} x = x_1 - x_0, \quad y = y_1 - y_0, \quad z = z_1 - z_0, \\ \xi = g m_2 x_2, \quad \eta = g m_2 y_2, \quad \zeta = g m_2 z_2, \end{cases} \tag{12}$$

et, d'après (8), on trouve

$$r_0^2 = (\xi - \mu x)^2 + (\eta - \mu y)^2 + (\zeta - \mu y)^2, \tag{13}$$

$$r_1^2 = (\xi + \lambda x)^2 + (\eta + \lambda y)^2 + (\zeta + \lambda z)^2, \tag{14}$$

$$r^2 \equiv r_2^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{15}$$

où nous avons écrit pour abréger r au lieu de r_2. En tenant compte de ces égalités (7)—(15) on tire aisément de (1), (2), (4) et (5) les équations suivantes:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(m_0+m_1)\,x}{r^3} = X = -m_2\,x\left(\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\lambda}{r_1^3}\right) + m_2\,\xi\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right),\\
&\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(m_0+m_1)\,y}{r^3} = Y = -m_2\,y\left(\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\lambda}{r_1^3}\right) + m_2\,\eta\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right),\\
&\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{(m_0+m_1)\,z}{r^3} = Z = -m_2\,z\left(\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\lambda}{r_1^3}\right) + m_2\,\zeta\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right),
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Xi = -M\xi\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right) + \lambda\mu\,Mx\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right),\\
&\frac{d^2\eta}{dt^2} = H = -M\eta\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right) + \lambda\mu\,My\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right),\\
&\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Pi = -M\zeta\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right) + \lambda\mu\,Mz\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right),
\end{aligned}\right. \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&g\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + h\,(\xi\eta' - \eta\xi') = ghc_0,\\
&g\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + h\,(\eta\zeta' - \zeta\eta') = ghc_1,\\
&g\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + h\,(\zeta\xi' - \xi\zeta') = ghc_2,
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

$$g\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + h\,(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 2U - K, \tag{19}$$

où nous avons posé

$$\xi' = \frac{d\xi}{dt}, \quad \eta' = \frac{d\eta}{dt}, \quad \zeta' = \frac{d\zeta}{dt}. \tag{20}$$

Des équations (16)—(20) on peut tirer réciproquement les équations (1), (2), (4) et (5).

3. Désignons par R la quantité positive (ou nulle) définie par l'égalité

$$R^2 = \frac{r_0^2}{m_0} + \frac{r_1^2}{m_1} + \frac{r_2^2}{m_2}. \tag{21}$$

A l'aide des équations (13), (14) et (15) on aura aussi

$$R^2 = g r^2 + h \varrho^2, \tag{21 bis}$$

où l'on a posé

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \tag{22}$$

de façon que ϱ désigne la distance du corps P_2 au centre de gravité des corps P_0 et P_1.

Cela posé, LAGRANGE[1] a établi une formule fondamentale qui, avec nos notations, peut s'écrire:

$$\frac{d^2 R^2}{dt^2} = 2(U - K), \tag{23}$$

ou bien

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = U - K, \tag{24}$$

et dont on constate aisément l'exactitude en s'appuyant sur les équations (15), (16), (17), (19), (21 *bis*) et (22).

Nous tirerons parti de cette formule de LAGRANGE en la combinant avec une autre, que nous allons déduire de l'intégrale des forces vives.

En différentiant les équations (15), (21 *bis*) et (22) par rapport à t, on trouve

$$r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt}, \tag{25}$$

$$R \frac{dR}{dt} = g r \frac{dr}{dt} + h \varrho \varrho', \tag{26}$$

$$\varrho \varrho' = \xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta', \tag{27}$$

où

$$\varrho' = \frac{d\varrho}{dt}, \tag{28}$$

[1] LAGRANGE, *Essai sur le problème des trois corps*, *Oeuvres* t. VI, p. 240.

et à l'aide de ces expressions on tire des identités

$$(x^2+y^2+z^2)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)^2+\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)^2+$$
$$+\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)=(\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta')^2+(\xi\eta'-\eta\xi')^2+(\eta\zeta'-\zeta\eta')^2+(\zeta\xi'-\xi\zeta')^2,$$

$$(gr^2+h\varrho^2)\left[g\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+h\varrho'^2\right]=\left(gr\frac{dr}{dt}+h\varrho\varrho'\right)^2+gh\left(r\varrho'-\varrho\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

les égalités suivantes:

$$(29)\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

$$(30)\qquad \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=\varrho'^2+\frac{1}{\varrho^2}(\xi\eta'-\eta\xi')^2+\frac{1}{\varrho^2}(\eta\zeta'-\zeta\eta')^2+\frac{1}{\varrho^2}(\zeta\xi'-\xi\zeta')^2,$$

$$(31)\qquad g\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+h\varrho'^2=\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{gh}{R^2}\left(r\varrho'-\varrho\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

En se servant de ces trois formules, on déduit de l'équation (19) cette nouvelle forme de l'intégrale des forces vives:

$$(32)\qquad \left(\frac{dR}{dt}\right)^2+P=2U-K,$$

où la quantité

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} P=\frac{gh}{R^2}\left(r\varrho'-\varrho\frac{dr}{dt}\right)^2&+\frac{g}{r^2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{g}{r^2}\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)^2+\\ &+\frac{g}{r^2}\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)^2+\frac{h}{\varrho^2}(\xi\eta'-\eta\xi')^2+\frac{h}{\varrho^2}(\eta\zeta'-\zeta\eta')^2+\frac{h}{\varrho^2}(\zeta\xi'-\xi\zeta')^2,\end{aligned}\right.$$

étant une somme de sept termes positifs ou nuls, est elle-même constamment positive ou nulle (tant que les variables restent réelles).

En éliminant encore U et K entre les équations (24) et (32), on trouve

$$(34)\qquad 2R\frac{d^2R}{dt^2}+\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=P-K$$

et

$$R\frac{d^2R}{dt^2} = P - U. \tag{35}$$

Les équations (32) et (34), que nous n'avons pas rencontrées ailleurs, jouent un rôle très important dans nos recherches.

II.

Détermination d'une limite inférieure des rayons de convergence des développements des coordonnées au voisinage d'un instant où les distances entre les corps sont toutes plus grandes que zéro.

4. Dans la suite nous aurons souvent à nous servir du théorème connu de Cauchy sur l'existence des intégrales des équations différentielles. En ayant égard au complément qu'y a apporté M. Picard, nous pouvons énoncer ce théorème comme il suit:[1]

Soient $Q_j(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ des fonctions qui ne contiennent pas t explicitement et qui sont développables suivant les puissances croissantes des différences $q_i - \bar{q}_i$ en séries qui convergent tant que

$$|q_i - \bar{q}_i| < q'_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{36}$$

q'_i désignant des quantités positives. Supposons encore qu'il existe des quantités positives et finies Q'_j telles qu'on ait

$$|Q_j(q_1, q_2, \ldots, q_n)| < Q'_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

tant que les variables q_i vérifient les inégalités (36).

Dans ces conditions le système des n équations différentielles

$$\frac{dq_j}{dt} = Q_j(q_1, q_2, \ldots, q_n), \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

admet une et une seule solution qui est telle que les inconnues q_i tendent vers les valeurs finies données $\bar{q}_i$ quand t tend vers une valeur donnée $\bar{t}$. Dans cette solution, les inconnues q_i sont développables suivant les puissances croissantes de $t - \bar{t}$ en séries qui convergent, du moins tant que

---

[1] Voir p. ex. Picard, Traité d'Analyse, t. II, Chap. XI.

$$|t-\bar{t}| \leq T',$$

T' désignant le plus petit des quotients

$$\frac{q'_1}{Q'_1}, \frac{q'_2}{Q'_2}, \frac{q'_3}{Q'_3}, \ldots, \frac{q'_n}{Q'_n}.$$

De plus les q_i vérifieront les inégalités (36) *tant que t vérifie cette dernière inégalité*

5. Ayant l'intention d'étudier avant tout un mouvement qui est *réel* pour des valeurs *réelles* du temps, nous ne considérons dans ce travail que les solutions des équations (1) qui ont les propriétés suivantes:

1) *Les coordonnées x_i, y_i, z_i prennent à l'instant initial $t=0$ des valeurs réelles et finies, telles que les valeurs correspondantes des distances r_0, r_1, r_2 soient toutes finies et plus grandes que zéro.*

2) *Les dérivées x'_i, y'_i, z'_i prennent à l'instant initial $t=0$ des valeurs réelles et finies.*

En vertu des équations (1), (4) et (5) on voit alors immédiatement que $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i$ et z'_i sont des fonctions holomorphes de t à l'instant initial et que les constantes c_0, c_1, c_2 et K ont des valeurs *réelles* et *finies.*

En faisant décrire à la variable t dans son plan un chemin quelconque partant du point $t=0$, on sait que les fonctions $x_i, y_i, \ldots,$ tant qu'elles restent holomorphes, vérifient constamment les équations (1) ainsi que les égalités (2), (3), (4) et (5).

Cela posé, ayant fixé une solution telle qu'il est dit plus haut, faisons varier t par des valeurs réelles à partir de la valeur $t=0$. Il résulte immédiatement de la forme des équations (1) que les inconnues $x_i, y_i, \ldots,$ resteront des fonctions holomorphes de t tant que les distances r_0, r_1, r_2 resteront supérieures à zéro.

Désignons par $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{x}'_i, \bar{y}'_i, \bar{z}'_i$ les valeurs (nécessairement réelles) vers lesquelles tendent $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i$ lorsque t tend vers une certaine valeur réelle et finie $\bar{t}$, et admettons que les valeurs correspondantes

$$\bar{r}_0 = \sqrt{(\bar{x}_2-\bar{x}_1)^2+(\bar{y}_2-\bar{y}_1)^2+(\bar{z}_2-\bar{z}_1)^2},$$

$$\bar{r}_1 = \sqrt{(\bar{x}_0-\bar{x}_2)^2+(\bar{y}_0-\bar{y}_2)^2+(\bar{z}_0-\bar{z}_2)^2},$$

$$\bar{r}_2 = \sqrt{(\bar{x}_1-\bar{x}_0)^2+(\bar{y}_1-\bar{y}_0)^2+(\bar{z}_1-\bar{z}_0)^2},$$

des distances r_0, r_1, r_2 sont plus grandes que zéro, de sorte qu'on pourra écrire[1]

$$\bar{r}_0,\ \bar{r}_1 \text{ et } \bar{r}_2 \geqq 14\varkappa, \tag{37}$$

$\varkappa$ désignant une quantité positive dont nous disposerons ultérieurement.

Dans ces conditions $x_i, y_i, \ldots,$ seront développables en séries suivant les puissances de $t-\bar{t}$. Nous nous proposons de calculer une limite inférieure des rayons de convergence de ces développements, et, à cet effet, nous appliquerons le théorème du n:o 4.

Nous chercherons donc d'abord des limites supérieures des valeurs que prennent les modules des seconds membres des équations (1) pour les valeurs $x_i, y_i, \ldots,$ vérifiant les inégalités

$$\left\{\begin{array}{l} |x_i-\bar{x}_i|,\ |y_i-\bar{y}_i| \text{ et } |z_i-\bar{z}_i|<\varkappa_0, \\ |x'_i-\bar{x}'_i|,\ |y'_i-\bar{y}'_i| \text{ et } |z'_i-\bar{z}'_i|<\varkappa'_0, \end{array}\right. \qquad (i=0,1,2), \tag{38}$$

$\varkappa_0$ et $\varkappa'_0$ désignant deux quantités positives qu'on doit déterminer de telle sorte que les développements des dits membres suivant les puissances des différences $x_i-\bar{x}_i, y_i-\bar{y}_i, \ldots$ soient convergents tant que les conditions (38) sont vérifiées.

On voit immédiatement que les seconds membres des équations (1) sont développables suivant les puissances des différences en question tant que les quotients $\frac{1}{r_0}, \frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{r_2}$ le sont. Or on a, d'après (8), par exemple

$$\begin{aligned} r_0^2 = \bar{r}_0^2 &+ 2(\bar{x}_2-\bar{x}_1)[(x_2-\bar{x}_2)-(x_1-\bar{x}_1)] + [(x_2-\bar{x}_2)-(x_1-\bar{x}_1)]^2 \\ &+ 2(\bar{y}_2-\bar{y}_1)[(y_2-\bar{y}_2)-(y_1-\bar{y}_1)] + [(y_2-\bar{y}_2)-(y_1-\bar{y}_1)]^2 \\ &+ 2(\bar{z}_2-\bar{z}_1)[(z_2-\bar{z}_2)-(z_1-\bar{z}_1)] + [(z_2-\bar{z}_2)-(z_1-\bar{z}_1)]^2, \end{aligned}$$

et comme

$$|\bar{x}_2-\bar{x}_1|,\ |\bar{y}_2-\bar{y}_1| \text{ et } |\bar{z}_2-\bar{z}_1| \leqq \bar{r}_0,$$

il en résulte que r_0^2 peut se mettre sous la forme

$$\bar{r}_0^2 + P_0(x_i-\bar{x}_i,\ y_i-\bar{y}_i,\ z_i-\bar{z}_i),$$

$P_0(x_i-\bar{x}_i, y_i-\bar{y}_i, z_i-\bar{z}_i)$ étant un polynome par rapport aux différences $x_i-\bar{x}_i$, $y_i-\bar{y}_i$, $z_i-\bar{z}_i$ dont le module, même lorsqu'on y remplace chaque terme par sa

[1] Le coefficient 14 est introduit pour simplifier certains coefficients dans la suite.

valeur absolue, reste inférieur à l'expression $12\,\bar{r}_0\,\varkappa_0 + 12\,\varkappa_0^2$ tant que $|x_i - \bar{x}_i|$, $|y_i - \bar{y}_i|$ et $|z_i - \bar{z}_i|$ sont plus petits que $\varkappa_0$. Donc $\frac{1}{r_0}$ est certainement développable suivant les puissances croissantes des dites différences tant que leurs valeurs absolues sont plus petites que $\varkappa_0$, si l'on détermine $\varkappa_0$ de telle manière que

$$12\,\bar{r}_0\,\varkappa_0 + 12\,\varkappa_0^2 < \bar{r}_0^2$$

ou bien

$$\varkappa_0 < \frac{\bar{r}_0}{6 + 4\sqrt{3}}.$$

Nous donnerons à $\varkappa_0$ la valeur particulière

$$(39) \qquad \varkappa_0 = \frac{\bar{r}_0}{14},$$

qui vérifie l'inégalité précédente et qui est d'ailleurs choisie de manière à rendre rationnels les coefficients dans les formules qui suivent. On aura alors

$$(40) \qquad |r_0| > \sqrt{\bar{r}_0^2 - 12\,\bar{r}_0\,\varkappa_0 - 12\,\varkappa_0^2} = \frac{2}{7}\,\bar{r}_0,$$

$$|x_2 - x_1| \leqq |\bar{x}_2 - \bar{x}_1| + |x_2 - \bar{x}_2| + |\bar{x}_1 - x_1| < \frac{8}{7}\,\bar{r}_0,$$

et par suite

$$(41) \qquad \left|\frac{x_2 - x_1}{r_0^3}\right| < \frac{49}{\bar{r}_0^2} = \frac{1}{4\,\varkappa_0^2},$$

tant que x_i, y_i et z_i vérifient les inégalités (38).

Mais il résulte de (37) et (39) que

$$(42) \qquad \varkappa_0 \geqq \varkappa$$

et on aura donc, d'après (41),

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{r_0^3}\right| < \frac{1}{4\,\varkappa^2},$$

tant que x_i, y_i et z_i vérifient les inégalités (38), ou, selon (42), à plus forte raison s'ils vérifient les inégalités

(43) $$|x_i - \bar{x}_i|,\ |y_i - \bar{y}_i| \text{ et } |z_i - \bar{z}_i| < \varkappa, \qquad (i = 0, 1, 2),$$

que nous substituerons désormais aux trois premières des inégalités (38).

On trouve de même que, dans ces conditions, les autres quotients analogues à $\frac{x_2 - x_1}{r_0^3}$ qui entrent dans les seconds membres des équations (1) sont tous en valeur absolue plus petits que $\frac{1}{4\varkappa^2}$, et il en résulte immédiatement que les expressions des dérivées $\frac{dx'_0}{dt}, \frac{dx'_1}{dt}, \frac{dx'_2}{dt}, \ldots$, ont toutes leurs modules inférieurs à

$$\frac{M}{4\varkappa^2}.$$

En vertu de (37), on peut conclure de (6) que, t tendant vers $\bar{t}$, U tendra vers une valeur $\bar{U}$ qui satisfait à l'inégalité

$$\frac{m_0 m_1 m_2}{M} \bar{U} \leqq \frac{m_1 m_2 + m_2 m_0 + m_0 m_1}{14 \varkappa}$$

ou, puisque d'après (7)

$$M^2 \geqq 3(m_1 m_2 + m_2 m_0 + m_0 m_1),$$

à l'inégalité plus simple

$$\frac{m_0 m_1 m_2}{M} \bar{U} \leqq \frac{M^2}{42 \varkappa}.$$

En observant que

$$\left|\frac{m_0 m_1}{M} K\right|,\ \left|\frac{m_0 m_2}{M} K\right| \text{ et } \left|\frac{m_1 m_2}{M} K\right| < \frac{M}{4} |K|,$$

on conclut alors de l'égalité (5) que les valeurs $\bar{x}'_i$, $\bar{y}'_i$ et $\bar{z}'_i$ satisfont aux inégalités

$$|\bar{x}'_i|,\ |\bar{y}'_i| \text{ et } |\bar{z}'_i| < \sqrt{\frac{M^2}{21 m \varkappa} + \frac{M}{4}|K|}, \qquad (i = 0, 1, 2),$$

où m *désigne la plus petite des masses* m_0, m_1 *et* m_2. Dès lors, si l'on fait

(44) $$\varkappa'_0 = \sqrt{\frac{M^2}{21 m \varkappa} + \frac{M}{4}|K|},$$

et si x'_i, y'_i et z'_i vérifient les inégalités (38), on aura

$$|x'_i|,\ |y'_i| \text{ et } |z'_i| < 2\varkappa'_0, \qquad (i = 0, 1, 2).$$

En faisant usage des limites supérieures obtenues ci-dessus pour les valeurs absolues des seconds membres des équations (1), on voit donc que les quantités qui, dans les équations (1), correspondent aux quotients $\frac{q'_1}{Q'_1}, \ldots, \frac{q'_n}{Q'_n}$ du théorème du n:o 4, sont plus grandes que l'une ou l'autre des deux valeurs

$$\frac{\varkappa}{2\varkappa'_0} \text{ et } \frac{4\varkappa^2\varkappa'_0}{M}.$$

Or la première de ces valeurs est la plus petite, car on a

$$\frac{4\varkappa^2\varkappa'_0}{M} - \frac{\varkappa}{2\varkappa'_0} = \frac{\varkappa}{2M\varkappa'_0}(8\varkappa\varkappa'^2_0 - M) = \frac{\varkappa}{2\varkappa'_0}\left(\frac{8M}{21m} + 2\varkappa|K| - 1\right),$$

ce qui est une quantité positive puisque m est nécessairement $\leqq \frac{M}{3}$.

