ÜBER DIE
DURCHDRINGUNG GLEICHSEITIGER ROTATIONSHYPERBOLOIDE
VON PARALLELEN AXEN

VON

WILH. FIEDLER
in ZÜRICH.

Einleitung.

1. Das Anschauungsgebiet, in welchem sich die nachfolgenden Entwickelungen bewegen, ist durch folgende Betrachtungen einfach zu umschreiben.

Wenn zwischen den Radien R und r von zwei Kreisen in derselben Ebene, von denen der erste als fest gedacht wird, und ihrer Centraldistanz $2c$ eine der Relationen

$$(2c)^2 = R^2 + r^2, \qquad (2c)^2 + R^2 = r^2, \qquad (2c)^2 + r^2 = R^2$$

des Pythagoräischen Satzes besteht, so wird dadurch der Reihe nach ausgesagt, dass die Kreise R und r sich orthogonal durchschneiden, dass der Kreis R von r oder endlich der Kreis r von R diametral d. h. in den Endpunkten eines seiner Durchmesser geschnitten wird. Und weil die beiden letzten Relationen durch Zeichenwechsel von R^2 resp. r^2 aus der ersten hervorgehen, so sagen wir, dass der *Orthogonalschnitt* eines rein imaginären Kreises durch den *Diametralschnitt* seines reellen Stellvertreters oder Symmetriekreises ersetzt wird.

Acta mathematica. 5. Imprimé 10 Septembre 1884.

Betrachtet man die Centraldistanz $2c$ als unabhängige Veränderliche und den Radius r als Function derselben, so erhält man im ersten Falle für $2c > R$, im dritten Falle für $2c < R$ und im zweiten immer zwei gleiche und entgegengesetzte reelle Werthe von r; insbesondere den Werth Null für $(2c)^2 = R^2$ im ersten und dritten Falle, aber nur für

$$(2c)^2 + R^2 = 0$$

also bei reellem Radius für keinen reellen Werth der Centraldistanz im zweiten Falle; $2c = 0$ giebt im ersten Falle den rein imaginären Functionswerth $r^2 = -R^2$, im zweiten und dritten $r^2 = R^2$, zugleich den kleinsten und resp. grössten reellen Werth der Function. Trägt man von den Punkten der durch den Werth von $2c$ gegebenen zu R concentrischen Kreise der Ebene oder Tafel auf ihre zugehörigen Normalen die Werthe r ab, die ihnen entsprechen, so erfüllen die Endpunkte in jedem Falle eine zur Tafel orthogonal-symmetrische Fläche; eine *Rotationsfläche zweiten Grades*, weil für die Normale im Mittelpunkt von R als Axe der z und zwei zu einander rechtwinklige Durchmesser desselben Kreises als Axen der x und y wegen $(2c)^2 = x^2 + y^2$ und $r^2 = z^2$ die obigen Relationen übergehen in

$$x^2 + y^2 = R^2 + z^2, \qquad x^2 + y^2 + R^2 = z^2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Von diesen Flächen ist die dritte die *Kugel* über dem Hauptkreise R, die erste und zweite haben den gleichseitigen Rotationskegel $x^2 + y^2 = z^2$ zum gemeinsamen Asymptotenkegel und werden als *einfaches* und *zweifaches gleichseitiges Rotationshyperboloid* unterschieden. Die erste und dritte Fläche berühren einander mit zur Tafel normalen Tangentialebenen in allen Punkten des Kreises R, die zweite und dritte mit zur Tafel parallelen Tangentialebenen in den Punkten $x = 0$, $y = 0$, $z^2 = R^2$. Wir sagen, dass die Kreise in der Tafel, welche einen festen Kreis R derselben orthogonal resp. diametral schneiden, die *Bildkreise* der Punkte eines einfachen resp. zweifachen gleichseitigen Rotationshyperboloides sind, für welches R der Hauptkreis ist, und nennen diese Gesammtheit das *Netz* von Kreisen mit reellem und resp. imaginärem Orthogonalkreis; während die Kreise der Tafel, die von R diametral geschnitten werden, die Bildkreise für die Punkte der Kugel sind, die jenen zum Hauptkreis hat.

Die Querschnitte der drei Flächen mit der Ebene $y=0$, also die Hyperbeln mit der Centrale der Kreise oder der Axe x als Hauptaxe resp. Nebenaxe und der Kreis

$$x^2-z^2=R^2, \qquad z^2-x^2=R^2, \qquad x^2+z^2=R^2,$$

sind die Repräsentanten der *Büschel* von Kreisen mit *Grenz*punkten resp. mit *Grund*punkten, die aus Punkten von x einen gegebenen Kreis $x^2+y^2=R^2$ orthogonal resp. diametral schneiden oder endlich, die diametral von ihm geschnitten werden.

Endlich sehen wir, dass der Schnitt des einfachen Hyperboloides $x^2+y^2=R^2+z^2$ mit jeder der Ebenen $y=\pm R$ durch $x^2-z^2=0$ oder $(x+z)(x-z)=0$ ausgedrückt wird oder aus zwei in der Kehlkreistangente $y=\pm R$ projicierten durch $x=0$, $z=0$ gehenden unter 45° zur Tafel geneigten Geraden besteht, und aus der Rotationssymmetrie der Fläche folgt dass dies für jede der den Kehlkreis berührenden Normalebenen zur Tafel stattfindet, oder dass die Fläche zwei Systeme reeller gerader Linien enthält, repräsentiert durch die Büschel sich berührender Kreise, die zu dem Kehlkreis in demselben Punkte orthogonal sind; sie sollen ihre *Mantellinien* genannt werden.

2. Wenn die reellen Kreise R und r in der Tafel sich unter dem Winkel σ reell schneiden, so hat man für das Quadrat ihrer Centraldistanz

$$(2c)^2=R^2+r^2-2Rr\cos\sigma;$$

wir setzen auf Grund des vorigen fest, dass der Schnitt des rein imaginären Kreises vom Radius iR resp. ir mit dem Kreise r oder R unter dem Winkel vom Cosinuswerth $i\cos\sigma$, endlich der Schnitt der rein imaginären Kreise iR und ir unter dem Winkel σ ausgedrückt werde durch

$$(2c)^2=-R^2+r^2+2Rr\cos\sigma, \qquad (2c)^2=R^2-r^2+2Rr\cos\sigma,$$
$$(2c)^2=-R^2-r^2+2Rr\cos\sigma$$

resp. Man hat damit für die durch solche Kreissysteme cyklographisch abgebildeten Flächen der Reihe nach

$$x^2+y^2=R^2+z^2-2Rz\cos\sigma, \qquad x^2+y^2=-R^2+z^2+2Rz\cos\sigma,$$
$$x^2+y^2=R^2-z^2+2Rz\cos\sigma, \qquad x^2+y^2=-R^2-z^2+2Rz\cos\sigma.$$

