

# SUR LA REPRÉSENTATION DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE AUX DIFFÉRENCES FINIES POUR LES GRANDES VALEURS DE LA VARIABLE.

PAR

H. GALBRUN

à PARIS.

Les solutions de l'équation différentielle linéaire:

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_n y = 0,$$

où les coefficients  $P$  sont des polynomes en  $x$ , sont irrégulières au voisinage du point à l'infini quand le degré des polynomes  $P$  dans la suite:

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n,$$

ne va pas constamment en décroissant. M. POINCARÉ<sup>1</sup> a établi qu'elles pouvaient alors être représentées asymptotiquement par des séries en général divergentes de la forme:

$$S = e^Q x^a \left[ a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots \right],$$

où  $Q$  est un polynome entier en  $x$ ; autrement dit, si l'on désigne par  $y$  une de ces solutions, le point  $x$  s'éloignant à l'infini dans une direction déterminée, on peut en général former une série  $S$  telle que l'on ait,  $n$  étant un nombre entier positif choisi arbitrairement:

$$y = e^Q x^a \left[ a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

---

<sup>1</sup> Acta Mathematica, Tome 8, 1886: Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires.  
*Acta mathematica.* 36. Imprimé le 9 décembre 1911.

$\varepsilon$  tendant vers 0. Cette égalité n'est d'ailleurs vérifiée que dans un certain angle et les différentes séries  $S$  se permutent entre elles pour représenter une même fonction  $y$  quand on fait varier l'argument avec lequel  $x$  devient infini; le plan est ainsi divisé par des rayons issus de l'origine en plusieurs régions dans chacune desquelles la fonction  $y$  est représentée asymptotiquement par une série différente.

De même la fonction  $\Gamma(x)$ , solution de l'équation aux différences finies linéaire

$$f(x+1) - xf(x) = 0$$

est représentée asymptotiquement par une série déduite de la série de STIRLING; cette dernière s'écrit:

$$L\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) Lx - x + \frac{1}{2} L 2\pi + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{x} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{(-1)^n B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^{2n+1}} + \dots$$

et l'on montre que si  $S_n$  désigne la somme des premiers termes jusque et y compris celui qui contient  $\frac{1}{x^{2n+1}}$  en facteur, l'expression

$$x^{2n+1} [L\Gamma(x) - S_n],$$

tend vers 0 quand  $x$  s'éloigne à l'infini avec un argument compris entre  $-\pi + \nu$  et  $\pi - \nu$ ,  $\nu$  étant un nombre positif aussi petit que l'on veut; on peut donc former une série divergente telle que l'on ait:

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \left[ 1 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

$\varepsilon$  tendant vers 0, quand  $x$  s'éloigne à l'infini avec un argument appartenant au même intervalle.

Il a dès lors paru intéressant d'entreprendre sur les équations aux différences finies linéaires, dont les coefficients sont des polynomes, une étude analogue à celle qui fut faite sur les équations différentielles du même genre et de chercher à former des séries représentant asymptotiquement leurs solutions au voisinage de l'infini. Tel est l'objet de ce travail qui fera ressortir une nouvelle fois les analogies déjà souvent signalées entre les deux catégories d'équations.

On sait que la recherche des solutions de l'équation aux différences finies:

$$1) \quad A_0 f(x+r) + A_1 f(x+r-1) + \dots + A_r f(x) = 0,$$

où  $A_0, A_1, \dots, A_r$  sont des polynômes en  $x$ , se ramène au moyen de la transformation

$$2) \quad f(x) = \int_a^{\beta} y^{x-1} \varphi(y) dy,$$

à l'étude des solutions de l'équation différentielle

$$3) \quad y^q B_0 \frac{d^q \varphi}{dy^q} + y^{q-1} B_1 \frac{d^{q-1} \varphi}{dy^{q-1}} + \dots + B_q \varphi = 0,$$

dont les coefficients  $B$  sont des polynômes en  $y$ . Les solutions de l'équation 3) admettent pour points singuliers les racines du polynôme  $B_0$ , l'origine et le point à l'infini.

Je considère un contour  $L$  contenant à son intérieur un des points  $\alpha$ , racines du polynôme  $B_0$  et laissant à son extérieur tous les autres points singuliers des solutions de l'équation différentielle 3) et un contour  $L_0$  qui laisse à son extérieur tous les points singuliers de ces mêmes solutions sauf l'origine; Je forme des solutions  $f(x)$  de l'équation aux différences finies définies par l'égalité

$$f(x) = \int_L y^{x-1} \varphi(y) dy - \int_{L_0} y^{x-1} (k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_q v_q) dy.$$

La fonction  $\varphi(y)$  est une solution de 3) admettant le point  $\alpha$  pour point singulier; les fonctions  $v$  forment un système de solutions indépendantes de cette même équation et les coefficients  $k$  sont des fonctions de  $x$  convenablement choisies. Ces solutions  $f(x)$  de l'équation aux différences finies sont des fonctions méromorphes de  $x$ , définies dans tout le plan et dont je détermine les pôles avec leur ordre de multiplicité.

Dans le cas où les solutions de 3) sont régulières en  $\alpha$ , on peut ainsi former au moyen des contours  $L$  et  $L_0$  autant de solutions de l'équation 1) que l'équation déterminante relative à ce point admet de racines en général non entières, en prenant pour  $\varphi(y)$  les solutions de 3) correspondantes obtenues par la méthode de M. FUCHS. C'est dans cette hypothèse que j'ai formé les développements asymptotiques des solutions  $f(x)$ .

Supposant que le point  $x$  s'éloigne à l'infini en restant constamment à droite de l'axe des ordonnées, je forme des séries asymptotiques de la forme

$$\frac{\alpha^x}{x^\lambda} \left[ a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots \right],$$

qui représentent les fonctions  $f(x)$  correspondant à chacun des points  $\alpha$ , racines de  $B_0$ , situés à distance finie et au voisinage desquels les solutions de 3) sont régulières.

Quand les solutions de 3) sont régulières au voisinage de toutes les racines finies du polynôme  $B_0$ , ces séries se permutent entre elles, pour représenter les fonctions  $f(x)$  correspondant aux différents point  $\alpha$ , le point  $x$  s'éloignant à l'infini avec un argument quelconque.

Les différentes fonctions  $f(x)$  correspondant aux points  $\alpha$  au voisinage desquels les solutions de 3) sont régulières sont des solutions indépendantes de l'équation aux différences finies, autrement dit, elles ne peuvent satisfaire identiquement à aucune relation de la forme

$$T_1(x)f_1(x) + T_2(x)f_2(x) + \dots + T_p(x)f_p(x) = 0,$$

où les  $T$  sont des fonctions périodiques admettant pour période l'unité.

### I. Formation des solutions de l'équation aux différences finies.

Soit l'équation aux différences finies linéaire d'ordre  $r$

$$1) \quad F[f(x)] = A_0 f(x+r) + A_1 f(x+r-1) + \dots + A_r f(x) = 0,$$

où  $f(x)$  est une fonction inconnue de la variable  $x$  et où  $A_0, A_1, \dots, A_r$  sont des polynômes en  $x$  de degré  $q$ . Je désigne par le symbole  $[x+k]^p$  le produit de  $p$  facteurs

$$(x+k)(x+k+1)\dots(x+k+p-1),$$

où  $k$  et  $p$  sont deux entiers positifs, en convenant que

$$[x+k]^0 = 1.$$

Les polynômes  $A$  peuvent se mettre sous la forme:

$$A_0 = a_{0,0}[x+r]^q + a_{0,1}[x+r]^{q-1} + \dots + a_{0,q}[x+r]^0,$$

$$A_1 = a_{1,0}[x+r-1]^q + a_{1,1}[x+r-1]^{q-1} + \dots + a_{1,q}[x+r-1]^0,$$

$$\dots$$

$$A_p = a_{p,0}[x+r-p]^q + a_{p,1}[x+r-p]^{q-1} + \dots + a_{p,q}[x+r-p]^0,$$

$$\dots$$

$$A_r = a_{r,0}[x]^q + a_{r,1}[x]^{q-1} + \dots + a_{r,q}[x]^0.$$

Je cherche à satisfaire à l'équation 1) au moyen de la fonction:

$$2) \quad f(x) = \int_a^\beta y^{x-1} \varphi(y) dy.$$

On a:

$$[x+k]^p f(x+k) = \int_a^\beta \varphi(y) \frac{d^p y^{x+k+p-1}}{dy^p} dy.$$

En faisant usage de l'intégration par parties, il vient:

$$[x+k]^p f(x+k) = (-1)^p \int_a^\beta y^{x+k+p-1} \frac{d^p \varphi}{dy^p} dy + \left[ \varphi \frac{d^{p-1} y^{x+k+p-1}}{dy^{p-1}} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d^{p-2} y^{x+k+p-1}}{dy^{p-2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{p-1} \frac{d^{p-1} \varphi}{dy^{p-1}} y^{x+k+p-1} \right]_a^\beta.$$

Le premier membre de l'équation aux différences finies devient ainsi:

$$F[f(x)] = \int_a^\beta \left[ y^q B_0 \frac{d^q \varphi}{dy^q} + y^{q-1} B_1 \frac{d^{q-1} \varphi}{dy^{q-1}} + \dots + B_q \varphi \right] y^{x-1} dy + M[\varphi(\beta)] - M[\varphi(\alpha)],$$

en posant

$$B_0 = (-1)^q [a_{0,0} y^r + a_{1,0} y^{r-1} + \dots + a_{r,0}], \\ B_1 = (-1)^{q-1} [a_{0,1} y^r + a_{1,1} y^{r-1} + \dots + a_{r,1}], \\ \dots \dots \dots \\ B_p = (-1)^{q-p} [a_{0,p} y^r + a_{1,p} y^{r-1} + \dots + a_{r,p}], \\ \dots \dots \dots \\ B_q = a_{0,q} y^r + a_{1,q} y^{r-1} + \dots + a_{r,q},$$

et

$$M[\varphi(y)] = \varphi \frac{d^{q-1} C_0}{dy^{q-1}} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d^{q-2} C_0}{dy^{q-2}} + \dots + (-1)^{q-1} \frac{d^{q-1} \varphi}{dy^{q-1}} C_0 \\ + \varphi \frac{d^{q-2} C_1}{dy^{q-2}} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d^{q-3} C_1}{dy^{q-3}} + \dots + (-1)^{q-2} \frac{d^{q-2} \varphi}{dy^{q-2}} C_1 \\ \dots \dots \dots \\ + \varphi C_{q-1},$$

avec

$$\begin{aligned} C_0 &= (-1)^q y^{x+q-1} B_0, \\ C_1 &= (-1)^{q-1} y^{x+q-2} B_1, \\ &\dots \dots \dots \\ C_{q-1} &= -y^x B_{q-1}. \end{aligned}$$

Si l'on choisit pour  $\varphi(y)$  une solution de l'équation différentielle linéaire

$$3) \quad y^q B_0 \frac{d^q \varphi}{dy^q} + y^{q-1} B_1 \frac{d^{q-1} \varphi}{dy^{q-1}} + \dots + B_q \varphi = 0,$$

on a donc

$$F[f(x)] = M[\varphi(\beta)] - M[\varphi(\alpha)].$$

Les points singuliers des solutions de l'équation 3) sont l'origine, le point à l'infini et les points  $\alpha$  racines du polynome  $B_0$ .

Si l'équation fondamentale relative à l'origine admet les  $q$  racines simples

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q,$$

on peut former  $q$  solutions indépendantes de l'équation 3),

$$v_1, v_2, \dots, v_q,$$

qui, par une rotation dans le sens directe autour de l'origine le long d'un contour laissant tous les points  $\alpha$  à son extérieur, deviennent:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \omega_1 v_1, \\ \bar{v}_2 &= \omega_2 v_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \bar{v}_q &= \omega_q v_q. \end{aligned}$$

Si l'équation fondamentale admet des racines multiples, on peut former  $q$  solutions indépendantes  $v_1, v_2, \dots, v_q$  qui se répartissent en autant de groupes, qu'il y a de racines distinctes et les  $l$  solutions  $v_1, v_2, \dots, v_l$  du groupe correspondant à la racine  $\omega_1$  d'ordre de multiplicité  $l$  deviennent par une rotation autour de l'origine

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_1 = \omega_1 v_1, \\ \bar{v}_2 = \omega_{2,1} v_1 + \omega_1 v_2, \\ \dots \\ \bar{v}_j = \omega_{j,1} v_1 + \omega_{j,2} v_2 + \dots + \omega_1 v_j, \\ \dots \\ \bar{v}_l = \omega_{l,1} v_1 + \omega_{l,2} v_2 + \dots + \omega_1 v_l. \end{array} \right.$$

Dans le premier cas, à la fonction  $v_j$  on peut faire correspondre une solution  $V_j$  de l'équation 3)

$$V_j = \gamma_j v_j,$$

qui, par une rotation dans le sens direct autour de l'origine, devient  $\bar{V}_j$ , tel que

$$4) \quad e^{2i\pi x} \bar{V}_j - V_j = v_j.$$

Il suffit de prendre pour la valeur de la constante  $\gamma_j$

$$\gamma_j = \frac{\text{I}}{\omega_j e^{2i\pi x} - \text{I}}.$$

Dans le second cas la solution  $V_j$  de l'équation 3)

$$V_j = \gamma_{j,1} v_1 + \gamma_{j,2} v_2 + \dots + \gamma_{j,j} v_j,$$

satisfait à la même relation 4), si les constantes  $\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2}, \dots, \gamma_{j,j}$  sont la solution du système

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} (\omega_1 \mu - \text{I}) \gamma_{j,1} + \mu \omega_{2,1} \gamma_{j,2} + \mu \omega_{3,1} \gamma_{j,3} + \dots + \mu \omega_{j,1} \gamma_{j,j} = 0, \\ (\omega_1 \mu - \text{I}) \gamma_{j,2} + \mu \omega_{3,2} \gamma_{j,3} + \dots + \mu \omega_{j,2} \gamma_{j,j} = 0, \\ \dots \\ (\omega_1 \mu - \text{I}) \gamma_{j,j-1} + \mu \omega_{j,j-1} \gamma_{j,j} = 0, \\ (\omega_1 \mu - \text{I}) \gamma_{j,j} = \text{I}, \end{array} \right.$$

dans lequel

$$\mu = e^{2i\pi x}.$$

Ce système admet d'ailleurs toujours une solution, sauf pour les valeurs isolées de  $x$  satisfaisant à la relation

$$\omega_1 e^{2i\pi x} - \text{I} = 0.$$

Par une rotation autour de l'origine la quantité

$$\frac{d^m y^{x+k}}{dy^m} \frac{d^n V_j}{dy^n},$$

où  $k$  est entier, devient

$$e^{2i\pi x} \frac{d^m y^{x+k}}{dy^m} \frac{d^n \bar{V}_j}{dy^n},$$

et l'on a

$$M[\bar{V}_j(y)] - M[V_j(y)] = M[v_j(y)].$$

Soit  $L_0$  un contour fermé partant d'un point  $a$  du plan pour y revenir, comprenant à son intérieur l'origine et laissant à son extérieur les points  $\alpha$ ; en posant

$$I_{L_0} = \int_{L_0} y^{x-1} [c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_q V_q] dy,$$

$c_1, c_2, \dots, c_q$  étant des constantes par rapport aux deux variables  $x$  et  $y$ , on a

$$F[I_{L_0}] = M[c_1 v_1(a) + c_2 v_2(a) + \dots + c_q v_q(a)].$$

Soit un contour  $L$  partant du même point  $a$  pour y revenir et comprenant à son intérieur un ou plusieurs points  $\alpha$ , mais laissant à son extérieur l'origine; une solution  $\varphi(y)$  de l'équation différentielle devient  $\bar{\varphi}(y)$  par une rotation de la variable le long de ce contour; en posant

$$I_L = \int_L y^{x-1} \varphi(y) dy,$$

on a la relation

$$F[I_L] = M[\bar{\varphi}(a) - \varphi(a)].$$

Mais la fonction

$$u = \bar{\varphi}(y) - \varphi(y),$$

est solution de l'équation différentielle; au voisinage du point  $a$ , elle s'exprime linéairement en fonction de  $v_1, v_2, \dots, v_q$ ; les constantes  $c$  peuvent être choisies de telle sorte qu'au voisinage de  $a$  la relation

$$5) \quad u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_q v_q$$



soit identiquement satisfaite; il en résulte que

$$F[I_L] - F[I_{L_0}] = 0,$$

c'est à dire que la fonction

$$f(x) = I_L - I_{L_0}$$

est une solution de l'équation aux différences finies; la valeur de cette fonction, d'après la méthode même qui a servi à la former, est indépendante de la position du point  $a$  et de la forme des contours  $L$  et  $L_0$ , pourvu que dans leurs déformations, ces derniers ne traversent jamais aucun point singulier des solutions de l'équation différentielle.

Dans ce qui suivra, je prendrai pour contour  $L$ , un contour  $L_j$  ne comprenant à son intérieur qu'un seul point  $\alpha$ , le point  $\alpha_j$  par exemple; de plus je supposerai qu'au voisinage du point  $\alpha_j$  les solutions de l'équation différentielle 3) sont toutes régulières.

Cette dernière condition est remplie, si  $\alpha_j$  est une racine simple du polynome  $B_0$ ; les racines de l'équation déterminante relative à ce point sont alors

$$0, 1, 2, \dots, q-2, \lambda_j,$$

et l'on choisit pour  $\varphi$  la solution  $\varphi_j$ , correspondant à la racine en général non entière  $\lambda_j$ , qui s'écrit

$$6) \quad \varphi_j(y) = (y - \alpha_j)^{\lambda_j} \psi_j(y),$$

la fonction  $\psi_j$  étant holomorphe en  $\alpha_j$ .

A chaque racine simple du polynome  $B_0$  correspond ainsi une solution  $f_j(x)$  de l'équation aux différences finies

$$7) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy - \int_{L_0} y^{x-1} [c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_q V_q] dy,$$

les constantes  $c$  étant les coefficients des fonctions  $v$  dans le second membre de la relation 5), qui devient ici

$$5') \quad (e^{2i\pi\lambda_j} - 1) \varphi_j(y) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_q v_q.$$

Passons aux cas particuliers. Nous supposons d'abord que  $\lambda_j$  est entier positif ou négatif et que la fonction  $\varphi_j(y)$  contient un logarithme

$$8) \quad \varphi_j(y) = (y - \alpha_j)^{\lambda_j} [\psi_{j,1} + \psi_{j,2} L(y - \alpha_j)];$$

les fonctions  $\psi$  sont holomorphes en  $\alpha_j$ ; la fonction  $f_j(x)$  est toujours définie par la relation 7) dans laquelle  $c_1, c_2, \dots, c_q$  sont déterminés de façon que l'égalité 5) soit satisfaite.

Si  $\lambda_j$  est entier négatif et si  $\varphi_j(y)$  ne contient pas de logarithme, le point  $\alpha_j$  est un pôle d'ordre  $k$  de la fonction  $\varphi_j(y)$

$$\lambda_j = -k.$$

On en conclut que  $F[I_{L_j}]$  est nul et la fonction  $f_j(x)$  est définie par la formule:

$$g) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy.$$

Mais au voisinage de  $\alpha_j$ , la fonction  $\psi_j(y)$  se développe en série entière:

$$\psi_j(y) = a_0 + a_1(y - \alpha_j) + \dots + a_n(y - \alpha_j)^n + \dots$$

Il en est de même de la fonction  $y^{x-1}$ ,

$$y^{x-1} = \alpha_j^{x-1} \left[ 1 + \frac{y - \alpha_j}{\alpha_j} \right]^{x-1} = \alpha_j^{x-1} \left[ 1 + \frac{(x-1)(y - \alpha_j)}{\alpha_j} + \frac{(x-1)(x-2)(y - \alpha_j)^2}{2! \alpha_j^2} + \dots \right],$$

et l'intégrale définissant  $f_j(x)$  est égale au résidu

$$f_j(x) = 2\pi i \alpha_j^{x-1} \left[ a_0 \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{(k-1)! \alpha_j^{k-1}} + \right. \\ \left. + a_1 \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-k+2)}{(k-2)! \alpha_j^{k-2}} + \dots + a_{k-1} \right].$$

La fonction  $f_j(x)$  est le produit de l'exponentielle  $\alpha_j^{x-1}$  par un polynôme de degré  $k-1$ .

Si  $\lambda_j$  est entier positif et si  $\varphi_j(y)$  ne contient pas de logarithme, l'intégrale  $I_{L_j}$  est nulle; l'expression de  $f_j(x)$  est illusoire; mais on sait que  $\lambda_j$  est alors supérieur à  $q-1$ ; il en résulte que

$$M[\varphi_j(\alpha_j)] = 0.$$

On remplace alors le contour  $L_j$  par un contour partant du point  $a$  pour aboutir en  $\alpha_j$ ; la fonction  $f_j(x)$  est alors définie par la formule



$$12) \quad g_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} q_j(y) dy - \int_{L_\infty} y^{x-1} [c_1 W_1 + c_2 W_2 + \dots + c_q W_q] dy,$$

et l'égalité

$$13) \quad u = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_q w_q.$$

Sur les deux contours  $L_0$  et  $L_\infty$  on aurait pu prendre les intégrales en sens inverse, au lieu de les prendre en sens direct; aux fonctions  $v$  et  $w$  l'on substituerait alors des fonctions  $v'$  et  $w'$  devenant par une rotation en sens inverse  $\bar{v}'$  et  $\bar{w}'$  qui satisfont à des relations analogues à celle du système I; dans les équations II déterminant les constantes  $\gamma$ , il faudrait remplacer  $e^{2i\pi x}$  par  $e^{-2i\pi x}$ ; on verra d'ailleurs plus loin, que les fonctions ainsi formées ne sont pas distinctes de celles que l'on a obtenues en prenant les intégrales en sens direct.