En vertu du théorème du n:o 4 on en conclut la proposition suivante:

Si, quand t tend par des valeurs réelles vers une valeur réelle et finie $\bar{t}$, les coordonnées x_i, y_i et z_i tendent vers les valeurs réelles et finies $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ et $\bar{z}_i$, telles que $\bar{r}_0$, $\bar{r}_1$ et $\bar{r}_2$ satisfassent aux inégalités (37), *les coordonnées et leurs dérivées par rapport au temps sont développables suivant les puissances croissantes de $t - \bar{t}$ en séries qui convergent du moins tant que*

$$(45) \qquad |t - \bar{t}| \leqq T = \frac{\varkappa}{\sqrt{\frac{4M^2}{21m\varkappa} + M|K|}},$$

et les inégalités (43) *auront lieu, tant que t vérifie cette inégalité* (45).

Les distances r_0, r_1, r_2 étant développables suivant les puissances des différences $x_i - \bar{x}_i$, $y_i - \bar{y}_i$, $z_i - \bar{z}_i$, quand les inégalités (43) ont lieu, on voit encore que, *sous les conditions admises dans le théorème précédent, les distances r_0, r_1 et r_2 sont développables en séries suivant les puissances croissantes de $t - \bar{t}$ qui convergent tant que t vérifie l'inégalité* (45).

Nous dirons, pour abréger, que *le mouvement est régulier* dans un intervalle donné, si les coordonnées des corps sont des fonctions holomorphes du temps dans cet intervalle.

III.

Détermination des différents cas qui peuvent se présenter, lorsque le mouvement cesse d'être régulier, pour une valeur réelle et finie de t.

6. Pour embrasser dans nos recherches le mouvement des trois corps depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = +\infty$, nous devons étudier le mouvement tant pour les valeurs positives de t, en faisant croître t de $t = 0$ à $t = +\infty$, que pour les valeurs négatives, en faisant décroître t de $t = 0$ à $t = -\infty$. Cependant nous pouvons nous borner à considérer les valeurs *positives* de t. En effet, les équations différentielles du mouvement et leurs intégrales (2), (3), (4) et (5) restant invariables lorsqu'on y change t, x'_i, y'_i, z'_i, c_0, c_1 et c_2 en $-t$, $-x'_i$, $-y'_i$, $-z'_i$, $-c_0$, $-c_1$ et $-c_2$, on voit que les résultats qu'on obtient pour les valeurs positives de t s'appliquent également aux valeurs négatives de t (puisqu'ils restent en vigueur lorsqu'on change les signes de x'_i, y'_i et z'_i à l'instant initial).

Lorsque t croît par des valeurs réelles depuis $t = 0$, ou bien le mouvement restera constamment régulier, quelque grand que soit t, ou bien l'une au moins des inconnues $x_i, y_i, \ldots$, cessera d'être régulière quand t tend vers une certaine valeur finie t_1. Nous allons étudier de plus près cette seconde hypothèse.

On a d'abord ce théorème connu:[1]

Si le mouvement est régulier dans l'intervalle de $t = 0$ à $t = t_1$, mais cesse de l'être à l'instant t_1, la plus petite des distances r_0, r_1, r_2 tend vers zéro quand t tend vers t_1.

En effet, si la plus petite des distances r_0, r_1, r_2 ne tendait pas vers zéro quand t tend vers l'instant t_1, on pourrait trouver une constante positive $\varkappa$, telle qu'on eût par exemple

$$r_0,\, r_1 \text{ et } r_2 > 14\varkappa$$

pour certaines valeurs de t comprises dans l'intervalle de $t_1 - \delta_1$ à t_1, et cela quelque petite que soit la constante positive δ_1. En identifiant cette quantité $\varkappa$ à la quantité $\varkappa$ du numéro précédent et en désignant par t' l'une des valeurs de l'intervalle de $t_1 - \delta_1$ à t_1 pour lesquelles les inégalités ci-dessus sont vérifiées, on conclut du théorème démontré plus haut que le mouvement serait régulier dans l'intervalle de t' à $t' + T$, ce qui implique une contradiction si l'on a choisi δ_1 de telle manière que $T > \delta_1$, d'où $t' + T > t_1$.

---

[1] Voir p. ex. P. Painlevé, l. c. page 585.

En vertu du théorème ci-dessus, on peut conclure de l'expression (6) de U que

$$\lim_{t=t_1} U = +\infty,$$

et il existe par conséquent une quantité positive δ_0, telle que

$$U - K > 0$$

pour chaque valeur de t comprise entre $t_1 - \delta_0$ et t_1. L'équation (23) nous montre dès lors que la dérivée $\frac{dR^2}{dt}$ va constamment en croissant lorsque t croît de $t_1 - \delta_0$ à t_1, et il existe par suite une quantité positive $\delta\,(\leqq \delta_0)$ telle que $\frac{dR^2}{dt}$ conserve le même signe et ne s'annule pas dans l'intervalle de $t_1 - \delta$ à t_1. Donc la quantité R^2 va constamment ou en croissant ou en décroissant dans l'intervalle de $t_1 - \delta$ à t_1, et tend par conséquent vers une limite déterminée, nulle ou positive, quand t tend vers t_1.

7. Si l'on a

$$\lim_{t=t_1} R^2 = 0, \tag{46}$$

il résulte de (21) que les trois distances r_0, r_1, r_2 tendent chacune vers zéro quand t tend vers t_1, et que par suite les trois corps se choquent à l'instant t_1 en un même point de l'espace. Dans ce cas, il est clair que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ sera négative dans l'intervalle de $t_1 - \delta$ à t_1.

Considérons d'autre part le cas où

$$\lim_{t=t_1} R^2 > 0.$$

Il existe alors deux constantes positives, k et δ_2, telles que l'inégalité

$$R^2 > k \tag{47}$$

ait lieu dans l'intervalle de $t_1 - \delta_2$ à t_1. Désignons pour un instant par r_m la plus petite des distances r_0, r_1, r_2. D'après le théorème du numéro précédent, on a

$$\lim_{t=t_1} r_m = 0,$$

et il existe par suite une quantité positive δ_3, telle que

$$r_m < \varepsilon \tag{48}$$

dans tout l'intervalle de $t_1 - \delta_3$ à t_1, la constante ε étant prise aussi petite qu'on voudra. Soit encore $\bar{\delta}$ la plus petite des constantes δ_2 et δ_3. Les inégalités (47) et (48) auront lieu simultanément dans l'intervalle de $t_1 - \bar{\delta}$ à t_1.

On démontre aisément que, dans l'intervalle de $t_1 - \bar{\delta}$ à t_1, r_m désigne une seule et même distance, si l'on a pris ε suffisamment petit.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il se trouverait dans cet intervalle un instant t' tel que r_m désignerait une certaine des distances r_0, r_1, r_2 avant et une autre après cet instant. Pour $t = t'$ ces deux distances seraient égales entre elles et par suite chacune $< \varepsilon$. La troisième distance, étant au plus égale à la somme des deux autres, serait par suite $< 2\varepsilon$.

Les trois distances r_0, r_1, r_2 étant ainsi toutes $< 2\varepsilon$ pour $t = t'$, on aurait, d'après (21),

$$R^2 < 4\varepsilon^2 \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right),$$

ce qui est visiblement en contradiction avec l'inégalité (47) si ε est pris suffisamment petit.

C'est par suite une seule et même distance qui tend vers zéro lorsque t tend vers t_1. En observant que cette distance est supérieure ou égale à la différence des deux autres, on déduit immédiatement de (21) et (47) que ces deux autres distances tendent vers la même limite positive.

En somme nous voyons donc que, *lorsque le mouvement cesse d'être régulier à un instant fini t_1, ou bien les trois corps se choquent tous en un même point de l'espace, ou bien deux des corps se choquent tandis que leurs distances au troisième tendent vers une limite plus grande que zéro.*

Cette proposition avait été établie d'une autre manière par M. PAINLEVÉ (loc. cit. page 586).

Nous n'étudierons pas dans ce travail le cas où les trois corps se choquent tous en un même point de l'espace à un instant fini. Au reste nous verrons que cela ne peut avoir lieu que dans le cas particulier où les constantes des aires c_0, c_1, c_2 sont toutes nulles. Les trois corps se meuvent alors constamment dans un même plan passant par leur centre commun de gravité. Quant à leur configuration au voisinage du choc, nous avons établi précédemment ce théorème.[1]

Si les trois corps se choquent en un même point de l'espace, ils tendront, à mesure qu'ils s'approchent, de plus en plus ou à former un triangle équilatéral, ou bien à se ranger en ligne droite de telle manière que les rapports de leurs distances tendent vers des limites déterminées.

---

[1] Recherches sur le problème des trois corps, page 26.

IV.

Cas où deux des corps se choquent à l'instant fini t_1, tandis que leurs distances au troisième tendent vers une limite plus grande que zéro.

8. Supposons que ce soient les corps P_0 et P_1 qui se choquent à l'instant fini t_1. Cette supposition ne restreint pas la généralité, car les cas où P_0 et P_2 ou bien P_1 et P_2 se choquent à l'instant t_1 résultent évidemment du premier par un simple changement d'indices.

En employant les coordonnées et les notations du n:o 2, on aura alors

$$\lim_{t=t_1} r = 0, \tag{49}$$

tandis qu'il existe une constante positive b, telle que

$$r_0 > b \quad \text{et} \quad r_1 > b \tag{50}$$

tant que t reste dans un certain intervalle

$$t_1 - \delta \leqq t < t_1. \tag{51}$$

En vertu des égalités (13) et (14), on tire aisément des équations (17)

$$\left|\frac{d^2\xi}{dt^2}\right|, \ \left|\frac{d^2\eta}{dt^2}\right| \ \text{et} \ \left|\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right| \leqq M\left(\frac{\lambda}{r_0^2} + \frac{\mu}{r_1^2}\right),$$

et on aura par suite, d'après (50),

$$\left|\frac{d^2\xi}{dt^2}\right|, \ \left|\frac{d^2\eta}{dt^2}\right| \ \text{et} \ \left|\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right| < \frac{M}{b^2}$$

quand t vérifie l'inégalité (51). En observant que, selon (19), les dérivées ξ', η' et ζ' ont des valeurs finies tant que r_0, r_1 et $r \equiv r_2$ sont plus grandes que zéro, il en résulte successivement que les quantités ξ', η', ζ', ξ, η, ζ, ϱ et ϱ' tendent vers des limites *finies* et *déterminées* lorsque t tend (par des valeurs réelles) vers t_1. Comme d'ailleurs

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 r^2}{dt^2} = x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \tag{52}$$

les équations (16) et (19) nous donnent

$$(53)\qquad \frac{d^2 r^2}{dt^2} = \frac{2(m_0 + m_1)}{r} - 2\bar{L},$$

où l'expression

$$(54)\qquad \bar{L} = \frac{h}{g}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + m_2 r^2 \left(\frac{\mu}{r_0^{\,3}} + \frac{\lambda}{r_1^{\,3}}\right) + m_2 (x\xi + y\eta + z\zeta)\left(\frac{1}{r_1^{\,3}} - \frac{1}{r_0^{\,3}}\right) - \\ - \frac{2m_2}{\mu r_0} - \frac{2m_2}{\lambda r_1} + \frac{K}{g},$$

d'après ce que nous venons de trouver, tendra vers une limite *finie* et *déterminée* lorque t tend vers t_1. Le second membre de l'équation (53) sera donc, en vertu de (49), plus grand que zéro quand t passe de $t_1 - \delta'$ à t_1, si l'on a choisi $\delta' (\leqq \delta)$ suffisamment petit.

On en conclut que *la dérivée* $\frac{dr^2}{dt}$ *croît avec* t *dans l'intervalle de* $t_1 - \delta'$ *à* t_1. Mais cette dérivée ne peut pas être $\geqq 0$ pour une valeur $t = t'$ de cet intervalle, puisqu'elle serait alors positive dans l'intervalle de t' à t_1, de sorte que la quantité positive r^2 devrait croître quand t croît de $t = t'$ à $t = t_1$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse (49). Il en résulte que *la dérivée* $\frac{dr^2}{dt}$ *est négative dans l'intervalle de* $t_1 - \delta'$ *à* t_1 et que, par suite, r *diminue constamment quand* t *passe de* $t_1 - \delta'$ *à* t_1.

9. Multiplions maintenant l'équation (19) par r et faisons tendre t vers t_1. En ayant égard à (6), (49), (50) et en observant que ξ', η', ζ' tendent vers des limites finies, nous obtenons

$$(55)\qquad \lim_{t=t_1} r\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = 2(m_0 + m_1),$$

et par suite, en vertu de (29),

$$(56)\qquad \lim_{t=t_1}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \lim_{t=t_1}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \lim_{t=t_1}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \lim_{t=t_1} r\frac{dr}{dt} = 0.$$

Or les équations (16) donnent

$$(57)\qquad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = m_2(x\eta - y\xi)\left(\frac{1}{r_0^{\,3}} - \frac{1}{r_1^{\,3}}\right) = m_2(r_1 - r_0)\frac{x\eta - y\xi}{r_0}\left(\frac{1}{r_1^{\,3}} + \frac{1}{r_0 r_1^{\,2}} + \frac{1}{r_0^{\,2} r_1}\right).$$

On a

$$x\eta - y\xi = x(\eta - \mu y) - y(\xi - \mu x),$$

et comme, d'après (13) et (15),

$$|x| \text{ et } |y| \leqq r,$$

$$|\xi - \mu x| \text{ et } |\eta - \mu y| \leqq r_0,$$

on en conclut

$$|x\eta - y\xi| \leqq 2 r r_0,$$

d'où suit, en vertu de (50),

$$\left|\frac{x\eta - y\xi}{r_0}\left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_0 r_1^2} + \frac{1}{r_0^2 r_1}\right)\right| \leqq \frac{6r}{b^3}.$$

En observant encore que $|r_1 - r_0| \leqq r$, on peut donc tirer de (57) l'égalité suivante

(58) $$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{6 m_2 \psi_0}{b^3} r^2, \qquad (t_1 - \delta' \leqq t < t_1),$$

où la quantité ψ_0 satisfait à l'inégalité

(59) $$|\psi_0| \leqq 1.$$

En intégrant, on en conclut

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)_{t=t'} + \int_{t'}^{t} \frac{6 m_2 \psi_0}{b^3} r^2 dt, \qquad (t_1 - \delta' \leqq t \leqq t' < t_1),$$

ou encore, puisque r diminue constamment lorsque t passe de $t_1 - \delta'$ à t_1,

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)_{t=t'} + \psi'_0 r^2 (t - t'),$$

où

(60) $$|\psi'_0| \leqq \frac{6 m_2}{b^3}.$$

Faisons tendre t' vers t_1; nous aurons, en vertu de (56),

(61) $$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \psi'_0 r^2 (t_1 - t), \qquad (t_1 - \delta' \leqq t < t_1),$$

et, en considérant les expressions

$$y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2} \text{ et } z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2},$$

nous trouverons par un calcul analogue

$$(62)\qquad \begin{cases} y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}=\psi'_1 r^2(t_1-t), \\ z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}=\psi'_2 r^2(t_1-t), \end{cases} \qquad (t_1-\delta'\leqq t<t_1),$$

où les quantités ψ'_1 et ψ'_2 vérifient les inégalités

$$(63)\qquad |\psi'_1|\leqq\frac{6m_2}{b^3} \text{ et } |\psi'_2|\leqq\frac{6m_2}{b^3}.$$

10. Nous déduirons dans ce numéro les valeurs limites, pour $t=t_1$, de certaines expressions que nous aurons à considérer dans la suite.

En différentiant le quotient $\frac{x}{r}$, on trouve aisément

$$\frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{dt}=\frac{1}{r^3}\left[z\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)-y\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\right],$$

d'où résulte, d'après (61) et (62)

$$(64)\qquad \frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{dt}=\psi'(t_1-t), \qquad (t_1-\delta'\leqq t<t_1),$$

où

$$(65)\qquad |\psi'|\leqq\frac{12\,m_2}{b^3}.$$

De l'égalité (64) on conclut que $\frac{x}{r}$ tend vers une valeur déterminée lorsque t tend vers t_1, et d'une manière analogue on trouve qu'il en est de même des quotients $\frac{y}{r}$ et $\frac{z}{r}$. Nous pouvons par suite écrire

$$(66)\qquad \lim_{t=t_1}\frac{x}{r}=\varphi, \quad \lim_{t=t_1}\frac{y}{r}=\chi, \quad \lim_{t=t_1}\frac{z}{r}=\psi,$$

φ, χ et ψ désignant des constantes réelles qui vérifient évidemment l'égalité

$$\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = 1. \tag{67}$$

Les égalités (66) expriment analytiquement le postulat de M. BISCONCINI dont nous avons parlé dans l'introduction, et qui se trouve ainsi démontré.

Introduisons maintenant les expressions (61) et (62) dans l'équation (29). En faisant ensuite tendre t vers t_1, on trouve

$$\lim_{t=t_1} r\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \lim_{t=t_1} r\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

et, d'après (55),

$$\lim_{t=t_1} r\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2(m_0 + m_1), \tag{68}$$

d'où suit encore, en observant que r diminue quand t tend en croissant vers t_1,

$$\lim_{t=t_1} \sqrt{r}\,\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2(m_0 + m_1)}. \tag{69}$$

Multiplions par $-y$ l'équation (61) et par z la dernière des équations (62); en ajoutant les égalités ainsi obtenues, on trouve

$$r^2\frac{dx}{dt} = xr\frac{dr}{dt} + Nr^3(t_1 - t),$$

où N désigne une quantité qui reste finie quand t tend vers t_1. Au moyen des égalités (66) et (69) on en tire la première des égalités

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{t=t_1} \sqrt{r}\,\frac{dx}{dt} = -\varphi\sqrt{2(m_0 + m_1)}, \\ &\lim_{t=t_1} \sqrt{r}\,\frac{dy}{dt} = -\chi\sqrt{2(m_0 + m_1)}, \\ &\lim_{t=t_1} \sqrt{r}\,\frac{dz}{dt} = -\psi\sqrt{2(m_0 + m_1)}, \end{aligned}\right. \tag{70}$$

dont les deux dernières s'obtiennent d'une manière semblable.