Setzt man $(z - z_0)$ für z und bestimmt z_0 jeweilen so, dass die erste Potenz von z den Coefficienten Null erhält, was für die zweite $z_0 = -R\cos\sigma$ und für die drei andern $z_0 = R\cos\sigma$ liefert, so gehen die Gleichungen über in

$$x^2 + y^2 = R^2(1 - \cos^2\sigma) + z^2, \qquad x^2 + y^2 = -R^2(1 + \cos^2\sigma) + z^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2(1 + \cos^2\sigma), \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2(\cos^2\sigma - 1)$$

und zeigen damit die Flächen als *einfache* und *zweifache gleichseitige Rotationshyperboloide* und als *Kugeln* von einfach bestimmten zur Tafel parallelen Hauptebenen und Radien. Insbesondere ist die erste für alle reellen σ ein einfaches und für die nicht reellen mit reellen Cosinuswerthen ein zweifaches Hyperboloid, die letzte nur für $\cos^2\sigma > 1$ eine reelle Kugel. Damit ist der Schnitt von Kreisen in einer Ebene unter Winkeln von vorgeschriebenem Cosinuswerth oder der *Winkelschnitt* für reelle und für rein imaginäre Kreise durch einfache Constructionen bestimmt. Unter den speciellen Fällen führt $\cos\sigma = 0$ auf die Grundgleichungen in § 1 zurück; $\cos\sigma = \pm 1$ macht aus der ersten und der letzten Gleichung respective

$$x^2 + y^2 = (R \mp z)^2 \text{ oder } x^2 + y^2 = z^2 \text{ für } z_0 = \mp R, \quad 2c = R \mp r$$

und

$$x^2 + y^2 = -(R \mp z)^2 \text{ oder } x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad 2c = i(R \mp r),$$

die Asymptotenkegel der Hyperboloide und der Kugel. Die Specialisierung für den Schnitt mit der Ebene $y = 0$ etc. wiederholen wir nicht; bemerken aber dass für den in eine Gerade übergegangenen festen Kreis oder R und c als unendlich gross für e als den Abstand der Geraden vom Mittelpunkt des Kreises r wegen $R - 2c = e$ und $R + 2c = 2R$ aus der Definitionsgleichung des Schnittwinkels durch Einsetzen und nach dem Verschwinden von r^2 gegen die unendlich grossen Glieder folgt

$$r\cos\sigma = e \text{ oder } \cos\sigma = \frac{e}{r} = \frac{x}{z} = \operatorname{cotg}\alpha$$

für die Wahl der Axe x als normal zur Geraden R in der Tafel und für α als den Neigungswinkel der durch sie und die Punkte (x, z) oder die von den Bildkreisen (e, r) dargestellten Punkte bestimmten *Ebene* gegen die Tafel.

Die Grenzwerthe von $\cos\sigma$ liefern die zur Tafel normale Ebene als *Grenzform* des einfachen Hyperboloides mit der Tafel als Hauptebene und die 45° Ebene als Grenzform des gleichseitigen Rotationskegels mit zur Tafel normaler Axe; mit $\cos\sigma \lesseqgtr 1$ wird die unter mehr oder weniger als 45° zur Tafel geneigte Ebene als Grenzform des einfachen resp. zweifachen Hyperboloides für unendlich wachsenden Spurkreis in der Tafel bezeichnet. Die Tangentialebene im Punkte $x = R$, $y = 0$, $z = 0$ von

$$x^2 + y^2 = \pm R^2 + z^2 \mp 2Rz\cos\sigma$$

ist $x \pm z\cos\sigma = + R$ oder für ihren Neigungswinkel zur Ebene xy ist $\operatorname{cotg}\alpha = \cos\sigma$; d. h. *der Schnittwinkel der Bildkreise der Hyperboloidpunkte mit dem Spurkreis desselben hat zu seinem Cosinus die Cotangente der Tafelneigung des Hyperboloides im Spurkreis.* Für das einfache Hyperboloid ist der Schnitt der vorgenannten Ebene aus $z\cos\sigma = R - x$ also $(R - x)^2 \operatorname{tg}^2\sigma = y^2$ aus zwei reellen Geraden zusammengesetzt (§ 1).

3. Irgend zwei der betrachteten Flächen für reelle r durchdringen sich stets in einem *Kegelschnitt* im Endlichen, die Kegel und Hyperboloide in Folge ihrer besonderen Art und Lage, nach welcher sie den unendlich fernen Querschnitt mit einander gemein haben. Dasselbe gilt auch im Bereich der *rein imaginären* r für die Durchdringung von zwei Kugeln aus demselben Grunde. Die Flächen aus reellen r durchdringen sich dagegen mit denen aus rein imaginären r, weil sich kein fester Theil absondert, in *doppelt gekrümmten Curven,* selbstverständlich den Fall von Ebene und Kugel ausgenommen, der stets einen Kreis liefert. Wir haben es im Folgenden nicht eigentlich mit diesen Durchdringungen von Kugeln und gleichseitigen Rotationshyperboloiden zu thun, weil sie eine zweifache Interpretation derselben Grössen z einschliessen; aber es ist Grund, sie nicht ganz zu übergehen und sie mögen am besten hier als Beispiel erörtert werden. Die Orthogonalprojection solcher Querschnitte resp. Durchdringungen nach der Richtung der Axen liefert die *Theorie der Kegelschnitte* und *gewisser Curven vierter Ordnung aus Kreissystemen,* die ebenen Querschnitte der Kugel und die Durchdringungen von Kugeln mit einander führen insbesondere auf cyklographische Eigenschaften der Ellipse. Man bildet die Gleichungen dieser Orthogonalprojectionen in allen Fällen durch Elimination der z zwischen den Gleichungen der sich Durchdrin-

genden Flächen, wie es hier für *Kugel* und *Hyperboloid* geschehen soll. Wir denken die Axe der z in der Mitte zwischen den Axen der Flächen und die der x als Verbindungslinie ihrer Fusspunkte in der Tafel, dann den Mittelpunkt der Kugel in der Tafel, so dass mit $2c$ als dem Abstand der Axen und der Hauptkreisprojectionen der Flächen

$$(x + c)^2 + y^2 + z^2 = r_1^2, \qquad (x - c)^2 + y^2 = r_2^2 + z^2 - 2r_2 z \cos\sigma$$

ihre Gleichungen sind; die Elimination der z aus denselben giebt allgemein für die Projection der Durchdringung

$$\{2(x^2 + y^2 + c^2) - (r_1^2 + r_2^2)\}^2 = 4r_2^2 \cos^2\sigma\{r_1^2 - (x + c)^2 - y^2\}.$$

Mit $\cos\sigma = 0$ oder dem Kugelmittelpunkt in der Hauptebene des Hyperboloids und mit $c = 0$ oder für zusammenfallende Axen der Flächen reduciert sich dies auf

$$\left\{x^2 + y^2 - \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2c^2}{2}\right\}^2 = 0,$$

resp.