En résumé la méthode fait correspondre à chaque racine d'ordre de multiplicité  $p$ , non nulle du polynome  $B_0$ , au voisinage de laquelle les solutions de l'équation différentielle 3) sont régulières,  $p$  solutions  $f$  et  $p$  solutions  $g$  de l'équation aux différences finies. Si les solutions de l'équation 3) sont régulières au voisinage de toutes les racines non nulles du polynome  $B_0$ , le nombre des solutions de chaque groupe  $f$  et  $g$  est égal à celui de ces racines. Le polynome  $B_0$  est en général de degré  $r$  et n'admet pas de racines nulles; dans ces conditions le nombre des solutions de chaque groupe  $f$  et  $g$  est égal à l'ordre  $r$  de l'équation aux différences finies; si le polynome  $B_0$  est de degré inférieur à  $r$ , où s'il admet des racines nulles, le nombre des solutions de chaque groupe est inférieur à  $r$ .

## II. Quelques propriétés des fonctions $f$ et $g$ solutions de l'équation aux différences finies.

Supposons d'abord que l'équation fondamentale relative à l'origine n'admette que des racines simples  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l, \dots, \omega_q$ ; d'après les résultats du chapitre précédent on a:

$$V_l = \frac{v_l}{\omega_l e^{2i\pi x} - 1}$$

et la formule 7) définissant  $f_j(x)$  s'écrit:

$$\begin{aligned}
 f_j(x) = & \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy - \left[ \frac{c_1}{\omega_1 e^{2i\pi x} - 1} \int_{L_0} y^{x-1} v_1(y) dy + \dots \right. \\
 \text{14)} \quad & \left. \dots + \frac{c_l}{\omega_l e^{2i\pi x} - 1} \int_{L_0} y^{x-1} v_l(y) dy + \dots + \frac{c_q}{\omega_q e^{2i\pi x} - 1} \int_{L_0} y^{x-1} v_q(y) dy \right].
 \end{aligned}$$

Or toute intégrale de la forme

$$\int_L y^{x-1} \chi(y) dy$$

prise le long d'un contour  $L$  situé entièrement à distance finie, ne passant pas par l'origine et sur lequel  $\chi(y)$  reste fini, est une fonction holomorphe de  $x$  dans tout le plan.

Les seules singularités de la fonction  $f_j(x)$  ne peuvent donc être que des pôles simples, racines des dénominateurs

$$\omega_l e^{2i\pi x} - 1 = 0.$$

En posant

$$\omega_l = e^{2i\pi\beta_l}$$

ces points racines sont donnés par les formules

$$\begin{aligned}
 & x = -\beta_1 + m, \\
 & x = -\beta_2 + m, \\
 \text{15)} \quad & \dots \dots \dots \\
 & x = -\beta_l + m, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & x = -\beta_q + m,
 \end{aligned}$$

où  $m$  est entier positif, négatif ou nul.

Comme les racines de l'équation fondamentale sont toutes distinctes on a

$$v_l = y^{\beta_l} \psi_l(y);$$

la fonction  $\psi_l$  est uniforme au voisinage de l'origine; elle peut se mettre sous la forme, soit d'une somme de deux séries dont l'une est ordonnée par rapport aux puissances croissantes et l'autre par rapport aux puissances décroissantes de la variable, si la solution  $v_l$  est irrégulière, soit d'une seule série ordonnée par rap-

port aux puissances croissantes, si cette solution est régulière; dans ce dernier cas en prenant pour  $\beta_i$  la racine de l'équation déterminante relative à l'origine la série  $\psi_i$  ne contient que des puissances positives de  $y$  et commence par un terme constant non nul.

Le terme indépendant de  $x$  dans le développement de la fonction

$$\int_L y^{x-1+\beta_i} \psi_i(y) dy$$

au voisinage du point  $-\beta_i + m$ , suivant les puissances croissantes de  $x + \beta_i - m$ , est

$$\int_L y^{m-1} \psi_i(y) dy.$$

Si la fonction  $v_i$  est irrégulière à l'origine, cette intégrale n'est pas nulle en général quand  $m$  est entier positif, négatif ou nul. Si la fonction  $v_i$  est régulière à l'origine, l'intégrale est nulle pour les valeurs de  $m$  entières positives; elle est différente de 0, quand  $m$  est entier, négatif ou nul. Dans le premier cas la fonction  $f_j(x)$  admet pour pôles tous les points

$$x = -\beta_i + m.$$

Dans le second elle n'admet pour pôles que les points donnés par cette formule pour  $m$  entier négatif ou nul.

Examinons le cas où l'équation fondamentale relative à l'origine admet des racines multiples; les fonctions  $v$  appartenant au groupe correspondant à la racine  $\omega_1$  d'ordre de multiplicité  $l$  satisfont aux relations I du chapitre précédent; la fonction  $V_j$  est définie par la formule

$$V_j = \gamma_{j,1} v_1 + \gamma_{j,2} v_2 + \dots + \gamma_{j,j} v_j.$$

les coefficients  $\gamma$  étant des fonctions de  $x$ , solutions du système II. Dans ce cas encore les seuls singularités de la fonction  $f_j(x)$  ne peuvent être que des pôles racines des équations

$$\omega_1 e^{2i\pi x} - 1 = 0$$

où  $\omega_1$  est une racine de l'équation fondamentale. Pour vérifier si toutes ces racines sont bien des pôles de  $f_j(x)$ , je vais établir une expression nouvelle des fonctions  $V$ .

Les fonctions  $v$  peuvent se mettre sous la forme:

$$\text{III} \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \psi_{1,1} \\ v_2 = \psi_{2,1} + \psi_{2,2} Ly \\ \dots \\ v_l = \psi_{l,1} + \psi_{l,2} Ly + \dots + \psi_{l,l} [Ly]^{l-1}. \end{array} \right.$$

Les fonctions  $\psi$  sont de la forme

$$\psi = y^\beta \chi(y)$$

les  $\chi$  étant uniformes au voisinage de l'origine.

Les fonctions  $\psi$  et les constantes  $\omega$  du système I sont liées par les relations:

$$\text{IV} \left\{ \begin{array}{l} \omega_{j,1} \psi_{1,1} + \omega_{j,2} \psi_{2,1} + \dots + \omega_{j,j-1} \psi_{j-1,1} = \\ \qquad \qquad \qquad = \omega_1 [2i\pi \psi_{j,2} + \dots + (2i\pi)^{g-1} \psi_{j,g} + \dots + (2i\pi)^{j-1} \psi_{j,j}], \\ \omega_{j,2} \psi_{2,2} + \dots + \omega_{j,j-1} \psi_{j-1,2} = \omega_1 [2i\pi C_{\frac{1}{2}}^1 \psi_{j,3} + \dots + (2i\pi)^{j-2} C_{j-1}^1 \psi_{j,j}], \\ \dots \\ \omega_{j,j-g} \psi_{j-g,j-g} + \dots + \omega_{j,j-1} \psi_{j-1,j-g} = \\ \qquad \qquad \qquad = \omega_1 [2i\pi C_{j-g}^{j-g-1} \psi_{j,j-g+1} + \dots + (2i\pi)^g C_{j-1}^{j-g-1} \psi_{j,j}], \\ \dots \\ \omega_{j,j-2} \psi_{j-2,j-2} + \omega_{j,j-1} \psi_{j-1,j-2} = \omega_1 [2i\pi C_{j-2}^{j-3} \psi_{j,j-1} + (2i\pi)^2 C_{j-1}^{j-3} \psi_{j,j}], \\ \omega_{j,j-1} \psi_{j-1,j-1} = 2i\pi \omega_1 C_{j-1}^{j-2} \psi_{j,j}, \end{array} \right.$$

en désignant par  $C_j^g$  le nombre des combinaisons de  $j$  objets pris  $g$  à  $g$ .

D'autre part en posant

$$\gamma'_{j,g} = \frac{\gamma_{j,g}}{\omega_1 \mu - 1}$$

et

$$\omega'_{j,g} = \frac{\mu \omega_{j,g}}{\omega_1 \mu - 1},$$

le système II devient II',

$$\text{II}' \left\{ \begin{array}{l} \gamma'_{j,1} + \omega'_{2,1} \gamma'_{j,2} + \dots + \omega'_{j,1} \gamma'_{j,j} = 0, \\ \gamma'_{j,2} + \dots + \omega'_{j,2} \gamma'_{j,j} = 0, \\ \dots \\ \gamma'_{j,j-1} + \omega'_{j,j-1} \gamma'_{j,j} = 0, \\ \gamma'_{j,j} = 1. \end{array} \right.$$

Or on a évidemment

$$V_1 = \frac{v_1}{\omega_1 \mu - 1},$$

d'où

$$y^{x-1} V_1 = K \psi_{1,1},$$

en posant

$$K = \frac{y^{x-1}}{\omega_1 \mu - 1}.$$

De même on a :

$$V_2 = \frac{1}{\omega_1 \mu - 1} \left[ v_2 - \frac{\mu \omega_{2,1}}{\omega_1 \mu - 1} v_1 \right],$$

d'où

$$V_2 = \frac{-\mu \omega_{2,1}}{(\omega_1 \mu - 1)^2} \psi_{1,1} + \frac{\psi_{2,1}}{\omega_1 \mu - 1} + \frac{\psi_{2,2} L y}{\omega_1 \mu - 1}.$$

En vertu de la relation

$$\omega_{2,1} \psi_{1,1} = 2 i \pi \omega_1 \psi_{2,2},$$

cette égalité peut s'écrire

$$y^{x-1} V_2 = \frac{\psi_{2,1} y^{x-1}}{\omega_1 \mu - 1} + \psi_{2,2} \left[ \frac{y^{x-1} L y}{\omega_1 \mu - 1} - \frac{2 i \pi \omega_1 \mu y^{x-1}}{(\omega_1 \mu - 1)^2} \right],$$

ou

$$y^{x-1} V_2 = \psi_{2,1} K + \psi_{2,2} \frac{dK}{dx}.$$

D'une façon générale, je dis que l'on a

$$16) \quad y^{x-1} V_j = \psi_{j,1} K + \psi_{j,2} \frac{dK}{dx} + \dots + \psi_{j,j} \frac{d^{j-1} K}{dx^{j-1}}.$$

Cette égalité étant vraie pour  $V_1$  et  $V_2$ , j'admets qu'elle est vérifiée pour  $V_3, \dots, V_{j-1}$  et je démontre qu'elle est encore vraie pour  $V_j$ . En se reportant au système II', on voit que l'on a les relations de récurrence V :



$$V \begin{cases} \gamma'_{j,j} = 1, \\ \gamma'_{j,j-1} = -\omega'_{j,j-1} \gamma'_{j-1,j-1}, \\ \gamma'_{j,j-2} = -\omega'_{j,j-1} \gamma'_{j-1,j-2} - \omega'_{j,j-2} \gamma'_{j-2,j-2}, \\ \dots \\ \gamma'_{j,j-g} = -\omega'_{j,j-1} \gamma'_{j-1,j-g} - \omega'_{j,j-2} \gamma'_{j-2,j-g} - \dots - \omega'_{j,j-1} \gamma'_{j-g,j-g}. \end{cases}$$

La relation 16) s'écrit,

$$16') \frac{y^{x-1}}{\omega_1 \mu - 1} [\gamma'_{j,1} v_1 + \gamma'_{j,2} v_2 + \dots + \gamma'_{j,j} v_j] = \psi_{j,1} K + \psi_{j,2} \frac{dK}{dx} + \dots + \psi_{j,j} \frac{d^{j-1} K}{dx^{j-1}}.$$

Si l'on remplace dans le premier membre les fonctions  $v$  par leurs valeurs tirées de III et si l'on égale ensuite les coefficients des mêmes puissances de  $Ly$  dans les deux membres de 16'), il vient en désignant par  $M$  la quantité  $\frac{1}{\omega_1 \mu - 1}$ ,

$$VI \begin{cases} \gamma'_{j,1} \psi_{1,1} + \gamma'_{j,2} \psi_{2,1} + \dots + \gamma'_{j,j-1} \psi_{j-1,1} = (\omega_1 \mu - 1) \left[ \psi_{j,2} \frac{dM}{dx} + \dots + \psi_{j,j} \frac{d^{j-1} M}{dx^{j-1}} \right], \\ \gamma'_{j,2} \psi_{2,2} + \dots + \gamma'_{j,j-1} \psi_{j-1,2} = (\omega_1 \mu - 1) \left[ C_{j,3}^1 \psi_{j,3} \frac{dM}{dx} + \dots + C_{j-1}^1 \psi_{j,j} \frac{d^{j-2} M}{dx^{j-2}} \right], \\ \dots \\ \gamma'_{j,j-g} \psi_{j-g,j-g} + \dots + \gamma'_{j,j-1} \psi_{j-1,j-g} = \\ = (\omega_1 \mu - 1) \left[ C_{j-g}^{j-g-1} \psi_{j,j-g+1} \frac{dM}{dx} + \dots + C_{j-1}^{j-g-1} \psi_{j,j} \frac{d^{g-1} M}{dx^{g-1}} \right], \\ \dots \\ \gamma'_{j,j-1} \psi_{j-1,j-1} = C_{j-1}^{j-2} (\omega_1 \mu - 1) \psi_{j,j} \frac{dM}{dx}. \end{cases}$$

Il s'agit de démontrer que ces relations sont bien vérifiées; prenons celle d'entre elles dont le premier terme est  $\gamma'_{j,j-g} \psi_{j-g,j-g}$  et remplaçons y les lettres  $\gamma'$  par leurs valeurs tirées de V; on a

$$17) \begin{cases} \omega'_{j,j-1} [\gamma'_{j-1,j-g} \psi_{j-g,j-g} + \gamma'_{j-1,j-g+1} \psi_{j-g+1,j-g} + \dots + \gamma'_{j-1,j-1} \psi_{j-1,j-g}] \\ + \omega'_{j,j-2} [\gamma'_{j-2,j-g} \psi_{j-g,j-g} + \gamma'_{j-2,j-g+1} \psi_{j-g+1,j-g} + \dots + \gamma'_{j-2,j-2} \psi_{j-2,j-g}] \\ + \dots \\ + \omega'_{j,j-g+1} [\gamma'_{j-g+1,j-g} \psi_{j-g,j-g} + \gamma'_{j-g+1,j-g+1} \psi_{j-g+1,j-g}] \\ + \omega'_{j,j-g} \gamma'_{j-g,j-g} \psi_{j-g,j-g} \\ + (\omega_1 \mu - 1) \left[ C_{j-g}^{j-g-1} \psi_{j,j-g+1} \frac{dM}{dx} + \dots + C_{j-1}^{j-g-1} \psi_{j,j} \frac{d^{g-1} M}{dx^{g-1}} \right] = 0. \end{cases}$$



$$20) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy - \sum c_l \int_{L_0} \left[ \psi_{l,1} K + \psi_{l,2} \frac{dK}{dx} + \dots + \psi_{l,l} \frac{d^{l-1}K}{dx^{l-1}} \right] dy.$$

En se reportant à ce qui a été dit plus haut sur l'intégrale  $\int_{L_0} y^{x-1} \psi(y) dy$  et en remarquant que tout pôle simple de l'intégrale

$$\int_{L_0} K \psi(y) dy$$

devient un pôle d'ordre  $l-1$  dans sa dérivée d'ordre  $l-1$  par rapport à  $x$ , on voit que, lorsque les fonctions  $v_1, v_2, \dots, v_g$  sont irrégulières au voisinage de l'origine, la fonction  $f_j(x)$  admet en général tous les points racines du dénominateur  $\omega_1 e^{2i\pi x} - 1$  comme pôles d'ordre  $l-1$ , puissance la plus élevée du logarithme, figurant dans le groupe de solutions  $v$ , correspondant à la racine  $\omega_1$  de l'équation fondamentale.

Supposons que les fonctions  $v$  soient régulières au voisinage de l'origine et soit  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$  les racines de l'équation déterminante relative à l'origine, correspondant à la racine  $\omega_1$  de l'équation fondamentale; on a

$$\psi_{j,g} = y^{\beta_j} \chi_{j,g}$$

la fonction  $\chi_{j,g}$  étant holomorphe à l'origine; si le premier terme de son développement est de degré  $n$ , les seules pôles de l'intégrale

$$\int K \psi_{j,g} dy$$

sont les points

$$x = -\beta_j - n + m,$$

où  $m$  est entier négatif ou nul; ces points sont des pôles d'ordre  $g-1$  dans la dérivée d'ordre  $g-1$  par rapport à  $x$ ; on peut ainsi déterminer leur ordre de multiplicité; à partir d'une valeur de  $m$  de module suffisamment grand les pôles correspondant à la racine  $\omega_1$  sont manifestement d'ordre  $l-1$ , puissance la plus élevée du logarithme dans le groupe de fonctions  $v$  correspondant à cette même racine.

En résumé les fonctions  $f_j(x)$  sont méromorphes et admettent toutes les mêmes pôles avec le même ordre de multiplicité. Ces pôles sont situés sur autant de parallèles à l'axe des abscisses, que l'équation fondamentale relative à l'ori-

gine admet de racines distinctes; sur chacune de ces droites, ils forment une série de points, dont les abscisses diffèrent d'une unité; ils s'étendent de  $-\infty$  à  $+\infty$ , quand les solutions de l'équation 3) sont irrégulières à l'origine; dans le cas contraire ils ne s'étendent à l'infini, que dans la direction négative de l'axe des abscisses et l'on peut trouver une parallèle à l'axe des ordonnées, à droite de laquelle les fonctions  $f_j(x)$  restent holomorphes.

Dans cette dernière région, il est possible de simplifier la formule définissant  $f_j(x)$ ; en effet  $x$  a alors sa partie réelle assez grande pour que  $y^{x-1}\psi_{j,g}$  ne contienne que des puissances de  $y$ , dans lesquelles la partie réelle de l'exposant est supérieure à  $-1$ ; l'intégrale de la formule 7) prise le long du contour  $L_0$  tend vers 0, quand le contour  $L_0$  tend dans toutes parties vers l'origine et l'on peut écrire

$$21) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy,$$

$L_j$  étant un contour partant de l'origine pour y revenir et ne contenant à son intérieur que le seul point singulier  $\alpha_j$ .

L'étude des solutions  $g(x)$  formées au moyen des intégrales prises sur le contour  $L_\infty$  donnerait des résultats analogues aux précédents; car les raisonnements faits sur les racines de l'équation fondamentale relative à l'origine et sur les fonctions  $v$  sont encore exactes pour les racines de l'équation fondamentale relative à l'infini et les fonctions  $w$ ; toutefois si ces dernières sont régulières, les pôles s'étendent à l'infini dans le sens positif et non plus dans le sens négatif de l'axe des abscisses; c'est alors dans un demi plan situé à gauche d'une parallèle à l'axe des ordonnées que les fonctions  $g(x)$  sont holomorphes. Quand le point  $x$  est situé dans cette dernière région, la fonction  $g_j(x)$  peut être définie par la formule 21) dans laquelle  $L_j$  désigne un contour contenant à son intérieur le seul point  $\alpha_j$  et dont l'origine et l'extrémité sont rejetées à l'infini dans une même direction.

Le développement en séries convergentes des coefficients  $\gamma$  permet de trouver une nouvelle forme des fonctions  $f_j(x)$ .

En se reportant au système d'équations II, on voit que

$$\gamma_{j,g} = \frac{P(\mu)}{(\omega_1 \mu - 1)^{j-g+1}}.$$

$P(\mu)$  étant un polynome en  $\mu$  de degré  $j-g$ ; on peut déterminer une parallèle à l'axe des abscisses, tel que quand le point  $x$  est situé au dessus de cette droite,

les fonctions  $\gamma_{j,g}$  se développent en séries convergentes, ordonnées par rapport aux puissances croissantes de  $\mu$ , c'est-à-dire de  $e^{2i\pi x}$ ; on a

$$\gamma_{j,g} = b_{j,g}^{(1)}\mu + b_{j,g}^{(2)}\mu^2 + \dots + b_{j,g}^{(n)}\mu^n + \dots$$

et si les deux indices sont égaux

$$\gamma_{j,j} = -1 + b_{j,j}^{(1)}\mu + \dots + b_{j,j}^{(n)}\mu^n + \dots$$

Cette parallèle à l'axe des abscisses n'est autre que la droite portant les pôles de la fonction  $f_j(x)$ , racines de l'équation  $\omega_1\mu - 1 = 0$ .