V.

Introduction d'une nouvelle variable indépendante u.

11. Nous introduirons maintenant au lieu de t une nouvelle variable u définie par l'équation

$$dt = r\,du, \qquad (t = t_0 \text{ pour } u = 0), \tag{71}$$

d'où suit

$$u = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r} \tag{71 bis}$$

ou

$$t - t_0 = \int_0^u r\,du, \tag{71 ter}$$

t_0 désignant une constante réelle que nous fixerons d'une manière convenable chaque fois que cette variable u sera employée.

En posant

$$x' = \frac{dx}{du}, \quad y' = \frac{dy}{du}, \quad z' = \frac{dz}{du}, \quad r' = \frac{dr}{du}, \tag{72}$$

ou bien

$$x' = r\frac{dx}{dt}, \quad y' = r\frac{dy}{dt}, \quad z' = r\frac{dz}{dt}, \quad r' = r\frac{dr}{dt}, \tag{72 bis}$$

les équations (16) et (19) donnent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx'}{du} &= \frac{r'}{r}x' - \frac{(m_0+m_1)x}{r} + r^2 X, \\ \frac{dy'}{du} &= \frac{r'}{r}y' - \frac{(m_0+m_1)y}{r} + r^2 Y, \\ \frac{dz'}{du} &= \frac{r'}{r}z' - \frac{(m_0+m_1)z}{r} + r^2 Z, \end{aligned}\right. \tag{73}$$

$$g(x'^2 + y'^2 + z'^2) + hr^2(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = r^2(2U - K). \tag{74}$$

Multiplions ces quatre équations par $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}, \frac{1}{g r}$ et faisons la somme; nous obtiendrons, après quelques réductions,

$$\frac{d r'}{d u} = m_0 + m_1 + r L, \tag{75}$$

où

$$L = x X + y Y + z Z + \frac{2 m_2 (m_0 + m_1)}{m_0 r_0} + \frac{2 m_2 (m_0 + m_1)}{m_1 r_1} - \frac{h}{g}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - \frac{K}{g}. \tag{76}$$

Posons encore

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{r'}{r} x' - \frac{(m_0 + m_1) x}{r}, \\ \beta &= \frac{r'}{r} y' - \frac{(m_0 + m_1) y}{r}, \\ \gamma &= \frac{r'}{r} z' - \frac{(m_0 + m_1) z}{r}. \end{aligned}\right. \tag{77}$$

En différentiant ces expressions et en faisant usage des égalités (73) et (75), on trouve

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{du} &= X r r' + L x', \\ \frac{d\beta}{du} &= Y r r' + L y', \\ \frac{d\gamma}{du} &= Z r r' + L z'. \end{aligned}\right. \tag{78}$$

Cela posé, les équations (15), (16), (17), (19), (71), ou, ce qui revient au même, les équations (1), (2), (5), (8) et (71) peuvent être remplacées par les équations simultanées suivantes

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{dr}{du} = r', & \frac{dr'}{du} = m_0 + m_1 + r L, & \frac{dt}{du} = r, \\ \frac{dx}{du} = x', & \frac{dx'}{du} = \alpha + r^2 X, & \frac{d\alpha}{du} = X r r' + L x', \\ \frac{dy}{du} = y', & \frac{dy'}{du} = \beta + r^2 Y, & \frac{d\beta}{du} = Y r r' + L y', \end{array}\right. \tag{79}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dz}{du} = z', & \dfrac{dz'}{du} = \gamma + r^2 Z, & \dfrac{d\gamma}{du} = Zrr' + Lz', \\ \dfrac{d\xi}{du} = r\xi', & \dfrac{d\eta}{du} = r\eta', & \dfrac{d\zeta}{du} = r\zeta', \\ \dfrac{d\xi'}{du} = r\Xi, & \dfrac{d\eta'}{du} = rH, & \dfrac{d\zeta'}{du} = r\Pi. \end{array}\right.$$

Ces dix-huit équations entre les dix-huit inconnues

$$(I) \qquad r, r', t, x, x', \alpha, y, y', \beta, z, z', \gamma, \xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta',$$

déterminent ces inconnues, si l'on donne leurs valeurs pour une certaine valeur de u.

Soit t_0 une valeur quelconque de l'intervalle $0 \leqq t < t_1$ et désignons par (I_0) les valeurs des quantités (I) pour $t = t_0$. Les distances r_0, r_1, r_2 étant supérieures à zéro pour $t = t_0$, les variables du n:o 1 et par conséquent aussi les inconnues (I) sont développables suivant les puissances de $t - t_0$, si $|t - t_0|$ est suffisamment petit. En vertu du théorème de CAUCHY, cité au n:o 4, on conclut alors de l'équation (71) que la variable t est elle-même développable en série suivant les puissances de u quand $|u|$ est plus petit qu'une certaine valeur. En substituant pour t cette série dans les expressions des inconnues (I), on obtiendra évidemment des fonctions (I) de la variable u qui vérifient les équations (79). On a ainsi une solution de ces équations où les inconnues (I) sont holomorphes et admettent pour $u = 0$ les mêmes valeurs qu'elles avaient pour $t = t_0$.

Mais, d'après le théorème de CAUCHY, le système (79) n'a qu'une seule solution telle que les inconnues soient holomorphes pour $u = 0$ et admettent pour $u = 0$ des valeurs données. Si l'on cherche directement la solution des équations (79) correspondant aux valeurs initiales (I_0) pour $u = 0$, on retombera donc sur celle que nous venons de déduire de la solution donnée des équations (1). D'ailleurs, r étant > 0 pour $t = t_0$, il résulte de l'égalité (71) que u est aussi développable en série suivant les puissances de $t - t_0$ quand $|t - t_0|$ est assez petit, et, en substituant cette expression de u dans la solution du système, on retrouvera la solution des équations (1) d'où nous sommes partis.

Pour la recherche des quantités (I) on pourra donc chaque fois employer celui des systèmes (1) ou (79) ou (16) et (17) qui présente les plus grands avantages. La distance r n'entrant pas en dénominateur dans les seconds membres des équations (79), ce système sera en général préférable quand r devient petit par rapport aux deux autres distances.

12. Le système (79) est évidemment plus général que le système des équations (16) et (17) d'où nous sommes partis, et qui est équivalent au système des équations (1), (2) et (3). Il n'est donc pas sans intérêt de faire voir par une méthode directe que, en choisissant les valeurs initiales (I_0) que doivent prendre les inconnues (I) pour $u = 0$ de telle façon qu'elles vérifient à la fois les égalités (77) et les égalités

$$(80)\quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad\qquad r r' = x x' + y y' + z z', \\ \dfrac{g}{r^2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + h(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 2M\left(\dfrac{1}{m_0 r_0} + \dfrac{1}{m_1 r_1} + \dfrac{1}{m_2 r}\right) - K, \end{cases}$$

[*cf.* l'égalité (19)], où K est la même constante qui figure explicitement dans le système (79), à savoir dans l'expression L, et en introduisant, dans la solution du système (79) qui correspond à ces valeurs initiales, t comme variable indépendante au lieu de u, on aura effectivement une solution de notre problème où la constante des forces vives est égale à K.

On constate d'abord aisément que le système (79) admet les intégrales

$$r\left(\alpha - \frac{r'}{r}x' + \frac{(m_0 + m_1)x}{r}\right) = \bar{\alpha},$$

$$r\left(\beta - \frac{r'}{r}y' + \frac{(m_0 + m_1)y}{r}\right) = \bar{\beta},$$

$$r\left(\gamma - \frac{r'}{r}z' + \frac{(m_0 + m_1)z}{r}\right) = \bar{\gamma}.$$

Comme les valeurs initiales (I_0) vérifient les égalités (77), les constantes $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ sont toutes nulles, et, puisque r ne s'annule pas identiquement, il s'ensuit que les égalités (77) sont vérifiées quel que soit u.

En éliminant α, β et γ entre (77) et (79), on retrouve les équations (73), lesquelles, lorsqu'on introduit t au lieu de u comme variable indépendante, se ramènent aux équations (16). De même, si, dans les équations qui figurent dans les deux dernières lignes de (79), on rétablit t comme variable indépendante, on retrouve les égalités (17).

Il nous reste seulement à faire voir que la quantité r, qui figure parmi les inconnues du système (79), ainsi que la constante K, qui entre dans le même système, ont bien la même signification que dans les égalités (16), (17) et (19). A cet effet, nous posons

$$(81)\quad \begin{cases} W = rr' - xx' - yy' - zz', \\ G = \dfrac{g}{r^2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + h(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - 2M\left(\dfrac{1}{m_0 r_0} + \dfrac{1}{m_1 r_1} + \dfrac{1}{m_2 r}\right) + K. \end{cases}$$

A l'aide des égalités (13), (14) et (76) qui définissent r_0, r_1 et L, on conclut facilement de (79) que les quantités W et G vérifient les équations linéaires

$$(82)\quad \begin{cases} \dfrac{dW}{du} = -\dfrac{r^3}{g} G + \dfrac{r'}{r} W, \\ \dfrac{dG}{du} = \dfrac{2M}{m_2 r^3} W. \end{cases}$$

Puisque les valeurs initiales (I_0) vérifient par hypothèse les égalités (80), W et G s'annulent pour $u = 0$. Or les équations (82) n'admettent qu'une seule solution jouissant de cette propriété, qui est évidemment la solution

$$W \equiv 0, \quad G \equiv 0.$$

Donc W et G s'annulent identiquement ou, ce qui revient au même, l'équation (74) et l'équation

$$(83)\quad rr' = xx' + yy' + zz'$$

subsistent pour toutes les valeurs de u ou de t.

De l'égalité (83) on conclut en intégrant que la différence

$$r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

garde une valeur constante, et, puisqu'elle s'annule par hypothèse pour $u = 0$, elle est identiquement nulle, de sorte que l'inconnue r satisfait bien à l'égalité (15).

En introduisant enfin dans l'équation (74) t comme variable indépendante au lieu de u, on retrouve l'égalité (19), d'où l'on conclut que K désigne bien la constante des forces vives de la solution des équations (16) et (17) qui coïncide avec la solution considérée du système (79).

VI.

Étude du cas où l'une des distances est petite par rapport aux deux autres.

13. Supposons maintenant que le mouvement soit régulier dans l'intervalle $0 \leqq t < t_1$, t_1 désignant un instant *fini*, et adoptons les variables du n:o 11. Soient[1]

$$(K_1) \qquad \begin{gathered} (r)_1,\ (r_0)_1,\ (r_1)_1,\ (r')_1,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ x'_1,\ y'_1,\ z'_1, \\ \varrho_1,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \xi'_1,\ \eta'_1,\ \zeta'_1,\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1, \end{gathered}$$

les valeurs vers lesquelles tendent les quantités

$$(K) \qquad \begin{gathered} r \equiv r_2,\ r_0,\ r_1,\ r',\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z', \\ \varrho,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \xi',\ \eta',\ \zeta',\ \alpha,\ \beta,\ \gamma, \end{gathered}$$

quand t tend par des valeurs réelles vers t_1. Il est évident que les quantités (K_1) sont *finies* si le mouvement est régulier pour $t = t_1$, et nous verrons dans le numéro 14 qu'il en est de même dans le cas où un choc se produit à l'instant t_1.

Admettons de plus que

$$(84) \qquad (r)_1 < \frac{\varkappa_1}{2}$$

et

$$(85) \qquad \varrho_1 \geqq 14\varkappa_1,$$

$\varkappa_1$ désignant une constante positive dont nous déterminerons plus tard la valeur. Nous nous plaçons donc dans le cas où la distance $r \equiv r_2$ est petite par rapport aux deux autres r_0 et r_1.

Nous allons d'abord démontrer que *la variable u tend vers une limite finie u_1 lorsque t tend vers t_1.*

Cela est évident, d'après (71 *bis*), dans le cas où $(r)_1 > 0$, puisque la limite inférieure de r dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq t_1$ est alors positive (on pourra prendre pour t_0 une valeur quelconque comprise dans l'intervalle $0 \leqq t < t_1$).

Si $(r)_1 = 0$, nous retombons sur le cas étudié aux n:os 8, 9 et 10, où la distance $r \equiv r_2$ tend vers zéro quand t tend vers t_1, les deux autres distances r_0

[1] Les quantités x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1 employées ici ne doivent pas être confondues avec les quantités du n:o 1.

et r_1 tendant vers une valeur plus grande que zéro. L'équation (69) ayant alors lieu, il existe une constante $\delta''(<\delta')$ telle qu'on ait par exemple

$$\sqrt{r}\,\frac{dr}{dt} < -\sqrt{m_0+m_1} \tag{86}$$

pendant que t passe de $t_1-\delta''$ à t_1. Ecrivons maintenant l'intégrale (71 *bis*) sous la forme

$$u = \int_{t_0}^{t_1-\delta''} \frac{dt}{r} + \int_{t_1-\delta''}^{t} \frac{dt}{r}.$$

La dérivée $\frac{dr}{dt}$ étant constamment négative quand t passe de $t_1-\delta''$ à t_1, on pourra, dans la seconde intégrale, introduire r comme variable au lieu de t, et, en tenant compte de (86), on trouve ainsi

$$\int_{t_1-\delta''}^{t} \frac{dt}{r} < \int_{r}^{r''} \frac{1}{\sqrt{m_0+m_1}}\,\frac{dr}{\sqrt{r}} = \frac{2}{\sqrt{m_0+m_1}}\left(\sqrt{r''}-\sqrt{r}\right),$$

où r'' désigne la valeur de r pour $t=t_1-\delta''$. Cette inégalité montre que l'intégrale qui figure au premier membre tend vers une valeur *finie* quand t tend vers t_1 ou bien r vers zéro. L'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1-\delta''} \frac{dt}{r}$$

étant finie, u tendra donc bien vers une limite finie, comme nous l'avions affirmé.

14. Nous voulons maintenant faire voir que les inconnues (I) des équations (79) et par suite aussi les quantités (K) sont développables suivant les puissances de $u-u_1$, et déterminer une limite inférieure des rayons de convergence de ces développements. A cet effet nous devons d'abord trouver des limites supérieures des valeurs que prennent, pour $t=t_1$, les inconnues (I) ainsi que les modules des seconds membres des équations (79).

Supposons en premier lieu que $(r)_1 > 0$. Par des considérations géométriques simples, on voit que

$$(r_0)_1 \text{ et } (r_1)_1 > \varrho_1 - (r)_1,$$

d'où résulte, en vertu des hypothèses (84) et (85),

$$(r_0)_1 \text{ et } (r_1)_1 > \frac{27}{2} \varkappa_1$$

et par suite

$$\frac{M}{m_0 (r_0)_1} + \frac{M}{m_1 (r_1)_1} < \frac{2 M (m_0 + m_1)}{27 m_0 m_1 \varkappa_1}.$$

En posant

(87) $$\mathcal{A}_1 = \frac{m_2 (m_0 + m_1)^2}{27 m_0 m_1 \varkappa_1} + \frac{|K|}{4g},$$

on conclut dès lors de (6) et (74) l'inégalité

$$x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1 < 2 (r)_1 [m_0 + m_1 + 2 \mathcal{A}_1 (r)_1],$$

d'où suit

$$|x'_1|, |y'_1|, |z'_1| \text{ et } |(r')_1| < \sqrt{2 (r)_1 [m_0 + m_1 + 2 \mathcal{A}_1 (r)_1]}$$

et, d'après (77),

$$|\alpha_1|, |\beta_1| \text{ et } |\gamma_1| < 3 (m_0 + m_1) + 4 \mathcal{A}_1 (r)_1.$$

En vertu de l'hypothèse (84), on aura par suite les inégalités

(88) $$|x'_1|, |y'_1|, |z'_1| \text{ et } |(r')_1| < \sqrt{\varkappa_1 (m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 \varkappa_1)},$$

(89) $$|\alpha_1|, |\beta_1| \text{ et } |\gamma_1| < 3 (m_0 + m_1) + 2 \mathcal{A}_1 \varkappa_1,$$

ainsi que

(90) $$|x_1|, |y_1| \text{ et } |z_1| < \frac{\varkappa_1}{2}.$$

Considérons maintenant le cas où $(r)_1 = 0$ pour $t = t_1$. On a alors

(91) $$x_1 = y_1 = z_1 = (r)_1 = 0$$

et, d'après (69), (70) et (72 *bis*),

(92) $$x'_1 = y'_1 = z'_1 = r'_1 = 0,$$

et enfin, d'après (66), (69), (70), (72 *bis*) et (77),

$$(93)\qquad \alpha_1 = (m_0 + m_1)\varphi, \quad \beta_1 = (m_0 + m_1)\chi, \quad \gamma_1 = (m_0 + m_1)\psi,$$

d'où il suit que les inégalités (88), (89) et (90) sont vérifiées aussi dans l'hypothèse actuelle.

Cherchons maintenant des limites supérieures des modules des seconds membres des équations (79), en admettant que les inconnues (I) vérifient les conditions

$$(94)\qquad \begin{cases} |r-(r)_1|,\ |x-x_1|,\ |y-y_1|,\ |z-z_1|,\ |\xi-\xi_1|,\ |\eta-\eta_1| \text{ et } |\zeta-\zeta_1| < \dfrac{\varkappa_1}{2}, \\ |r'-(r')_1|,\ |x'-x'_1|,\ |y'-y'_1| \text{ et } |z'-z'_1| < k', \\ |\xi'-\xi'_1|,\ |\eta'-\eta'_1| \text{ et } |\zeta'-\zeta'_1| < \varkappa', \\ |\alpha-\alpha_1|,\ |\beta-\beta_1| \text{ et } |\gamma-\gamma_1| < \bar{\varkappa}; \qquad |t-t_1| < \tau'. \end{cases}$$

Les constantes k', $\varkappa'$, $\bar{\varkappa}$ et τ' sont des quantités finies et positives, dont nous fixerons plus tard les valeurs.