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)\{r_1^2 + r_2^2(1 - \cos^2\sigma)\} + \frac{1}{4}\{(r_1^2 + r_2^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \cos^2\sigma\} = 0;$$

den doppelt zählenden Kreis aus der Mitte der Centrale durch die Schnittpunkte der Hauptkreise, und resp. ein Paar von concentrischen Kreisen, die Projectionen der beiden Flächen gemeinsamen Parallelkreise, für welche der Factor von $-(x^2 + y^2)$ die Summe der Radienquadrate und das absolute Glied das Product derselben ist; im letzten Falle bemerkt man, dass jene Summe mit der Summe der Radienquadrate der Hauptkreise übereinstimmt und insbesondere, dass für $\cos\sigma = 0$ beide Kreise der Projection in einen einzigen zusammenfallen, dessen Radiusquadrat das arithmetische Mittel von denen der gegebenen Kreise ist; J. Steiner hat in § 7 seiner Abhandlung *Über einige neue Bestimmungsarten der Curven zweiter Ordnung nebst daraus folgenden neuen Eigenschaften derselben Curven* vom März 1852 (Werke II, S. 462) diese Ergebnisse, zum Theil ohne nähere Bestimmung und durchweg ohne Beweis, mitgetheilt. Ich werde diese Abhandlung weiterhin abkürzend durch St. 1852 unter Angabe der p. von Werke II citieren, denn es wird sich zeigen, dass meine Anschauung ihren ganzen Inhalt auf das Einfachste liefert und noch vieles hinzu zu fügen gestattet. Jene Curve vierter Ordnung ist nach ihrer Entstehung der Ort vom Centrum eines Kreises, welcher von einem festen Kreise diametral und von einem andern unter Winkeln von vorgeschriebenem Cosinuswerth geschnitten wird; der doppelt zählende Kreis aus der Mitte der Centrale entspricht der Orthogonalität der letzteren Schnitte; etc.

Sind beide Flächen *Kugeln*

$$(x + c)^2 + y^2 + z^2 = r_1^2, \qquad (x - c)^2 + y^2 + z^2 = r_2^2 + 2r_2 z \cos\sigma,$$

so ist die Projection der Durchdringung, die Ellipse

$$(r_1^2 - r_2^2 - 4cx)^2 = 4r_2^2 \cos^2\sigma\{r_1^2 - (x + c)^2 - y^2\},$$

der Ort vom Centrum eines rein imaginären Kreises, der vom Hauptkreis der ersten Kugel orthogonal und vom Spurkreis der zweiten unter einem Winkel von vorgeschriebenem Cosinuswerth geschnitten wird; etc. In allen Fällen einer ebenen Durchdringung von zwei Flächen mit derselben Hauptebene, also für zwei Kugeln und für die Combinationen von zwei Hyperboloiden mit in der Tafel liegenden Mittelpunkten, entsteht als ihre Projection die *Potenzlinie* der Hauptkreise mit den Gleichungen resp.

$$4cx = r_1^2 - r_2^2, \qquad 4cx = r_2^2 - r_1^2, \qquad 4cx = r_1^2 + r_2^2$$

für zwei Kugeln wie für zwei einfache Hyperboloide mit denselben Hauptkreisen, für zwei zweifache Hyperboloide und für ein einfaches und ein zweifaches Hyperboloid; sie ist desshalb für zwei reelle Kreise *innerhalb* derselben der Ort der Centra der Kreise, die von ihnen diametral und *ausserhalb* der Ort der Centra der Kreise, die von ihnen orthogonal geschnitten werden; für zwei rein imaginäre Kreise der Ort der Centra von Kreisen, welche sie diametral schneiden, etc. Die Formeln enthalten die Regeln ihrer Construction.

4. Da die Projectionen der Durchdringungen von *Hyperboloiden* im Allgemeinen *Kegelschnitte* sind, so erhalten wir für diese eine Reihe von Beziehungen zu Kreissystemen, welche den verschiedenen Erzeugungen als Durchdringung entsprechend und von dem allgemeinen Fall zu den speciellen Fällen übergebend sich wie folgt aussprechen lassen. Ein Kegelschnitt ist der Ort der Mittelpunkte von reellen Kreisen in der Tafel,

welche zwei gegebene feste einzeln oder zusammen reelle oder rein imaginäre Kreise unter Winkeln von resp. vorgeschriebenen Cosinuswerthen schneiden; von reellen Kreisen, die von zwei festen Kreisen den einen orthogonal resp. diametral und den andern unter Winkeln von gegebenem Cosinuswerth schneiden. Er ist ferner, der Beiziehung der Specialformen Kegel und Ebene entsprechend, der Ort der Mittelpunkte von reellen Kreisen, die einen festen Kreis berühren resp. durch einen festen Punkt gehen und einen zweiten festen Kreis orthogonal, diametral oder unter Winkeln von vorgeschriebenem Cosinus schneiden; von Kreisen, welche zwei feste Kreise gleichartig resp. ungleichartig berühren; von Kreisen, die einen festen Kreis und eine feste Gerade der Tafel unter gegebenen Winkeln schneiden; oder die durch einen festen Punkt gehen resp. einen festen Kreis berühren und eine Gerade unter gegebenem Winkel schneiden; oder die durch einen festen Punkt gehen resp. einen festen Kreis berühren, einen festen Kreis orthogonal oder diametral durchschneiden und zugleich eine feste Gerade der Tafel unter vorgeschriebenem Winkel treffen. Dem Falle von zwei Ebenen entspricht endlich als Grenzform der Kegelschnittprojection die *gerade Linie,* der Ort der Mittelpunkte von Kreisen, welche zwei feste Gerade, die Spuren jener Ebenen, unter Winkeln von gegebenem Cosinuswerth schneiden; und es ist offenbar, dass diese *Kreise* eine *lineare Reihe* mit dem Schnittpunkt jener Geraden als Durchstosspunkt in der Tafel und als gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt der Kreise bilden.

Sowie nun in diesem besonderen Falle durch die Schnittlinie der betrachteten Ebenen unendlich viele andere Ebenen gehen, deren Spuren in der Tafel, die Ähnlichkeitsstrahlen der Reihe von Kreisen, sämtlich gleichwinklig schneidende jener Kreise für andere Cosinuswerthe sind, so gehen auch durch die allgemeine Durchdringung von zwei parallelaxigen gleichseitigen Rotationshyperboloiden unendlich viele solche Flächen, eine durch jeden Punkt wie dort; alle diese Flächen bilden das *Büschel der gleichseitigen parallelaxigen Rotationshyperboloide,* und sein Querschnitt mit irgend einer Ebene ist ein Büschel von Kegelschnitten mit zwei im Unendlichen und zwei im Endlichen gelegenen Grundpunkten, für Ebenen normal zur Richtung seiner Axen insbesondere ein Büschel von Kreisen. Wir haben eine allgemeine Eigenschaft und einen unterscheidenden Character solcher Büschel hervorzuheben, die Existenz einer geraden Linie als

Ort ihrer Mittelpunkte und die eigentlichen Kegel unter ihren Flächen. Was die erste betrifft, so ist bekanntlich der Ort der Mittelpunkte der Flächen eines Büschels von Flächen zweiten Grades eine doppelt gekrümmte Curve dritter Ordnung, welche durch die Ecken seines gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole und Polarebenen hindurchgeht und daher durch die Mittelpunkte der zwei nothwendig gegebenen Flächen des Büschels bestimmt ist. Aber in unserem Falle zerfällt die Durchdringung in den unendlich fernen gemeinsamen Parallelkreis der Hyperboloide und einen Kegelschnitt im endlichen Raum; in den unendlich fernen Punkten, welche beiden gemein sind, haben alle Flächen des Büschels dieselben Tangentialebenen, jene sind Ecken des Quadrupels, diese die zugehörigen Polarebenen, und ihre Schnittlinie ist der *eigentliche Mittelpunktsort der Flächen des Büschels;* diese *Mittelpunktsgerade* geht somit durch den Pol der unendlich fernen Geraden der Ebene des Durchdringungskegelschnittes in Bezug auf den unendlich fernen Parallelkreis der Flächen nach dem Mittelpunkte jenes Kegelschnittes und liegt daher in der Axenebene der gegebenen Flächen. Aus dieser Vertheilung der Mittelpunkte der Flächen des Büschels folgt, dass jede zur Tafel parallele Ebene die Hauptebene für eine seiner Flächen ist, deren Spur in der Tafel derjenige Kreis seines Spurenbüschels ist, der die Projection ihres Mittelpunktes zu seinem Mittelpunkte hat.