Je remplace les  $\gamma$  par ces développements en séries dans les équations du système II; en annulant les coefficients de  $\mu$ , il vient

$$\begin{aligned} b_{j,1}^{(1)} + \omega_{j,1} &= 0, \\ b_{j,2}^{(1)} + \omega_{j,2} &= 0, \\ \dots & \\ b_{j,j}^{(1)} + \omega_{j,j} &= 0. \end{aligned}$$

Or par une rotation de la variable  $y$  dans le sens direct le long du contour  $L_0$ , la fonction  $v_j$  devient  $\bar{v}_j^{(1)}$ ; les constantes  $b_{j,1}^{(1)}, b_{j,2}^{(1)} \dots b_{j,j}^{(1)}$  ne sont autres que les coefficients de  $v_1, v_2, \dots v_j$  dans l'expression de  $-\bar{v}_j^{(1)}$ . D'une façon générale quand la variable  $y$  tourne le long du contour  $L_0$  dans le sens direct  $n$  fois autour de l'origine,  $v_j$  devient  $\bar{v}_j^{(n)}$ . Or en annulant les coefficients de  $\mu^n$ , on a:

$$\begin{aligned} -b_{j,1}^{(n)} + \omega_{j,1} b_{j,1}^{(n-1)} + \dots + \omega_{j,1} b_{j,j}^{(n-1)} &= 0, \\ -b_{j,2}^{(n)} + \omega_{j,2} b_{j,2}^{(n-1)} + \dots + \omega_{j,2} b_{j,j}^{(n-1)} &= 0, \\ \dots & \\ -b_{j,2}^{(n)} &+ \omega_{j,1} b_{j,j}^{(n-1)} = 0. \end{aligned}$$

Si l'on admet que  $b_{j,1}^{(n-1)}, \dots b_{j,j}^{(n-1)}$  sont les coefficients de  $v_1, v_2, \dots v_j$  dans l'expression de  $-\bar{v}_j^{(n-1)}$

$$-\bar{v}_j^{(n-1)} = b_{j,1}^{(n-1)} v_1 + b_{j,2}^{(n-1)} v_2 + \dots + b_{j,j}^{(n-1)} v_j$$

ces équations montrent, que  $b_{j,1}^{(n)} \dots b_{j,j}^{(n)}$  sont les coefficients de  $v_1, \dots v_j$  dans l'expression de  $-\bar{v}_j^{(n)}$ .

En remplaçant dans l'expression de  $V_j$  les coefficients  $\gamma$  par leurs développements en séries, il vient ainsi

$$V_j = -v_j - \mu \bar{v}_j^{(1)} - \mu^2 \bar{v}_j^{(2)} - \dots - \mu^n \bar{v}_j^{(n)} - \dots$$

Si l'on pose

$$U = c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_q V_q$$

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_q v_q = \varphi_j(y) - \varphi_j(y);$$

on a de même

$$U = -u - \mu \bar{u}^{(1)} - \mu^2 \bar{u}^{(2)} - \dots - \mu^n \bar{u}^{(n)} - \dots,$$

développement valable dans tout le demiplan situé au dessus de celle des parallèles à l'axe des abscisses portant les pôles de la fonction  $f_j(x)$  dont l'ordonnée à l'origine est la plus grande.

Désignant par  $\beta_0$  l'argument du point  $\alpha$ , origine du contour  $L_0$ , et intégrant sur ce contour, on trouve

$$\int_{L_0} y^{x-1} U dy = - \int_{\beta_0}^{\beta_0+2\pi} y^{x-1} u dy - \int_{\beta_0}^{\beta_0+2\pi} (y^{x-1} u)^{(1)} dy - \dots - \int_{\beta_0}^{\beta_0+2\pi} (y^{x-1} u)^{(n)} dy - \dots$$

La somme de cette série n'est autre que

$$- \int_{\beta_0}^{+\infty} y^{x-1} u dy,$$

l'intégrale étant prise à partir du point  $\alpha$ , sur le contour  $L_0$ , parcouru une infinité de fois en sens direct. Ainsi dans le demiplan située au dessus de celle des parallèles à l'axe des abscisses portant les pôles de  $f_j(x)$  dont l'ordonnée à l'origine est la plus grande, la formule 7) peut s'écrire

$$22) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy + \int_{\beta_0}^{+\infty} y^{x-1} u dy.$$

De même on peut déterminer une seconde parallèle à l'axe des abscisses, telle que, quand le point  $x$  est situé au dessous de cette droite, les coefficients  $\gamma$  se développent en séries convergentes ordonnées suivant les puissances décroissantes de  $\mu$ :

$$\gamma_{j,g} = \frac{\beta_{j,g}^{(1)}}{\mu} + \frac{\beta_{j,g}^{(2)}}{\mu^2} + \dots + \frac{\beta_{j,g}^{(n)}}{\mu^n} + \dots.$$

En portant ces valeurs de  $\gamma$  dans les équations II et en annulant le coefficient de  $\frac{1}{\mu}$ , il vient

$$\omega_1 \beta_{j,1}^{(1)} + \omega_{2,1} \beta_{j,2}^{(1)} + \dots + \omega_{j,1} \beta_{j,j}^{(1)} = 0,$$

$$\omega_1 \beta_{j,2}^{(1)} + \dots + \omega_{j,2} \beta_{j,j}^{(1)} = 0,$$

$$\dots$$

$$\omega_1 \beta_{j,j}^{(1)} = 1.$$

Si l'on considère la fonction  $N_j^{(1)}$ ,

$$N_j^{(1)} = \beta_{j,1}^{(1)} v_1 + \beta_{j,2}^{(1)} v_2 + \dots + \beta_{j,j}^{(1)} v_j,$$

on voit qu'elle devient par une rotation de la variable dans le sens direct le long du contour  $L_0$ ,  $\bar{N}_j^{(1)}$ , avec

$$\bar{N}_j^{(1)} = v_j.$$

D'une façon générale posons

$$N_j^{(n)} = \beta_{j,1}^{(n)} v_1 + \beta_{j,2}^{(n)} v_2 + \dots + \beta_{j,j}^{(n)} v_j.$$

En annulant le coefficient de  $\frac{1}{\mu^n}$  dans les équations II, où les  $\gamma$  ont été remplacés par leurs développements en séries, on trouve :

$$\begin{aligned} -\beta_{j,1}^{(n-1)} + \omega_1 \beta_{j,1}^{(n)} + \omega_{2,1} \beta_{j,2}^{(n)} + \dots + \omega_{j,1} \beta_{j,j}^{(n)} &= 0, \\ -\beta_{j,2}^{(n-1)} + \omega_1 \beta_{j,2}^{(n)} + \dots + \omega_{j,2} \beta_{j,j}^{(n)} &= 0, \\ \dots & \\ -\beta_{j,j}^{(n-1)} + \omega_1 \beta_{j,j}^{(n)} &= 0. \end{aligned}$$

La fonction  $N_j^{(n)}$  par une rotation de la variable en sens direct devient  $N_j^{(n-1)}$ ; en résumé  $\beta_{j,1}^{(n)}, \dots, \beta_{j,j}^{(n)}$  sont les coefficients de  $v_1, v_2, \dots, v_j$ , dans l'expression de  $\bar{v}_j^{(-n)}$ , cette fonction étant ce que devient  $v_j$ , quand la variable parcourt  $n$  fois le contour  $L_0$  en tournant en sens inverse.

En remplaçant les  $\gamma$  par leur développement en série dans l'expression de  $v_j$ , on a donc

$$V_j = \frac{1}{\mu} \bar{v}_j^{(-1)} + \frac{1}{\mu^2} \bar{v}_j^{(-2)} + \dots + \frac{1}{\mu^n} \bar{v}_j^{(-n)} + \dots,$$

d'où

$$U = \frac{1}{\mu} \bar{u}^{(-1)} + \frac{1}{\mu^2} \bar{u}^{(-2)} + \dots + \frac{1}{\mu^n} \bar{u}^{(-n)} + \dots,$$

développement valable dans tout le demi-plan situé au dessous de celle des parallèles à l'axe des abscisses portant les pôles de  $f_j(x)$  dont l'ordonnée à l'origine est la plus petite.

Or le second membre de la formule 7) définissant  $f_j(x)$  peut s'écrire

$$23) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy + \int_{-L_0} y^{x-1} u dy + \int_{-L_0} y^{x-1} U dy,$$

les deux dernières intégrales étant prises sur le contour  $L_0$ , parcouru à partir de son origine  $a$ , en sens inverse; en remplaçant  $U$  par son développement en série, il vient finalement:

$$24) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy + \int_{\beta_0}^{-\infty} y^{x-1} u dy,$$

la seconde intégrale étant prise à partir du point  $a$  sur le contour  $L_0$  parcouru une infinité de fois en sens inverse.

Nous avons remarqué qu'au lieu de considérer les fonctions  $v$  on aurait pu pour former des solutions de l'équation aux différences finies, faire usage des fonctions  $v'$ , solutions de l'équation différentielle qui par une rotation en sens inverse deviennent des fonctions  $\bar{v}'$ , liées aux fonctions  $v'$  par des relations de même espèce que les relations I. On aurait alors formé des fonctions  $V'$ ,

$$V'_j = \gamma'_{j,1} v'_1 + \gamma'_{j,2} v'_2 + \dots + \gamma'_{j,j} v'_j,$$

les coefficients  $\gamma'$  satisfaisant à des équations analogues à celles du système II, mais dans lesquelles  $\mu$  désignerait non plus la quantité  $e^{2i\pi x}$ , mais son inverse  $e^{-2i\pi x}$ ; on aurait ainsi obtenu des solutions:

$$25) \quad f'_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy - \int_{L_0} y^{x-1} [c'_1 V'_1 + c'_2 V'_2 + \dots + c'_q V'_q] dy,$$

les coefficients  $c'$  étant tels que:

$$u = \bar{\varphi}_j(y) - \varphi(y) = c'_1 v'_1 + c'_2 v'_2 + \dots + c'_q v'_q.$$

En raisonnant sur les coefficients  $\gamma'$  comme on vient de le faire sur les fonctions  $\gamma$ , on démontre que l'on peut déterminer une parallèle à l'axe des abscisses telle que, pour les points  $x$  appartenant au demi plan situé au dessus de cette droite, la fonction  $f'_j(x)$  peut être définie par la formule 22) et une parallèle à l'axe des abscisses telle que, pour les points  $x$  appartenant au demi plan situé au dessous de cette droite, la fonction  $f'_j(x)$  peut être définie par la formule 24). Les deux fonctions  $f_j(x)$  et  $f'_j(x)$  qui ont les mêmes pôles et sont identiques dans deux demi plans sont donc identiques dans tout le plan.

Il est clair que l'on pourrait établir des formules analogues pour les fonctions  $g(x)$  et que l'on concluerait qu'elles sont identiques aux fonctions  $g'$  formées avec les solutions  $w'$  de l'équation 3).



III. Des séries divergentes représentant asymptotiquement les fonctions

$f(x)$ . — Cas où l'argument de  $x$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ .

Les fonctions  $f(x)$ , solutions de l'équation aux différences finies, se présentent d'après la formule 7), comme la somme de deux intégrales prises l'une sur le contour  $L_0$  entourant l'origine et l'autre sur le contour  $L_j$  entourant le point  $\alpha_j$ ; pour former les séries asymptotiques qui les représentent pour les grandes valeurs de la variable, on divise ces contours en plusieurs parties convenablement choisies; désignant par  $I_1, I_2, \dots, I_l$  les intégrales relatives à chacun de ces contours partiels, dont les limites peuvent d'ailleurs varier, quand  $x$  croît, on a

$$f(x) = I_1 + I_2 + \dots + I_l.$$

Parmi les intégrales  $I$ , il en existe une,  $I_1$  par exemple, pour laquelle on peut former une fonction  $P$  et une série,

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots,$$

telles que l'expression,

$$x^n \left[ \frac{I_1}{P} - \left( a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right) \right],$$

où  $n$  est un entier choisi arbitrairement tendre vers 0 quand  $x$  s'éloigne à l'infini avec un argument compris entre deux limites finies.

On démontre d'autre part que les rapports

$$\frac{I_2}{P}, \dots, \frac{I_l}{P},$$

tendent dans les mêmes conditions vers 0 comme  $e^{-h\varrho^k}$ ,  $h$  et  $k$  étant deux nombres positifs et  $\varrho$  étant le module de  $x$ . L'expression

$$x^n \left[ \frac{f(x)}{P} - \left( a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right) \right],$$

tend donc vers 0 dans les mêmes conditions, et le rapport  $\frac{f(x)}{P}$  est représenté asymptotiquement par la série de terme général  $\frac{a_n}{x^n}$ . Toute la démonstration repose donc sur la formation et l'étude des intégrales  $I_1, \dots, I_l$ ; l'une d'entre

elles donne naissance à la série asymptotique; les autres disparaissent. Pour faciliter le langage nous dirons que les rapports  $\frac{I_2}{P}, \dots, \frac{I_1}{P}$  sont représentés asymptotiquement par des séries dont tous les termes sont nuls.

Je considère l'intégrale

$$26) \quad I_1 = \int y^{\alpha-1} \varphi_j(y) dy,$$

prise le long du contour indiqué sur la figure 1, à savoir: une portion  $mn$  d'une droite passant par  $\alpha_j$ , une petite circonférence  $c$  de rayon  $\alpha_j n$  et de centre  $\alpha_j$  parcourue en sens direct, la portion de droite  $nm$ . Au voisinage du point  $\alpha_j$ , la fonction  $\varphi_j(y)$  est de la forme

$$\varphi_j(y) = (y - \alpha_j)^{k_j} \psi_j(y),$$

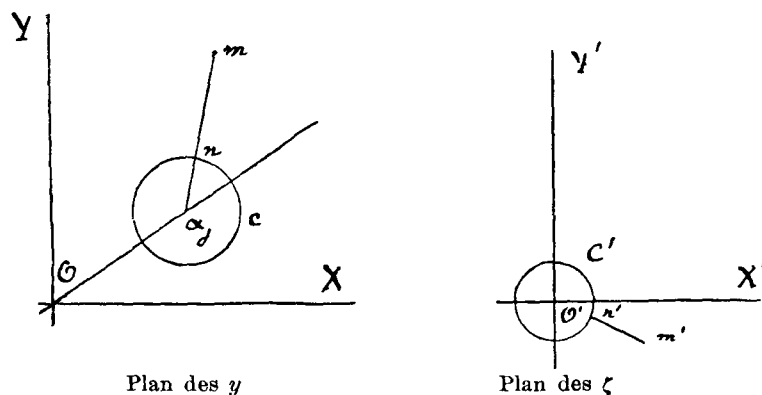


Figure 1.

$\psi_j(y)$  étant holomorphe en  $\alpha_j$ ,

$$\psi_j(y) = a_0^j + a_1^j (y - \alpha_j) + \dots + a_n^j (y - \alpha_j)^n + \dots$$

Soit  $\omega_j$  l'argument de  $\alpha_j$  et soit  $\vartheta$  l'un des angles que balaie une demi droite coïncidant d'abord avec la demi droite  $\alpha_j \infty$  d'argument  $\omega_j$  et tournant dans le sens direct autour du point  $\alpha_j$  pour venir coïncider avec la demi droite  $nm$ ; je suppose qu'au point  $m$ , origine du contour d'intégration,  $y - \alpha_j$  dans l'expression de  $\varphi_j(y)$  a pour argument  $\omega_j + \vartheta$ ; je pose successivement

$$y = \alpha_j (1 + \xi),$$

$$\xi = \eta e^{i\alpha},$$

$$\eta = \frac{\zeta}{x}.$$

Il vient:

$$27) \quad I_1 = \frac{\alpha_j^{x+\lambda_j} e^{i\pi(\lambda_j+1)}}{x^{\lambda_j+1}} J_1$$

avec

$$28) \quad J_1 = \int \left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)^{x-1} \zeta^{\lambda_j} \psi_j \left[ \alpha_j \left(1 - \frac{\zeta}{x}\right) \right] d\zeta.$$

L'intégrale  $J_1$  est prise dans le plan des  $\zeta$  le long d'une portion  $m'n'$  d'une droite, passant par l'origine, d'une petite circonférence  $c'$  parcourue en sens direct et enfin de la portion de droite  $n'm'$ ; à l'origine  $m'$  du contour,  $\zeta$  a pour argument  $\vartheta - \pi + \sigma$ , si  $x$  est égal à  $\rho e^{i\sigma}$ .

Pour les valeurs de  $\frac{\zeta}{x}$  dont le module est inférieur à l'unité, on a

$$\left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)^x = e^{xL\left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)} = e^{-\zeta+S}$$

en désignant par  $S$  la somme de la série absolument et uniformément convergente:

$$S = -\frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{x} - \frac{1}{3} \frac{\zeta^3}{x^2} - \dots - \frac{1}{n} \frac{\zeta^n}{x^{n-1}} - \dots$$

En ordonnant par rapport aux puissances croissantes de  $\frac{1}{x}$  la série

$$e^S = 1 + \frac{S}{1} + \frac{S^2}{2!} + \dots + \frac{S^n}{n!} + \dots,$$

on obtient la série

$$\frac{\left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)^x}{e^{-\zeta}} = 1 + \frac{e_1}{x} + \frac{e_2}{x^2} + \dots + \frac{e_n}{x^n} + \dots$$

dans laquelle les coefficients  $e$  sont des polynomes en  $\zeta$  et qui est absolument et uniformément convergente pour les valeurs de  $\zeta$ , dont le module est inférieur à celui de  $x$ . D'autre part pour les valeurs de  $\frac{\zeta}{x}$  suffisamment petites on a

$$\psi_j \left[ \alpha_j \left(1 - \frac{\zeta}{x}\right) \right] = \alpha_0^j - \frac{\alpha_1^j \alpha_j \zeta}{x} + \dots + (-1)^n \alpha_n^j \left(\frac{\alpha_j \zeta}{x}\right)^n + \dots$$

La fonction  $\left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)^{-1}$  se développe de même suivant les puissances croissantes

de  $\frac{\zeta}{x}$ . Finalement pour les valeurs de  $\zeta$  dont le module est inférieur ou égal à  $K\rho$ ,  $K$  étant un nombre positif inférieur à l'unité et convenablement choisi, on a

$$\frac{\left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)^{x-1} \psi_j \left[ \alpha_j \left(1 - \frac{\zeta}{x}\right) \right]}{e^{-\zeta}} = d_0^j + \frac{d_1^j}{x} + \dots + \frac{d_n^j}{x^n} + \dots$$

la série du second membre étant absolument et uniformément convergente. Dans le développement du produit  $\psi \left[ \alpha_j \left(1 - \frac{\zeta}{x}\right) \right] \left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)^{-1}$ , le coefficient de  $\frac{1}{x^n}$  contient  $\zeta^n$  en facteur; dans la série représentant  $e^\zeta$ ,  $e_n$  est un polynome en  $\zeta$  dont le terme de plus haut degré est de degré  $2n$ . Il en résulte qu'à l'exception du premier coefficient  $d_0^j$  qui est égal à  $\alpha_j^j$ , les coefficients  $d_p^j$  sont des polynomes en  $\zeta$ ; le terme de plus bas degré de  $d_p^j$  est de degré  $p$ , le terme de plus haut degré est de degré  $2p$ . Je considère le reste de la série,

$$R_n = \frac{1}{x^n} \left[ \frac{d_{n+1}^j}{x} + \frac{d_{n+2}^j}{x^2} + \dots \right].$$

Si le module de  $\zeta$  reste inférieur ou égal à  $\rho^\beta$ ,  $\beta$  étant un nombre positif satisfaisant à l'inégalité

$$2(n+q)\beta - q < 0$$

le terme  $\frac{d_{n+q}^j}{x^q}$  tend vers 0 quand  $\rho$  augmente indéfiniment. Or quand  $q$  varie depuis 1 jusqu'à l'infini la fraction  $\frac{q}{n+q}$  croît à partir de  $\frac{1}{n+1}$  et tend vers 1. Si l'on assujettit  $\beta$  à satisfaire à l'inégalité

$$\beta < \frac{1}{2(n+1)},$$

tous les termes de la série dans la parentèse tendent vers 0 et la série étant uniformément convergente, on peut écrire

$$R_n = \frac{\varepsilon_1}{x^n},$$

$\varepsilon_1$  tendant vers 0 comme  $\rho^{2(n+1)\beta-1}$ , quand  $\rho$  augmente indéfiniment.

Je choisis alors le contour sur lequel est prise l'intégrale  $J_1$  de la façon suivante; la circonférence  $c'$  conserve un rayon invariable; le point  $m'$  a pour module  $\rho^\beta$  et s'éloigne à l'infini, quand  $\rho$  augmente indéfiniment, la droite  $n'm'$  ayant

toujours pour argument  $\vartheta - \pi + \sigma$ . Dans ces conditions le module de  $\frac{\zeta}{x}$  est au plus égal à  $\varrho^{\beta-1}$  et tend vers 0; le contour  $m n, c, n m$  sur lequel est prise l'intégrale  $J_1$  se déforme en restant semblable à lui-même, tous ses points tendant vers  $\alpha_j$ ; il vient ainsi

$$J_1 = \int e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} \left[ d_0^j + \frac{d_1^j}{x} + \dots + \frac{d_n^j}{x^n} + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] d\zeta.$$

Considérons l'intégrale:

$$\int \varepsilon_1 e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} d\zeta$$

et plus généralement l'intégrale

$$\int \varepsilon_1 e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} (L\zeta)^p d\zeta,$$

où  $p$  est un entier positif.

Quand l'argument de  $\zeta$  reste compris dans un intervalle où son cosinus est toujours positif, ces intégrales tendent uniformément vers 0 comme  $\varepsilon_1$ ; de même l'intégrale

$$\int_{\varrho^{\beta}}^{+\infty} e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} [L\zeta]^p d\zeta$$

prise sur la droite  $m'n'$ , depuis le point  $m'$  jusqu'à l'infini tend uniformément vers 0, comme  $e^{-h\varrho^k}$ ,  $h$  et  $k$  étant deux nombres positifs, quand  $\varrho$  augmente indéfiniment, pourvu que l'argument de  $\zeta$  reste compris dans un intervalle où son cosinus est constamment positif. On a donc finalement

$$J_1 = \int e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} \left[ d_0^j + \frac{d_1^j}{x} + \dots + \frac{d_n^j}{x^n} \right] d\zeta + \frac{\varepsilon_2}{x^n},$$

$\varepsilon_2$  tendant vers 0,  $\sigma$  restant compris dans un intervalle tel que  $\cos(\vartheta - \pi + \sigma)$  y soit toujours positif.