On trouve, d'après (13),

$$\begin{aligned} r_0^2 = \varrho_1^2 &+ 2\xi_1[(\xi-\xi_1) - \mu(x-x_1) - \mu x_1] + [(\xi-\xi_1) - \mu(x-x_1) - \mu x_1]^2 \\ &+ 2\eta_1[(\eta-\eta_1) - \mu(y-y_1) - \mu y_1] + [(\eta-\eta_1) - \mu(y-y_1) - \mu y_1]^2 \\ &+ 2\zeta_1[(\zeta-\zeta_1) - \mu(z-z_1) - \mu z_1] + [(\zeta-\zeta_1) - \mu(z-z_1) - \mu z_1]^2, \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire

$$(95)\qquad r_0^2 = \varrho_1^2 + P_1,$$

P_1 étant un polynome par rapport aux variables

$$x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1,\ \xi-\xi_1,\ \eta-\eta_1,\ \zeta-\zeta_1,\ x_1, y_1 \text{ et } z_1.$$

En observant que

$$(96)\qquad |\xi_1|,\ |\eta_1| \text{ et } |\zeta_1| \leqq \varrho_1,$$

on constate, en vertu des inégalités (90) et (94), que

$$|P_1| < 12\varrho_1\varkappa_1 + 12\varkappa_1^2,$$

d'où il suit, d'après (85),

$$|P_1| < \frac{45}{49}\varrho_1^2.$$

D'après le calcul qui précède, cette inégalité aura lieu encore si, dans le polynome P_1, on remplace chaque terme par sa valeur absolue, et on voit donc que, sous les conditions (84), (85) et (94), le quotient $\frac{1}{r_0}$ est développable suivant les puissances des différences $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$, $\xi-\xi_1$, $\eta-\eta_1$ et $\zeta-\zeta_1$. De l'égalité (95) et de la dernière inégalité ci-dessus il résulte d'ailleurs aisément qu'on a, dans les mêmes conditions,

$$|r_0| > \frac{2}{7}\varrho_1, \tag{97}$$

ou encore, d'après (85),

$$|r_0| > 4\varkappa_1. \tag{98}$$

En partant de l'équation (14), on conclut d'une manière analogue que r_1 vérifie l'inégalité

$$|r_1| > \frac{2}{7}\varrho_1 \tag{99}$$

ou encore

$$|r_1| > 4\varkappa_1, \tag{100}$$

et que $\frac{1}{r_1}$ est développable suivant les puissances des différences $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$, $\xi-\xi_1$, $\eta-\eta_1$, $\zeta-\zeta_1$ du moins tant que les inégalités (84), (85) et (94) ont lieu.

Les seconds membres des équations (79) étant des polynomes de $\frac{1}{r_0}$, $\frac{1}{r_1}$ et des inconnues (I), nous pouvons donc affirmer qu'ils sont certainement développables suivant les puissances des différences $r-(r)_1$, $x-x_1, \ldots$, si les conditions (84), (85) et (94) sont vérifiées.

Les conditions (84), (85) et (94) entraînent encore les inégalités suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\frac{\xi}{r_0^3}\right|, \left|\frac{\eta}{r_0^3}\right|, \left|\frac{\zeta}{r_0^3}\right|, \left|\frac{\xi}{r_1^3}\right|, \left|\frac{\eta}{r_1^3}\right| \text{ et } \left|\frac{\zeta}{r_1^3}\right| < \frac{15}{64\varkappa_1^2}, \\ &\left|\frac{x}{r_0^3}\right|, \left|\frac{y}{r_0^3}\right|, \left|\frac{z}{r_0^3}\right|, \left|\frac{x}{r_1^3}\right|, \left|\frac{y}{r_1^3}\right| \text{ et } \left|\frac{z}{r_1^3}\right| < \frac{1}{64\varkappa_1^2}, \end{aligned}\right. \tag{101}$$

dont nous avons besoin pour calculer une limite supérieure des modules des seconds membres des équations (79).

Démontrons par exemple la première des inégalités (101). Il résulte de (94) et (85),

$$\xi - \xi_1 < \varkappa_1 \leqq \frac{1}{14}\varrho_1,$$

d'où suit, en vertu de (96), $|\xi| < \frac{15}{14}\varrho_1$, ou encore, d'après (97),

$$\left|\frac{\xi}{r_0^3}\right| < \frac{735}{16\varrho_1^2},$$

et par suite, en vertu de l'hypothèse (85),

$$\left|\frac{\xi}{r_0^3}\right| < \frac{15}{64\varkappa_1^2}.$$

Les autres inégalités qui figurent dans la première ligne de (101) se démontrent d'une manière analogue.

Les inégalités de la seconde ligne de (101) résultent immédiatement des inégalités (98) et (100), en observant qu'on a, d'après (90) et (94),

$$(102) \qquad |x|,\ |y| \text{ et } |z| < \varkappa_1.$$

Cela posé, en remontant aux définitions (16), (17), (76) des quantités X, Y, Z, Ξ, H, Π, L, on déduit des résultats (98), (100), (101), (102) et des conditions (94), par un calcul très simple, les inégalités suivantes

$$(103) \qquad \begin{cases} |X|,\ |Y| \text{ et } |Z| < \dfrac{m_2}{2\varkappa_1^2}, \\ |\Xi|,\ |H| \text{ et } |\Pi| < \dfrac{M}{2\varkappa_1^2}, \\ \qquad |L| < \lambda_1, \end{cases}$$

où

$$(104) \quad \lambda_1 = \frac{m_2}{2\varkappa_1}\left(3 + \frac{(m_0+m_1)^2}{m_0 m_1}\right) + \frac{m_2(m_0+m_1)^2}{M m_0 m_1}(V_1^2 + 6V_1\varkappa' + 3\varkappa'^2) + \frac{m_2(m_0+m_1)}{M}|K|,$$

la vitesse V_1 étant donnée par la formule

$$(105) \qquad V_1 = \sqrt{\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2}.$$

Cette quantité V_1 est certainement finie, ce qui résulte de l'égalité (74) dans le cas où $(r)_1 > 0$, et des résultats du n:o 8 dans le cas où $(r)_1 = 0$.

Comme d'ailleurs, d'après (84), (88), (89), (94) et (105),

$$|r| < \varkappa_1,$$
$$|x'|,\ |y'|,\ |z'| \text{ et } |r'| < k' + \sqrt{\varkappa_1(m_0 + m_1 + \varDelta_1\varkappa_1)},$$
$$|\xi'|,\ |\eta'| \text{ et } |\zeta'| < V_1 + \varkappa',$$
$$|\alpha|,\ |\beta| \text{ et } |\gamma| < \bar{\varkappa} + 3(m_0 + m_1) + 2\varDelta_1\varkappa_1,$$

les inégalités (103) entraînent les suivantes

$$|m_0 + m_1 + rL| < m_0 + m_1 + \lambda_1\varkappa_1,$$
$$|\alpha + r^2X|,\ |\beta + r^2Y| \text{ et } |\gamma + r^2Z| < \bar{\varkappa} + \frac{m_2}{2} + 3(m_0 + m_1) + 2\varDelta_1\varkappa_1,$$
$$|Xrr' + Lx'|,\ |Yrr' + Ly'| \text{ et } |Zrr' + Lz'| < \left(\lambda_1 + \frac{m_2}{2\varkappa_1}\right)\left[k' + \sqrt{\varkappa_1(m_0 + m_1 + \varDelta_1\varkappa_1)}\right],$$
$$|r\xi'|,\ |r\eta'| \text{ et } |r\zeta'| < \varkappa_1(V_1 + \varkappa'),$$
$$|r\Xi|,\ |rH| \text{ et } |r\Pi| < \frac{M}{2\varkappa_1}.$$

En remontant au système (79), on en conclut que les quantités qui, dans le cas que nous considérons ici, correspondent aux quotients $\frac{q'_1}{Q'_1}, \frac{q'_2}{Q'_2}, \ldots, \frac{q'_n}{Q'_n}$ du théorème du n:o 4, sont plus grandes que la plus petite des quantités

$$\frac{\varkappa_1}{2\left[k' + \sqrt{\varkappa_1(m_0 + m_1 + \varDelta_1\varkappa_1)}\right]},\quad \frac{k'}{m_0 + m_1 + \lambda_1\varkappa_1},\quad \frac{k'}{\bar{\varkappa} + \frac{m_2}{2} + 3(m_0 + m_1) + 2\varDelta_1\varkappa_1},$$

$$\frac{\bar{\varkappa}}{\left(\lambda_1 + \frac{m_2}{2\varkappa_1}\right)\left[k' + \sqrt{\varkappa_1(m_0 + m_1 + \varDelta_1\varkappa_1)}\right]},\quad \frac{1}{2(V_1 + \varkappa')},\quad \frac{2\varkappa_1\varkappa'}{M},\quad \frac{\tau'}{\varkappa_1}.$$

Pour simplifier, nous donnerons à τ' une valeur telle que $\frac{\tau'}{\varkappa_1}$ soit plus grand que les autres quotients, et nous choisirons pour k', $\varkappa'$ et $\bar{\varkappa}$ les valeurs

$$(106)\qquad k' = \sqrt{\varkappa_1(m_0 + m_1 + \varDelta_1\varkappa_1)},\quad \varkappa' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{\varkappa_1}},\quad \bar{\varkappa} = m_0 + m_1 + \varDelta_1\varkappa_1.$$

Les expressions ci-dessus se présentent alors sous la forme

$$(107)\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\varkappa_1(m_0+m_1+\varLambda_1\varkappa_1)}}{4(m_0+m_1+\varLambda_1\varkappa_1)}, & \dfrac{\sqrt{\varkappa_1(m_0+m_1+\varLambda_1\varkappa_1)}}{m_0+m_1+\lambda_1\varkappa_1}, \quad \dfrac{\sqrt{\varkappa_1(m_0+m_1+\varLambda_1\varkappa_1)}}{\dfrac{m_2}{2}+4(m_0+m_1)+3\varLambda_1\varkappa_1}, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{\varkappa_1(m_0+m_1+\varLambda_1\varkappa_1)}}{2\lambda_1\varkappa_1+m_2}, & \dfrac{1}{2V_1+\sqrt{\dfrac{M}{\varkappa_1}}}, \quad \sqrt{\dfrac{\varkappa_1}{M}}. \end{cases}$$

En désignant par Q'_2 la plus petite de ces quantités, le théorème de CAUCHY cité au n:o 4 nous permet dès lors d'affirmer:

1) *que, dans la solution des équations* (79) *qui se déduit de la solution donnée des équations* (1), *les inconnues* (I) *ou plus généralement les quantités* (K) *sont développables en séries suivant les puissances croissantes de* $u - u_1$;

2) *que ces séries convergent tant que*

$$|u - u_1| < Q'_2, \tag{108}$$

3) *que les inégalités* (94) *auront lieu tant que* u *vérifie l'inégalité* (108).

VII.

Définition d'une continuation réelle du mouvement après un choc.

15. Considérons maintenant plus en détail le cas déjà traité au n:o 8, où l'une des distances tend vers zéro et où l'on a

$$\lim_{t=t_1} R = R_1,$$

R_1 étant une quantité positive. En supposant toujours que ce soit la distance $r \equiv r_2$ qui tend vers zéro, on aura, d'après (21 *bis*),

$$\varrho_1 = \frac{R_1}{\sqrt{h}},$$

et en posant

$$\varkappa_1 = \frac{R_1}{14\sqrt{h}},$$

les inégalités (84) et (85) auront lieu, de sorte que nous nous trouvons dans le cas traité aux n:os 13 et 14. En vertu des résultats obtenus plus haut, les inconnues (I) seront donc développables en séries suivant les puissances de $(u-u_1)$. A l'aide des égalités (91), (92), (93), et en observant que

$$(r_0)_1 = (r_1)_1 = \varrho_1,$$

on calcule sans peine les premiers termes de ces séries; on trouve ainsi:

$$(109)\quad \left\{\begin{array}{ll} \xi = \xi_1 + \dfrac{m_0+m_1}{6}\xi'_1(u-u_1)^3+\cdots, & \xi' = \xi'_1 - \dfrac{M(m_0+m_1)}{6\varrho_1^3}\xi_1(u-u_1)^3+\cdots, \\ \eta = \eta_1 + \dfrac{m_0+m_1}{6}\eta'_1(u-u_1)^3+\cdots, & \eta' = \eta'_1 - \dfrac{M(m_0+m_1)}{6\varrho_1^3}\eta_1(u-u_1)^3+\cdots, \\ \zeta = \zeta_1 + \dfrac{m_0+m_1}{6}\zeta'_1(u-u_1)^3+\cdots, & \zeta' = \zeta'_1 - \dfrac{M(m_0+m_1)}{6\varrho_1^3}\zeta_1(u-u_1)^3+\cdots, \\ \alpha = \alpha_1+\cdots, \quad \beta = \beta_1+\cdots, & \gamma = \gamma_1+\cdots, \\ x = \dfrac{m_0+m_1}{2}\varphi(u-u_1)^2+\cdots, & x' = (m_0+m_1)\varphi(u-u_1)+\cdots, \\ y = \dfrac{m_0+m_1}{2}\chi(u-u_1)^2+\cdots, & y' = (m_0+m_1)\chi(u-u_1)+\cdots, \\ z = \dfrac{m_0+m_1}{2}\psi(u-u_1)^2+\cdots, & z' = (m_0+m_1)\psi(u-u_1)+\cdots, \\ r = \dfrac{m_0+m_1}{2}(u-u_1)^2+\cdots, & r' = (m_0+m_1)(u-u_1)+\cdots, \end{array}\right.$$

$$(110)\qquad t-t_1 = \frac{m_0+m_1}{6}(u-u_1)^3+\cdots,$$

tous les coefficients ayant des valeurs *réelles*. Ces séries convergent tant que u vérifie l'inégalité (108).

De la dernière équation on peut tirer $u-u_1$ sous forme d'une série suivant les puissances entières et positives de $(t-t_1)^{\frac{1}{3}}$, et, en substituant cette série au lieu de $u-u_1$ dans les formules (109), on trouve que les quantités ξ, η, $\zeta, \ldots$ sont aussi toutes développables suivant les puissances entières et positives de $(t-t_1)^{\frac{1}{3}}$, du moins tant que $|t-t_1|$ reste plus petit qu'une certaine quantité positive ε. Les quantités u, ξ, $\eta, \ldots$, considérées comme fonctions de t, admettent donc $t=t_1$ comme un point singulier algébrique autour duquel se permutent circulairement trois branches de chacune de ces fonctions.

Par les séries ainsi obtenues nous pouvons, en particulier, calculer les valeurs des quantités r, x, $y, \ldots$ dans le mouvement considéré pour chaque valeur réelle de t comprise dans l'intervalle de $t_1-\varepsilon$ à t_1.

Mais ces mêmes séries nous permettront encore de définir une continuation du mouvement de nos corps après le choc. La seule continuation réelle s'obtient évidemment en choisissant la détermination réelle et positive de $(t-t_1)^{\frac{1}{3}}$. La valeur de cette expression étant réelle et négative pour les orbites primitives, on voit donc que, pour passer de celles-ci aux nouvelles orbites, il faudra faire décrire à la variable complexe t un chemin tournant autour du point t_1 de telle manière que l'argument de $t-t_1$ augmente ou diminue de 3π. D'ailleurs, si l'on prend pour variable u au lieu de t, les nouvelles orbites seront évidemment représentées par les développements (109) en y faisant $u-u_1>0$.

D'après le principe du prolongement analytique, les coordonnées des corps vérifieront encore pour $t>t_1$ les équations différentielles du mouvement et leurs intégrales premières, de sorte que la constante des forces vives et celles des aires garderont les valeurs qu'elles avaient avant le choc. De même, l'égalité (15) restera constamment vérifiée, et comme, d'après (109), la quantité r est positive après le choc, on voit qu'elle représentera toujours la distance P_0P_1.

Il résulte des développements (109) que les rapports $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ tendent vers les mêmes limites φ, χ, ψ (qu'on peut supposer différentes de zéro, en orientant convenablement les axes des coordonnées) lorsque t tend vers t_1, soit en croissant, soit en décroissant. On voit donc que les orbites des corps P_0 et P_1 présenteront chacune un point de rebroussement au point où ces corps viennent se choquer. Au contraire l'orbite du corps P_2 restera continue dans le voisinage de l'instant t_1 du choc. Les orbites que décrivent ainsi les corps après le choc se rattachent du reste d'une façon continue aux orbites qu'on obtient en faisant varier d'une façon continue les valeurs initiales des coordonnées et des composantes des vitesses de ces corps de façon à faire passer les corps tout près les uns des autres sans se heurter.

Il va sans dire que, lorsque nous parlons de la continuation du mouvement après un choc, nous supposons qu'il s'agisse de corps idéaux qui se réduisent à des points matériels, sans quoi, dans le voisinage de l'instant t_1, d'autres forces que leur attraction mutuelle entreraient en jeu.

16. Puisque les coordonnées de nos points idéaux vérifient encore pour $t>t_1$ les équations (1)—(5), les résultats obtenus plus haut resteront vrais aussi pour le mouvement après le choc, qui, en particulier, ne cessera d'être régulier que lorsque survient un nouveau choc. Supposons que ceci ait lieu à l'instant t_2; nous nous proposons de chercher une limite inférieure de l'intervalle t_2-t_1.

D'après le théorème démontré au n:o 14, les inégalités (94) auront lieu tant que $|u-u_1|<Q'_2$, et, comme les inégalités (84), (85) et (94) entraînent les inégalités (98) et (100), il s'ensuit que les distances r_0 et r_1 sont >0 quand $|u-u_1|<Q'_2$. Si un choc a lieu après l'instant t_1 durant que $|u-u_1|<Q'_2$, ce sera par suite la distance r qui deviendra nulle.

Faisons croître u par des valeurs réelles à partir de la valeur u_1; il suit des deux premières des équations (79) que r et r', partant tous les deux de la valeur 0, iront constamment en croissant, du moins tant que $m_0+m_1+rL>0$. Mais, selon (103), on a $|L|<\lambda_1$ tant que les égalités (94) sont vérifiées, ce qui a lieu par exemple quand $u-u_1\leqq\frac{1}{2}Q'_2$. Pour les valeurs de r satisfaisant à l'inégalité

$$r\leqq\frac{m_0+m_1}{2\lambda_1}=\lambda_2,$$

nous aurons donc

$$\frac{3}{2}(m_0+m_1)>m_0+m_1+rL>\frac{1}{2}(m_0+m_1),$$

du moins tant que $u-u_1\leqq\frac{1}{2}Q'_2$. Des équations

$$\frac{dr'}{du}=m_0+m_1+rL,$$

$$\frac{dr}{du}=r',\quad \frac{dt}{du}=r$$

on tire alors successivement les inégalités

$$\frac{3}{2}(m_0+m_1)(u-u_1)>r'>\frac{1}{2}(m_0+m_1)(u-u_1),$$

$$\text{(111)}\qquad \frac{3}{4}(m_0+m_1)(u-u_1)^2>r>\frac{1}{4}(m_0+m_1)(u-u_1)^2,$$

$$\text{(112)}\qquad t-t_1>\frac{1}{12}(m_0+m_1)(u-u_1)^3,$$

qui sont valables tant qu'on a simultanément

$$r\leqq\lambda_2\quad\text{et}\quad u-u_1\leqq\frac{1}{2}Q'_2.$$

On aura à distinguer deux cas, suivant que l'une ou l'autre de ces inégalités cesse la première d'être vérifiée quand u croît depuis u_1.