5. Die zu den erwähnten unendlich fernen Quadrupelecken gehörigen doppelt projicierenden Kegel der Durchdringung sind degeneriert in die zugehörigen Strahlenbüschel in der unendlich fernen Ebene und der Ebene des Durchdringungskegelschnittes; je nachdem die beiden auf der Mittelpunktsgeraden im Endlichen liegenden Ecken des Quadrupels reell oder imaginär sind, werden auch die beiden eigentlichen Kegel unter den Flächen des Büschels reell existiren oder nicht. Wir unterscheiden darnach *Büschel* von parallelaxigen gleichseitigen Hyperboloiden *mit* reellen Kugeln von solchen *ohne* reelle Kegel.

Sind die Kegel reell, so haben sie in der Verbindungsebene der Axen je zwei zu diesen unter 45° geneigte Mantellinien, deren endlich entfernte Schnittpunkte ausser den Kegelspitzen die beiden Punkte des Durchdringungskegelschnittes in der Axenebene und somit seine *Scheitel* sein müssen. Unsere Kegel werden also nur dann nicht reell sein, wenn es diese Scheitel des Kegelschnittes in der Axenebene nicht sind, d. h. wenn derselbe eine Hyperbel ist, deren Nebenaxe in der Axenebene und in der Falllinie ihrer Ebene zur Tafel liegt; und wenn also die Meridiane der Flächen in der Axenebene ein Büschel paralleler gleichseitiger Hyperbeln ohne reelle Grundpunkte im Endlichen bilden.

Im Falle reeller eigentlicher *Kegel* sind diese zugleich die *Grenz-* und *Übergangsformen zwischen den einfachen und den zweifachen Hyperboloiden* des Büschels, wie dies die Anschauung des Büschels ihrer Meridiane in der Axenebene zeigt. Sind M_1, M_2 die Mittelpunkte der Kegel, so liegen entweder die Mittelpunkte der einfachen oder die der zweifachen Hyperboloide in der endlichen Strecke M_1M_2 und die der zweifachen resp. einfachen in den beiden unbegrenzten Strecken dieser Geraden ausserhalb M_1M_2. Weil in dem unendlich fernen Punkte dieser Geraden Mittelpunkte der zwei in zusammenfallende Ebenenpaare degenerierten doppeltprojicierenden Cylinder des Büschels sich befinden, so verschwindet die zweite Gruppe der zweifachen resp. einfachen Hyperboloide, indem sie mit diesen ihren Grenzformen durch deren Vereinigung zusammen fällt. Wenn also die Ebene des Durchdringungskegelschnittes selbst zu den zweifachen Hyperboloiden gehört, d. h. wenn ihre Tafelneigung kleiner als 45° und somit der Kegelschnitt eine *Ellipse* ist, so liegen auf der Geraden M_1M_2 in der *endlichen* Strecke zwischen diesen Punkten die Mittelpunkte der *einfachen* Hyperboloide; wenn aber die Ebene des Kegelschnittes eine Tafelneigung grösser als 45° hat, und somit zu den einfachen Hyperboloiden zählt, der Kegelschnitt also eine *Hyperbel* mit der Hauptaxe auf der Falllinie in der Axenebene ist, so liegen in der *endlichen* Strecke M_1M_2 die Mittelpunkte der *zweifachen* Hyperboloide.

Wenn die Kegel nicht reell sind, der Durchdringungskegelschnitt also eine Hyperbel ist und somit seine Ebene zu den einfachen Hyperboloiden gehört, so besteht das Flächenbüschel aus *lauter einfachen* Hyperboloiden und man sieht zugleich, dass ein Büschel von lauter zweifachen Hyperboloiden mit einem reellen Durchdringungskegelschnitt nicht möglich ist. Der Fall des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel als Durchdringung schliessen sich dem unmittelbar an. Im Falle der *Parabel* hat die Ebene der Durchdringung die Tafelneigung 45° und ist zugleich der eine der beiden eigentlichen Kegel, so dass nur der letzte noch bleibt; seine Spitze M zerlegt die durch sie gehende Parallele zur Falllinie der Parabelebene als Mittelpunktsort in zwei unbegrenzte Theile, in denen je die Mittelpunkte der einfachen und die der zweifachen Hyperboloide des Büschels sich befinden.

6. Für die in § 4 übersichtlich dargelegte Theorie der Kegelschnitte aus Kreissystemen ergeben sich damit besonders die folgenden Resultate. Die Spurkreise der Hyperboloide des Flächenbüschels in der zu den Axen normalen Tafel bilden ein Büschel mit der Spur der Kegelschnittebene als Potenzlinie und den Schnittpunkten des Kegelschnittes mit der Tafel als Grundpunkten sowie der Spur der Axenebene als Centrale; einer unter diesen Kreisen hat den Durchstosspunkt der Mittelpunktsgeraden des Flächenbüschels in der Tafel zum Mittelpunkt und ist der reelle oder rein imaginäre Hauptkreis des entsprechenden einfachen oder zweifachen Hyperboloids; reell, wenn jener Durchstosspunkt in einer Strecke der Mittelpunkte einfacher Hyperboloide liegt, rein imaginär im andern Falle. Enthält das Flächenbüschel zwei reelle Kegel, so theilen die Mittelpunkte C_1, C_2 ihrer Spurkreise die Centrale in drei Theile, auf welche sich die Mittelpunkte der Spurkreise der einfachen und der zweifachen Hyperboloide nach den vorigen Ermittelungen vertheilen. Die Bildkreise der Punkte des Kegelschnittes stehen zu diesen Spurkreisen und speciell zur Potenzlinie ihres Büschels in den in § 4 geschilderten Beziehungen; sie berühren die Spuren der Kegel gleichartig resp. ungleichartig, sodass (vergl. § 13 und § 30) die Centra dieser Kreise die Brennpunkte der Kegelschnittprojection sind; sie schneiden jeden andern Kreis des Büschels, die Potenzlinie eingeschlossen, unter festen Winkeln, einen unter ihnen orthogonal resp. diametral, nämlich den Hauptkreis des Hyperboloids im Büschel, welches seinen Mittelpunkt in der Tafel hat; und zwar sind die Schnitte der Bildkreise mit den Spurkreisen einfacher Hyperboloide reell und mit denen der zweifachen imaginär, letzteres im Sinne von § 2. Für die verschiedenen zu den Axen desselben Flächenbüschels normalen Tafelebenen ist die Projection der Durchdringung immer sich selbst congruent, die Radien der Bildkreise ihrer Punkte verändern sich von der einen zur anderen um constante Längen, wie auch die Radien der Kegelspurkreise; für die Kreise des neuen Spurenbüschels der Flächen haben diese neuen Bildkreise wiederum, aber mit jeweilen anderen Cosinuswerthen die Qualität von gleichwinklig schneidenden Kreisen. Immer ist der einem Spurkreis entsprechende Cosinuswerth der Cotangente des Winkels gleich, unter dem das zugehörige Hyperboloid von der Tafel geschnitten wird —