Chaque terme du polynôme  $d_p^j$  donne naissance à une intégrale

$$\int e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j + p} d\zeta.$$

Si dans ces intégrales je rejette le point  $m'$  à l'infini, je ne fais qu'ajouter au second membre de  $J_1$  des termes qui tendent vers 0 comme  $e^{-h\varrho^k}$ ; on a donc

$$29) \quad J_1 = E_0^j + \frac{E_1^j}{x} + \dots + \frac{E_n^j}{x^n} + \frac{\varepsilon_3}{x^n},$$

$\varepsilon_3$ , tendant encore uniformément vers 0, quand  $\sigma$  reste compris dans le même intervalle. Le coefficient  $E_p^j$  se déduit de  $d_p^j$  en remplaçant dans ce dernier  $\zeta^q$  par  $(e^{2i\pi\lambda_j} - 1) \Gamma(\lambda_j + q + 1)$ , quand  $\vartheta - \pi + \sigma$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ ; si  $\vartheta - \pi + \sigma$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2} + 2K\pi$  et  $\frac{\pi}{2} + 2K\pi$ ,  $K$  étant entier positif ou négatif, on a :

$$\int e^{-\zeta^{\lambda_j+q}} d\zeta = e^{2Ki\pi\lambda_j} [e^{2i\pi\lambda_j} - 1] \Gamma(\lambda_j + q + 1).$$

Les coefficients de la série sont alors multipliés par  $e^{2Ki\pi\lambda_j}$ ; de même si le cercle  $c$  était parcouru en sens inverse au lieu d'être parcouru en sens direct, les coefficients de la série obtenue se déduiraient des coefficients  $E$  en multipliant ces derniers par  $-e^{-2i\pi\lambda_j}$ . En résumé si l'on désigne par  $S_j$  la somme :

$$30) \quad S_j = E_0^j + \frac{E_1^j}{x} + \dots + \frac{E_n^j}{x^n},$$

et si l'on pose,

$$31) \quad P_j = \frac{\alpha_j^{x+\lambda_j} e^{i\pi(\lambda_j+1)}}{x^{\lambda_j+1}},$$

on a :

$$32) \quad \frac{I_1}{P_j} - S_j = \frac{\varepsilon_3}{x^n}.$$

$\varepsilon_3$ , tendant uniformément vers 0, quand  $\rho$  augmente indéfiniment,  $\sigma$  restant compris dans un intervalle où  $\cos(\vartheta - \pi + \sigma)$  est toujours positif. La quantité  $\varepsilon_3$  se présente comme la somme de deux autres quantités dont l'une tend vers 0 comme  $\varepsilon_1$ , autrement dit comme une certaine puissance négative de  $\rho$ , et l'autre comme  $e^{-h\rho^k}$ ; au total  $\varepsilon_3$  tend donc vers 0 comme une puissance négative de  $\rho$ . La série de terme général  $\frac{d_n^j}{x^n}$  est convergente; si l'on intègre seulement jusqu'au point  $m'$  dont la distance à l'origine est  $\rho^3$ , on obtient une série convergente; mais comme dans  $S_j$  les intégrales sont prises au delà de ce point, jusqu'à l'infini, cette série peut être divergente.

Avant d'aller plus loin je vais traiter immédiatement le cas où dans l'intégrale  $I_1$  figure sous le signe  $\int$  une puissance entière et positive de  $L(y - \alpha_j)$ . Supposons que l'on ait :

$$33) \quad I_1 = \int y^{x-1} (y - \alpha_j)^{\lambda_j} L(y - \alpha_j) \psi(y) dy,$$

$\psi$  étant holomorphe au voisinage de  $\alpha_j$ ; en opérant encore les mêmes changements de variable, il vient:

$$I_1 = P_j \int e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} L \frac{e^{i\pi} \alpha_j \zeta}{x} \left[ d_0 + \frac{d_1}{x} + \dots + \frac{d_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right],$$

ou

$$I_1 = P_j \left[ J_1^{(0)} L \frac{\alpha_j e^{i\pi}}{x} + J_1^{(1)} \right],$$

en désignant par  $J_1^{(0)}$  l'intégrale de même nature que celle qui vient d'être étudiée,

$$34) \quad J_1^{(0)} = \int e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} \left[ d_0 + \frac{d_1}{x} + \dots + \frac{d_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] d\zeta,$$

et par  $J_1^{(1)}$  l'intégrale

$$35) \quad J_1^{(1)} = \int e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} L \zeta \left[ d_0 + \frac{d_1}{x} + \dots + \frac{d_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] d\zeta.$$

En rejetant à l'infini le point  $m'$ , on obtient pour  $J_1^{(0)}$  la série

$$E_0 + \frac{E_1}{x} + \dots + \frac{E_n}{x^n} + \dots.$$

Pour  $J_1^{(1)}$  on obtient la série dont les termes se déduisent de ceux de la série précédente, en dérivant par rapport à  $\lambda_j$ ,

$$\frac{dE_0}{d\lambda_j} + \frac{1}{x} \frac{dE_1}{d\lambda_j} + \dots + \frac{1}{x^n} \frac{dE_n}{d\lambda_j} + \dots$$

On a donc:

$$I_1 = P_j \left[ S L \frac{\alpha_j e^{i\pi}}{x} + \frac{dS}{d\lambda_j} + \frac{\varepsilon}{x^n} L \frac{\alpha_j e^{i\pi}}{x} + \frac{\varepsilon'}{x^n} \right],$$

en posant,

$$36) \quad S = E_0 + \frac{E_1}{x} + \dots + \frac{E_n}{x^n},$$

$\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  tendant vers 0 comme une puissance négative de  $\rho$ ; mais  $\varepsilon L \frac{\alpha_j e^{i\pi}}{x}$  tend alors vers 0 comme le produit d'une puissance négative de  $\rho$  par  $L\rho$  et finalement il vient:

$$37) \quad I_1 = \frac{dP_j S}{d\lambda_j} + P_j \frac{\varepsilon''}{x^n},$$

$\varepsilon''$  tendant uniformément vers 0 comme le produit d'une puissance négative de  $\rho$  par  $L\rho$  quand l'argument  $\sigma$  reste dans un intervalle où  $\cos(\vartheta - \pi + \sigma)$  est constamment positif. Plus généralement supposons que l'on ait:

$$38) \quad I_1 = \int y^{\rho-1} (y - \alpha_j)^{\lambda_j} [L(y - \alpha_j)]^p \psi(y) dy,$$

$\psi(y)$  étant holomorphe en  $\alpha_j$  et  $p$  étant entier positif.

En faisant toujours les mêmes changements de variable, il vient:

$$39) \quad I_1 = P_j \left[ J_1^{(0)} \left( L \frac{e^{i\pi} \alpha_j}{x} \right)^p + C_p^1 J_1^{(1)} \left( L \frac{e^{i\pi} \alpha_j}{x} \right)^{p-1} + \dots + C_p^l J_1^{(l)} \left( L \frac{e^{i\pi} \alpha_j}{x} \right)^{p-l} + \dots + C_p^p J_1^{(p)} \right],$$

en posant,

$$40) \quad J_1^{(0)} = \int e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} \left[ d_0 + \frac{d_1}{x} + \dots + \frac{d_n}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] d\zeta,$$

$$41) \quad J_1^{(l)} = \int e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} [L\zeta]^l \left[ d_0 + \frac{d_1}{x} + \dots + \frac{d_n}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] d\zeta.$$

La série figurant sous le signe  $\int$  dans la formule 40) est formée au moyen du développement de  $\psi(y)$  au voisinage de  $\alpha_j$ , comme la série correspondante de terme général  $\frac{d_n^j}{x^n}$  a été formée avec le développement de  $\psi_j(y)$ ; l'intégrale  $J_1^{(0)}$  donne naissance, quand le point  $m$  est rejeté à l'infini dans une direction telle que  $\cos(\vartheta - \pi + \sigma)$  soit positif, à une série de terme général  $\frac{E_n}{x^n}$ ; l'intégrale  $J_1^{(q)}$  donne naissance dans les mêmes conditions à une série, dont le terme général est  $\frac{1}{x^n} \frac{d^q E_n}{d\lambda_j^q}$ .

Comme d'autre part les quantités  $\varepsilon \left[ L \frac{e^{i\pi} \alpha_j}{x} \right]^q$  tendent vers 0 comme le produit d'une certaine puissance négative de  $\rho$  par  $(L\rho)^q$ , il vient:

$$42) \quad I_1 = \frac{d^p}{d\lambda_j^p} (P_j S) + P_j \frac{\varepsilon}{x^n},$$



$S$  étant défini par la formule 36) et  $\varepsilon$  tendant vers 0 uniformément, quand  $\sigma$  reste compris dans un intervalle, telle que  $\cos(\vartheta - \pi + \sigma)$  soit constamment positif.

Soit un contour  $L$  tout entier à distance finie, ne passant pas par l'origine, sur lequel la fonction  $\psi(y)$  reste finie et considérons la fonction de  $x$ ,

$$43) \quad I = \int_L y^x \psi(y) dy.$$

Si  $M$  est une limite supérieure des valeurs prises par  $\psi(y)$  quand  $y$  décrit le contour  $L$ , on a

$$\left| \frac{I}{\alpha_j^x} \right| < M \left| \frac{y_1^x}{\alpha_j^x} \right| L,$$

$L$  étant la longueur du contour et  $y_1$  le point du contour pour lequel  $y^x$  a un module maximum.

J'effectue alors une transformation dont il sera souvent fait usage par la suite; au point

$$y = r e^{i\sigma}$$

je fais correspondre le point  $z$  de coordonnées rectangulaires,

$$44) \quad z \begin{cases} \xi = Lr, \\ \eta = -s. \end{cases}$$

Au point  $\alpha_j$  correspond ainsi un point  $\alpha'_j$  de coordonnées  $\xi_j, \eta_j$ ,

$$\begin{aligned} \xi_j &= L |\alpha_j|, \\ \eta_j &= -\arg \alpha_j. \end{aligned}$$

Si suivant les notations déjà employées,  $x$  est égal à  $\rho e^{i\sigma}$ , on voit que

$$|y^x| = e^{\rho[\xi \cos \sigma + \eta \sin \sigma]}.$$

Or la quantité  $\xi \cos \sigma + \eta \sin \sigma$  mesure en grandeur et en signe dans le plan des  $z$  le segment  $Op$ , ayant pour origine l'origine des coordonnées et pour extrémité le point  $p$ , projection sur la direction  $\sigma$  du point  $(\xi, \eta)$ .

Quand le point  $y$  parcourt le contour  $L$ , son transformé  $z$  parcourt le contour  $L'$ , transformé de  $L$ ; si la projection  $Op$  de  $Oz$  reste inférieure à la projection du vecteur  $O\alpha'_j$  pour tous les arguments  $\sigma$  de l'intervalle  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , le rapport

$\frac{I}{\alpha_j^\sigma}$  tend vers 0 comme  $e^{-h\sigma}$ ,  $h$  étant positif, quand  $\rho$  augmente indéfiniment et cela uniformément; quand  $\sigma$  reste compris dans l'intervalle  $(\sigma_1, \sigma_2)$ .

Dans ces conditions, on peut donc écrire

$$I = P_j \frac{\varepsilon}{x^n},$$

$\varepsilon$  tendant uniformément vers 0 et l'on se trouve dans le cas signalé au début du présent chapitre, où le rapport  $\frac{I}{P_j}$  est représenté asymptotiquement par une série dont tous les termes sont nuls.

Ce même résultat subsiste, quand le contour  $L$  est une portion de droite  $Oa$ , issue de l'origine  $O$ , sur laquelle on a

$$\psi(y) = y^q (Ly)^p \chi(y),$$

$p$  étant un nombre entier positif et  $\chi(y)$  n'étant ni nul, ni infini en aucun point de  $Oa$  y compris l'origine; on peut en effet trouver alors un nombre  $k$  positif, tel que le produit

$$y^k \psi(y)$$

reste en module, à l'origine et sur la droite  $Oa$ , inférieur à un nombre fini  $M$ ; on a alors

$$|I| < M \int_0^a e^{\rho(\cos \sigma Lr - s \sin \sigma) - kLr} dr.$$

Si  $\cos \sigma$  est positif et si  $\rho$  est suffisamment grand pour que  $\rho \cos \sigma - k + 1$  soit positif, il vient en effectuant l'intégration

$$|I| < M \frac{r_1^{-k+1} e^{\rho(\cos \sigma Lr_1 - s \sin \sigma)}}{\rho \cos \sigma - k + 1},$$

$r_1$  étant la distance du point  $a$  à l'origine. Quand le transformé  $a'$  du point  $a$  est tel que la projection du vecteur  $O'a'$  du plan  $z$  sur les directions de l'intervalle  $(\sigma_1, \sigma_2)$  reste inférieure à la projection du vecteur  $O'a'_j$ , le rapport  $\frac{I}{\alpha_j^\sigma}$  tend uniformément vers 0,  $\sigma$  restant compris dans cet intervalle et le rapport  $\frac{I}{P_j}$  est encore représenté asymptotiquement par une série dont tous les termes sont nuls, comme dans le cas précédent; toutefois il est nécessaire que  $\cos \sigma$  reste positif dans tout l'intervalle  $(\sigma_1, \sigma_2)$ .

Je considère pour terminer une courbe  $L$  aboutissant au point  $\alpha_j$ ; l'intégrale

$$I = \int_L y^{\alpha-1} (y - \alpha_j)^{\lambda_j} [L(y - \alpha_j)]^q \psi(y) dy$$

est prise sur cette courbe depuis un point  $p$  voisin de  $\alpha_j$  jusqu'au point  $m$  dont la distance à  $\alpha_j$  est  $\rho^{\beta-1}$ ,  $\beta$  étant un nombre positif inférieur à l'unité et tend par conséquent vers 0 quand  $x$  s'éloigne à l'infini. La fonction  $\psi(y)$  reste en module inférieure à un nombre positif, quand  $y$  varie sur la courbe  $L$  depuis  $p$  jusqu'en  $\alpha_j$ ; il en est donc de même du quotient  $\frac{\psi(y)}{y}$ . Enfin le nombre  $q$  est entier positif ou nul.

Je pose

$$\begin{aligned} \lambda_j &= a + bi, \\ y - \alpha_j &= r' e^{i\sigma'}, \\ y &= r e^{i\sigma}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} |(y - \alpha_j)^{\lambda_j}| &= r'^a e^{-b\sigma'}, \\ |[L(y - \alpha_j)]^q| &= [Lr'^2 + s'^2]^{\frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

Sur la courbe  $L$ ,  $e^{-b\sigma'}$  reste fini; de plus en choisissant un point  $p$  suffisamment voisin de  $\alpha_j$ , on peut trouver deux nombres positifs  $M$  et  $k$  tels que sur tous les points de  $pm$ ,  $m$  tendant vers  $\alpha_j$ , on ait

$$r'^a [(Lr')^2 + s'^2]^{\frac{q}{2}} < M \rho^k.$$

Je considère alors la courbe  $L'$ , transformée de  $L$  dans le plan  $z$ ; elle aboutit au point  $\alpha'_j$ , transformé de  $\alpha_j$ ; si l'on suppose que  $L'$  est une portion de droite,  $L$  est un arc de spirale; en désignant par  $\xi, \eta$  les coordonnées d'un point de la droite  $L'$ , on a

$$\begin{aligned} Lr &= \xi = \xi_j + ut, \\ -s &= \eta = \eta_j + vt, \end{aligned}$$

$u$  et  $v$  étant deux constantes; de plus

$$dy = r e^{i\sigma} (u - iv) dt,$$

et l'on voit que l'on peut écrire finalement:

$$|I| < R \varrho^k \int_{t_1}^{t_2} e^{\varrho[\cos \sigma(\xi_j + ut) + \sin \sigma(\eta_j + vt)]} dt,$$

ou

$$\left| \frac{I}{\alpha_j^x} \right| < R \varrho^k \frac{e^{\varrho[u \cos \sigma + v \sin \sigma] t_2} - e^{\varrho[u \cos \sigma + v \sin \sigma] t_1}}{u \cos \sigma + v \sin \sigma},$$

$t_1$  et  $t_2$  étant les valeurs de  $t$  correspondant respectivement aux points  $p'$  et  $m'$ , transformés des points  $p$  et  $m$ ; il convient de supposer que  $u \cos \sigma + v \sin \sigma$  n'est pas nul, autrement dit qu'aucune des directions de l'intervalle  $(\sigma_1, \sigma_2)$  auquel appartient  $\sigma$  n'est perpendiculaire à la droite  $L'$ . La quantité

$$(u \cos \sigma + v \sin \sigma) t_1$$

est la différence

$$O' p'_1 - O' p_j$$

des projections sur la direction  $\sigma$  des vecteurs  $O' p'$  et  $O' a'_j$  dans le plan des  $z$ . De même si  $m'_1$  est la projection de  $m'$ , on a

$$(u \cos \sigma + v \sin \sigma) t_2 = O' m'_1 - O' p_j.$$

D'autre part au voisinage du point  $\alpha_j$ , sur la courbe  $L$  le module  $r$  de  $y$  est une fonction du module  $r'$  de  $y - \alpha_j$  et l'on peut écrire

$$r = r_j + c_1 r' + c_2 r'^2 + \dots$$

$r_j$  étant le module de  $\alpha_j$ .

On en tire

$$Lr - Lr_j = ut = d_1 r' + d_2 r'^2 + \dots,$$

d'où

$$t_2 = \frac{1}{u} [d_1 \varrho^{\beta-1} + d_2 \varrho^{2(\beta-1)} + \dots]$$

puisque au point  $m$  le module  $r'$  est égal à  $\varrho^{\beta-1}$ .

On peut choisir  $\beta$  assez petit pour que dans le développement du produit  $\varrho t_2$  tous les termes de la série tendent vers 0, quand  $\varrho$  augmente indéfiniment, sauf le premier qui devient infini comme  $\varrho^\beta$ ; dans ces conditions l'expression

$$\varrho [O' m'_1 - O' p_j]$$

devient infini comme  $\varrho^\beta$ . Quand  $\sigma$  reste compris dans un intervalle  $(\sigma_1, \sigma_2)$  tel que les différences  $O' p'_1 - O' p_j$  et  $O' m'_1 - O' p_j$  y soient constamment négatives, le

rapport  $\frac{I}{\alpha_j^x}$  tend uniformément vers 0 comme  $e^{-h\sigma^k}$ ,  $h$  et  $k$  étant positifs. Ainsi dans ce cas encore le rapport  $\frac{I}{P_j}$  est représenté asymptotiquement par une série dont tous les termes sont nuls.

Les résultats qui précèdent, permettent de former les séries représentant asymptotiquement à l'infini les fonctions  $f_j(x)$  solutions de l'équation aux différences finies formées au chapitre I. Les séries représentant une même fonction  $f_j(x)$  diffèrent suivant la valeur de l'argument avec lequel la variable  $x$  s'éloigne à l'infini; posant toujours

$$x = \rho e^{i\sigma}$$

nous distinguerons donc plusieurs cas.

Je suppose d'abord que  $\sigma$  appartient à l'intervalle  $(\nu, \frac{\pi}{2} - \nu)$ ,  $\nu$  étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. Soit  $\alpha_j$  une racine simple du polynome  $B_0$ ; dans la formule 7) définissant la fonction  $f_j(x)$ , la fonction  $\varphi_j(y)$  solution de l'équation différentielle 3) est de la forme

$$\varphi_j(y) = (y - \alpha_j)^{h_j} \psi_j(y),$$

$\psi_j(y)$  étant holomorphe en  $\alpha_j$ . Choissant un point  $a$  de la droite  $O\alpha_j$  situé entre  $O$  et  $\alpha_j$ , je prends pour contour  $L_0$  une circonférence de centre  $O$  et de rayon  $Oa$ , parcourue dans le sens direct à partir du point  $a$ ; le contour  $L_j$  se composera de la portion de droite  $an$ ,  $n$  étant un point de  $O\alpha_j$  voisin de  $\alpha_j$ , d'une petite circonférence  $s_j$  de centre  $\alpha_j$  et de rayon  $\alpha_j n$ , parcourue dans le sens direct et de la portion de droite  $na$ .

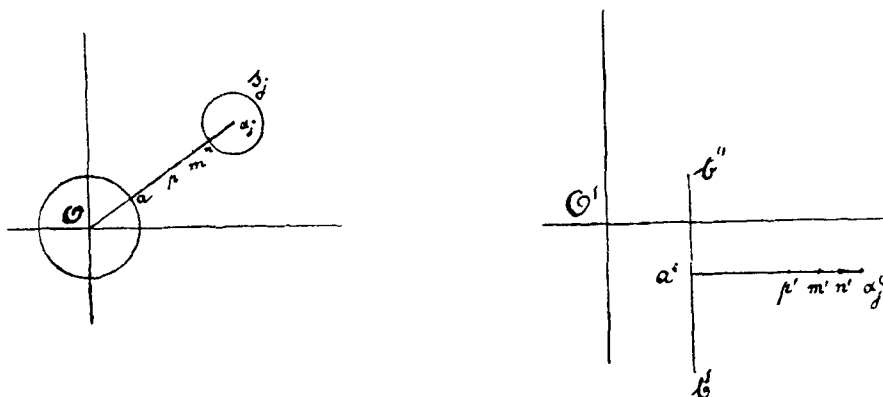


Figure 2.