Premier cas: $0 < r < \lambda_2$ quand $0 < u - u_1 \leqq \frac{1}{2} Q'_2$. L'intervalle $t_2 - t_1$ étant certainement plus grand que l'accroissement de t lorsque u croît de u_1 à $u_1 + \frac{1}{2} Q'_2$, on conclut de l'inégalité (112) que

$$t_2 - t_1 > \frac{1}{96}(m_0 + m_1) Q'^3_2.$$

Second cas: $r = \lambda_2$ pour $u - u_1 = \sigma \left(\leqq \frac{1}{2} Q'_2\right)$, tandis que $0 < r < \lambda_2$ pour $0 < u - u_1 < \sigma$.

En mettant $r = \lambda_2$ et $u - u_1 = \sigma$ dans l'inégalité (111), on trouve

$$\sigma^2 > \frac{4\lambda_2}{3(m_0 + m_1)}$$

ou, en substituant à λ_2 sa valeur,

$$\sigma^2 > \frac{2}{3\lambda_1}.$$

La valeur de t pour $u = u_1 + \sigma$ satisfera par conséquent, d'après (112), à l'inégalité

$$t - t_1 > \frac{m_0 + m_1}{18\lambda_1} \sqrt{\frac{2}{3\lambda_1}},$$

qui sera à plus forte raison vérifiée pour $t = t_2$.

En résumé nous pouvons affirmer que *l'intervalle de temps entre les deux chocs considérés est supérieur à la plus petite des quantités*

$$\frac{m_0 + m_1}{96} Q'^3_2 \quad et \quad \frac{m_0 + m_1}{18\lambda_1} \sqrt{\frac{2}{3\lambda_1}}. \tag{113}$$

On aurait des résultats analogues si c'était la distance r_0 ou la distance r_1 qui s'annule quand t tend vers t_1.

17. Lorsqu'on fait croître t au delà de la valeur t_1, le mouvement que nous venons de définir au n:o 15 ou restera constamment régulier, ou bien cessera d'être régulier lorsque t tend vers une certaine valeur finie t_2. Comme au n:o 7 on démontre que, dans ce dernier cas, ou les trois corps se choquent tous en un

même point de l'espace à l'instant t_2, ou bien deux des corps se choquent tandis que leurs distances au troisième tendent vers une limite supérieure à zéro. Si l'on suppose que la quantité R tend vers une valeur *positive* R_2 quand t tend vers t_2, c'est ce dernier cas qui aura lieu, et, en procédant comme aux n:os 11—15, on pourra alors définir une continuation réelle du mouvement des trois corps idéaux au delà de l'instant t_2 qui constitue un vrai prolongement analytique de celui que nous avions défini pour $t_1 < t < t_2$, et par suite aussi du mouvement primitif.

On pourra ainsi continuer le mouvement après chaque nouveau choc, à condition que la quantité R ne s'annule pas.

Dès lors, deux cas sont a priori possibles: ou bien le procédé décrit ci-dessus permet de définir de proche en proche le mouvement *pour toutes les valeurs de* t; ou bien les valeurs t pour lesquelles on peut définir le mouvement par notre procédé admettent *une limite supérieure finie* $\bar{t}$. Nous allons chercher la condition pour que cette dernière circonstance puisse se présenter.

Il est d'abord clair que nous ne pouvons pas continuer le mouvement après un instant $\bar{t}$ auquel les trois corps se choquent tous en un même point. Dans ce cas, on a

$$\lim_{t=\bar{t}} R = 0, \tag{114}$$

et il résulte du raisonnement des n:os 6 et 7 qu'il existe une quantité positive δ telle que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ est constamment négative dans l'intervalle de $\bar{t} - \delta$ à $\bar{t}$.

Mais la circonstance en question pourrait se réaliser encore d'une autre manière. Supposons, en effet, qu'il se produise une infinité de chocs successifs deux à deux entre les trois corps, et que les valeurs correspondantes

$$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_\nu, \ldots$$

de la variable t tendent vers la limite finie $\bar{t}$:

$$\lim_{\nu=\infty} t_\nu = \bar{t}. \tag{115}$$

Il est évident que notre procédé de continuation ne nous permet pas de dépasser l'instant $\bar{t}$. Nous allons voir que l'égalité (114) a lieu aussi dans ce cas, et qu'elle constitue ainsi la condition cherchée.

18. Supposons donc qu'on ait l'égalité (115), $\bar{t}$ étant fini. Le mouvement cesse nécessairement d'être régulier pour $t = \bar{t}$. Il s'ensuit d'abord que *la plus petite des distances r_0, r_1, r_2 tend vers zéro quand t tend vers $\bar{t}$*, ce qu'on démontre par un raisonnement identique à celui du n:o 6. Comme dans ce numéro, on en conclut successivement que $U - K > 0$, que la dérivée $\frac{d^2 R^2}{dt^2}$ est positive et, par suite, la dérivée $\frac{dR^2}{dt}$ croissante dans un certain intervalle $\bar{t} - \delta_0 < t < \bar{t}$, d'où il suit encore que la quantité R^2 variera constamment dans le même sens pour $\bar{t} - \delta < t < \bar{t}$, si δ est suffisamment petit, et qu'elle tendra par conséquent vers une limite déterminée, positive ou nulle, lorsque t tend vers $\bar{t}$.[1]

Si nous démontrons que cette limite de R ne peut être positive, nous aurons établi que l'hypotèse (115) entraîne comme conséquence l'égalité (114), et, en même temps, que $\frac{dR}{dt}$ *est négative dans l'intervalle de $\bar{t} - \delta$ à $\bar{t}$.*

Admettons un moment qu'on ait

$$\lim_{t=\bar{t}} R > 0.$$

En raisonnant mot à mot comme au n:o 7 (à cela près qu'on remplace t_1 par $\bar{t}$), on démontre *qu'une seule et même distance tend vers zéro quand t tend vers $\bar{t}$, tandis que les deux autres tendent vers la même limite positive.*

Admettons encore, pour fixer les notations, que ce soit la distance $r \equiv r_2$ qui tend vers zéro, de sorte qu'on aura

$$\lim_{t=\bar{t}} r = 0 \tag{116}$$

et

$$\lim_{t=\bar{t}} r_0 = \lim_{t=\bar{t}} r_1 = \lim_{t=\bar{t}} \varrho > k, \tag{117}$$

k désignant une constante positive. Il s'ensuit qu'il existe une quantité positive

---

[1] Il faut observer que, dans le mouvement de nos corps idéaux que nous avons défini pour $t < \bar{t}$, les coordonnées de ces corps, et par suite aussi leurs distances et la quantité R sont des fonctions continues de t. De plus la dérivée $\frac{dR^2}{dt} = 2gr\frac{dr}{dt} + 2h\rho\frac{d\rho}{dt}$ reste continue aussi au voisinage d'un choc. Le fait que la dérivée seconde $\frac{d^2R^2}{dt^2}$ devient infinie aux instants de choc n'a alors aucune influence sur le raisonnement du texte.

b telle que les inégalités (50) ont lieu tant que t reste dans un certain intervalle $\bar{t}-\delta \leqq t < \bar{t}$. Comme au n:o 8, on en conclut que

$$\left|\frac{d^2\xi}{dt^2}\right|, \quad \left|\frac{d^2\eta}{dt^2}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right| < \frac{M}{b^2}$$

dans cet intervalle, et que ξ', η', ζ', ξ, η, ζ, ϱ' et ϱ tendent vers des limites *finies* et *déterminées* quand t tend vers $\bar{t}$. La vitesse

$$V = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}$$

tendant donc aussi vers une limite finie et déterminée quand t tend vers $\bar{t}$, on pourra trouver une constante $\bar{V}$ telle qu'on ait

$$V < \bar{V} \quad \text{pour} \quad \bar{t} - \delta' \leqq t < \bar{t},$$

δ' désignant une constante positive convenablement choisie.

D'autre part, d'après les relations (116) et (117), on peut trouver une quantité positive $\varkappa_1$ telle que

$$r < \frac{\varkappa_1}{2} \quad \text{et} \quad \varrho \geqq 14\,\varkappa_1$$

tant que t vérifie l'inégalité

$$\bar{t} - \delta'' \leqq t < \bar{t},$$

δ'' désignant une constante positive. Soit $\bar{\delta}$ la plus petite des quantités δ' et δ'' et désignons pour un moment par t_1 l'instant d'un choc quelconque qui a lieu entre $\bar{t}-\bar{\delta}$ et $\bar{t}$. En adoptant les notations des n:os 13 et suivants, il est des lors évident que les inégalités (84) et (85) seront vérifiés et que la quantité V_1 [*voir* la formule (105)] satisfera à l'inégalité

$$V_1 < \bar{V}.$$

En écrivant dans les expressions (104) et (107) $\bar{V}$ au lieu de V_1, on obtiendra une valeur $\bar{\lambda}_1$ de λ_1 et une valeur $\bar{Q}'_2$ de Q'_2 qui satisfont aux inégalités

$$\bar{\lambda}_1 > \lambda_1, \quad \bar{Q}'_2 < Q'_2,$$

d'où suivent encore les inégalités

$$\frac{m_0+m_1}{96}Q'^3_2 > \frac{m_0+m_1}{96}\bar{Q}'^3_2, \quad \frac{m_0+m_1}{18\,\lambda_1}\sqrt{\frac{2}{3\,\lambda_1}} > \frac{m_0+m_1}{18\,\bar{\lambda}_1}\sqrt{\frac{2}{3\,\bar{\lambda}_1}}.$$

Or les résultats du n:o 16 s'appliquent également à l'intervalle compris entre l'instant t_1 considéré ci-dessus et l'instant du premier choc qui a lieu après t_1. Cet intervalle est par suite plus grand que la plus petite des quantités (113). En désignant par j la plus petite des quantités

$$\frac{m_0+m_1}{96}\bar{Q}'^3_2 \quad \text{et} \quad \frac{m_0+m_1}{18\,\bar{\lambda}_1}\sqrt{\frac{2}{3\,\bar{\lambda}_1}},$$

nous pouvons donc conclure des dernières inégalités ci-dessus que l'intervalle de temps entre deux chocs successifs quelconques qui ont lieu dans l'intervalle de $\bar{t}-\bar{\delta}$ à $\bar{t}$ est supérieur à j, de sorte que le nombre de ces chocs sera nécessairement plus petit que le quotient $\frac{\bar{\delta}}{j}$. Or cette conclusion est en contradiction avec la supposition (115). Donc l'hypothèse

$$\lim_{t=\bar{t}} R > 0$$

doit être rejetée, d'où cette conclusion:

Si l'égalité (115) *a lieu, la condition* (114) *est nécessairement aussi vérifiée.*

En résumant nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Le procédé décrit aux n:os 15 *et* 17 *permet de continuer le mouvement jusqu'à ce qu'on trouve une valeur $\bar{t}$ telle que*

$$\lim_{t=\bar{t}} R = 0.$$

De plus, s'il existe une telle valeur $\bar{t}$, on peut déterminer la quantité positive δ de manière que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ soit constamment négative dans l'intervalle de $\bar{t}-\delta$ à $\bar{t}$.

Nous verrons dans la suite qu'un tel instant $\bar{t}$ ne saurait exister que dans le cas particulier où les constantes des aires sont nulles toutes les trois.

VIII.

Non-existence d'un instant fini $\bar{t}$ tel que $\lim\limits_{t=\bar{t}} R = 0$ dans le cas où les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois.

19. Dès maintenant nous écarterons constamment de nos considérations le cas particulier des trois corps où les constantes des aires sont nulles toutes les trois. Nous supposerons donc que la quantité

$$f = \frac{M}{m_0 m_1 m_2} \sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2} \tag{118}$$

vérifie l'inégalité

$$f > 0. \tag{119}$$

Cela posé, nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

Lemme: *Soient R' (> 0), H' et R'' (> 0), H'' les valeurs que prennent les fonctions R et*

$$H = R\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + KR + \frac{f^2}{R} \tag{120}$$

pour $t = t'$ et $t = t''$. Si la dérivée $\frac{dR}{dt}$ ne change pas de signe dans l'intervalle de t' à t'', on aura

$$H'' \geqq H' \quad ou \quad H'' \leqq H'$$

suivant que

$$R'' > R' \quad ou \quad R'' < R'.$$

D'après l'expression (33), la quantité P est supérieure ou égale à la somme des trois expressions

$$\frac{g}{r^2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{h}{\varrho^2}(\xi\eta' - \eta\xi')^2,$$

$$\frac{g}{r^2}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{h}{\varrho^2}(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2,$$

$$\frac{g}{r^2}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{h}{\varrho^2}(\zeta\xi' - \xi\zeta')^2.$$

Mais, à l'aide de la première des équations (18), on trouve, après quelques réductions,

$$\frac{g}{r^2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{h}{\varrho^2}(\xi\eta'-\eta\xi')^2=\frac{hR^2}{gr^2\varrho^2}\left(\xi\eta'-\eta\xi'-\frac{gh\varrho^2}{R^2}c_0\right)^2+\frac{g^2h^2}{R^2}c_0^{\,2},$$

d'où

$$\frac{g}{r^2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{h}{\varrho^2}(\xi\eta'-\eta\xi')^2\geqq\left(\frac{ghc_0}{R}\right)^2=\left(\frac{Mc_0}{m_0m_1m_2R}\right)^2,$$

et, en faisant usage des deux autres équations (18), on trouve de même

$$\frac{g}{r^2}\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{h}{\varrho^2}(\eta\zeta'-\zeta\eta')^2\geqq\left(\frac{Mc_1}{m_0m_1m_2R}\right)^2,$$

$$\frac{g}{r^2}\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)^2+\frac{h}{\varrho^2}(\zeta\xi'-\xi\zeta')^2\geqq\left(\frac{Mc_2}{m_0m_1m_2R}\right)^2,$$

de sorte que la somme des trois expressions en question est elle-même supérieure ou égale à

$$\left(\frac{M}{m_0m_1m_2R}\right)^2(c_0^{\,2}+c_1^{\,2}+c_2^{\,2})=\frac{f^2}{R^2},$$

d'où résulte enfin qu'on peut écrire

(121) $$P=\frac{f^2}{R^2}+F,$$

la fonction F vérifiant l'inégalité

(122) $$F\geqq 0.$$

En substituant cette valeur de P dans l'équation (34), on obtient l'égalité

$$2R\frac{d^2R}{dt^2}+\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+K-\frac{f^2}{R^2}=F,$$

qui, multipliée par $\frac{dR}{dt}dt$ et intégrée entre les limites t' et t'', nous donne

$$H''-H'=\int_{t'}^{t''}F\frac{dR}{dt}dt,$$

ou encore, puisque par hypothèse la dérivée $\frac{dR}{dt}$ ne change pas de signe dans l'intervalle de t' à t'',

$$H'' - H' = \int_{R'}^{R''} F\, dR,$$

d'où résulte immédiatement notre lemme.

20. Supposons maintenant que R tend vers zéro quand t tend vers la valeur *finie* $\bar{t}$. D'après le théorème énoncé à la fin du n:o 18, il existe alors une quantité positive δ telle que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ soit constamment négative dans l'intervalle de $\bar{t} - \delta$ à $\bar{t}$.

Soit t' un instant entre $\bar{t} - \delta$ et $\bar{t}$ auquel le mouvement est régulier. Comme à cet instant R et $\frac{dR}{dt}$ sont finis et $R > 0$, il suit de l'égalité (120) que la fonction H admet également une valeur *finie* H' pour $t = t'$.

Soit encore t'' une valeur quelconque de t comprise entre t' et $\bar{t}$ et R'' la valeur correspondante de R. La dérivée $\frac{dR}{dt}$ étant négative dans l'intervalle de t' à t'', on aura

$$R'' < R',$$

et par suite, d'après le lemme du n:o 19,

$$H'' \leqq H'.$$

Puisque, d'après (120),

$$\frac{f^2}{R''} + K R'' \leqq H'',$$

on en conclut que l'inégalité

$$\frac{f^2}{R''} + K R'' \leqq H'$$

ubsiste pour toute valeur t'' comprise entre t' et $\bar{t}$.

Cela posé, en faisant tendre t'' vers $\bar{t}$, la quantité R'' tendra vers zéro, d'après notre hypothèse, et le premier membre de l'inégalité ci-dessus tendra donc vers l'infini, puisque $f^2 > 0$. Comme H' est fini, cette inégalité implique donc une contradiction dès que la valeur t'' est suffisamment rapprochée de $\bar{t}$. Donc l'hypothèse admise au début de ce numéro doit être rejetée, ce qui donne le théorème suivant:

Si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, la quantité R ne saurait tendre vers zéro lorsque t tend vers une valeur finie $\bar{t}$.

En vertu du théorème obtenu au n:o 18, il s'ensuit que, *si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, la méthode dont nous nous sommes servi plus haut pour continuer le mouvement de nos corps idéaux après un choc ne sera jamais en défaut, et nous permettra donc de définir leur mouvement pour des valeurs de t aussi grandes qu'on voudra.*

D'après ce que nous avons dit au commencement du n:o 6, on voit immédiatement que tous les résultats que nous avons obtenus en faisant croître t depuis $t = 0$ sont encore valables si l'on fait décroître t depuis $t = 0$ vers $-\infty$. En particulier, nous pouvons continuer le mouvement avant des chocs éventuels, de sorte que le mouvement des corps sera bien déterminé aussi pour les valeurs de temps comprise entre 0 et $-\infty$.

IX.

Détermination d'une limite inférieure de R dans le cas où les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois.

21. Soit maintenant t' une valeur quelconque *réelle* et *finie* de t. Comme nous supposons que les constantes des aires ne sont pas toutes nulles, il résulte de ce qui précède que R admet nécessairement pour $t = t'$ une valeur R' qui est *finie* et *plus grande que zéro*, et que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ admet de même une valeur *finie* $\frac{dR'}{dt}$ pour $t = t'$, qu'un choc se produise ou non à l'instant t'. La fonction H admet donc aussi pour $t = t'$ une valeur finie H'.