in dem besonderen durch § 2 begründeten Sinne für die rein imaginären Spurkreise, die nur auftreten, wenn das Flächenbüschel reelle eigentliche Kegel enthält. Ist die Durchdringung eine Hyperbel mit der Nebenaxe in der Axenebene der Flächen, so gehen für jede Lage der Tafel die Kreise des Spurenbüschels durch zwei reelle Punkte und die Schnitte der Bildkreise mit ihnen sind ausnahmslos reell, für einen unter ihnen orthogonal. In den übrigen Fällen trennen die Spurkreise der Kegel im Büschel, die von den Bildkreisen berührt werden, die Spurkreise mit reellen von denen mit imaginären Schnitten. In der Region oder Schicht der Mittelpunkte der zweifachen Hyperboloide erscheinen dann auch, durch die der Berührung der Tafel mit zweifachen Hyperboloiden des Büschels entsprechenden Nullkreise oder Grenzpunkte von den reellen getrennt, rein imaginäre Kreise unter den Spuren.

Die Spuren in den durch die Scheitel der Durchdringung gehenden Tafelebenen sind insbesondere Büschel berührender Kreise; im Falle der parabolischen Durchdringung giebt es nur *eine* solche Lage der Tafel, die die Lagen, denen Spurenbüschel mit Grundpunkten entsprechen, von denen trennt, welche Spurenbüschel mit Grenzpunkten liefern; in jedem Spurenbüschel wird ein Kreis und die Potenzlinie von den Bildkreisen der Parabelpunkte berührt, sowie einer orthogonal resp. diametral geschnitten, und der letzten Alternative entsprechend sind die Schnitte der Bildkreise mit den Spurkreisen durchweg reell resp. imaginär. [1]

Allgemeine Eigenschaften der Durchdringung und ihrer Projection.

7. Weil in jedem unserer Flächenbüschel mit reeller Durchdringung unendlich viele einfache Hyperboloide auftreten, aber nicht stets zweifache Hyperboloide und Kegel, so beginnen wir mit der Untersuchung der *Durchdringung von zwei einfachen Hyperboloiden.*

Die Projection derselben auf die Normalebenen zu den Axen ist die *Construction eines Kegelschnittes aus zwei reellen Kreisen die ihn doppelt be-*

[1] Für weitere Ausführungen verweise ich auf meine *Cyklographie* (Leipzig, Teubner 1882. 263 p. 8° mit 16 lithogr. Tafeln).

rühren; diese Kreise sind die Projectionen der Kehlkreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ der sich durchdringenden Hyperboloide, weil in allen Punkten des Kehlkreises die Tangentialebenen des Hyperboloides normal zur Ebene desselben stehen (§ 1) und die Tangente des Durchdringungskegelschnittes in jedem seiner Durchschnittspunkte P, P' mit dem Kehlkreis sich zusammenfallend mit seiner Tangente in demselben Punkte projiciert. Wir sehen damit sogleich auch, dass die reellen doppelt berührenden Kreise sich theilen werden in solche, welche reell und solche, welche imaginär doppelt berühren; die Projection der Durchschnittslinie zwischen der Kehlkreisebene und der Ebene des Durchdringungskegelschnittes ist die zugehörige *Sehne* s_1 resp. s_2 *der doppelten Berührung* und ihr *Pol* S_1 resp. S_2 in Bezug auf die Kehlkreisprojection $\mathfrak{K}_1$ resp. $\mathfrak{K}_2$ projiciert die Schnittpunkte der Paare von geraden Mantellinien des bezüglichen Hyperboloids, die von jenen Punkten P und P' ausgehen. Berührt die Sehne s den zugehörigen Kreis, so ist der Berührungspunkt einer der in der Centrale liegenden Scheitel der Kegelschnittprojection und der Pol S fällt mit ihm zusammen; beide Berührungsstellen zwischen Kreis und Kegelschnitt sind zu einer *vierpunktigen Berührung* in diesem Scheitel des letzteren zusammengerückt; offenbar bildet diese vierpunktige Berührung den Übergang von den reell doppelten zu den imaginär doppelten Berührungen reeller Kreise mit der Projection des Kegelschnittes. Wenn die in der Axenebene liegenden Scheitel des Durchdringungskegelschnittes nicht reell sind, also nach § 5 das Flächenbüschel keine eigentlichen Kegel enthält, so giebt es solche Übergänge nicht, und alle so entstehenden reellen Kreise berühren die Kegelschnittprojection reell doppelt.

Enthält das Flächenbüschel *reelle Kegel*, so sind die Projectionen ihrer *Mittelpunkte* oder Spitzen die *doppelt berührenden Kreise vom Radius Null* für die Projection der Durchdringung; nach der Bedeutung der Kegelspitzen in der Mittelpunktslinie bilden sie den Übergang von den reellen zu den imaginären doppelt berührenden Kreisen aus Punkten derselben Axe, welche in diesem Falle immer die Hauptaxe der Kegelschnittprojection ist; sie gehören selbst zu den reellen Kreisen, welche imaginär doppelt berühren, und die Sehne dieser Berührung ist die Projection der Schnittlinie der Kegelschnittebene mit der durch die betreffende Kegelspitze gehenden Normalebene zu den Axen als der Hauptebene des Kegels. Wir kommen darauf zurück (§ 30).

Auf dem einfachen gleichseitigen Rotationshyperboloid gehen *durch jeden Punkt P zwei* zur Axe wie zu ihren Normalebenen unter 45° geneigte *gerade Mantellinien;* sie liegen in der durch ihn gehenden zur Axe parallelen Ebenen, welche seinen Kehlkreis berühren und sind daher in den Tangenten an die Kehlkreisprojection $\mathfrak{K}_1$ projiciert, welche von der Projection von P ausgehen. Die Länge dieser Tangenten von dieser Projection bis zur Berührungsstelle ist der in der Richtung der Axe gemessenen Entfernung d des Punktes selbst von der Kehlkreisebene gleich und verhält sich daher zur Länge der Mantellinien zwischen dem Punkte und dem Kehlkreis des Hyperboloids wie $1:\sqrt{2}$. Diese Länge der Mantellinien ist also für alle Punkte eines zur Tafel parallelen Querschnittes oder Parallelkreises $\mathfrak{P}_1$ dieselbe; und wenn wir *zwei Parallelkreise* $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ des nämlichen Hyperboloides betrachten, so erkennen wir die Länge seiner Mantellinien zwischen denselben als constant, nämlich das $\sqrt{2}$-fache der in der Richtung der Axe gemessenen Distanz d_{12} jener Ebenen, und die Projection jener Längen, die dieser Distanz gleich ist, als die auf den Tangenten der Kehlkreisprojection $\mathfrak{K}$ von den Projectionen jener Parallelkreise $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ bestimmte Sehne (Fig. 1); und zwar liegt der Berührungspunkt an der Kehlkreisprojection zwischen den Endpunkten der bezüglichen Sehnenlänge oder nicht, je nachdem der Kehlkreis selbst innerhalb oder ausserhalb der durch jene Parallelkreisebene begrenzten *Schicht* des Raumes liegt, oder die Distanz d_{12} ist in jenem Falle die halbe Summe und in diesem die halbe Differenz der in den Kreisen $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_1$ auf Tangenten von $\mathfrak{K}$ gelegenen Sehnen. Insbesondere ist die Länge einer Kehlkreistangente bis zur Projection des Parallelkreises $\mathfrak{P}$ die Distanz der Ebene des letzteren von derjenigen des Kehlkreises.