La transformation définie précédemment fait correspondre dans le plan des  $z$ , à la portion de droite  $a a_j$  une parallèle à l'axe des abscisses passant par le point  $\alpha'_j$ , transformé de  $\alpha_j$ ; le point  $a'$  transformé de  $a$  est situé à gauche de  $\alpha'_j$ ; au cercle  $L_0$  parcouru en sens direct correspond une portion de droite  $a' b'$  parallèle à l'axe des ordonnées, dirigée dans le sens des ordonnées décroissantes et de longueur  $2\pi$ . L'intégrale prise le long du contour  $L_j$  se divise en trois parties. La première  $I_1$  correspond au contour  $m n, s_j, n m$ ,  $m$  étant un point de  $O \alpha_j$ , situé entre  $a$  et  $n$  et dont la distance à  $\alpha_j$  est égale à  $\rho^{\beta-1}$ ,  $\beta$  étant un nombre positif inférieur à l'unité; la seconde  $I_2$  comprend les deux portions d'intégrales prises sur la portion de droite  $p m$ ,  $p$  étant un point fixe, entre  $a$  et  $n$ , voisin de  $\alpha_j$ . La troisième comprend les deux portions d'intégrales prises sur  $a p$ .

L'angle désigné plus haut par  $\vartheta$  est ici égal à  $\pi$ , on a donc

$$\vartheta - \pi + \sigma = \sigma.$$

Si  $\sigma$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2} + \nu$  et  $\frac{\pi}{2} - \nu$ , en choisissant convenablement  $\beta$ , on a d'après la formule 32):

$$45) \quad I_1 = \frac{\alpha_j^{x+\lambda_j} e^{i\pi(\lambda_j+1)}}{x^{\lambda_j+1}} \left[ E_0^j + \frac{E_1^j}{x} + \dots + \frac{E_n^j}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] = P_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

$\varepsilon$  tendant uniformément vers 0.

Les rapports  $\frac{I_2}{P_j}, \frac{I_3}{P_j}$  sont représentés par des séries asymptotiques dont tous les termes sont nuls. Il est en effet évident que quand le point  $z$  transformé de  $y$  parcourt la droite  $a' m'$ , la projection du vecteur  $O' z$  sur les directions  $\sigma$  de l'intervalle  $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$  reste inférieure à la projection de  $O' \alpha'_j$ .

Quand  $\sigma$  appartient à cet intervalle on a donc finalement:

$$46) \quad \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy = P_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

$\varepsilon$  tendant uniformément vers 0.

D'autre part quand le point  $z$  décrit la droite  $a' b'$ , la projection du vecteur  $O' z$  sur les directions de l'intervalle  $\left(\nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$  est manifestement inférieure à la projection de  $O' \alpha'_j$ ; les intégrales de la forme

$$I_l = \int_{L_0} y^{x-1} v_l(y) dy$$

sont telles que les rapports  $\frac{I_l}{P_j}$  sont représentés asymptotiquement par des séries à termes nuls. Enfin les coefficients  $\gamma$  solutions des systèmes analogues à II tendent uniformément vers 0 ou vers l'unité quand  $x$  s'éloigne à l'infini avec un argument compris dans le même intervalle. Le quotient de l'intégrale prise le long du contour  $L_0$  figurant dans la formule 7), par la fonction  $P_j$  est représenté asymptotiquement par une série à termes nuls et l'on peut écrire,

$$47) \quad f_j(x) = \frac{\alpha_j^{x+\lambda_j} e^{i\pi(\lambda_j+1)}}{x^{\lambda_j+1}} \left[ E_0^j + \frac{E_1^j}{x} + \dots + \frac{E_n^j}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] = P_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

$\varepsilon$  tendant uniformément vers 0 quand  $\rho$  devient infini,  $\sigma$  appartenant à l'intervalle  $\left( \nu, \frac{\pi}{2} - \nu \right)$ .

La même fonction  $f_j(x)$  peut être définie par la formule 23)

$$23) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy + \int_{-L_0} y^{x-1} u dy + \int_{-L_0} y^{x-1} U dy.$$

Or l'image du contour  $-L_0$ , autrement dit de la circonférence  $L_0$  parcourue à partir du point  $a$  en sens inverse est dans le plan des  $z$ , une portion de droite  $a'b''$ , d'origine  $a'$ , de longueur  $2\pi$  parallèle à l'axe des ordonnées et dirigée dans le sens des ordonnées croissantes. Quand le point  $z$  décrit la droite  $a'b''$ , la projection du vecteur  $O'z$  sur les directions de l'intervalle  $\left( -\frac{\pi}{2} + \nu, -\nu \right)$  reste inférieure à la projection de  $O'a'$ ; d'autre part les coefficients  $\gamma$  tendent tous vers 0 quand  $x$  s'éloigne à l'infini dans une direction appartenant au même intervalle. Le quotient des intégrales de la formule 23) prises sur le contour  $-L_0$ , par la fonction  $P_j$  est représenté par une série asymptotique dont tous les termes sont nuls et l'égalité 47) subsiste,  $\varepsilon$  tendant uniformément vers 0 quand  $\sigma$  appartient à l'intervalle  $\left( -\frac{\pi}{2} + \nu, -\nu \right)$ .

Il reste à examiner ce qui se passe quand l'argument  $\sigma$  reste compris dans l'intervalle  $(-\nu, \nu)$ . Deux cas se présentent.

Si les fonctions  $v_1, \dots, v_q$  sont régulières au voisinage de l'origine, les pôles de la fonction  $f_j(x)$  ne s'étendent pas à l'infini dans la direction positive de l'axe des abscisses; on peut tracer une parallèle à l'axe des ordonnées à droite de laquelle la fonction  $f_j(x)$  reste holomorphe; dans le demiplan ainsi défini elle est représentée par la formule 21), le contour  $L_j$  se composant de la droite  $On$ , de la

circonférence  $s_j$  et de la droite  $nO$ . L'intégrale prise sur ce contour se divise en deux parties; l'une correspond au contour  $an, s_j, na$  et donne naissance à la série asymptotique  $S_j$ ; l'autre est la somme des deux intégrales prises sur la portion de droite  $Oa$ ; en prenant  $a$  suffisamment voisin de  $O$ , on constate que les rapports de ces intégrales à la fonction  $P_j$  sont représentés asymptotiquement par des séries à termes nuls. Ainsi l'égalité 47) subsiste encore; elle s'applique à l'intervalle entier  $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$ ,  $\varepsilon$  tendant uniformément vers 0.

Il n'en est plus de même si les fonctions  $v_1, \dots, v_q$  ne sont pas toutes régulières au voisinage de l'origine; les pôles de la fonction  $f_j(x)$  s'étendent alors à l'infini dans la direction positive de l'axe des abscisses; l'égalité 47) est vraie dans chacun des intervalles  $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, -\nu\right)$ ,  $\left(\nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$ ,  $\varepsilon$  tendant uniformément vers 0, si petit d'ailleurs que soit le nombre positif  $\nu$ ; mais la direction positive de l'axe des abscisses forme coupure et elle n'est plus vérifiée dans l'intervalle  $(-\nu, \nu)$ , tout au moins quand on n'astreint le point  $x$  s'éloignant à l'infini, à ne satisfaire à aucune nouvelle condition.

Les fonctions  $\gamma$  sont comme on l'a déjà vu de la forme

$$\gamma_{j,g} = \frac{P(\mu)}{(\omega_1 \mu - 1)^{j-g+1}},$$

$P(\mu)$  étant un polynome en  $\mu$  de degré  $j-g$  avec

$$\mu = e^{2i\pi x}.$$

Quand le point  $x$  s'éloigne à l'infini,  $\sigma$  restant compris dans l'intervalle  $(-\nu, \nu)$ , cette fonction  $\gamma$  reste donc finie pourvu que le point  $x$  reste à distance finie des pôles racines des équations

$$\omega_1 e^{2i\pi x} - 1 = 0.$$

D'autre part si le point  $a$  est assez rapproché de l'origine et l'angle  $\nu$  assez petit, on voit manifestement que les rapports  $\frac{I_l}{P_j}$  sont représentés asymptotiquement par des séries à termes nuls. Il en résulte que si l'on astreint le point  $x$  à s'éloigner à l'infini en restant toujours à distance finie des pôles de  $f_j(x)$  et seulement dans ce cas l'égalité 47) subsiste encore.

Les raisonnements qui précèdent supposent que sur la droite  $Oa_j$  entre  $O$  et  $a_j$ , les solutions de l'équation différentielle 3) n'admettent aucun point singulier; il se pourrait qu'il n'en soit pas ainsi et que quelques points racines du polynome  $B_0$  soient situés précisément sur cette portion de droite. Soit  $a_l$  l'un d'eux; on



évite ce point  $\alpha_j$  dans le contour  $L_j$  en remplaçant la portion de droite  $O\alpha_j$  voisine de  $\alpha_j$  par une petite demicirconférence de centre  $\alpha_j$  et située par rapport à  $O\alpha_j$  soit du côté des arguments croissants, soit du côté des arguments décroissants. Il est facile de vérifier que dans ces conditions, tous les résultats démontrés sont encore exacts; toutefois il faut noter que suivant le côté de la droite  $O\alpha_j$  où se trouve le demi cercle, les fonctions  $f_j(x)$  définies par la formule 7) sont différentes.

A chacune des fonctions  $f_j(x)$  correspondant à une racine simple du polynome  $B_0$  correspond une série divergente  $S_j$  formée au moyen de la solution  $\varphi_j(y)$  de l'équation différentielle 3) régulière et non holomorphe en  $\alpha_j$ . Cette série représente asymptotiquement le rapport  $\frac{f_j(x)}{P_j}$ , soit dans l'intervalle  $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$  si les solutions de l'équation 3) sont régulières à l'origine, soit dans les intervalles  $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, -\nu\right)$ ,  $\left(\nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$  si ces solutions sont irrégulières en ce point.

Il convient de remarquer que pour former la série divergente  $S_j$  dont le terme général est  $\frac{E_n^j}{x^n}$ , on a supposé que dans la solution  $\varphi_j(y)$

$$\varphi_j(y) = (y - \alpha_j)^{\lambda_j} \psi_j(y)$$

la quantité  $y - \alpha_j$  avait pour argument  $\omega_j + \pi$ , quand  $y$  vient en  $m$ , origine du contour  $m_n, s_j, n m$ . Si l'argument de  $x$ , au lieu d'être compris entre  $-\frac{\pi}{2} + \nu$  et  $\frac{\pi}{2} - \nu$ , était compris plus généralement entre  $-\frac{\pi}{2} + 2K\pi + \nu$  et  $\frac{\pi}{2} + 2K\pi - \nu$ ,  $K$  étant entier, il est clair, d'après ce qui a été dit au début du présent chapitre, que les coefficients  $E$  de la série devraient être multipliés par  $e^{2K\pi i \lambda_j}$ ; mais comme  $P_j$  contient en dénominateur  $x^{\lambda_j}$ , le développement asymptotique de  $f_j(x)$  ne change finalement pas de valeur, ce qui est naturel puisque la fonction  $f_j(x)$  est uniforme.

#### IV. Quelques cas particuliers.

Nous allons rechercher comment les résultats du précédent chapitre s'étendent aux fonctions  $f(x)$  correspondant aux racines multiples, non nulles du polynome  $B_0$ , au voisinage desquelles les solutions de l'équation différentielle 3) sont régulières.

Soit  $\alpha_j$  une racine d'ordre de multiplicité  $p$  du polynome  $B_0$ ; supposons que

les solutions de 3) sont toutes régulières en ce point; l'équation déterminante admet les racines entières

$$0, 1, \dots, q - p - 1,$$

et les  $p$  racines  $\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,p}$  en général non entières.

Je suppose tout d'abord qu'aucune des différences des  $\lambda$  n'est entière positive, négative ou nulle. A ces racines correspondent  $p$  solutions de l'équation 3) de la forme

$$g_{j,l} = (y - \alpha_j)^{\lambda_{j,l}} \psi_{j,l}(y),$$

$\psi_{j,l}(y)$  étant holomorphe en  $\alpha_j$ . Au moyen de chacune d'elles on forme une solution  $f_{j,l}$  de l'équation aux différences finies à laquelle s'applique les résultats du précédent chapitre. L'intégrale prise sur le contour  $L_j$  est représentée asymptotiquement par une série  $S_j^l$  formée avec la fonction  $\psi_{j,l}(y)$  et l'on a

$$48) \quad f_{j,l}(x) = P_j^l \left[ S_j^l + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

avec

$$49) \quad P_j^l = \frac{\alpha_j^{x+\lambda_{j,l}} e^{ix(\lambda_{j,l}+1)}}{x^{\lambda_{j,l}+1}},$$

$\varepsilon$  tendant uniformément vers 0, quand  $\sigma$  reste compris soit dans l'intervalle  $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$  si les fonctions  $v$  sont régulières à l'origine, soit dans les intervalles  $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, -\nu\right)$ ,  $\left(\nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$  si les fonctions  $v$  sont irrégulières à l'origine. Dans ce dernier cas l'égalité 48) n'est vérifiée, quand  $\sigma$  appartient à l'intervalle  $(-\nu, \nu)$ , que si le point  $x$  s'éloigne à l'infini en restant à distance finie des pôles des fonctions  $f(x)$ .

Supposons au contraire que parmi les différences des  $\lambda$ , il s'en trouve qui soient entières positives, négatives ou nulles. Les  $p$  racines  $\lambda$  se répartissent en groupes tels que les racines d'un même groupe diffèrent d'un entier positif, négatif ou nul; à chacun de ces groupes correspond un groupe de solutions de 3) de la forme II),

$$\begin{aligned}
 \varphi_{j,1} &= (y - \alpha_j)^{\lambda_{j,1}} \psi_{1,1}^j, \\
 \varphi_{j,2} &= (y - \alpha_j)^{\lambda_{j,2}} [\psi_{2,1}^j + \psi_{2,2}^j L(y - \alpha_j)], \\
 \text{II)} \quad & \dots\dots\dots \\
 \varphi_{j,\sigma} &= (y - \alpha_j)^{\lambda_{j,\sigma}} [\psi_{\sigma,1}^j + \psi_{\sigma,2}^j L(y - \alpha_j) + \dots + \psi_{\sigma,\sigma}^j [L(y - \alpha_j)]^{\sigma-1}], \\
 & \dots\dots\dots \\
 \varphi_{j,l} &= (y - \alpha_j)^{\lambda_{j,l}} [\psi_{l,1}^j + \dots + \psi_{l,l}^j [L(y - \alpha_j)]^{l-1}],
 \end{aligned}$$

$\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}, \dots \lambda_{j,l}$  étant rangés dans un ordre tel que leur partie réelle n'aille jamais en croissant quand on passe de  $\lambda_{j,1}$  à  $\lambda_{j,l}$ ; les fonctions  $\psi$  sont holomorphes en  $\alpha_j$ . Or quand le point  $x$  s'éloigne à l'infini en restant à droite de l'axe des ordonnées l'intégrale

$$\int_{L_j} y^{x-1} (y - \alpha_j)^{\lambda_{j,\sigma}} \psi_{\sigma,f}^j dy,$$

est d'après les résultats du précédent chapitre représentée asymptotiquement par une série

$$\frac{\alpha_j^{x+\lambda_{j,\sigma}} e^{i\pi(\lambda_{j,\sigma}+1)}}{x^{\lambda_{j,\sigma}+1}} \left[ S_{\sigma,f}^j + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

formée au moyen de  $\psi_{\sigma,f}^j$ . Nous avons vu que dans les mêmes conditions l'intégrale

$$\int_{L_j} y^{x-1} (y - \alpha_j)^{\lambda_{j,\sigma}} [L(y - \alpha_j)]^{f-1} \psi_{\sigma,f}^j dy,$$

est représentée asymptotiquement par

$$\frac{d^{f-1}}{d\lambda_{j,\sigma}^{f-1}} \left[ \frac{\alpha_j^{x+\lambda_{j,\sigma}} e^{i\pi(\lambda_{j,\sigma}+1)}}{x^{\lambda_{j,\sigma}+1}} S_{\sigma,f}^j \right] + \frac{\alpha_j^{x+\lambda_{j,\sigma}} e^{i\pi(\lambda_{j,\sigma}+1)}}{x^{\lambda_{j,\sigma}+1}} \frac{\varepsilon}{x^n}.$$

Il en résulte que la fonction  $f_{j,\sigma}$ , solution de l'équation aux différences finies formée au chapitre I au moyen de la solution  $\varphi_{j,\sigma}$  de l'équation 3), est représentée asymptotiquement par:

$$\begin{aligned}
 50) \quad f_{j,\sigma}(x) &= P_{j,\sigma} S_{\sigma,1}^j + \frac{d}{d\lambda_{j,\sigma}} [P_{j,\sigma} S_{\sigma,2}^j] + \dots + \frac{d^{f-1}}{d\lambda_{j,\sigma}^{f-1}} [P_{j,\sigma} S_{\sigma,f}^j] + \dots \\
 & \quad + \frac{d^{\sigma-1}}{d\lambda_{j,\sigma}^{\sigma-1}} [P_{j,\sigma} S_{\sigma,\sigma}^j] + P_{j,\sigma} \frac{\varepsilon}{x^n},
 \end{aligned}$$

avec

$$51) \quad P_{j,g} = \frac{\alpha_j^{x+\lambda_{j,g}} e^{i\pi(\lambda_{j,g}+1)}}{x^{\lambda_{j,g}+1}}.$$

La quantité  $\varepsilon$  tend uniformément vers 0 quand  $\sigma$  appartient soit à l'intervalle  $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$  si les fonctions  $v$  sont régulières à l'origine, soit à chacun des intervalles  $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, -\nu\right)$ ,  $\left(\nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$  si ces fonctions sont irrégulières à l'origine; dans ce dernier cas l'égalité 50) n'est vérifiée dans l'intervalle  $(-\nu, \nu)$ , que si le point  $x$  est astreint à rester à distance finie des pôles de la fonction  $f_{j,g}$ .

Le second membre de l'égalité 50) se présente sous la forme:

$$\frac{\alpha_j^{x+\lambda_{j,g}}}{x^{\lambda_{j,g}+1}} \left[ a_0^1 + \frac{a_1^1}{x} + \dots + \frac{a_n^1}{x^n} + Lx \left( a_0^2 + \frac{a_1^2}{x} + \dots + \frac{a_n^2}{x^n} \right) + \dots + (Lx)^{g-1} \left( a_0^g + \dots + \frac{a_n^g}{x^n} \right) + \frac{\varepsilon}{x^n} \right].$$

Ainsi dans la parenthèse la série ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de  $x$  des égalités 47) et 48) est remplacée par une somme de séries de ce genre, multipliées respectivement par des puissances entières de  $Lx$  jusqu'à la puissance  $g-1$ , exposant de la plus haute puissance de  $L(y-\alpha_j)$  contenue dans l'expression de  $\varphi_{j,g}$ .

Dans ce cas on peut faire une remarque qui nous sera utile par la suite; quand on a:

$$\lambda_{j,g} = \lambda_{j,g-1} = \dots = \lambda_{j,g-f+1} = \lambda_{j,g-f},$$

on sait que dans l'expression de  $\varphi_{j,g}$  la dernière des fonctions  $\psi_{g,1}^j, \psi_{g,2}^j, \dots, \psi_{g,g}^j$  holomorphes en  $\alpha_j$  dont le développement en ce point commence par un terme constant non nul est  $\psi_{g,f}^j$ . Il en résulte que la dernière des séries  $S_{j,1}^g, S_{j,2}^g, \dots, S_{j,g}^g$  qui commencent par un terme constant non nul, est  $S_{j,f}^g$ . Dans ces conditions le coefficient de  $(Lx)^{f-1}$  sera une série ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de  $x$  dont le premier terme est différent de 0; il est égal au terme constant de  $\psi_{g,f}^j$  multiplié par  $\Gamma(\lambda_{j,g}+1)(e^{2i\pi\lambda_{j,g}}-1)$ . Les séries multipliant les puissances de  $Lx$  supérieures à  $f-1$  commencent par des termes constants nuls. On pourra donc écrire en prenant  $n=0$ ,

$$52) \quad f_{j,g}(x) = P_{j,g} [a_1 + a_2 Lx + \dots + a_f (Lx)^{f-1} + \varepsilon],$$

le coefficient  $a_f$  étant sûrement différent de 0.

Quand les  $\lambda$  sont tous différents on voit que  $f$  est égal à 1 et toutes les puissances du logarithme sont multipliées par des séries dont le terme constant est nul.

Je signalerai encore les particularités des développements asymptotiques trouvés par les méthodes précédentes quand,  $\alpha_j$  étant une racine simple de  $B_0$ , la racine  $\lambda_j$  de l'équation déterminante est entière.