Cela posé, cherchons comment se comporte la quantité R dans le voisinage de l'instant t'.

Si R n'a pas un minimum pour $t = t'$, on trouvera certainement, avant ou après t', un instant t'' tel que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ conserve le même signe et que R soit inférieur à R' dans l'intervalle de t' à t''. D'après le lemme du n:o 19, on aura alors

$$H'' \leqq H'$$

ou

$$R'' \left(\frac{dR''}{dt}\right)^2 + K R'' + \frac{f^2}{R''} \leqq H',$$

d'où suit

$$\frac{f^2}{R''} \leqq H' - K R'' \leqq H' + |K| R'$$

ou bien

$$R'' \geqq \frac{f^2}{H' + |K| R'}. \tag{123}$$

Faisons varier t'' de manière que la valeur absolue de $t'' - t'$ augmente. L'inégalité (123) restera valable jusqu'à ce que t'' passe par une valeur, soit $\bar{t}$, où $\frac{dR}{dt}$ change de signe. R admet alors un minimum pour $t = \bar{t}$ et augmentera lorsque $|t'' - t'|$ continue à croître. L'inégalité (123) sera par suite vraie aussi pour $|t'' - t'| > |\bar{t} - t'|$ tant que R croît avec $|t'' - t'|$, c'est à dire du moins jusqu'au moment où R passe par un maximum.

Si R' est précisément une valeur minima de R, de sorte que $\frac{dR'}{dt} = 0$, l'égalité

$$H' = R' \left(\frac{dR'}{dt}\right)^2 + K R' + \frac{f^2}{R'}$$

nous donne

$$R' \geqq \frac{f^2}{H' + |K| R'}.$$

On aura donc encore l'inégalité (123), du moins jusqu'au moment où R passe par un maximum. On est ainsi conduit à ce

Théorème: *Si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, on a*

$$R \geqq \frac{f^2}{H' + |K| R'} \tag{124}$$

dans chaque intervalle de temps qui comprend t' et où R n'admet pas de maximum, sauf peut-être pour $t = t'$.

Si $K \leqq 0$, l'équation (23) montre que la dérivée $\frac{d^2 R^2}{dt^2}$ n'est jamais négative, d'où l'on conclut que R n'a pas de maximum. On sait d'ailleurs que, dans ce cas, R tend vers l'infini quand t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, et notre théorème donne par suite une limite inférieure de R qui reste valable pour tous les temps. Il en est de même lorsque $K > 0$, pourvu que R ne présente pas de maximum pour les valeurs finies de t. Pour déterminer la limite en question, nous pouvons faire par exemple $t' = 0$, et notre résultat peut alors se résumer comme il suit:

Théorème: *En désignant par R° et $\frac{dR^\circ}{dt}$ les valeurs de R et $\frac{dR}{dt}$ pour $t = 0$, on aura toujours*

$$R \geqq \frac{f^2 R^\circ}{\left(R^\circ \frac{dR^\circ}{dt}\right)^2 + f^2}$$

si $K \leqq 0$, et

$$R \geqq \frac{f^2 R^\circ}{\left(R^\circ \frac{dR^\circ}{dt}\right)^2 + 2 K R^{\circ 2} + f^2}$$

si $K > 0$ et si R ne présente pas de maximum pour des valeurs finies de t.

Nous ferons voir dans les numéros suivants que, dans le cas où $K > 0$ et où R admet du moins un maximum pour une valeur finie du temps, on peut encore trouver une limite inférieure de R valable pour tous les temps et qui ne dépend que de f et K.

22. Considérons donc le cas où

$$K > 0 \tag{125}$$

et admettons que R passe par un maximum R' pour $t = t'$, de sorte qu'on aura

$$\frac{dR'}{dt} = 0 \tag{126}$$

et par suite

$$H' = K R' + \frac{f^2}{R'}.$$

Comme R' est un maximum, il existe certainement dans le voisinage de t' un instant t'' tel que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ ne change pas de signe et que $R < R'$ dans l'intervalle de t' à t''. D'après le lemme du n:o 19 on aura alors

$$R''\left(\frac{dR''}{dt}\right)^2 + KR'' + \frac{f^2}{R''} \leqq KR' + \frac{f^2}{R'},$$

d'où il suit successivement

$$K(R' - R'') \geqq f^2\left(\frac{1}{R''} - \frac{1}{R'}\right),$$

$$K \geqq \frac{f^2}{R'R''}, \quad KR'^2 > f^2,$$

et enfin

$$\frac{f^2}{R'} < f\sqrt{K}.$$

On aura donc

$$H' < f\sqrt{K} + KR',$$

et, en faisant usage du premier théorème du numéro précédent, on en conclut que *l'inégalité*

$$R > \frac{f^2}{f\sqrt{K} + 2KR'} \tag{127}$$

a lieu depuis le maximum de R qui précède immédiatement le maximum R' jusqu'au premier maximum qui le suit.

Cette limite inférieure de R deviendrait de plus en plus petite si, t tendant vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, on rencontrait des maxima R' de plus en plus grands. Nous verrons cependant qu'on peut trouver une limite positive *fixe* qui reste valable quelque grand que soit le maximum considéré R'.

23. Remarquons d'abord que, en vertu de l'égalité (19), on a toujours

$$2U - K \geqq 0$$

ou bien

$$\frac{1}{m_0 r_0} + \frac{1}{m_1 r_1} + \frac{1}{m_2 r_2} \geqq \frac{K}{2M},$$

d'où l'on tire, en désignant comme plus haut par r_m la plus petite des distances r_i,

$$\frac{1}{r_m}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) \geqq \frac{K}{2M}$$

ou encore

$$r_m \leqq q,$$

en posant

$$q=\frac{2M}{K}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right). \tag{128}$$

En général, le mouvement se passe de telle sorte que tantôt l'une tantôt l'autre des trois distances r_i est la plus petite. Mais, puisque les r_i sont des fonctions continues du temps, il est évident que chaque fois qu'une certaine distance cesse d'être la plus petite, elle deviendra égale à une autre distance, de sorte qu'elles seront toutes les deux $\leqq q$. La troisième distance étant alors $\leqq 2q$, on voit donc que, au moment considéré, toutes les distances sont $< q\sqrt{5}$ (limite trop élevée mais choisie de manière à simplifier les formules), et que par suite

$$R < R_0,$$

où R_0 désigne la racine positive de l'équation

$$R_0^2 = 5q^2\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right). \tag{129}$$

Nous pouvons en conclure que, *dans un intervalle de temps où $R \geqq R_0$, une seule et même distance reste constamment $< q$.*

24. Considérons le mouvement pendant un intervalle de temps où l'inégalité

$$R \geqq R_0 \tag{130}$$

est constamment vérifiée, et admettons, ce qui ne restreint pas la généralité, que ce soit la distance r_2 qui, dans cet intervalle, reste inférieure à q. En employant les coordonnées et les notations des n:os 2 et 3, nous aurons alors

$$r < q. \tag{131}$$

Avant d'aller plus loin nous voulons déduire de (130) et (131) quelques autres inégalités dont nous aurons besoin, et fixer une certaine valeur $\bar{R}_0$ de la quantité R qui jouera un rôle important dans la suite.

A cet effet, nous déterminerons d'abord une constante positive σ par la condition

$$R_0^2 = (g + \sigma^2 h)\, q^2, \tag{129 bis}$$

g et h étant définis par les égalités (10). En rapprochant cette égalité de l'égalité (129), on trouve pour σ^2 l'expression

$$\sigma^2 = 4 + \frac{4\, m_0 m_1}{m_2 (m_0 + m_1)} + \frac{m_0^2 + m_0 m_1 + m_1^2}{(m_0 + m_1)^2}, \tag{132}$$

d'où

$$\sigma > 2. \tag{133}$$

Nous aurons alors, d'après les formules (21 *bis*), (130), (129 *bis*) et (131),

$$\varrho > \sigma q, \tag{134}$$

d'où il suit, selon (131),

$$r < \frac{\varrho}{\sigma}, \tag{135}$$

et, comme $r_0 > \varrho - r$, $r_1 > \varrho - r$, on en conclut pour r_0 et r_1 les inégalités

$$\begin{cases} r_0 > \dfrac{\sigma - 1}{\sigma}\, \varrho > (\sigma - 1)\, q, \\ r_1 > \dfrac{\sigma - 1}{\sigma}\, \varrho > (\sigma - 1)\, q. \end{cases} \tag{136}$$

De même, l'équation (21 *bis*), qui peut s'écrire

$$h \varrho^2 = R^2 - g r^2,$$

nous donne pour ϱ l'inégalité

$$\varrho \leqq \frac{R}{\sqrt{h}} \tag{137}$$

et d'autre part, en remarquant qu'on a, d'après (129 *bis*), (130) et (131),

$$g r^2 < g q^2 = \frac{g R_0^2}{g + \sigma^2 h} \leqq \frac{g R^2}{g + \sigma^2 h},$$

l'inégalité

(138) $$\varrho > e\frac{R}{\sqrt{h}},$$

où la constante

(139) $$e = \sqrt{\frac{\sigma^2 h}{g + \sigma^2 h}}$$

est plus petite que 1.

Cela posé, nous allons définir la constante $\overline{R}_0$ par l'égalité

(140) $$\overline{R}_0 = \frac{R_0}{e},$$

d'où il résulte que $\overline{R}_0 > R_0$.

En désignant par ϱ_0, $\bar{\varrho}_0$ les valeurs de ϱ correspondant respectivement aux valeurs R_0 et $\overline{R}_0$ de R, on aura alors, d'après (137) et (138),

$$\varrho_0 \leqq \frac{R_0}{\sqrt{h}}, \quad \bar{\varrho}_0 > e\frac{\overline{R}_0}{\sqrt{h}},$$

et par suite $\bar{\varrho}_0 > \varrho_0$. On en conclut que *tout intervalle de temps dans lequel R décroît de $\overline{R}_0$ à R_0, renferme un instant $\bar{t}$ où l'inégalité*

$$\frac{d\varrho}{dt} < 0$$

est vérifiée.

$\overline{R}$, $\bar{\varrho}, \ldots$ désignant les valeurs que prennent R, $\varrho, \ldots$ pour un tel instant $\bar{t}$, on aura dès lors, d'après les inégalités démontrées ci-dessus,

(141) $$\frac{d\bar{\varrho}}{dt} < 0,$$

(142) $$R_0 \leqq \overline{R} \leqq \overline{R}_0,$$

(143) $$e^2\frac{\overline{R}_0}{\sqrt{h}} < \bar{\varrho} \leqq \frac{\overline{R}_0}{\sqrt{h}}.$$

25. Les équations différentielles du mouvement restant invariables lorsqu'on change t en $-t$ ainsi que le signe de toutes les dérivées premières, on voit aisément que les limites inférieures indépendantes de t qu'on trouve pour R *après* un maximum seront aussi valables *avant* ce même maximum.

Étudions donc les valeurs de R *après* un moment t' où R passe par un maximum R'. Pour la démonstration il nous sera nécessaire de diviser les maxima en trois classes, suivant la grandeur du maximum R' et celle du minimum R'' qui le suit immédiatement.

A la première classe nous rapporterons les maxima qui vérifient la condition

$$R' \leqq \bar{R}_0.$$

D'après le résultat du n:o 22, on aura

$$R > \frac{f^2}{f\sqrt{K} + 2K\bar{R}_0}$$

depuis l'instant t' où R passe par un tel maximum jusqu'au premier maximum qui le suit.

La seconde classe comprendra les maxima pour lesquels

$$R' > \bar{R}_0 \quad \text{et} \quad R'' \geqq R_0.$$

D'après la définition même, on aura dans ce cas

$$R \geqq R_0$$

depuis l'instant t' jusqu'au premier maximum de R qui se présente après t'.

Enfin, les maxima de la troisième classe satisfont aux inégalités

$$R' > \bar{R}_0 \quad \text{et} \quad R'' < R_0.$$

Ils seront étudiés de plus près dans la suite.

26. Considérons donc un maximum de cette troisième classe. R diminuera constamment de $R' (> \bar{R}_0)$ jusqu'à une valeur de R inférieure à R_0. Nous supposerons de plus que c'est la distance r_2 qui est petite quand $R > R_0$. D'après ce que nous avons trouvé à la fin du n:o 24, il existe alors un moment $\bar{t}\ (> t')$ où ont lieu les inégalités (141), (142) et (143).

Pour trouver une limite inférieure de R, nous allons chercher une limite supérieure de la fonction H pour $t = \bar{t}$. Pour cela il nous faut connaître une telle limite pour la valeur absolue de la dérivée $\frac{d\bar{R}}{dt}$, ou bien, puisque

$$\bar{R}\frac{d\bar{R}}{dt} = g\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt} + h\bar{\varrho}\frac{d\bar{\varrho}}{dt}, \tag{144}$$

des limites supérieures pour les expressions $\left|\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}\right|$ et $\left|\bar{\varrho}\frac{d\bar{\varrho}}{dt}\right|$.

Vu les inégalités

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \geqq \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

et

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 \geqq \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2, \tag{145}$$

on tire de (19) l'inégalité

$$g\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + h\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 \leqq 2U - K. \tag{146}$$

Mais on a pour $R \geqq R_0$, en vertu des inégalités (133) et (136),

$$\frac{2M}{m_0 r_0} + \frac{2M}{m_1 r_1} < \frac{2M}{(\sigma - 1)q}\left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1}\right) = \frac{\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1}}{\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \frac{K}{\sigma - 1} < K,$$

et par suite, selon la définition de U,

$$2U - K < \frac{2M}{m_2 r},$$

de sorte que l'inégalité (146) peut s'écrire

$$g\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + h\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 < \frac{2M}{m_2 r}.$$

On en tire

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 < \frac{2M}{g m_2 r},$$

et par suite

$$\left|\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}\right| < \sqrt{\frac{2M\bar{r}}{g m_2}},$$

et enfin

$$\left|\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}\right| < \sqrt{\frac{2Mq}{gm_2}}. \tag{147}$$

27. Il nous reste à chercher une limite supérieure de $\left|\bar{\varrho}\frac{d\bar{\varrho}}{dt}\right|$. A cet effet différentions l'équation (22) deux fois par rapport à t, ce qui nous donne

$$\varrho\frac{d^2\varrho}{dt^2} + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = \xi\frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta\frac{d^2\eta}{dt^2} + \zeta\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2,$$

et par suite, d'après (145),

$$\varrho\frac{d^2\varrho}{dt^2} \geqq \xi\frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta\frac{d^2\eta}{dt^2} + \zeta\frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

ou encore, au moyen de (17),

$$\varrho\frac{d^2\varrho}{dt^2} \geqq -M\left(\frac{\lambda}{r_0^2}\frac{\varrho^2 - \mu(x\xi + y\eta + z\zeta)}{r_0} + \frac{\mu}{r_1^2}\frac{\varrho^2 + \lambda(x\xi + y\eta + z\zeta)}{r_1}\right). \tag{148}$$

Mais on a, d'après (13),

$$r_0^2 = \varrho^2 + \mu^2 r^2 - 2\mu(x\xi + y\eta + z\zeta),$$

d'où suit

$$\varrho^2 r_0^2 = [\varrho^2 - \mu(x\xi + y\eta + z\zeta)]^2 + \mu^2[r^2\varrho^2 - (x\xi + y\eta + z\zeta)^2],$$

ou encore, puisque $|x\xi + y\eta + z\zeta| \leqq r\varrho$,

$$\varrho r_0 \geqq |\varrho^2 - \mu(x\xi + y\eta + z\zeta)|.$$

De l'équation (14) on tire d'une manière analogue

$$\varrho r_1 \geqq |\varrho^2 + \lambda(x\xi + y\eta + z\zeta)|.$$

En vertu des deux dernières inégalités, on conclut de (148)

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} \geqq -M\left(\frac{\lambda}{r_0^2} + \frac{\mu}{r_1^2}\right),$$

ou encore, selon (136),

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} + \frac{C}{\varrho^2} \geqq 0, \tag{149}$$

avec

$$C = \frac{M\sigma^2}{(\sigma-1)^2}. \tag{150}$$

Pour aller plus loin nous devons considérer séparément:

1) le cas où $\frac{d\varrho}{dt} < 0$ durant que t croît de t' à $\bar{t}$;

2) le cas où il existe un instant t''' entre t' et $\bar{t}$, tel qu'on ait $\frac{d\varrho}{dt} = 0$ pour $t = t'''$ et $\frac{d\varrho}{dt} < 0$ entre t''' et $\bar{t}$.

Dans le premier cas nous aurons, d'après (149), pour les valeurs t comprises entre t' et $\bar{t}$

$$2\frac{d\varrho}{dt}\left(\frac{d^2\varrho}{dt^2} + \frac{C}{\varrho^2}\right) \leqq 0, \tag{151}$$

d'où il suit, en intégrant entre les limites t' et $\bar{t}$,[1]

$$\left(\frac{d\bar{\varrho}}{dt}\right)^2 \leqq \left(\frac{d\varrho'}{dt}\right)^2 + \frac{2C}{\bar{\varrho}} - \frac{2C}{\varrho'},$$

ou encore

$$\left(\frac{d\bar{\varrho}}{dt}\right)^2 \leqq \left(\frac{d\varrho'}{dt}\right)^2 + \frac{2C}{\bar{\varrho}}. \tag{152}$$

Dans le second cas l'inégalité (151) a lieu de t''' à $\bar{t}$; en intégrant entre ces limites, on trouve $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right.$ étant nul pour $\left.t = t'''\right)$

$$\left(\frac{d\bar{\varrho}}{dt}\right)^2 \leqq \frac{2C}{\bar{\varrho}} - \frac{2C}{\varrho'''},$$

d'où l'on voit que l'inégalité (152) est vraie aussi dans ce second cas.

---

[1] Dans ce numéro nous désignerons exceptionnellement par r', $\frac{dr'}{dt}$, ρ' et $\frac{d\rho'}{dt}$ les valeurs de r, $\frac{dr}{dt}$, ρ et $\frac{d\rho}{dt}$ pour $t = t'$.