Betrachten wir nun den *Querschnitt* eines solchen Hyperboloids mit einer Ebene, die wir durch ihre Spur in seiner Hauptebene und ihren Neigungswinkel α gegen diese bestimmt denken, so ist für jeden seiner Punkte die Länge der von seiner Projection auf die Hauptebene an den Kehlkreis gehenden Tangenten seinem Abstand von dieser Ebene gleich; und da $\operatorname{tg}\alpha$ das Verhältniss der Entfernung irgend eines Punktes der Ebene von der Kehlkreisebene zum Abstand seiner Projection von ihrer Spur in dieser Ebene ist, so erkennt man für *alle Punkte der Projection desselben Querschnittes das Verhältniss der ihnen zukommenden Kehlkreistangentenlängen zu ihren Abständen von der Spur als constant;* oder die

Punkte eines Kegelschnittes haben für einen seiner reellen doppelt berührenden Kreise Tangentenlängen und von seiner Berührungssehne Abstände, deren Verhältniss für alle dasselbe ist; insbesondere für die Parabel gleich Eins.

8. Wenn zwei einfache gleichseitige Rotationshyperboloide von parallelen Axen, deren Hauptebenen die Distanz d von einander haben, einen reellen Kegelschnitt als *Durchdringung* erzeugen, so ist jeder Punkt P desselben der Schnittpunkt von zwei Mantellinien der einen mit zwei Mantellinien der andern Fläche, die in der Projection als die 2 Tangenten aus seiner Projection P' an die Projectionen der Kehlkreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ erscheinen, und die Längen t_1, t_2 derselben von P' bis zu den respectiven Berührungspunkten sind nach § 7 zugleich die in der Richtung der Axen gemessenen Distanzen von P bis zu den Kehlkreisebenen. In Folge dessen ist für alle Punkte des Kegelschnittes *innerhalb* der Schicht zwischen den Kehlkreisebenen beider Hyperboloide die *Summe* und für alle Punkte desselben *ausserhalb* dieser Schicht die *Differenz* jener Tangentenlängen t_1, t_2 *constant*, nämlich *der Distanz d der Kehlkreisebenen gleich.* Und der Ort eines Punktes, für welchen die Summe oder der Unterschied der Längen der von ihm an zwei feste Kreise seiner Ebene gehenden Tangenten constant bleibt, ist ein Kegelschnitt, der diese beiden Kreise je doppelt berührt und dessen eine Axe in ihre Centrale fällt — der erste Hauptsatz in St. 1852 (p. 447), mit dessen Entwickelung sich diese Abhandlung alsbald ausschliesslich beschäftigt.

Nach dem Schluss von § 7 tritt zu ihm der Satz: Für alle doppelt jedoch nicht umschliessend berührenden Kreise eines Kegelschnittes aus Punkten derselben Axe ist das Verhältniss der Summe oder Differenz der Längen der Tangenten, die von einem seiner Punkte an sie gehen, zum Abstand von ihren Berührungssehnen eine Constante; für die Parabel speciell gleich Eins.

Wenn der Durchdringungskegelschnitt die Ebenen beider Kehlkreise reell durchschneidet, so wird dadurch sein Umfang in *drei Theile* zerlegt, von denen die zwei ausserhalb der Schicht der Kehlkreisebenen gelegenen den dritten in derselben einschliessen; in diesem findet die constante Summe, in jenen beiden die constante Differenz statt für die Längen der Mantellinien auf der Fläche wie für die der Kreistangenten in der Projection. In den bezeichneten Durchgangspunkten selbst sind die Längen der Mantellinien des einen Hyperboloids gleich Null und die des andern gleich $d\sqrt{2}$, wie die Tangenten in der Projection von den Berührungspunkten des Kegelschnittes mit dem einen Kreis an den andern gleich d selbst. Geht der Durchdringungskegelschnitt nur durch den einen der Kehlkreise reell hindurch, so zerfällt er wie seine Projection dadurch in *zwei* Theile, mit constanter Summe in dem einen der Schicht angehörigen und mit constanter Differenz in dem anderen; schneidet er endlich keinen von beiden reell, so findet für seinen resp. seiner Projection ganzen Umfang constante Summe resp. Differenz statt, $d\sqrt{2}$ im Raume, d in der Projection.

In jedem Falle erhält man hiernach aus den Projectionen der Kehlkreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ von zwei Hyperboloiden und der Distanz d ihrer Hauptebenen sofort die *Elemente der Doppelberührung* mit diesen Kreisen für die Projection der Durchdringung. Trägt man auf eine Tangente des Kreises $\mathfrak{K}_1$ und auf eine Tangente des Kreises $\mathfrak{K}_2$ vom Berührungspunkte weg die Länge d ab, so ist der zu $\mathfrak{K}_1$ resp. $\mathfrak{K}_2$ concentrische Kreis $\mathfrak{K}_{1d}$ resp. $\mathfrak{K}_{2d}$ durch den jeweilen erhaltenen Endpunkt die Projection des Parallelkreises des ersten resp. des zweiten Hyperboloides, welcher mit dem Kehlkreis des jeweilen anderen in derselben Ebene liegt. Im Fall reeller Schnitte sind daher die gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_{2d}$ und die von $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_{1d}$ die Berührpunkte, und die zugehörigen Tangenten von $\mathfrak{K}_1$ resp. $\mathfrak{K}_2$ die Tangenten der Projection mit diesen Kreisen. Nach der stereometrischen Bedeutung dieser Kreise erhält man aber auch im Falle nicht reellen Schnittes in den Potenzlinien von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_{2d}$ und von $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_{1d}$ die Sehnen s_1, s_2 und in ihren Polen S_1, S_2 in $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ resp. die Pole der bezüglichen Doppelberührungen. (Vergl. St. 1852; p. 452.) Wir wollen anmerken, dass man die Elemente der Berührung mit den Grundkreisen für die Curven vierter Ordnung des § 3 in ähnlicher Weise bestimmen kann.