Nous avons vu au chapitre I que si,  $\lambda_j$  étant entier et négatif, la fonction  $\varphi_j(y)$  correspondante ne contient pas de logarithme, la fonction  $f_j(x)$  solution de l'équation aux différences finies est définie par l'égalité 9). Dans cette égalité le contour  $L_j$  peut être considéré comme se composant d'une portion de droite  $an$ , du cercle  $s_j$  et de la portion de droite  $na$ ; en appliquant la méthode du chapitre précédent on constate que les coefficients  $E_p^j$  de la série de terme général  $\frac{E_p^j}{x^p}$  sont de la forme:

$$E_p^j = (e^{2i\pi\lambda_j} - 1) [d_1 \Gamma(\lambda_j + p + 1) + d_2 \Gamma(\lambda_j + p + 2) + \dots + d_q \Gamma(\lambda_j + p + q)].$$

Or comme  $\lambda_j$  est entier et négatif les produits

$$(e^{2i\pi\lambda_j} - 1) \Gamma(\lambda_j + m),$$

sont finis quand  $\lambda_j + m$  est égal à un entier négatif ou nul; ces mêmes produits sont nuls quand  $\lambda_j + m$  est un entier positif. Les coefficients  $E_p^j$  sont donc nuls quand

$$p > -\lambda_j - 1,$$

et sont finis quand

$$p < -\lambda_j - 1.$$

La série asymptotique correspondant à  $\varphi_j(y)$  a donc un nombre fini de termes; elle se réduit à

$$E_0^j + \frac{E_1^j}{x} + \dots + \frac{E_{-\lambda_j-1}^j}{x_j^{-\lambda_j-1}}.$$

Ces résultats sont bien en conformité avec ceux du chapitre I où l'on a vu que la fonction  $f_j(x)$  n'est autre que le produit d'un polynôme de degré  $-\lambda_j - 1$  par la fonction  $\alpha_j^x$ .

Quand  $\lambda_j$  est entier et négatif, il se peut que  $\varphi_j(y)$  soit de la forme:

$$\varphi_j(y) = (y - \alpha_j)^{\lambda_j} [\psi_{j,1} + \psi_{j,2} L(y - \alpha_j)].$$

Rien n'est changé dans nos raisonnements; la série asymptotique formée au moyen de  $\varphi_j(y)$  est la somme de deux séries

$$P_j S_{j,1} + \frac{d}{d\lambda_j} (P_j S_{j,2}),$$

et l'on a

$$53) \quad f_j(x) = P_j \left[ S_{j,1} + \frac{dS_{j,2}}{d\lambda_j} + S_{j,2} L \frac{\alpha_j e^{i\pi}}{x} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right].$$

Mais comme  $\lambda_j$  est entier et négatif, les séries  $S_{j,1}$  et  $S_{j,2}$  sont limitées; il n'en est pas de même de la série  $\frac{dS_{j,2}}{d\lambda_j}$ ; car les quantités  $\frac{d}{d\lambda_j} (e^{2i\pi\lambda_j} - 1) \Gamma(\lambda_j + m)$  ne sont pas nulles quand  $\lambda_j + m$  est positif.

Au chapitre I nous avons vu que si  $\varphi_j(y)$  ne contient pas de logarithme,  $\lambda_j$  étant entier positif et supérieur à  $p - 1$ , la fonction  $f_j(x)$  est définie par la formule 10),

$$10) \quad f_j(x) = \int_a^{\alpha_j} y^{p-1} \varphi_j(y) dy + \int_{L_0} y^{p-1} [c_1 V_1 + \dots + c_q V_q] dy.$$

La première intégrale est prise sur une courbe issue du point  $a$  et aboutissant en  $\alpha_j$ ; les raisonnements faits au précédent chapitre sur les éléments de l'intégrale voisins de  $\alpha_j$  doivent donc être modifiés.

Je suppose que la courbe  $a\alpha_j$  soit la droite  $a\alpha_j$ ,  $a$  étant un point de  $O\alpha_j$  situé entre  $O$  et  $\alpha_j$ ; soit  $m$  un point de cette portion de droite dont la distance au point  $\alpha_j$  tend vers 0 comme  $\varrho^{\beta-1}$ ,  $\beta$  étant un nombre positif inférieur à l'unité; en faisant toujours les mêmes changements de variable on constate que l'on peut écrire:

$$\int_{\alpha_j}^m y^{p-1} \varphi_j(y) dy = P_j \left[ E_0^j + \frac{E_1^j}{x} + \dots + \frac{E_n^j}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

$\varepsilon$  tendant vers 0 quand  $\sigma$  est compris dans l'intervalle  $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$ ; mais cette fois les coefficients  $E$  se déduisent des coefficients  $d$  de la série

$$d_0^j + \frac{d_1^j}{x} + \dots + \frac{d_n^j}{x^n}$$

formée au chapitre précédent en remplaçant dans ces derniers  $\zeta^q$  par  $\Gamma(\lambda_j + q + 1)$  et non plus par  $(e^{2i\pi\lambda_j} - 1)\Gamma(\lambda_j + q + 1)$ , quantité nulle dans le cas actuel; en tenant compte de cette modification dans la formation des coefficients  $E$  on constate que l'égalité 47) est encore vérifiée dans les mêmes conditions qu'au chapitre précédent.

Les fonctions  $g(x)$  définies au chapitre I donnent lieu à une étude en tous points analogue à celle dont les fonctions  $f$  viennent d'être l'objet; mais le point  $x$  au lieu de rester constamment à droite de l'axe des ordonnées doit s'éloigner à l'infini en restant à gauche de ce même axe. Dans la formule 12) qui définit la fonction  $g_j(x)$ , on prend pour le contour  $L_\infty$  une circonférence de centre  $O$  et de rayon  $Oa$ , le point  $a$  étant situé sur le rayon  $O\alpha_j$  entre  $\alpha_j$  et l'infini; pour le contour  $L_j$  on prend le contour formé par la portion de droite  $am$ ,  $m$  étant un point de  $O\alpha_j$  de module supérieur à celui de  $\alpha_j$ , la circonférence  $s_j$  de centre  $\alpha_j$  et de rayon  $\alpha_j m$ , et la portion de droite  $ma$ . Quand le point  $x$  s'éloigne à l'infini avec un argument  $\sigma$  compris entre  $\frac{\pi}{2} + \nu$  et  $\pi - \nu$ , on trouve alors

$$54) \quad g_j(x) = P_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon}{x^m} \right],$$

$\varepsilon$  tendant uniformément vers 0; cette même égalité est vérifiée quand  $\sigma$  appartient à l'intervalle  $(\pi + \nu, \frac{3\pi}{2} - \nu)$ ; si les fonctions  $w$  sont régulières à l'infini elle est encore vérifiée, quand  $\sigma$  appartient à l'intervalle  $(\pi - \nu, \pi + \nu)$ ; si les fonctions  $w$  sont irrégulières à l'infini, elle n'est plus vraie dans cette intervalle que si l'on astreint le point  $x$  à s'éloigner à l'infini en restant à distance finie des pôles de  $g_j(x)$ .

D'une façon générale le développement asymptotique, trouvé pour la fonction  $f_j(x)$  formée au moyen de la solution  $\varphi_j(y)$  régulière au voisinage du point  $\alpha_j$  racine de  $B_0$ , quand le point  $x$  s'éloigne à l'infini en restant à droite de l'axe des ordonnées représente la fonction  $g_j(x)$  formée avec la même solution  $\varphi_j(y)$ , quand le point  $x$  s'éloigne à l'infini en restant à gauche du même axe.

## V. Les solutions $f(x)$ sont indépendantes.

Les développements asymptotiques trouvés pour les diverses fonctions  $f(x)$ , solutions de l'équation aux différences finies formées au chapitre I, permettent de démontrer que ces fonctions sont indépendantes; autrement dit si  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$

sont les solutions de l'équation 1) correspondant aux racines  $\alpha$  du polynome  $B_0$  non nulles et au voisinage desquelles les solutions de l'équation 2) sont régulières, il est impossible de trouver des fonctions périodiques

$$T_1(x), T_2(x), \dots T_p(x)$$

admettant pour période l'unité, et telles que la relation

$$T_1 f_1 + T_2 f_2 + \dots + T_p f_p = 0$$

soit identiquement satisfaite.

Supposons tout d'abord que toutes les racines  $\alpha$  soient simples. Quand le point  $x$  s'éloigne à l'infini dans la direction des abscisses positives, en restant à distance finie des pôles des fonctions  $f(x)$  on a :

$$f_j(x) = \frac{\alpha_j^{x+\lambda_j} e^{i\pi(\lambda_j+1)}}{x^{\lambda_j+1}} [E_0^j + \varepsilon_j],$$

$\varepsilon_j$  tendant vers 0; la constante  $E_0^j$

$$E_0^j = \alpha_j^j (e^{2i\pi\lambda_j} - 1) \Gamma(\lambda_j + 1)$$

est surement différente de 0.

Posons alors

$$55) \quad x = x_1 + m,$$

$m$  augmentant indéfiniment par valeurs entières et positives et  $x_1$  étant un point différent des pôles des fonctions  $f(x)$ . Si l'on pouvait trouver des fonctions  $T(x)$  admettant pour période l'unité et telles que la relation 55) soit satisfaite on aurait

$$57) \quad T_1(x_1) \frac{\alpha_1^{x+\lambda_1} e^{i\pi(\lambda_1+1)}}{x^{\lambda_1+1}} [E_0^1 + \varepsilon_1] + T_2(x_1) \frac{\alpha_2^{x+\lambda_2} e^{i\pi(\lambda_2+1)}}{x^{\lambda_2+1}} [E_0^2 + \varepsilon_2] + \dots \\ + T_p(x_1) \frac{\alpha_p^{x+\lambda_p} e^{i\pi(\lambda_p+1)}}{x^{\lambda_p+1}} [E_0^p + \varepsilon_p] = 0.$$

Soit  $\alpha_1$  celui des points  $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$  dont le transformé  $\alpha_1'$  est tel que la projection de  $O' \alpha_1'$  sur l'axe des abscisses est supérieure aux projections des vecteurs  $O' \alpha_2', \dots O' \alpha_p'$ . Je multiplie le premier membre de 57) par  $\frac{x^{\lambda_1+1}}{\alpha_1^{x+\lambda_1} e^{i\pi(\lambda_1+1)}}$ ; il vient ainsi

$$T_1(x_1) [E_0^1 + \varepsilon_1] + \eta = 0,$$

$\eta$  tendant vers 0 comme  $e^{-h e^k}$ ,  $h$  et  $k$  étant positif. On en conclut que le produit  $T_1(x_1) E_0^1$  est nul; on a donc:



$$T_1(x_1) = 0$$

et comme le point  $x_1$  est quelconque la fonction  $T_1(x)$  est identiquement nulle; la relation 55) devient

$$T_2 f_2 + \dots + T_p f_p = 0.$$

En poursuivant le même raisonnement, on démontrerait que toutes les fonctions  $T$  sont identiquement nulles.

Quand certains des points  $\alpha$  sont des racines multiples du polynome  $B_0$  le raisonnement doit être complété.

Rangeons encore les points  $\alpha$  dans l'ordre

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_p,$$

tel que les projections des vecteurs  $O' \alpha'_1, \dots, O' \alpha'_p$  sur l'axe des abscisses aillent en décroissant quand on passe de  $O' \alpha'_1$  à  $O' \alpha'_p$  et supposons que  $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}$  soient des racines simples et  $\alpha_j$  une racine d'ordre de multiplicité  $l$ .

On démontrera comme plus haut que les fonctions  $T_1(x), \dots, T_{j-1}(x)$  sont identiquement nulles et l'identité 55) se réduira à

$$58) \quad T_{j,1} f_{j,1} + T_{j,2} f_{j,2} + \dots + T_{j,l} f_{j,l} + T_{j+1} f_{j+1} + \dots + T_p f_p = 0.$$

Or on a :

$$f_{j,1} = \frac{\alpha_j^{x+\lambda_{j,1}} e^{i\pi(\lambda_{j,1}+1)}}{x^{\lambda_{j,1}+1}} [A_{j,1} + \varepsilon_1]$$

. . . . .

$$f_{j,l} = \frac{\alpha_j^{x+\lambda_{j,l}} e^{i\pi(\lambda_{j,l}+1)}}{x^{\lambda_{j,l}+1}} [A_{j,l} + \varepsilon_l].$$

En divisant le premier membre de 58) par  $\alpha_j^x$ , il vient,  $m$  augmentant toujours indéfiniment par valeurs entières et positives,

$$\frac{T_{j,1}(x)}{x^{\lambda_{j,1}+1}} e^{i\pi(\lambda_{j,1}+1)} [A_{j,1} + \varepsilon_1] + \dots + \frac{T_{j,l}(x)}{x^{\lambda_{j,l}+1}} e^{i\pi(\lambda_{j,l}+1)} [A_{j,l} + \varepsilon_l] + r_l = 0,$$

$\eta$  tendant vers 0 comme  $e^{-h} e^k$ ,  $h$  et  $k$  étant positifs.

Je suppose que les nombres

$$\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}, \dots, \lambda_{j,l}$$

sont rangés dans un ordre tel qu'en passant de  $\lambda_{j,1}$  à  $\lambda_{j,l}$  leur partie réelle n'aille jamais en croissant.



à son ordre  $r$ , toute solution  $f(x)$  pourra également se mettre sous la forme :

$$f(x) = T_1 g_1 + \dots + T_r g_r,$$

$T_1, \dots, T_r$  étant des fonctions périodiques admettant pour période l'unité.

**VI. Développements asymptotiques quand  $x$  s'éloigne à l'infini en restant sur l'axe des ordonnées où à gauche de cet axe.**

Quand le point  $x$  s'éloigne à l'infini en restant à droite de l'axe des ordonnées, chaque fonction  $f(x)$  est représentée asymptotiquement par une série différente; il n'en est plus de même quand le point  $x$  s'éloigne à l'infini en restant à gauche de ce même axe; nous étudierons tout d'abord le cas où  $\sigma$  voisin de  $\frac{\pi}{2}$  est compris entre  $\frac{\pi}{2} - \nu$  et  $\frac{\pi}{2} + \nu$ .

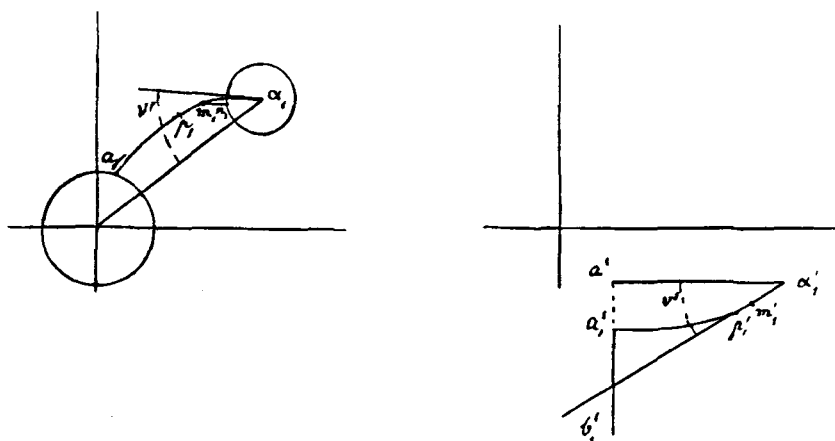


Figure 3.

Soit  $f_1(x)$  la solution correspondant à la racine simple  $\alpha_1$  définie par la formule 7); le contour  $L_1$  est défini comme au chapitre III; il se compose de la portion de droite  $an$  de la circonférence  $s_1$  de centre  $\alpha_1$  et de la droite  $na$ ; le contour  $L_0$  se compose du cercle de centre  $O$  et de rayon  $Oa$ ; je fais subir à ces deux contours les déformations suivantes: le point  $a$  vient en  $a_1$  voisin de  $a$  sur la circonférence  $L_0$  et du côté des arguments croissants; à partir de  $a_1$  je trace une courbe  $C$  voisine de  $O\alpha_1$ , toute entière située par rapport à  $O\alpha_1$  du côté des arguments croissants; partant de  $a_1$  pour aboutir en  $p_1$  voisin de  $\alpha_1$ , elle se termine par un arc de spirale joignant  $p_1$  et  $\alpha_1$ ; cette spirale fait en  $\alpha_1$  avec le rayon  $O\alpha_1$  un angle  $\nu'$ . La transformée de la courbe  $C$  est dans le plan des  $z$  une courbe

$C'$  voisine de la droite  $a'_1\alpha'_1$ , située toute entière au dessous de cette droite et se terminant par un segment rectiligne  $p'_1\alpha'_1$  faisant avec  $a'_1\alpha'_1$  le même angle  $\nu'$ .

Dans la formule 7) définissant  $f_1(x)$  le contour  $L_1$  est formé par la courbe  $C$  parcourue depuis le point  $a_1$  jusqu'au point  $m_1$  compris entre  $p_1$  et  $\alpha_1$ , par une petite portion de droite  $m_1n_1$ , par la circonférence  $s_1$  de centre  $\alpha_1$  et de rayon  $\alpha_1n_1$  parcourue en sens direct, par la portion de droite  $n_1m_1$  et la courbe  $C$  depuis  $m_1$  jusqu'en  $a_1$ . Le point  $m_1$  se déplace sur la courbe  $C$  de telle sorte que sa distance au point  $\alpha_1$  tende vers 0 comme  $\rho^{\beta-1}$ ,  $\beta$  étant un nombre positif inférieur à l'unité convenablement choisi. Le contour  $L_0$  se compose de la circonférence de centre  $O$  et de rayon  $Oa_1$  parcourue en sens direct à partir de  $a_1$ .

L'angle désigné par  $\vartheta$  dans nos démonstrations est égal à  $\pi - \nu_1$ ,  $\nu_1$  étant l'angle de  $m_1n_1$  avec  $a_1\alpha_1$ .

On a donc:

$$\vartheta - \pi + \sigma = -\nu_1 + \sigma.$$

Or si

$$\frac{\pi}{2} - \nu < \sigma < \frac{\pi}{2} + \nu,$$

on a:

$$\frac{\pi}{2} - \nu - \nu_1 < \sigma - \nu_1 < \frac{\pi}{2} + \nu - \nu_1.$$

Mais  $\nu_1$  est voisin de  $\nu'$ ; si  $\nu'$  est supérieur à  $\nu$ , le rapport de la portion d'intégrale prise sur le contour  $m_1n_1, s_1, n_1m_1$  à la fonction  $P_1$  est représenté asymptotiquement par la série de terme général  $\frac{E_n^1}{x^n}$ . Quand le point  $z$  parcourt la droite  $p'_1\alpha'_1$ , image de l'arc de spirale terminant la courbe  $C$ , la projection du vecteur  $Oz$  sur les directions de l'intervalle  $\left(\frac{\pi}{2} - \nu, \frac{\pi}{2} + \nu\right)$  reste inférieure à la projection de  $O\alpha'_1$ . Il suffit de considérer la figure pour voir qu'il en est encore de même quand le point  $z$  décrit la ligne  $b'_1\alpha'_1p'_1$ . L'égalité 47) subsiste donc,  $\varepsilon$  tendant uniformément vers 0, quand  $\rho$  devient infini,  $\sigma$  appartenant à l'intervalle  $\left(\frac{\pi}{2} - \nu, \frac{\pi}{2} + \nu\right)$ .

La déformation des contours  $L_0$  et  $L_1$  dont il vient d'être fait usage est toujours possible quand  $\nu$  est suffisamment petit, à moins qu'entre  $O$  et  $\alpha_1$  se trouvent des points racines du polynôme  $B_0$ . Dans ce cas pour que cette déformation soit possible, il faut que dans la définition primitive de  $f_1(x)$  au moyen du contour  $an, s_1, na$  le point  $\alpha_j$  situé entre  $O$  et  $\alpha_1$  sur la droite  $O\alpha_1$  ait été

évitée par un demi cercle situé du côté des arguments croissants par rapport à  $O\alpha_1$ .

Si au contraire dans le contour primitif  $L_1$ , le point  $\alpha_j$  a été évité par un demi cercle situé du côté des arguments décroissants, la déformation est impossible; pour étudier le cas où  $\sigma$  est voisin de  $\frac{\pi}{2}$  on est alors conduit à déformer le contour primitif comme il est indiqué sur la figure; le contour  $L_1$  se compose de la courbe  $a_1 b_1 c_1$  du cercle  $s_j$  parcouru en sens direct, de la courbe  $c_1 b_1 d_1$ , du cercle  $s_1$  parcouru en sens direct, de la courbe  $d_1 b_1 c_1$ , du cercle  $s_j$  parcouru en sens inverse et enfin de la courbe  $c_1 b_1 a_1$ .

Si  $\alpha_j$  est une racine simple de  $B_0$ , les solutions de l'équation différentielle 3) s'expriment linéairement au voisinage de ce point en fonction de  $\varphi_j(y)$ , solution régulière et holomorphe en  $\alpha_j$  et des  $p-1$  autres solutions holomorphes en ce point, correspondant aux racines entières de l'équation déterminante. En raisonnant sur le contour  $b_1 c_1, s_j, c_1 b_1$  comme on a raisonné sur le contour  $m_1 n_1, s_1, n_1 m_1$  on voit que

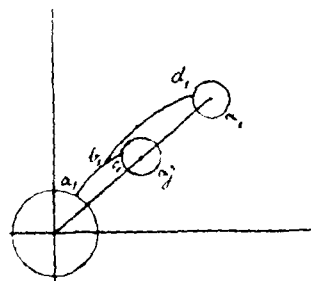


Figure 4.

$$\int_{L_j} y^{\sigma-1} \varphi_1(y) dy = P_1 \left[ S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] + A_j P_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right],$$

$A_j$  étant une constante et  $\varepsilon_1, \varepsilon_j$  tendant uniformément vers 0 quand  $\sigma$  reste dans l'intervalle  $\left( \frac{\pi}{2} - \nu, \frac{\pi}{2} + \nu \right)$ .