Calculons maintenant une limite supérieure de $\left(\frac{d\varrho'}{dt}\right)^2$; R étant par hypothèse maximum pour $t=t'$, on doit avoir $\frac{d^2R^2}{dt^2} \leqq 0$ pour $t=t'$, ou bien, d'après (23),

$$U' \leqq K,$$

U' désignant la valeur de U pour $t=t'$. L'inégalité (146) nous donne par conséquent

$$g\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 + h\left(\frac{d\varrho'}{dt}\right)^2 \leqq K.$$

Puisque nous avons $\frac{dR'}{dt}=0$, on trouve d'autre part, en différentiant l'équation (21 *bis*),

$$g r' \frac{dr'}{dt} + h\varrho' \frac{d\varrho'}{dt} = 0.$$

De ces deux relations on tire

$$\left(\frac{d\varrho'}{dt}\right)^2 \leqq \frac{Kgr'^2}{hR'^2},$$

ou encore, d'après (131) et (143),

$$\left(\frac{d\varrho'}{dt}\right)^2 < \frac{Kgq^2}{h\bar{R}_0^2} \leqq \frac{Kgq^2}{h^2\bar{\varrho}^2}.$$

En rapprochant cette inégalité de l'inégalité (152), on trouve

$$\left(\frac{d\bar{\varrho}}{dt}\right)^2 < \frac{2C}{\bar{\varrho}} + \frac{Kgq^2}{h^2\bar{\varrho}^2},$$

d'où il suit

$$\left|\bar{\varrho}\frac{d\bar{\varrho}}{dt}\right| < \sqrt{\frac{Kgq^2}{h^2} + 2C\bar{\varrho}},$$

et enfin, d'après (143),

(153) $$\left|\bar{\varrho}\frac{d\bar{\varrho}}{dt}\right| < \sqrt{\frac{Kgq^2}{h^2} + \frac{2C\bar{R}_0}{\sqrt{h}}}.$$

28. En vertu des inégalités (147) et (153), l'équation (144) nous donne

$$\left|\bar{R}\frac{d\bar{R}}{dt}\right| < \sqrt{\frac{2Mgq}{m_2}} + \sqrt{Kgq^2 + 2C\bar{R}_0 h\sqrt{h}},$$

d'où il suit

$$\bar{R}^2\left(\frac{d\bar{R}}{dt}\right)^2 < \frac{4Mgq}{m_2} + 2Kgq^2 + 4C\bar{R}_0 h\sqrt{h},$$

ou encore, d'après (142),

$$\bar{R}\left(\frac{d\bar{R}}{dt}\right)^2 < \frac{1}{R_0}\left(\frac{4Mgq}{m_2} + 2Kgq^2 + 4C\bar{R}_0 h\sqrt{h}\right).$$

En remontant maintenant à l'expression (120) de la fonction H, on en conclut, d'après (142), que

$$\bar{H} + K\bar{R} < S_2,$$

où

$$S_2 = \frac{1}{R_0}\left(\frac{4Mgq}{m_2} + f^2 + 2Kgq^2 + 4C\bar{R}_0 h\sqrt{h}\right) + 2K\bar{R}_0,$$

et, en faisant usage du théorème établi au n:o 21, nous arrivons donc à ce résultat que l'inégalité

$$R > \frac{f^2}{S_2}$$

a lieu depuis t' jusqu'au moment où R passe de nouveau par un maximum.

On voit immédiatement que $R_0 > \frac{f^2}{S_2}$. En tenant compte des limites de R indiquées au n:o 25 pour les cas où le maximum considéré R' appartient à la première ou à la deuxième classe, on trouve donc que l'inégalité

$$R > \frac{f^2}{S_2 + f\sqrt{K}}$$

subsiste depuis la valeur t' jusqu'au premier maximum après t', et cela quelle que soit la classe du maximum considéré R'.

Pour plus de commodité, nous substituerons à cette limite de R une autre où les masses m_0, m_1, m_2 figurent d'une manière symétrique. Désignons comme plus haut par m la plus petite de ces masses. En ayant égard aux définitions des diverses quantités, on trouve successivement les inégalités suivantes

$$M > m_2 \geqq m, \quad m \leqq \frac{M}{3}, \quad m_0 + m_1 \geqq 2m,$$

$$g = \frac{1}{m_0 + m_1} + \frac{1}{m_2} \leqq \frac{3}{2m}, \quad h = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} \leqq \frac{2}{m},$$

$$\frac{9}{M} \leqq \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \leqq \frac{3}{m},$$

$$\frac{18}{K} \leqq q \leqq \frac{6M}{Km}, \quad 3\sqrt{\frac{5}{M}} \leqq \frac{R_0}{q} \leqq \sqrt{\frac{15}{m}},$$

$$\frac{1}{R_0} \leqq \frac{K}{54}\sqrt{\frac{M}{5}}, \quad R_0 \leqq \frac{6M}{Km}\sqrt{\frac{15}{m}},$$

$$\frac{\bar{R}_0}{R_0} = \sqrt{\frac{g + \sigma^2 h}{\sigma^2 h}} = \sqrt{\frac{5\left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}{4\left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + \frac{m_0^2 + m_0 m_1 + m_1^2}{m_0 m_1 (m_0 + m_1)}}} < \sqrt{\frac{5}{4}},$$

$$\bar{R}_0 < \frac{15M}{Km}\sqrt{\frac{3}{m}}, \quad C < 4M,$$

d'où on tire aisément

$$S_2 < \left(\frac{8M}{m^2} + \frac{f^2 K}{54}\right)\sqrt{\frac{M}{5}} + 2(8\sqrt{10} + 15\sqrt{3})\frac{M}{m\sqrt{m}},$$

et par suite

$$\frac{f^2}{S_2 + f\sqrt{K}} > \frac{m^2 f^2}{\left(8M + \frac{f^2 K m^2}{54}\right)\sqrt{\frac{M}{5}} + 2(8\sqrt{10} + 15\sqrt{3})M\sqrt{m} + f\sqrt{K}\,m^2}$$

ou encore, en remplaçant au dénominateur m par $\frac{M}{3}$ et en simplifiant les coefficients numériques,

$$\frac{f^2}{S_2 + f\sqrt{K}} > \frac{f^2}{64 + \frac{1}{2}f\sqrt{KM} + \frac{1}{1024}f^2 KM}\,\frac{m^2}{M\sqrt{M}}.$$

En posant enfin

$$S = \left(\frac{f\,m}{8 + \frac{1}{32} f\sqrt{K M}}\right)^2 \frac{1}{M\sqrt{M}} \tag{154}$$

nous arrivons donc à ce résultat que *l'inégalité $R > S$ a certainement lieu depuis le maximum qui précède l'instant t' jusqu'au premier maximum qui le suit.*

En considérant les maxima de la troisième classe, nous avions supposé que c'est la distance r_2 qui reste inférieure à q pour $R > R_0$ (*cf.* le commencement du n:o 24). Cependant, comme la limite S est symétrique par rapport aux trois masses m_0, m_1, m_2, il est évident que le résultat que nous venons d'obtenir reste vrai aussi dans les cas où l'on a $r_0 < q$ ou $r_1 < q$ pour $R > R_0$. En somme on aura donc $R > S$ dans l'intervalle de temps compris entre deux maxima successifs quelconques. En observant encore que R ne saurait avoir qu'un nombre limité de maxima dans un intervalle fini de temps, et, d'autre part que, si la suite des maxima de R est limitée dans le sens des valeurs croissantes ou décroissantes de t, on aura, d'après ce qui précède, $R > S$ dans l'espace de temps infini qui suit le dernier ou précède le premier maximum de R, on arrive donc à ce résultat que, *dans le cas où l'on a $K > 0$ et $f > 0$ l'inégalité $R > S$ subsiste pour toutes les valeurs de t, pourvu que R admette du moins un maximum pour une valeur finie de t.*

Ce résultat et le dernier théorème du n:o 21 nous donnent en résumé cet important

Théorème: *Si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, on aura toujours*[1]

$$R \geqq L,$$

où L désigne la quantité

$$\frac{f^2 R^\circ}{\left(R^\circ \frac{d R^\circ}{dt}\right)^2 + f^2}$$

si $K \leqq 0$, et, si $K > 0$, la plus petite des quantités

$$S \quad et \quad \frac{f^2 R^\circ}{\left(R^\circ \frac{d R^\circ}{dt}\right)^2 + 2 K R^{\circ 2} + f^2},$$

[1] Cette quantité L ne doit pas être confondue avec la quantité définie par l'égalité (76).

dont la première est définie par l'égalité (154).

On suppose bien entendu qu'on continue le mouvement après chaque choc comme il a été dit plus haut.

X.

Détermination d'une limite inférieure des rayons de convergence des développements suivant les puissances de $u - u_1$.

29. Le dernier théorème ci-dessus entraîne comme conséquence le

Théorème: *Si* $f > 0$, *les deux plus grandes des distances* r_0, r_1, r_2 *restent constamment supérieures à la quantité*

$$l = \frac{1}{3} \sqrt{m}\, L. \tag{155}$$

En effet, il suit de (21) que

$$R^2 \leqq \frac{r_0^2 + r_1^2 + r_2^2}{m}.$$

Si le théorème en question n'était pas vrai, deux au moins des distances r_0, r_1, r_2 admettraient à un certain instant des valeurs plus petites que l ou égales à l, et la troisième distance, étant au plus égale à la somme des deux premières, serait par suite au plus égale à $2\,l$, de sorte qu'on aurait

$$\frac{r_0^2 + r_1^2 + r_2^2}{m} \leqq \frac{6\,l^2}{m} = \frac{2}{3} L^2,$$

ou encore, d'après l'inégalité ci-dessus,

$$R^2 \leqq \frac{2}{3} L^2,$$

ce qui est en contradiction avec le théorème du numéro précédent.

Arrivé à ce point, nous allons fixer d'une manière convenable la constante $\varkappa_1$ du n:o 13 et la constante $\varkappa$ du n:o 5.

D'après les conditions (84) et (85), r_0 et r_1 sont les deux plus grandes des distances et, par suite, supérieures à l. En observant que $\varrho > r_0 - r$ et $\varrho > r_1 - r$, on en conclut que

$$\varrho > 14\, \varkappa_1$$

tant que

$$r < \frac{\varkappa_1}{2},$$

si l'on détermine $\varkappa_1$ par l'égalité

$$\varkappa_1 = \frac{2}{29} l = \frac{2}{87} \sqrt{m} L, \tag{156}$$

L désignant la quantité définie à la fin du n:o 28.

Nous fixerons dès maintenant la valeur de $\varkappa_1$ par cette formule (en supposant toujours $f > 0$). L'inégalité (84) entraîne alors comme conséquence l'inégalité (85), de sorte que nous pourrons désormais remplacer les conditions simultanées (84) et (85) par la seule condition (84), sans rien changer à la validité de nos résultats.

Afin que les conditions (37) et (84) s'excluent l'une l'autre, *nous fixerons la valeur de $\varkappa$ par l'égalité*

$$\varkappa = \frac{\varkappa_1}{28} = \frac{L\sqrt{m}}{1218}. \tag{157}$$

30. Considérons un instant t_1 tel que, t tendant vers t_1, la distance $r \equiv r_2$ tende vers une limite inférieure à $\frac{\varkappa_1}{2}$, de façon que nous aurons l'inégalité (84). Nous avons montré que le mouvement de nos corps est représenté par certains développements suivant les puissances entières d'une variable auxiliaire $u - u_1$, et que ces développements sont certainement convergents pour les valeurs de u qui vérifient l'inégalité (108). En tenant compte de la signification de Q'_2 et de ce que la distance ϱ_1 est plus grande que la longueur $14\varkappa_1$, on en conclut que les rayons de convergence des dits développements restent supérieurs à une quantité positive tant que la vitesse V_1 reste au dessous d'une limite finie, ce qui a lieu dans chaque intervalle fini de temps. Mais si, lorsque t croît ou décroît infiniment, la vitesse du corps P_2,

$$V = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}$$

pouvait prendre des valeurs de plus en plus grandes, il pourrait en être de même de V_1, et les rayons de convergence en question pourraient, par le temps, devenir aussi petits qu'on voudra. D'après (19), cette éventualité ne peut avoir lieu que si $(r)_1$ prend des valeurs de plus en plus petites quand t tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$. Nous démontrerons cependant dans ce numéro que cette éventualité n'est pas à craindre, et que *la vitesse V reste constamment au dessous d'une limite finie quand $r < \frac{\varkappa_1}{2}$.*

Supposons donc que r soit la plus petite distance, d'où résulte que r_0 et r_1 sont plus grands que l. En posant

(158) $$\varDelta = \frac{m_2 (m_0 + m_1)}{2 l} + \frac{m_0 m_1 m_2}{4 M} |K|,$$

on peut alors tirer de l'intégrale (19) les inégalités

(159) $$V^2 < 2 g \left(\frac{m_0 m_1}{r} + 2 \varDelta \right)$$

et

(160) $$\left| r \frac{dx}{dt} \right|, \left| r \frac{dy}{dt} \right| \text{ et } \left| r \frac{dz}{dt} \right| < \sqrt{2 h r (m_0 m_1 + 2 \varDelta r)}.$$

Il résulte de l'inégalité (159) que l'on aura

$$r < \frac{\varkappa_1}{2} \text{ tant que } V^2 \geqq D,$$

où D désigne l'expression

(161) $$D = 4 g \left(\frac{m_0 m_1}{\varkappa_1} + \varDelta \right),$$

et, en vertu de (159) et (160), on en conclut ce résultat:

Les inégalités

(162) $$r < \frac{\varkappa_1}{2},$$

(163) $$r V < \sqrt{g \varkappa_1 (m_0 m_1 + \varDelta \varkappa_1)},$$

(164) $$\left| r \frac{dx}{dt} \right|, \left| r \frac{dy}{dt} \right| \text{ et } \left| r \frac{dz}{dt} \right| < \sqrt{h \varkappa_1 (m_0 m_1 + \varDelta \varkappa_1)}$$

ont toujours lieu tant que $V^2 \geqq D$.

En faisant usage des inégalités (164), on tire d'ailleurs des équations (18)

$$|\xi \eta' - \eta \xi'| < A, \ |\eta \zeta' - \zeta \eta'| < B, \ |\zeta \xi' - \xi \zeta'| < C,$$

les quantités A, B, C ayant les valeurs

$$(165)\qquad \begin{cases} A = g\left(|c_0| + 2\sqrt{\frac{\varkappa_1}{h}(m_0 m_1 + \varDelta \varkappa_1)}\right), \\ B = g\left(|c_1| + 2\sqrt{\frac{\varkappa_1}{h}(m_0 m_1 + \varDelta \varkappa_1)}\right), \\ C = g\left(|c_2| + 2\sqrt{\frac{\varkappa_1}{h}(m_0 m_1 + \varDelta \varkappa_1)}\right). \end{cases}$$

Comme $\varrho > l - \frac{\varkappa_1}{2}$, il est évident, d'après (30), que *l'inégalité*

$$(166)\qquad \left|\varrho \frac{d\varrho}{dt}\right| > W > 0,$$

où

$$(167)\qquad W = \sqrt{V^2\left(l - \frac{\varkappa_1}{2}\right)^2 - A^2 - B^2 - C^2},$$

a nécessairement lieu si V vérifie à la fois les conditions

$$(168)\qquad V^2 \geqq D, \quad V^2\left(l - \frac{\varkappa_1}{2}\right)^2 - A^2 - B^2 - C^2 > 0.$$

D'autre part, on déduit aisément des équations (17) les suivantes

$$\frac{d\left(\varrho \frac{d\varrho}{dt}\right)}{dt} = V^2 - M\left[\frac{\lambda}{r_0^2}\,\frac{\varrho^2 - \mu(x\xi + y\eta + z\zeta)}{r_0} + \frac{\mu}{r_1^2}\,\frac{\varrho^2 + \lambda(x\xi + y\eta + z\zeta)}{r_1}\right],$$

$$\frac{dV^2}{dt} = -2M\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right)\varrho\frac{d\varrho}{dt} + 2M\lambda\mu\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)(x\xi' + y\eta' + z\zeta').$$

A l'aide des inégalités démontrées au n:o 27,

$$|\varrho^2 - \mu(x\xi + y\eta + z\zeta)| \leqq \varrho r_0,$$

$$|\varrho^2 + \lambda(x\xi + y\eta + z\zeta)| \leqq \varrho r_1,$$

la première de ces équations nous donne

$$\frac{d\left(\varrho \frac{d\varrho}{dt}\right)}{dt} \geqq V^2 - M\left(\frac{\lambda}{r_0}\frac{\varrho}{r_0} + \frac{\mu}{r_1}\frac{\varrho}{r_1}\right),$$

ou encore, puisque

$$\frac{\varrho}{r_0} \text{ et } \frac{\varrho}{r_1} < \frac{\varrho}{\varrho - \frac{\varkappa_1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{\varkappa_1}{2\varrho}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{28}} = \frac{28}{27},$$

(169)
$$\frac{d\left(\varrho \frac{d\varrho}{dt}\right)}{dt} > V^2 - E,$$

en posant

(170)
$$E = \frac{28}{27} \frac{M}{l}.$$

La dérivée $\frac{dV^2}{dt}$ aura le même signe que $-\varrho \frac{d\varrho}{dt}$ tant qu'on a

(171)
$$\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right) \left|\varrho \frac{d\varrho}{dt}\right| > \left|\lambda \mu \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)(x\xi' + y\eta' + z\zeta')\right|.$$

En observant que

$$\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3} > \lambda \mu \left(\frac{1}{r_0^3} + \frac{1}{r_1^3}\right),$$

et d'autre part, d'après (163),

$$|x\xi' + y\eta' + z\zeta'| \leqq r V < \sqrt{g \varkappa_1 (m_0 m_1 + \varDelta \varkappa_1)},$$

on trouve, en vertu de (166), que l'inégalité (171) est vérifiée tant que

$$W \geqq \sqrt{g \varkappa_1 (m_0 m_1 + \varDelta \varkappa_1)}.$$

En résumé on voit donc que *la dérivée* $\frac{dV^2}{dt}$ *a le signe de la quantité* $-\varrho \frac{d\varrho}{dt}$ *et que l'inégalité* (169) *a lieu tant que* V *vérifie à la fois les conditions*

(172)
$$V^2 \geqq D \quad et \quad V^2 \left(l - \frac{\varkappa_1}{2}\right)^2 - A^2 - B^2 - C^2 \equiv W^2 \geqq g \varkappa_1 (m_0 m_1 + \varDelta \varkappa_1).$$

Soit maintenant G_2 la plus grande des quantités positives

$$\sqrt{2E}, \ \sqrt{D} \text{ et } \frac{2}{2l - \varkappa_1} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + g \varkappa_1 (m_0 m_1 + \varDelta \varkappa_1)};$$

il résulte de ce qui précède que les conditions (168) et (172) sont vérifiées et que l'inégalité (169) peut être remplacée par cette autre

(169 *bis*) $$\frac{d\left(\varrho\frac{d\varrho}{dt}\right)}{dt} > E,$$

si V vérifie l'inégalité

(173) $$V \geqq G_2.$$

Cela posé, il est facile de démontrer que V *reste toujours plus petit que* G_2 *quand* $r \equiv r_2$ *est la plus petite des distances* r_0, r_1 *et* r_2.