9. Diese Construction erlaubt uns auch, *die beiden Kegelschnitte* in der Tafel zu bestimmen, welche einen festen Punkt P enthalten und zwei gegebene ihn nicht umschliessende reelle Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ doppelt berühren. Zieht man nämlich von P die Tangenten von den Längen t_1 und t_2 an diese Kreise, so giebt $(t_1 + t_2)$ die Distanz d_i der Kehlkreisebenen für ein Paar von Hyperboloiden, deren Durchdringungsprojection $\mathfrak{S}_i$ jene Bedingungen so erfüllt, dass der Punkt P das Bild eines Punktes derselben

zwischen den Kehlkreisebenen ist und $t_1 - t_2$ (für $t_1 > t_2$) die Distanz d_e für die Hauptebenen von zwei Hyperboloiden gleicher Bedeutung, für die das Original von P ausserhalb jener Schicht liegt. Nach der vorher entwickelten Regel erhält man die Elemente der Doppelberührungen für beide Kegelschnitte $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_e$. Man construiert auch nach den Regeln der darstellenden Geometrie die Tangenten t_i und t_e der beiden Kegelschnitte in P als Projectionen der bezüglichen Tangenten der Durchdringungen mit den Distanzen d_i und d_e; man hat nur die Tafelspuren der Tangentialebenen beider Hyperboloide in dem in P projicierten Punkte der Durchdringung zu bestimmen und ihren Schnittpunkt, den Durchstosspunkt der Tangente der Durchdringung, mit P zu verbinden. Zur Ausführung (Fig. 2) denkt man etwa die Ebene des Kehlkreises $\mathfrak{K}_1$ als Tafelebene und erhält die Spur der Tangentialebene des ersten Hyperboloides als die Berührungssehne der von P an $\mathfrak{K}_1$ gehenden Tangenten, der Projectionen seiner Mantellinien durch den Punkt der Durchdringung in beiden Fällen; die Spur der Tangentialebene des zweiten Hyperboloids im Original von P ist der Polare von P in $\mathfrak{K}_2$ parallel und geht durch die Durchstosspunkte der in ihnen projicierten Mantellinien durch jenen mit der Tafel, die man erhält, indem man die Tangenten mit dem von P aus mit der Länge t_1 beschriebenen Kreise schneidet. In Folge dessen fallen sie und die Tangenten nur für P auf der einen Kreisperipherie und für P als eine Richtung zusammen; im ersten Falle ist die Tangente ohnediess bestimmt, im andern ist sie rechtwinklig auf der Richtung von P. (Vergl. § 17.) Man bemerke noch den Specialfall, wo $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ Kreise vom Radius Null sind.

Durch drei Punkte P_1, P_2, P_3 und einen doppelt berührenden Kreis $\mathfrak{K}$ werden *vier Kegelschnitte* bestimmt, die wir als ebene Querschnitte des Hyperboloides mit dem Kehlkreis $\mathfrak{K}$ sofort construieren können. Die Punkte P_i sind die Orthogonalprojectionen von drei Punktpaaren in dieser Fläche, welche, zu dreien von den Projectionen P_1, P_2, P_3 mit einander combiniert, vier zur Tafel symmetrische Ebenenpaare bestimmen. Weil jene Punkte der Fläche cyklographisch durch die um P_1, P_2, P_3 beschriebenen zu $\mathfrak{K}$ orthogonalen Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ dargestellt werden (Fig. 3), so sind die vier Verbindungslinien s_i ihrer Ähnlichkeitspunkte zu dreien die Spuren jener Ebenen und daher auch die Sehnen der Doppelberührung der vier Kegelschnitte mit dem Kreise $\mathfrak{K}$. Wir erhalten überdiess ihre

Tangenten in den Punkten P_i, da ihre Durchstosspunkte in der Ebene von $\mathfrak{K}$ die Schnittpunkte ihrer Polaren P_i im Kreise $\mathfrak{K}$ mit den vier Ähnlichkeitsaxen der Kreise $\mathfrak{K}_i$ sind. Auch die Specialfälle der Construction, wo P_3 auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ liegt, $\mathfrak{K}_3$ sich auf diesen Punkt reduciert und nur zwei Ähnlichkeitsaxen und Kegelschnitte erhalten werden und wo P_3 und P_2 dem Kreise $\mathfrak{K}$ angehören und als einzige Ähnlichkeitsaxe der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ die Gerade P_2P_3 erhalten wird, sind bemerkenswerth.

10. Die Mantellinien g_1, l_1 des ersten und die g_2, l_2 des zweiten Hyperboloids in einem Punkte P der Durchdringung bestimmen mit einander ausser den Tangentialebenen g_1l_1 und g_2l_2, die sich in der Tangente t der Durchdringung schneiden, noch vier Ebenen g_1l_2, g_2l_1, g_1g_2, l_1l_2, deren jede eine Mantellinie des einen mit einer Mantellinie des andern Hyperboloids verbindet und somit beide Hyperboloide berührt. Lässt man P die ganze Durchdringung durchlaufen, so erhält man durch diese Construction die Gesammtheit der gemeinsamen Tangentialebenen beider Flächen; auch liefert jede der gemeinsamen Tangentialebenen beider Flächen, weil sie dieselben in zwei Paaren von Mantellinien g_1l_1 und g_2l_2 schneidet, vier Punkte der Durchdringung derselben g_1l_2, g_2l_1, g_1g_2, l_1l_2, von denen zwei zum endlichen Theil der Durchdringung d. h. zum Kegelschnitt gehören, indess die beiden anderen auf dem unendlich fernen gemeinsamen Querschnitt der Flächen liegen, weil jene vier Geraden als 45° Linien auf einerlei Ebene in Paaren parallel sein müssen. Man sagt, die *gemeinsame Curve* und die *gemeinsame Developpable* beider Flächen liegen *perspectivisch* zu einander. Im Allgemeinen gehen durch jeden Punkt des Raumes vier gemeinsame Tangentialebenen beiden Flächen oder die gemeinsame Developpable derselben ist *vierter Classe,* wie die gemeinsame Curve *vierter Ordnung.* Wir betrachten diejenigen, welche die Axenrichtung der Flächen enthalten oder zur Tafel normal sind, ihre Berührungspunkte mit den Flächen also in den Kehlkreisen derselben haben und in den vier gemeinsamen Tangenten der Kehlkreisprojectionen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ projiciert sind. In einer dieser gemeinsamen Tangenten t sind die zwei Paare der in der zugehörigen Ebene enthaltenen Mantellinien g_1, g_2, l_1, l_2 der Flächen projiciert und sie bilden in jener ein Rechteck aus 45° Linien, die in Paaren durch die Berührungspunkte P_1, P_2 an den resp. Kehlkreisen gehen, welches wir durch Umlegung in die Ebene des Kehlkreises $\mathfrak{K}_1$ zur Anschauung bringen. Die Mantellinien g_1, l_1 der ersten Fläche sind

dann die zur Tangente t in T_1 unter 45° geneigten Geraden und die Mantellinien g_2, l_2 der zweiten ihre Parallelen durch einen in der Normale zu t in T_2 um die Distanz d der Kehlkreisebenen von T_2 entfernten Punkt T_2^0 (Fig. 4); die Richtungen der g und der l sind die in dieser Ebene liegenden Punkte des gemeinsamen unendlich fernen Querschnittes der Flächen, die beiden Schnittpunkte P_{12} von $g_1 l_2$ und P_{21} von $g_2 l_1$ die zugehörigen Punkte des Durchdringungskegelschnittes und die von ihnen zur Tangente t gefällten Perpendikel liefern ihre Projectionen P_1, P_2 in dieser. Zieht man durch T_2^0 die Parallele zur Tangente t, so wird diese von den Senkrechten $P_{21}P_2$ und von den zu l_1, l_2 parallelen Geraden durch P_1 in demselben Punkte P_2^0 geschnitten und man hat

$$d = T_2 T_2^0 = P_2 P_2^0 = P_2 P_1$$

d. h. *die Projection der Durchdringungscurve bestimmt in jeder der gemeinsamen Tangenten eine Sehne $P_1 P_2$, welche der zugehörigen Distanz d der Kehlkreisebenen gleich ist.*