Si entre  $O$  et  $\alpha_1$ , se trouvent sur la droite  $O\alpha_1$ , des points  $\alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{j+l}$ , on aurait en raisonnant toujours de même

$$\int_{L_1} y^{\sigma-1} \varphi_1(y) dy = P_1 \left[ S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] + A_j P_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right] + \dots + A_{j+l} P_{j+l} \left[ S_{j+l} + \frac{\varepsilon_{j+l}}{x^n} \right].$$

On obtiendrait donc ainsi

$$60) \quad f_1(x) = P_1 \left[ S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] + A_j P_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right] + \dots + A_{j+l} P_{j+l} \left[ S_{j+l} + \frac{\varepsilon_{j+l}}{x^n} \right].$$

Les points  $\alpha'_1, \alpha'_j, \dots, \alpha'_{j+l}$  transformés de  $\alpha_1, \alpha_j, \dots, \alpha_{j+l}$ , sont situés dans le plan des  $z$  sur une même parallèle à l'axe des abscisses; si la direction  $\sigma$  est à droite

de la direction positive de l'axe des ordonnées, les rapports  $\left(\frac{\alpha_j}{\alpha_1}\right)^x \dots \left(\frac{\alpha_{j+l}}{\alpha_1}\right)^x$  tendent vers 0, comme  $e^{-he^k}$ ,  $h$  et  $k$  étant positif; si la direction  $\sigma$  est au contraire à gauche de cette direction ce sont les rapports  $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_{j+l}}\right)^x, \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_{j+l}}\right)^x, \dots, \left(\frac{\alpha_{j+l-1}}{\alpha_{j+l}}\right)^x$  qui tendent vers 0 dans les mêmes conditions,  $\alpha_{j+l}$  étant celui des points  $\alpha$ , situé sur  $O\alpha_1$  qui est le plus voisin de l'origine.

Il en résulte que dans le premier cas on a:

$$f_1(x) = \frac{\alpha_1^{x+\lambda_1} e^{i\pi(\lambda_1+1)}}{x^{\lambda_1+1}} \left[ E_0^1 + \dots + \frac{E_n^1}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] = P_1 \left[ S_1 + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

et dans le second:

$$6x) \quad f_1(x) = A_{j+l} \frac{\alpha_{j+l}^{x+\lambda_{j+l}} e^{i\pi(\lambda_{j+l}+1)}}{x^{\lambda_{j+l}+1}} \left[ E_0^{j+l} + \dots + \frac{E_n^{j+l}}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] = A_{j+l} P_{j+l} \left[ S_{j+l} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right].$$

La direction positive de l'axe des ordonnées forme donc coupure et la série représentant  $f_1(x)$  change brusquement quand la direction  $\sigma$  sur laquelle le point  $x$  s'éloigne à l'infini passe de l'intervalle  $\left(\frac{\pi}{2} - \nu, \frac{\pi}{2}\right)$  à l'intervalle  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \nu\right)$ . S'il s'éloigne sur la direction  $\frac{\pi}{2}$  elle-même les modules de  $\alpha_1^x, \alpha_j^x, \dots, \alpha_{j+l}^x$  sont égaux et la fonction  $f_1(x)$  est représentée par l'égalité 6o).

Le cas où  $\sigma$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2} - \nu$  et  $-\frac{\pi}{2} + \nu$  se traite de façon analogue; au contour primitif  $L_1$  on substitue un contour formé au moyen d'une courbe  $C$  située cette fois toute entière par rapport à  $O\alpha_1$  du côté des arguments décroissants. La direction  $-\frac{\pi}{2}$  n'est une coupure que si entre  $O$  et  $\alpha_1$  se trouve un point racine de  $B_0$ , qui dans le contour primitif  $L_1$  a été évité par une demi-circonférence située cette fois du côté des arguments croissants par rapport à  $O\alpha_1$ .

Par un procédé en tout point semblable à celui qui vient d'être appliqué à la fonction  $f_1(x)$ , on démontrerait que la fonction  $g_1(x)$  est représentée asymptotiquement par

$$g_1(x) = P_1 \left[ S_1 + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

quand la direction  $\sigma$  appartient à l'intervalle  $\left(\frac{\pi}{2} - \nu, \frac{\pi}{2} + \nu\right)$  ou à l'intervalle  $\left(\frac{3\pi}{2} - \nu, \frac{3\pi}{2} + \nu\right)$ ; la direction positive ou la direction négative de l'axe des or-

données ne forme coupure que si entre le point  $\alpha_1$  et l'infini, se trouvent sur la droite  $O\alpha_1$ , un ou plusieurs points  $\alpha$  racines de  $B_0$ . On trouve ainsi un premier exemple d'une série

$$P_1 \left[ S_1 + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

qui, quand  $x$  s'éloigne à l'infini dans une des directions appartenant à un certain intervalle, à savoir l'intervalle  $\left( \frac{\pi}{2} - \nu, \frac{\pi}{2} + \nu \right)$  représente deux fonctions distinctes à savoir  $g_1(x)$  et  $f_1(x)$ .

Quand la direction  $\frac{\pi}{2}$  ou la direction  $-\frac{\pi}{2}$  forme coupure, nous avons été amené à supposer, que les solutions de 3) étaient régulières non seulement en  $\alpha_1$ , mais encore en tous les points  $\alpha$  situés sur la droite  $O\alpha_1$ , que le contour primitif  $L_1$  arrive à envelopper complètement dans la déformation qu'on est obligé de lui faire subir pour faire les démonstrations. Quand la direction  $\sigma$  appartient à l'intervalle  $\left( \frac{\pi}{2} + \nu, \pi \right)$  ou à l'intervalle  $\left( -\pi, -\frac{\pi}{2} - \nu \right)$  nous serons obligé également de déformer le contour primitif  $L_1$  servant à définir la fonction  $g_1(x)$ , et nous serons amenés à supposer que tous les points  $\alpha$  qu'il entoure complètement dans cette déformation sont tels que toutes les solutions de 3) y sont régulières. Ce sont là de nouvelles hypothèses qui n'intervenaient pas dans le cas où la direction  $\sigma$  était comprise dans l'intervalle  $\left( -\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu \right)$ , puisque les démonstrations relatives à la fonction  $f_1(x)$  ne faisait intervenir qu'un seul des points  $\alpha$ , à savoir le point  $\alpha_1$  qui sert à définir la fonction  $f_1(x)$  elle-même.

Supposons tout d'abord que  $\sigma$  soit compris dans l'intervalle  $\left( \frac{\pi}{2} + \nu, \pi \right)$ ; je trace une circonférence  $S$  ayant l'origine pour centre et de rayon supérieur à  $O\alpha_1$ . Soit  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m$  les points racines du polynome  $B_0$  situés à l'intérieur de cette circonférence et rangés dans l'ordre où les rencontre un rayon coïncidant d'abord avec  $O\alpha_1$  et tournant autour de l'origine dans le sens direct; les arguments de  $\alpha_2, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m$  sont respectivement,

$$\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_j, \omega_{j+1}, \dots, \omega_m,$$

n'allant jamais en décroissant et compris entre  $\omega_1$  et  $\omega_1 + 2\pi$ . Je désigne par  $a_1, a_2, \dots, a_j, a_{j+1}, \dots, a_m$  les points où la circonférence  $S$  rencontre les rayons  $O\alpha_1, O\alpha_2, \dots, O\alpha_j, O\alpha_{j+1}, \dots, O\alpha_m$ . Autour du point  $a_j$  avec  $a_j$  pour centre, je trace

une petite circonférence  $s_j$  qui coupe  $O\alpha_j$  entre  $\alpha_j$  et  $a_j$  en un point  $b_j$ . Je choisis alors pour contour  $L_1$ , le contour formé par l'arc de circonférence  $a_2 a_1$ , la portion de droite  $a_1 b_1$ , le cercle  $s_1$  parcouru en sens direct, la portion de droite  $b_1 a_1$  et l'arc  $a_1 a_2$ . Pour contour  $L_0$  je choisis le contour formé par la portion de droite  $a_2 b_2$ , la circonférence  $s_2$  parcourue en sens inverse, la portion de droite  $b_2 a_2$ , l'arc  $a_2 a_3 \dots$  etc. . . . la portion de droite  $a_j b_j$ , la circonférence  $s_j$  parcourue en sens inverse, la portion de droite  $b_j a_j$ , l'arc  $a_j a_{j+1} \dots$  etc. . . . la droite  $b_m a_m$ , l'arc  $a_m a_1$ , la droite  $a_1 b_1$ , la circonférence  $s_1$  parcourue en sens inverse, la droite  $b_1 a_1$ , l'arc  $a_1 a_2$ .

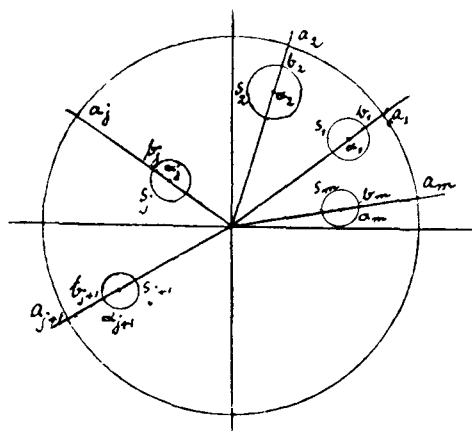


Figure 5.

Il est manifeste que par déformation continue les contours  $L_0$  et  $L_1$ , qui ont servi à définir la fonction  $f_1(x)$  au chapitre III, peuvent se ramener aux deux contours de même nom qui viennent d'être définis. Ainsi la fonction  $f_1(x)$  est encore définie par l'égalité 7) où  $L_0$  et  $L_1$  désignent les deux nouveaux contours. Je suppose tout d'abord que les racines  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sont simples.

Dans la transformation dont nous avons déjà fait plusieurs fois usage, l'arc  $a_2 a_1$  parcourue dans le sens  $a_2, a_1$  devient une droite  $a'_2 a'_1$  parallèle à l'axe des ordonnées, dirigée dans le sens des ordonnées croissantes; la droite  $a_1 a_1$  devient une parallèle à l'axe des abscisses  $a'_1 a'_1$ , le point  $a'_1$  étant situé à gauche du point  $a'_1$ . Quand le point  $z$  parcourt  $a'_2 a'_1 b'_1$ , la projection du vecteur  $O'z$  sur les directions  $\sigma$  de l'intervalle  $\left(\frac{\pi}{2} + \nu, \pi\right)$  reste inférieure à la projection de  $O' a'_1$ . Il en résulte que dans l'intégrale sur le contour  $L_1$ , seuls les éléments relatifs à la portion de ce contour voisine de  $\alpha_1$  donnent naissance à une série asymptotique à termes non nuls. Pour former cette dernière, on voit que dans le cas présent:

$$\vartheta = 0,$$

il vient alors:

$$\vartheta - \pi + \sigma = \sigma - \pi.$$

Or comme

$$\frac{\pi}{2} + \nu < \sigma \leq \nu,$$

on a:



$$-\frac{\pi}{2} + \nu < \sigma - \pi \leq 0$$

et l'on conclut que

$$62) \quad \int_{L_1} y^{x-1} \varphi_1(y) dy = P_1 \left[ S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right],$$

$\varepsilon_1$  tendant uniformément vers 0.

Considérons maintenant une intégrale de la forme

$$I_1 = \int_{L_0} y^{x-1} v_1 dy.$$

Le contour  $L_0$  se décompose en plusieurs autres tels que

$$a_j b_j, s_j, b_j a_j, a_j a_{j+1}.$$

Or  $a_j a_j$  a pour image une parallèle  $a'_j a'_j$  à l'axe des abscisses,  $a'_j$  étant par rapport à  $a'_j$  du côté des abscisses négatives et  $a_j a_{j+1}$  une parallèle  $a'_j a'_{j+1}$  à l'axe des ordonnées, dirigée du côté des ordonnées négatives. Quand le point  $z$  décrit ces deux portions de droites, la projection du vecteur  $O'z$  sur les directions de l'intervalle  $\left(\frac{\pi}{2} + \nu, \pi\right)$  reste inférieure à la projection de  $O'a'_j$ . Seule la portion d'intégrale prise sur le cercle  $s_j$  donne naissance à une série asymptotique à termes non nuls. Au voisinage de  $\alpha_j$  la fonction  $v_1$  s'exprime linéairement en fonction de  $\varphi_j(y)$  et des  $q-1$  autres solutions de l'équation 3) correspondant aux racines entières de l'équation déterminante; ces dernières, qui sont holomorphes, donnent des intégrales nulles et il n'y a plus finalement qu'à considérer

$$I_{1,j} = m_{1,j} \int y^{x-1} \varphi_j(y) dy,$$

l'intégrale étant prise sur  $s_j$  parcouru en sens inverse à partir de  $b_j$  et  $m_{1,j}$  étant le coefficient de  $\varphi_j(y)$  dans l'expression de  $v_1$ . Pour déterminer complètement ce coefficient, je suppose que dans  $\varphi_j(y)$ , l'argument de  $y - \alpha_j$  est  $\omega_j$ , quand  $y$  vient en  $b_j$ , origine du contour  $s_j$ ; l'angle  $\vartheta$  est donc nul; de plus  $m_{1,j}$  n'est autre que le coefficient de  $\varphi_j(y)$  dans l'expression de  $v_1$  au point  $b_j$  quand  $y$  partant de  $a_j$ , point avec lequel est venu se confondre l'origine commune des contours  $L_0$  et  $L_1$ , décrit le contour  $L_0$  dans le sens direct et vient une première fois en  $b_j$  avant d'avoir parcouru  $s_j$ .

Comme le contour  $s_j$  est parcouru en sens inverse, il vient:

$$63) \quad I_{l,j} = -m_{l,j} e^{-2i\pi\lambda_j} P_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right].$$

Si dans l'expression de  $v_l$  on avait pris le coefficient de  $\varphi_j(y)$  quand  $y$  vient en  $b_j$ , non plus avant d'avoir décrit la circonférence  $s_j$  en sens inverse, mais après avoir décrit cette circonférence, il faudrait remplacer  $m_{l,j}$  par ce nouveau coefficient  $m'_{l,j}$

$$64) \quad m'_{l,j} = m_{l,j} e^{-2i\pi\lambda_j}.$$

Mais l'angle  $\vartheta$  serait alors égal à  $2\pi$ ; on aurait

$$\vartheta - \pi + \sigma = \sigma + \pi.$$

Comme  $\sigma + \pi$  est compris entre  $\frac{3\pi}{2} + \nu$  et  $2\pi$ , il y aurait lieu de multiplier les coefficients  $E$  par  $e^{2i\pi\lambda_j}$  et l'on aurait finalement

$$65) \quad I_{l,j} = -m'_{l,j} P_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right]$$

expression identique à 63) en vertu de la relation 64).

Supposons plus généralement que le point  $y$  au lieu de parcourir seulement une fois le contour  $L_0$ , parcourt ce contour  $K$  fois en sens direct; l'intégrale prise sur le contour  $a_j b_j, s_j, b_j a_j, a_j a_{j+1}$  parcouru par le point  $y$  après que ce dernier ait effectué  $K$  révolutions autour de l'origine en décrivant  $L_0$  est

$$\bar{I}_q^{(K)} = e^{2K\pi i x} \int y^{x-1} \bar{v}_l^{(K)} dy.$$

En désignant par  $m_{l,j}^{(K)}$  le coefficient de  $\varphi_j(y)$  dans  $\bar{v}_l^{(K)}$  défini comme il a été dit à propos de l'égalité 63), on a

$$\bar{I}_{l,j}^{(K)} = e^{2K\pi i x} m_{l,j}^{(K)} \int y^{x-1} \varphi_j(y) dy,$$

d'où

$$66) \quad \bar{I}_{l,j}^{(K)} = -m_{l,j}^{(K)} e^{2i\pi(Kx-\lambda_j)} P_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right].$$

Ce cas se présente pour le dernier contour partiel  $a_1 b_1, s_1, b_1 a_1, a_1 a_2$ . Finalement on voit que:

$$67) \int_{L_0} y^{s-1} v_l dy = - \left[ m_{l,2} e^{-2i\pi\lambda_2} P_2 \left( S_2 + \frac{\varepsilon_2}{x^2} \right) + \dots + m_{l,j} e^{-2i\pi\lambda_j} P_j \left( S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^j} \right) + \dots \right. \\ \left. + m_{l,m} e^{-2i\pi\lambda_m} P_m \left( S_m + \frac{\varepsilon_m}{x^m} \right) + m_{l,1}^{(1)} e^{2i\pi(s-\lambda_1)} P_1 \left( S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^m} \right) \right].$$

On en conclut que :

$$68) \int_{L_0} y^{s-1} U dy = - \left[ M_2 e^{-2i\pi\lambda_2} P_2 \left( S_2 + \frac{\varepsilon_2}{x^2} \right) + \dots + M_j e^{-2i\pi\lambda_j} P_j \left( S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^j} \right) + \dots \right. \\ \left. + M_1^{(1)} e^{2i\pi(s-\lambda_1)} P_1 \left( S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^m} \right) \right],$$

en posant :

$$69) M_j = c_1 \gamma_{1,1} m_{1,j} + c_2 [\gamma_{2,1} m_{1,j} + \gamma_{2,2} m_{2,j}] + \dots + c_l [\gamma_{l,1} m_{1,j} + \dots + \gamma_{l,l} m_{l,j}] + \dots$$

Quand  $\sigma$  est compris dans l'intervalle  $\left( \frac{\pi}{2} + \nu, \pi - \nu \right)$  les coefficients  $\gamma$  tendent vers 0 comme  $e^{2i\pi\sigma}$  à l'exception de ceux dont les deux indices sont égaux qui tendent vers  $-1$ , les différences  $\gamma_{l,l} + 1$  tendant vers 0 comme  $e^{2i\pi\sigma}$ ; il en résulte que  $M_j$  tend vers  $-A_j$  et que l'on a

$$70) M_j = -A_j + \varepsilon$$

avec

$$71) A_j = c_1 m_{1,j} + c_2 m_{2,j} + \dots + c_q m_{q,j},$$

$\varepsilon$  tendant vers 0 comme  $e^{2i\pi\sigma}$ .

Il vient donc finalement

$$72) f_1(x) = P_1 \left( S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^m} \right) - \left[ A_2 e^{-2i\pi\lambda_2} P_2 \left( S_2 + \frac{\varepsilon_2}{x^2} \right) + \dots + A_j e^{2i\pi\lambda_j} P_j \left( S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^j} \right) + \dots \right. \\ \left. + A_1^{(1)} e^{2i\pi(s-\lambda_1)} P_1 \left( S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^m} \right) \right].$$

Le coefficient  $A_j$  n'est autre que le coefficient de  $\varphi_j(y)$  dans l'expression de la fonction  $u$ , en fonction des solutions de 3) correspondant aux racines de l'équation déterminante relative au point  $\alpha_j$ , quand  $y$  partant du point  $a$  vient en décrivant le contour  $L_0$ , se confondre avec le point  $b_j$ ; ce coefficient est défini, comme a été défini le coefficient  $m_{l,j}$  pour la fonction  $v_l$ .

On aurait pu définir la fonction  $f_1(x)$  par la formule 22),



quand le point  $x$  s'éloigne avec un argument  $\sigma$  compris respectivement dans les intervalles:

$$\left(\frac{\pi}{2} + \nu, \mu_f - \nu\right), (\mu_f + \nu, \mu_g - \nu), (\mu_g + \nu, \mu_h - \nu), \dots (\mu_j + \nu, \pi - \nu).$$

Les directions  $\mu$  forment donc coupure; quand la direction  $\sigma$  passe d'un des angles qu'elles déterminent à l'angle voisin, la série représentant asymptotiquement une même fonction  $f_1(x)$  change brusquement; si  $\sigma$  coïncide avec l'une de ces directions,  $\mu_g$  par exemple, on a,

$$74) \quad f_1(x) = -A_f e^{-2i\pi\lambda_f} P_f \left[ S_f + \frac{\varepsilon_f}{x^n} \right] - A_g e^{-2i\pi\lambda_g} P_g \left[ S_g + \frac{\varepsilon_g}{x^n} \right].$$

Les points  $\alpha$  auxquels correspondent des développements en séries, intervenant dans la représentation de  $f_1(x)$  sont ceux dont les transformées  $\alpha'$  sont les sommets du polygone convexe situés à gauche de la parallèle à l'axe des ordonnées passant par  $\alpha'_1$ ; ils ont donc un module au plus égal à celui de  $\alpha_1$ ; dans les démonstrations le rayon du cercle  $S$  peut donc être pris arbitrairement pourvu qu'il soit supérieur au module de  $\alpha_1$ .

Dans le dernier intervalle  $\mu_j + \nu, \pi - \nu$ , la fonction  $f_1(x)$  est représentée asymptotiquement par la série relative au point  $\alpha_j$  quand  $x$  s'éloigne à l'infini dans l'intervalle  $(\pi - \nu, \pi)$  en restant toujours à distance finie des pôles des fonctions  $f(x)$ , les coefficients  $M$  restent finis et l'on a

$$75) \quad f_1(x) = -M_j e^{-2i\pi\lambda_j} P_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right],$$

$\varepsilon$  tendant vers 0 sous la nouvelle condition que le point  $x$  reste à distance finie des pôles des fonctions  $f$ .