En effet, autrement il y aurait un instant, soit t', auquel V prendrait une valeur finie $V'(> G_2)$ et, d'après (166), on pourrait en conclure que $\varrho\frac{d\varrho}{dt}$ admet pour $t = t'$ une valeur finie $\varrho'\frac{d\varrho'}{dt}$ qui vérifie l'une ou l'autre des inégalités

$$\varrho'\frac{d\varrho'}{dt} < -W',$$

$$\varrho'\frac{d\varrho'}{dt} > W',$$

W' désignant la valeur de W pour $t = t'$, laquelle, d'après ce qui précède, est plus grande que zéro.

Supposons d'abord qu'on ait

$$\varrho'\frac{d\varrho'}{dt} < -W'.$$

En faisant croître t depuis t', la vitesse V, d'après la proposition démontrée ci-dessus, ira constamment en croissant tant que $\varrho\frac{d\varrho}{dt} \leqq 0$, d'où résulte que la condition (173) et par suite aussi l'inégalité (169 *bis*) auront lieu lorsque

$$t \geqq t' \text{ et } \varrho\frac{d\varrho}{dt} \leqq 0.$$

D'après (169 *bis*), il viendra dès lors nécessairement après t' un instant t'' où $\varrho\frac{d\varrho}{dt}$ passera par zéro. Mais, puisque l'inégalité $V \geqq G_2$, et par suite aussi les inégalités (168) sont vérifiées, on aurait au même instant t'' l'inégalité (166), ou

$$\left|\varrho\frac{d\varrho}{dt}\right| > 0.$$

Cette contradiction prouve qu'on ne saurait avoir $\varrho'\frac{d\varrho'}{dt} < -W'$ à l'instant t', et on démontre de même, en faisant cette fois décroître t depuis la valeur t', qu'on ne saurait avoir non plus $\varrho'\frac{d\varrho'}{dt} > W$. Nous en concluons que V *reste toujours plus petit que* G_2 *quand* $r \equiv r_2 < \frac{\varkappa_1}{2}$.

C. Q. F. D.

31. Cherchons une limite supérieure simple de G_2 qui ne change pas par une permutation des quantités m_0, m_1, m_2. En vertu des inégalités

$$g \leqq \frac{3}{2m},\ m_0 m_1 < \frac{M^2}{4},\ \frac{1}{h} = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} < \frac{M}{4},\ g\, m_0 m_1 = \frac{M}{m_2}\frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} < \frac{M^2}{4m},$$

$$g\varDelta < \frac{M}{2l} + \frac{M}{16}|K|,\quad \frac{m_0 m_1 m_2}{M} \leqq \frac{M^2}{27},$$

$$g(m_0 m_1 + \varDelta\varkappa_1) < M\left(\frac{1}{29} + \frac{M}{4m} + \frac{\varkappa_1}{16}|K|\right),\ D < \frac{4M}{\varkappa_1}\left(\frac{1}{29} + \frac{M}{4m} + \frac{\varkappa_1}{16}|K|\right),$$

$$A^2 + B^2 + C^2 \leqq 2g^2\left[c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \frac{4\varkappa_1}{h}(m_0 m_1 + \varDelta\varkappa_1)\right] < \frac{9}{2m^2}(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2) + $$
$$+ \frac{3M^2\varkappa_1}{m}\left(\frac{1}{29} + \frac{M}{4m} + \frac{\varkappa_1}{16}|K|\right),$$

qui sont faciles à établir, on trouve que les expressions

$$\sqrt{2E},\ \sqrt{D}\ \text{ et }\ \frac{2}{2l - \varkappa_1}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + g\varkappa_1(m_0 m_1 + \varDelta\varkappa_1)}$$

sont toutes plus petites que la quantité

$$(174)\qquad G = \frac{1}{14\varkappa_1}\sqrt{\frac{9}{2m^2}(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2) + \left(775 + \frac{3M}{m}\right)M\varkappa_1\left(\frac{1}{29} + \frac{M}{4m} + \frac{\varkappa_1}{16}|K|\right)},$$

d'où suit qu'on aura aussi

$$(175)\qquad G_2 < G.$$

Cela posé, on voit immédiatement que, pour calculer une limite inférieure de la quantité Q'_2, c'est à dire de la plus petite des quotients (107), qui soit valable pour tous les temps, il suffira de prendre

$$V_1 = G$$

dans les expressions (104) et (107). On constate d'abord que les quatre dénominateurs

$$4(m_0 + m_1 + A_1 \varkappa_1), \; m_0 + m_1 + \lambda_1 \varkappa_1, \; \frac{m_2}{2} + 4(m_0 + m_1) + 3 A_1 \varkappa_1, \; 2\lambda_1 \varkappa_1 + m_2$$

sont tous plus petits que la quantité

$$4M + \frac{5M^2}{4m} + \frac{M}{m} G^2 \varkappa_1 + 3\frac{M}{m} G \sqrt{M \varkappa_1} + \frac{M}{2} |K| \varkappa_1,$$

et comme d'autre part

$$m_0 + m_1 + A_1 \varkappa_1 > \frac{4}{27} M \quad \text{et} \quad \frac{1}{2V_1 + \sqrt{\frac{M}{\varkappa_1}}} < \sqrt{\frac{\varkappa_1}{M}},$$

on trouve que Q'_2 est plus grand que la plus petite des expressions

(176)
$$Q = \frac{\sqrt{\frac{\varkappa_1}{3M}}}{6 + \frac{15}{8}\frac{M}{m} + \frac{3}{2m} G^2 \varkappa_1 + \frac{9}{2m} G \sqrt{M \varkappa_1} + \frac{3}{4} |K| \varkappa_1}$$

et

$$\frac{1}{2G + \sqrt{\frac{M}{\varkappa_1}}}.$$

Or un calcul facile montre que Q est toujours la plus petite de ces expressions et on aura donc

(177)
$$Q'_2 > Q.$$

On en conclut que *les développements des inconnues des équations* (79) *suivant les puissances de* $u - u_1$ *convergent certainement si* u *vérifie l'inégalité*

(178)
$$|u - u_1| \leq Q.$$

XI.

Introduction d'une nouvelle variable indépendante ω.

32. Dans ce qui précède, nous avons employé au lieu de t une variable auxiliaire u dont la définition variait de cas en cas, selon la valeur de la constante t_0 et la distance r_0, r_1 ou r_2 qui était supposée petite. Nous voulons maintenant faire voir que la variable unique ω définie par les égalités

$$dt = \Gamma d\omega, \qquad t = 0 \text{ pour } \omega = 0, \tag{179}$$

où

$$\Gamma = \left(1 - e^{-\frac{r_0}{l}}\right)\left(1 - e^{-\frac{r_1}{l}}\right)\left(1 - e^{-\frac{r_2}{l}}\right), \tag{180}$$

l étant défini par l'égalité (155), nous rend à chaque instant le même service que la variable u dont nous nous étions servi plus haut.

La fonction Γ a une valeur déterminée pour chaque valeur réelle du temps, et l'on aura constamment

$$0 \leqq \Gamma < 1, \tag{181}$$

d'où résulte que les variables ω et t croissent ou décroissent en même temps.

Il est facile de voir qu' *à une valeur réelle et finie de t correspond toujours une et une seule valeur réelle et finie de ω, et réciproquement.*

En effet, Γ étant positif quand les distances r_0, r_1, r_2 sont toutes plus grandes que zéro, on voit que ω ne peut devenir infiniment grand lorsque t tend vers une valeur finie, soit t_1, que si l'une des distances r_0, r_1, r_2 s'annule pour $t = t_1$. Supposons par exemple que la distance $r \equiv r_2$ s'annule pour $t = t_1$. Introduisons au lieu de t la variable u définie par l'égalité (71), et désignons par u_1 la valeur finie vers laquelle tend u lorsque t tend vers t_1. On aura

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{r}{\Gamma},$$

et en observant que le second membre reste fini quand r tend vers zéro, on en conclut que ω tend également vers une valeur finie quand u tend vers u_1 ou t vers t_1. On trouverait encore le même résultat si c'était la distance r_0 ou r_1 qui s'annule pour $t = t_1$.

La variable ω sera par conséquent *finie* lorsque t est fini, et comme d'autre part $|t|<|\omega|$, d'après (179) et (181), la proposition réciproque aura également lieu. Notre assertion est donc démontrée.

De tout cela il résulte que

$$\lim_{t=+\infty} \omega = +\infty, \quad \lim_{t=-\infty} \omega = -\infty,$$

$$\lim_{\omega=+\infty} t = +\infty, \quad \lim_{\omega=-\infty} t = -\infty.$$

33. Étant donnée une valeur quelconque réelle et finie de ω, soit $\bar{\omega}$, nous allons maintenant montrer que les coordonnées des trois corps, leurs distances mutuelles et le temps sont développables en séries suivant les puissances de $\omega-\bar{\omega}$, et que les rayons de convergence de ces développements restent supérieurs à une limite positive, quelle que soit la valeur $\bar{\omega}$.

Deux cas sont à distinguer:

Premier cas: Pour $\omega=\bar{\omega}$ l'une des distances r_0, r_1, r_2 est inférieure à $\frac{\varkappa_1}{2}$.

Admettons par exemple qu'on ait

$$r_2 < \frac{\varkappa_1}{2}.$$

Soit t_1 la valeur de t pour $\omega=\bar{\omega}$. En désignant par u_1 la valeur que prend la variable u pour $t=t_1$ ou $\omega=\bar{\omega}$, on sait, d'après les n:os 13, 14 et 31, que les coordonnées des corps, leurs distances mutuelles et le temps seront développables suivant les puissances de $u-u_1$ et que les inégalités (94) auront lieu du moins tant que u vérifie l'inégalité

$$|u-u_1| \leqq Q.$$

Les variables u et ω sont liées par l'équation

$$\frac{du}{d\omega}=\frac{\Gamma}{r}, \qquad (u=u_1 \text{ pour } \omega=\bar{\omega}), \tag{182}$$

où le quotient $\frac{\Gamma}{r}$, qui est une fonction entière des quantités r, r_0, r_1, est développable suivant les puissances des différences figurant dans la première ligne de (94) tant que les valeurs absolues de ces différences sont inférieures à $\frac{\varkappa_1}{2}$, et par suite aussi suivant les puissances de $u-u_1$ tant que $|u-u_1| \leqq Q$.

Pour appliquer le théorème du n:o 4 à l'équation (182), nous devons encore trouver une limite supérieure de $\left|\frac{\Gamma}{r}\right|$ lorsque $|u-u_1| \leqq Q$. Nous allons montrer qu'on a

$$\left|\frac{\Gamma}{r}\right| < \frac{1}{3\varkappa_1}.$$

En effet, nous avons vu que les conditions (84) et (94) entraînent l'équation (95) ainsi que l'inégalité

$$|P_1| < \frac{45}{49}\varrho_1^2,$$

d'où résulte que la quantité r_0^2 ne devient jamais nulle ou négative et que, par conséquent, la partie réelle de r_0 ne change pas de signe. Comme les conditions (84) et (94) sont vérifiées quand $|u-u_1| \leqq Q$, et comme la partie réelle de r_0 est positive pour $u = u_1$, on est donc sûr qu'elle reste positive tant que $|u-u_1| \leqq Q$. Il s'ensuit que $\left|e^{-\frac{r_0}{l}}\right| < 1$, d'où

$$\left|1 - e^{-\frac{r_0}{l}}\right| < 2.$$

D'une manière analogue on trouve

$$\left|1 - e^{-\frac{r_1}{l}}\right| < 2,$$

et, en observant qu'on a

$$\left|\frac{1-e^{-\frac{r}{l}}}{r}\right| = \left|\frac{1}{l} - \frac{r}{2l^2} + \frac{r^2}{6l^3} - \cdots\right| \leqq \frac{1}{l} + \frac{\varkappa_1}{2l^2} + \frac{\varkappa_1^2}{6l^3} + \cdots = \frac{e^{\frac{\varkappa_1}{l}} - 1}{\varkappa_1},$$

$$l = \frac{29}{2}\varkappa_1, \quad e^{\frac{2}{29}} - 1 < \frac{1}{12}$$

on voit donc que

$$\left|\frac{\Gamma}{r}\right| < \frac{1}{3\varkappa_1}$$

tant que $|u-u_1| \leqq Q$.

En vertu du théorème de CAUCHY, nous pouvons donc conclure de l'équation (182) que $u - u_1$ est développable suivant les puissances de $\omega - \bar{\omega}$ du moins tant que

$$|\omega - \bar{\omega}| \leqq 3 Q \varkappa_1, \tag{183}$$

et que $|u - u_1| < Q$ si cette inégalité a lieu. Il en résulte que *les coordonnées des corps, les distances r_0, r_1, r_2 et le temps sont développables suivant les puissances de $\omega - \bar{\omega}$ du moins tant que ω vérifie l'inégalité* (183).

Comme $\varkappa_1$ et Q sont des fonctions symétriques des masses m_0, m_1, m_2 ce résultat ne serait pas changé si, au lieu de $r_2 < \frac{\varkappa_1}{2}$, on avait $r_0 < \frac{\varkappa_1}{2}$ ou $r_1 < \frac{\varkappa_1}{2}$ pour $\omega = \bar{\omega}$.

Second cas: Pour $\omega = \bar{\omega}$ toutes les distances r_0, r_1, r_2 sont $\geqq \frac{\varkappa_1}{2}$, ou bien, d'après (157), $\geqq 14\varkappa$.

Ce cas a déjà été étudié au n:o 5. Soit $\bar{t}$ la valeur que prend t pour $\omega = \bar{\omega}$. Nous avons trouvé que les coordonnées des trois corps et les distances r_0, r_1, r_2 sont développables suivant les puissances de $t - \bar{t}$, et que les inégalités (43) ont lieu du moins tant que t vérifie l'inégalité (45).

En raisonnant comme ci-dessus, on trouve aisément qu'on a dans ce cas

$$\left|1 - e^{-\frac{r_0}{l}}\right|, \quad \left|1 - e^{-\frac{r_1}{l}}\right| \quad \text{et} \quad \left|1 - e^{-\frac{r_2}{l}}\right| < 2,$$

et par suite

$$|\Gamma| < 8,$$

du moins tant que l'inégalité (45) a lieu. En vertu du théorème du n:o 4, il suit alors de (179) que $|t - \bar{t}| < T$ et que $t - \bar{t}$ est développable suivant les puissances de $\omega - \bar{\omega}$ du moins tant que $|\omega - \bar{\omega}| \leqq \frac{1}{8} T$. Donc *les coordonnées des trois corps, les distances r_0, r_1, r_2 et le temps sont, dans ce second cas, développables suivant les puissances de $\omega - \bar{\omega}$ du moins tant que $|\omega - \bar{\omega}| \leqq \frac{1}{8} T$.*

Comme on a

$$\frac{1}{8} T = \frac{\varkappa_1 \sqrt{\frac{3\varkappa_1}{M}}}{224 \sqrt{16 \frac{M}{m} + 3 |K| \varkappa_1}}$$

$$3Q\varkappa_1 = \frac{\varkappa_1\sqrt{\frac{3\varkappa_1}{M}}}{6 + \frac{15}{8}\frac{M}{m} + \frac{3}{2m}G^2\varkappa_1 + \frac{9}{2m}G\sqrt{M\varkappa_1} + \frac{3}{4}|K|\varkappa_1}$$

nous arrivons donc en résumé à ce résultat final:

Les coordonnées des trois corps, leurs distances mutuelles et le temps sont développables suivant les puissances entières de $\omega - \bar{\omega}$, quelle que soit la valeur réelle $\bar{\omega}$, et ces développements convergent certainement tant que

$$|\omega - \bar{\omega}| \leq \Omega,$$

où

$$(184)\quad \Omega = \frac{\varkappa_1\sqrt{\frac{3\varkappa_1}{M}}}{\frac{15}{8}\frac{M}{m} + \frac{3}{2m}G^2\varkappa_1 + \frac{9}{2m}G\sqrt{M\varkappa_1} + \frac{3}{4}|K|\varkappa_1 + 224\sqrt{16\frac{M}{m} + 3|K|\varkappa_1}}.$$

Rappelons que les quantités $\varkappa_1$ et G sont définies respectivement par les égalités (156) et (174), et que m désigne la plus petite des masses m_0, m_1, m_2.

34. Les coordonnées des trois corps, leurs distances et le temps sont ainsi des fonctions régulières de ω dans une bande de largeur 2Ω comprise entre deux droites parallèles à l'axe réel et symétriques par rapport à cet axe. En introduisant une nouvelle variable τ par la transformation bien connue

$$(185)\quad \begin{cases} \omega = \dfrac{2\Omega}{\pi}\log\dfrac{1+\tau}{1-\tau}, \\[2ex] \tau = \dfrac{e^{\frac{\pi\omega}{2\Omega}} - 1}{e^{\frac{\pi\omega}{2\Omega}} + 1} \end{cases}$$

toutes ces quantités, ainsi que ω, seront dès lors développables suivant les puissances de τ si $|\tau| < 1$. Les valeurs réelles de τ entre -1 et $+1$ correspondront univoquement aux valeurs réelles de t entre $-\infty$ et $+\infty$. Nous avons par suite trouvé ce théorème remarquable:

Si, dans le problème des trois corps, les constantes des aires ne sont pas toutes nulles, on peut, les coordonnées et les vitesses des corps étant données pour un certain moment fini, trouver deux constantes l et Ω, telles que, si l'on introduit au lieu de t une variable τ par les équations (179), (180) *et* (185), *les coordonnées des trois corps, leurs distances mutuelles et le temps seront développables en séries suivant les puissances entières de τ, qui convergent pour $|\tau| < 1$ et représentent le mouvement pour* *tous les temps, quels que soient les chocs qui se produisent entre les corps, pourvu que l'on convienne de continuer le mouvement après un choc de la façon décrite plus haut.*

On peut encore remarquer que les mêmes valeurs l et Ω conviennent à tout un groupe de mouvements correspondant à des circonstances initiales différentes, et qu'on peut calculer les termes des divers développements par des différentiations successives par rapport à τ dès qu'on a déterminé les valeurs de l et de Ω.