Le cas où  $\sigma$  est compris dans l'intervalle  $\left(-\pi + \nu, -\frac{\pi}{2} - \nu\right)$  se traite de façon analogue au précédent. La fonction  $f_1(x)$  est alors définie par la formule 23).

Le contour  $L_1$  est formé par l'arc  $a_m a_1$ , parcouru en sens direct, la droite  $a_1 b_1$ , la circonférence  $s_1$ , la droite  $b_1 a_1$  et l'arc  $a_1 a_m$ . Le contour  $-L_0$  a pour origine  $a_m$ ; il se compose de  $a_m b_m, s_m$  en sens direct,  $b_m a_m, a_m a_{m-1}$  et ainsi de suite jusqu'à  $a_1 b_1, s_1$  en sens direct,  $b_1 a_1, a_1 a_m$ . Ainsi tandis que dans le cas précédent le point  $a$  origine des contours primitifs  $L_0$  et  $L_1$  étant rejeté en  $a_2$ , il est cette fois rejeté en  $a_m$ . On voit d'ailleurs immédiatement que les contours  $L_0$  et  $L_1$  primitifs ont été déformés sans que l'on traverse aucun des points singuliers des solutions de l'équation 3) et que la fonction  $f_1(x)$  définie au moyen

des nouveaux contours par la formule 23) est bien la même que celle qui était définie au moyen des anciens.

Il suffit de considérer l'image du contour  $L_1$  dans le plan des  $z$  pour voir que les seuls éléments de l'intégrale prise sur ce contour qui donnent naissance à une série à termes non nuls sont ceux qui sont voisins du point  $\alpha_1$ ; l'angle  $\vartheta$  est égal à  $2\pi$ ; on a

$$\vartheta - \pi + \sigma = \pi + \sigma.$$

Or

$$-\pi \leq \sigma < -\frac{\pi}{2} - \nu,$$

donc:

$$0 \leq \pi + \sigma < \frac{\pi}{2} - \nu,$$

et il vient:

$$76) \quad \int_{L_1} y^{x-1} \varphi_1(y) dy = P_1 \left[ S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right].$$

L'intégrale prise le long du contour  $-L_0$  se décompose en intégrales partielles, chacune d'elles étant prise sur un contour tel que

$$a_j b_j, s_j, b_j \sigma_j, a_j a_{j-1}.$$

Je désigne par  $n_{i,j}$  le coefficient de  $\varphi_j(y)$  dans l'expression au voisinage de  $\alpha_j$  de la fonction  $v_i$  en fonction de  $\varphi_j(y)$  et des  $q-1$  autres solutions de l'équation 3) correspondant aux racines entières de l'équation déterminante, quand le point  $y$  partant de  $a_m$  et décrivant le contour  $-L_0$  arrive en  $b_j$  avant d'avoir parcouru la circonférence  $s_j$  en sens direct. Le point  $y$  arrive ainsi en  $b_j$  avec l'argument  $\omega'_j = \omega_j - 2\pi$ . D'autre part dans l'expression de  $\varphi_j(y)$ , l'argument de  $y - \alpha_j$  est  $\omega_j$ ; il convient donc de prendre:

$$\vartheta = 2\pi,$$

et en posant:

$$\beta_j = \alpha_j e^{-2i\pi},$$

il vient:

$$77) \quad \int y^{x-1} v_i dy = n_{i,j} Q_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right],$$

avec

$$Q_j = \frac{\beta_j^{x+\lambda_j} e^{i\pi(\lambda_j+1)}}{x^{\lambda_j+1}}.$$

Si l'on avait pris dans l'expression de  $v_l$  au voisinage de  $\alpha_j$  le coefficient de  $\varphi_j(y)$  quand le point  $y$  vient en  $b_j$  après avoir parcouru la circonférence  $s_j$ , il conviendrait de remplacer dans 77)  $n_j$  par  $n'_j$ ,

$$n'_j = n_j e^{2i\pi\lambda_j}.$$

Mais dans ce cas l'angle  $\vartheta$  serait nul et l'on serait amené à multiplier les coefficients  $E^j$  dans  $S_j$  par  $e^{-2i\pi\lambda_j}$  de telle sorte que l'on obtiendrait finalement le même développement.

Quand  $\sigma$  appartient à l'intervalle  $(-\pi + \nu, -\frac{\pi}{2} - \nu)$  les coefficients  $\gamma$  tendent vers 0 comme  $e^{-2i\pi\sigma}$ ; en poursuivant le raisonnement on trouve donc,

$$78) \quad f_1(x) = P_1 \left[ S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] + B_m Q_m \left[ S_m + \frac{\varepsilon_m}{x^n} \right] + \dots + B_j Q_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right] + \dots + B_1 Q_1 \left[ S_1 + \frac{\varepsilon'_1}{x^n} \right],$$

$B_j$  étant le coefficient de  $\varphi_j(y)$  dans l'expression de la fonction  $u$  en  $b_j$  quand  $y$  partant de  $a_m$  décrit le contour  $-L_0$  pour arriver une première fois en  $b_j$ .

Les points  $\beta'$  images des points  $\beta$  se déduisent des points  $\alpha'$  en augmentant de  $2\pi$  les ordonnées de ces derniers; le polygone convexe ayant les points  $\beta'$  pour sommets les contenant à son intérieur se déduit du polygone des points  $\alpha'$  par une translation d'amplitude  $2\pi$ , dans le sens des ordonnées positives; son sommet inférieur est le point  $\alpha'_1$ . Je désigne par  $\mu_k, \mu_l, \dots, \mu_s$  les arguments, correspondant aux directions des perpendiculaires aux côtés de ce polygone, compris dans l'intervalle  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ ; l'argument  $\mu_k$  correspond à la perpendiculaire au côté  $\beta'_j \beta'_k$ , l'argument  $\mu_l$  à la perpendiculaire au côté  $\beta'_k \beta'_l$  et ainsi de suite. On constate alors que quand  $\sigma$  reste compris dans les intervalles:

$$(-\pi + \nu, \mu_k - \nu), (\mu_k + \nu, \mu_l - \nu), \dots, (\mu_s + \nu, -\frac{\pi}{2} - \nu),$$

la fonction  $f_1(x)$  est successivement représentée asymptotiquement dans chacun d'eux par,

$$79) \quad \begin{aligned} f_1(x) &= B_j Q_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon}{x^n} \right], \\ f_1(x) &= B_k Q_k \left[ S_k + \frac{\varepsilon}{x^n} \right], \\ &\dots \dots \dots \\ f_1(x) &= P_1 \left[ S_1 + \frac{\varepsilon}{x^n} \right]. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\sigma$  reste compris dans l'intervalle  $(-\pi, -\pi + \nu)$  le point  $x$  restant toujours à distance finie des pôles des fonctions  $f$ , les coefficients  $\gamma$  restent finies et il vient

$$f_1(x) = N_j(x) Q_j \left[ S_j + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

$\varepsilon$  tendant vers 0 sous la nouvelle condition que le point  $x$  reste à distance finie des pôles de  $f_1(x)$ .

Quand  $\sigma$  coïncide avec l'une des directions singulières  $\mu$ , la fonction  $f_1(x)$  est représentée par la somme des deux séries asymptotiques correspondant aux deux régions séparées par cette direction.

Il reste à examiner le cas où entre  $O$  et  $\alpha_1$  se trouvent sur la droite  $O\alpha_1$  quelques points  $\alpha$ . Pour appliquer les démonstrations précédentes il convient de se reporter à la définition primitive des contours  $L_0$  et  $L_1$ ; si dans la définition du contour  $L_1$  qui a été donnée au chapitre III pour le cas, où la direction  $\sigma$  est à droite de l'axe des ordonnées, le point  $\alpha$  a été évité au moyen d'une demi-circonférence située par rapport à  $O\alpha_1$  du côté des arguments croissants, on voit que dans la déformation du contour  $L_0$  tout se passe comme si le dernier point  $\alpha_m$  que rencontre le rayon tournant en sens direct autour de l'origine à partir de  $O\alpha_1$  pour revenir en  $O\alpha_1$  était situé sur la droite  $O\alpha_1$  elle-même; si au contraire le point  $\alpha$  situé sur  $O\alpha_1$  avait été évité par une demi-circonférence située par rapport à  $O\alpha_1$  du côté des arguments décroissants, on le considérerait comme étant le premier point  $\alpha$  que rencontre le rayon tournant autour de l'origine; tout se passerait comme si le point  $\alpha_2$  était venu sur la droite  $O\alpha_1$ . Il est manifeste que les directions  $\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$  deviennent singulières dans les conditions mêmes qui ont été indiquées plus haut.

Nous venons d'obtenir les développements asymptotiques d'une même fonction  $f_1(x)$  quand l'argument varie de  $-\pi$  à  $+\pi$ . Si  $\sigma$  était compris entre  $-\pi + 2K\pi$  et  $\pi + 2K\pi$ ,  $K$  étant un entier positif ou négatif, l'angle  $\vartheta - \pi + \sigma$  serait augmenté de  $2K\pi$ ; les coefficients  $E$  seraient donc multipliés par  $e^{2K\pi\lambda_j}$ ; mais comme les facteurs  $P$  contiennent  $x^i$  en dénominateur, les développements conserveraient finalement la même valeur. Ce résultat devait être prévu puisque la fonction  $f(x)$  est uniforme.

Les directions singulières sont de deux sortes; ce sont d'abord la direction négative de l'axe des abscisses et quelquefois sa direction positive; ces deux singularités tiennent essentiellement à la façon dont sont disposés les pôles des fonctions  $f(x)$ ; elles sont d'ailleurs communes à toutes ces fonctions. Les autres



directions singulières, celles des perpendiculaires au côté du polygone convexe ayant pour sommets les points  $\alpha'$  ou les contenant à son intérieur, varient d'une fonction à l'autre. Ainsi la fonction  $f(x)$  correspondant à la racine  $\alpha$  la plus voisine de l'origine, n'en admet aucune, ou plutôt la seule qu'elle admette se confond avec la direction négative de l'axe des  $x$ . Tout au contraire les solutions qui correspondent aux autres racines  $\alpha$  admettent en général deux ou plusieurs directions singulières  $\mu$ . Ces directions découpent le plan en régions à l'intérieur desquels les restes  $\varepsilon$  tendent uniformément vers 0, si l'on en excepte la direction négative et quelquefois la direction positive de l'axe des abscisses. Ces restes  $\varepsilon$  se composent toujours de deux parties dont l'une tend vers 0 comme une puissance négative de  $\varrho$  et l'autre comme  $e^{-h\varrho^k} h$  et  $k$  étant positifs; ils tendent donc vers 0 comme une puissance négative de  $\varrho$ .

Nous avons supposé que tous les points  $\alpha$  intérieurs à la circonférence  $S$  sont des racines simples du polynome  $B_0$ ; il est facile d'étendre les résultats obtenus au cas où quelques uns d'entre eux sont des racines multiples de ce polynome, pourvu que les solutions de l'équation 3) y soient toujours régulières.

Soit  $\alpha_j$  une racine multiple d'ordre  $p$  du polynome  $B_0$  jouissant de cette dernière propriété et soit une solution  $f_1(x)$  de l'équation aux différences finies, formée au moyen de la fonction  $\varphi_1(y)$  régulière au voisinage de la racine  $\alpha_j$ ; toutes les solutions de l'équation 3) s'expriment linéairement en fonction des  $p$  solutions  $\varphi_{j,1}, \varphi_{j,2}, \dots, \varphi_{j,p}$  correspondant aux racines  $\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,p}$  en général non entières de l'équation déterminante relative à  $\alpha_j$  et des  $q - p$  autres solutions holomorphes correspondant aux racines  $0, 1, \dots, q - p - 1$  de cette même équation. Si le point  $\alpha_1$  a un module supérieur à celui de  $\alpha_j$ , il se peut que le transformé  $\alpha'_j$  de ce dernier soit un des sommets du polygone convexe ayant pour sommets ou comprenant à son intérieur les points  $\alpha'$ , transformés des points  $\alpha$  dont le module est inférieur à celui de  $\alpha_1$ . Il existe alors un angle sur les directions duquel le vecteur  $O'\alpha'_j$  a une projection supérieure à celle des autres vecteurs  $O'\alpha'$ . Supposons qu'il soit situé au dessus de l'axe des abscisses; quand  $x$  s'éloigne à l'infini dans cet angle on a, soit

$$80) \quad f_1(x) = -A_{j,1} e^{-2i\pi\lambda_{j,1}} P_j^1 \left[ S_j^1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] - A_{j,2} e^{-2i\pi\lambda_{j,2}} P_j^2 \left[ S_j^2 + \frac{\varepsilon_2}{x^n} \right] - \dots \\ - A_{j,p} e^{-2i\pi\lambda_{j,p}} \left[ S_j^p + \frac{\varepsilon_p}{x^n} \right],$$

quand aucune des fonctions  $\varphi_{j,l}$  ne contient de logarithme, soit

$$\begin{aligned}
 81) \quad f_1(x) = & -A_{j,1} e^{-2i\pi\lambda_{j,1}} P_j^1 \left[ S_{j,1}^1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] \\
 & -A_{j,2} \left[ e^{-2i\pi\lambda_{j,2}} P_j^2 S_{j,1}^2 + \frac{d}{d\lambda_{j,2}} (e^{-2i\pi\lambda_{j,2}} P_j^2 S_{j,2}^2) + P_j^2 e^{-2i\pi\lambda_{j,2}} \frac{\varepsilon_2}{x^n} \right] \\
 & \dots \dots \dots \\
 & -A_{j,l} \left[ e^{-2i\pi\lambda_{j,l}} P_j^l S_{j,1}^l + \frac{d}{d\lambda_{j,l}} (e^{-2i\pi\lambda_{j,l}} P_j^l S_{j,2}^l) + \dots \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{d^{l-1}}{d\lambda_{j,l}^{l-1}} (e^{-2i\pi\lambda_{j,l}} P_j^l S_{j,l}^l) + e^{-2i\pi\lambda_{j,l}} P_j^l \frac{\varepsilon_l}{x^n} \right], \\
 & \dots \dots \dots \\
 & -A_{j,p} \left[ e^{-2i\pi\lambda_{j,p}} P_j^p S_{j,1}^p + \dots + \frac{d^{p-1}}{d\lambda_{j,p}^{p-1}} (e^{-2i\pi\lambda_{j,p}} P_j^p S_{j,p}^p) + e^{-2i\pi\lambda_{j,p}} P_j^p \frac{\varepsilon_p}{x^n} \right],
 \end{aligned}$$

si certaines des fonctions  $\varphi_{j,l}$  contiennent des logarithmes. Quand l'angle est situé au dessous de l'axe des abscisses, aux égalités 80) et 81) se substituent respectivement les égalités

$$82) \quad f_1(x) = B_{j,1} Q_j^1 \left[ S_j^1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] + B_{j,2} Q_j^2 \left[ S_j^2 + \frac{\varepsilon_2}{x^n} \right] + \dots + B_{j,p} \left[ S_j^p + \frac{\varepsilon_p}{x^n} \right],$$

et

$$\begin{aligned}
 83) \quad f_1(x) = & B_{j,1} Q_j^1 \left[ S_{j,1}^1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] \\
 & + B_{j,2} \left[ Q_j^2 S_{j,1}^2 + \frac{d}{d\lambda_{j,2}} Q_j^2 S_{j,2}^2 + Q_j^2 \frac{\varepsilon_2}{x^n} \right] \\
 & + \dots \dots \dots \\
 & + B_{j,l} \left[ Q_j^l S_{j,1}^l + \frac{d}{d\lambda_{j,l}} Q_j^l S_{j,2}^l + \dots + \frac{d^{l-1}}{d\lambda_{j,l}^{l-1}} Q_j^l S_{j,l}^l + Q_j^l \frac{\varepsilon_l}{x^n} \right] \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + B_{j,p} \left[ Q_j^p S_{j,1}^p + \dots + \frac{d^{p-1}}{d\lambda_{j,p}^{p-1}} Q_j^p S_{j,p}^p + Q_j^p \frac{\varepsilon_p}{x^n} \right].
 \end{aligned}$$

Dans les égalités 80) et 81) les constantes  $A_{j,1}, \dots, A_{j,p}$  sont les coefficients de  $\varphi_{j,1}, \dots, \varphi_{j,p}$  dans l'expression de  $u$

$$u = \bar{\varphi}_1(y) - \varphi_1(y)$$

au voisinage de  $\alpha_j$ , le point  $y$  décrivant le chemin  $L_0$  en sens direct comme il a été indiqué dans le cas où  $\alpha_j$  est racine simple. Dans les égalités 82), 83) on a

$$Q_j^l = \frac{\beta_j^{\alpha + \lambda_j, l} e^{i\pi(\lambda_j, l+1)}}{x^{\lambda_j, l+1}}$$

avec

$$\beta_j = \alpha_j e^{-2i\pi}$$

et les constantes  $B_{j,1}, \dots, B_{j,p}$  sont les coefficients de  $\varphi_{j,1}, \dots, \varphi_{j,p}$  dans l'expression de la fonction  $u$  au voisinage du point  $\alpha_j$  quand le point  $y$  décrit le contour  $L_0$  en sens inverse.

L'étude qui vient d'être faite sur les fonctions  $f(x)$  quand le point  $x$  s'éloigne à l'infini avec un argument appartenant à l'un des deux intervalles  $\left(\frac{\pi}{2} + 2K\pi, \pi + 2K\pi\right)$  ou  $\left(-\pi + 2K\pi, -\frac{\pi}{2} + 2K\pi\right)$ ,  $K$  étant entier pourrait être reproduite pour les fonctions  $g$  quand le point  $x$  s'éloigne à l'infini avec un argument compris entre  $-\frac{\pi}{2} + 2K\pi$  et  $\frac{\pi}{2} + 2K\pi$ . Dans le cas de la fonction  $f_1(x)$  nous avons pris pour former le contour  $L_0$  une circonférence de rayon supérieur au module de  $\alpha_1$ ; dans le cas de la fonction  $g_1(x)$  on prend pour former le contour  $L_\infty$  une circonférence de rayon inférieur au même module. Les points donnant naissance aux séries asymptotiques représentant la fonction  $g_1(x)$  se trouvent parmi ceux dont le module est supérieur ou égal à celui de  $\alpha_1$ . Tandis que dans le cas des fonctions  $f$  les directions singulières  $a$  sont situées à gauche de l'axe des ordonnées, elles sont situées à droite du même axe dans le cas des fonctions  $g(x)$ .

En résumé à chaque racine finie, non nulle, du polynôme  $B_0$  au voisinage de laquelle les solutions de l'équation différentielle 3) sont régulières, on a fait correspondre un nombre de fonctions  $f$  et de fonctions  $g$ , solutions de l'équation aux différences finies, égal à l'ordre de multiplicité de cette racine. On a formé les séries asymptotiques représentant chaque fonction  $f_1(x)$ , quand le point  $x$  s'éloigne à l'infini en restant à droite de l'axe des ordonnées, et chaque fonction  $g(x)$ , quand le point  $x$  s'éloigne à l'infini en restant à gauche de ce même axe; dans chacun de ces cas les seuls éléments des intégrales définissant les fonctions  $f$  ou  $g$  qui interviennent dans la formation de ces séries sont ceux qui sont voisins du point  $\alpha$  auquel ces fonctions correspondent. On n'a d'ailleurs formé les séries asymptotiques, auxquelles ces éléments d'intégrale donnent naissance, qu'en supposant que les solutions de l'équation différentielle 3) sont régulières en ce point. Si le point  $x$  s'éloigne à l'infini en restant à gauche de l'axe des ordonnées les éléments d'intégrales définissant la fonction  $f_j(x)$  correspondant au point  $\alpha_j$ , qui interviennent dans la formation des séries asymptotiques représentant cette fonc-

tion, sont voisins de chacun des points  $\alpha$  dont le module est au plus égal à celui de  $\alpha_j$ . Admettant qu'en tous ces points  $\alpha$  les solutions de 3) sont régulières, on a formé ces séries asymptotiques et l'on a ainsi obtenu l'ensemble des séries représentant chaque fonction  $f$  à l'infini. De même on a formé les séries asymptotiques représentant la fonction  $g_j(x)$  quand le point  $x$  s'éloigne à l'infini en restant à droite de l'axe des ordonnées, en supposant que les solutions de 3) sont régulières au voisinage des points  $\alpha$  dont le module est au moins égal à  $\alpha_j$ .

Le nombre des racines non nulles et finies du polynome  $B_0$  est en général égal à l'ordre de l'équation aux différences finies; mais dans certains cas ce polynome peut admettre des racines nulles ou son degré peut s'abaisser; on peut rechercher ce que deviennent alors les fonctions  $f$  et  $g$  correspondant aux racines  $\alpha$  qui deviennent ainsi nulles ou infinies et former les séries asymptotiques qui les représentent; ce cas particulièrement intéressant est celui des fonctions  $\Gamma(x)$  et  $\frac{1}{\Gamma(x)}$ . La solution de ce nouveau problème dépend essentiellement de la nature des solutions de l'équation 3) au voisinage du point à l'infini ou de l'origine; quand elles sont représentées au voisinage de ces points par des séries asymptotiques normales de première espèce, on peut former en suivant toujours la même méthode des solutions de l'équation aux différences finies, qui, pour les grandes valeurs de la variable, sont représentées par des séries asymptotiques analogues aux séries bien connues qui représentent la fonction  $\Gamma(x)$  et son inverse.

---