Markieren wir ferner in der Centrale $C_1 C_2$ der Kehlkreisprojectionen die Mitte M, so geht die von dort zur Tangente gefällte Senkrechte sowohl durch die Mitte von $P_1 P_2$ als durch die der Geraden $P_{12}P_{21}$, der Spur der Ebene des Durchdringungskegelschnittes in der gemeinsamen Tangentialebene; in Folge des ersteren ist auch $MP_1 = MP_2$ und zudem ist die Mitte von $P_1 P_2$ zugleich die Mitte von $T_1 T_2$, d. h. der Schnittpunkt der Tangente mit der Potenzlinie p der Kehlkreisprojectionen. Oder *jene vier der Distanz d gleichen Sehnen des Kegelschnittes auf den gemeinsamen Tangenten der Kehlkreisprojectionen haben ihre Mitten in der Potenzlinie der letzteren und ihre vier Endpunkte für die äusseren und resp. die inneren gemeinsamen Tangenten je auf einem Kreis $\mathfrak{K}$, der die Mitte M der Centrale $C_1 C_2$ zum Mittelpunkt hat;* die Perpendikel, die man auf ihnen in ihren Schnittpunkten mit der Potenzlinie errichtet, gehen durch die Mitte der Centrale; die vier Berührungspunkte der äusseren gemeinsamen Tangenten und wieder die der inneren mit $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ liegen auf zwei Kreisen um denselben Punkt M.

Jenes liefert bequeme Mittel zur Construction unseres Kegelschnittes, die man bei St. 1852; p. 455 f. auch findet. Ihre Umkehrung giebt den Satz: Jeder Kegelschnitt, welcher zwei feste reelle Kreise nach parallelen Sehnen doppelt berührt, ist die Projection der Durchdringung von zwei gleichseitigen einfachen Rotationshyperboloiden mit jenen als Kehlkreisprojectionen und der gleichen Länge seiner Sehnen in ihren gemeinsamen Tangenten als Distanz ihrer Kehlkreisebenen. Der Kegelschnitt kann also die gemeinsamen Tangenten nur *berühren* für $d = 0$ und in der Potenzlinie der Kreise: Die doppelt gezählte Potenzlinie ist der Kegelschnitt, die Projection der Durchdringung (§ 3). Da ferner die äusseren sowohl wie die inneren gemeinsamen Tangenten t_e, t_i der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ je einen solchen Kegelschnitt bilden, so erhalten wir den Satz: Die Länge der äusseren gemeinsamen Tangenten zwischen ihren Berührungspunkten ist zugleich die Länge der inneren gemeinsamen Tangenten zwischen den äusseren; und die Länge der inneren gemeinsamen Tangenten zwischen den Berührungspunkten ist die der äusseren zwischen den inneren. (St. 1852; p. 450.) Diese Längen sind die Distanzen der Kehlkreisebenen der Hyperboloide, deren Durchdringungen in Linienpaare zerfallen oder die sich in einem Punkte der Axenebene berühren; die Paare der gemeinsamen Tangenten sind die Projectionen dieser Durchdringungen und die Ähnlichkeitspunkte E und I die der Berührungspunkte.

11. Wir erhalten leicht die Bestätigung und einige Erweiterungen des Vorigen in der früher eingeführten analytischen Ausdrucksform. Weil man für einen in rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten in der Form

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$$

gegebenen Kreis das Quadrat der Längen der vom Punkte (X, Y) an ihn gehenden Tangenten durch die Substitution von X, Y für x, y resp. in die linke Seite erhält, so ist mit K_1 und K_2 als Symbolen für $(X + c)^2 + Y^2 - r_1^2$ und $(X - c)^2 + Y^2 - r_2^2$ resp. die Gleichung der Durchdringungsprojection der Hyperboloide

$$(x + c)^2 + y^2 - z^2 - r_1^2 = 0, \qquad (x - c)^2 + y^2 - (z + d)^2 - r_2^2 = 0$$

$$\sqrt{K_1} \pm \sqrt{K_2} = d \quad \text{oder} \quad (K_1 + K_2 - d^2)^2 = 4K_1K_2$$

d. i. auch

$$d^4 - 2d^2(K_1 + K_2) + (K_1 - K_2)^2 = 0.$$

Wegen

$$K_1 - K_2 = 4cx + r_2^2 - r_1^2$$

und

$$K_1 + K_2 = 2(x^2 + y^2 + c^2) - (r_1^2 + r_2^2)$$

wird dies

$$4x^2(4c^2 - d^2) - 4d^2y^2 - 8cx(r_1^2 - r_2^2) + (r_1^2 - r_2^2)^2 - 2d^2(2c^2 - r_1^2 - r_2^2) + d^4 = 0,$$

die auch durch Elimination von z zwischen den Gleichungen der Hyperboloide entstehende Gleichung; mit $d = c\sqrt{2}$ drückt sie eine gleichseitige Hyperbel aus, für $d = 2c\sqrt{2}$ eine specielle Ellipse, der wir weiterhin auch begegnen. Verbindet man nun die Gleichungen für zwei Distanzen d, d_1 in der Symbolform durch Subtraction, so erhält man nach Division mit $(d^2 - d_1^2)$ die Gleichung

$$d^2 + d_1^2 - 2(K_1 + K_2) = 0$$

oder

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\{2(r_1^2 + r_2^2) - 4c^2 + d^2 + d_1^2\};$$

d. h. *die gemeinsamen Punkte von zwei Kegelschnitten welche dieselben festen Kreise je doppelt berühren, liegen immer auf einem um die Mitte der Centrale dieser Kreise beschriebenen Kreis.* (St. 1852; p. 455.) Und durch die vier Schnittpunkte eines solchen Kreises mit einem doppelt berührenden Kegelschnitt geht stets noch ein zweiter Kegelschnitt, der dieselben Kreise doppelt berührt. Insbesondere folgt für

$$d^2 = t_i^2 = 4c^2 - (r_1 + r_2)^2 \quad \text{und} \quad d_1^2 = t_e^2 = 4c^2 - (r_1 - r_2)^2$$

die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

oder die Schnittpunkte der äusseren mit den inneren gemeinsamen Tangenten liegen auf dem über der Centrale als Durchmesser beschriebenen Kreis. (St. 1852; p. 450.) Für $d_1^2 = t_e^2$ und resp. $d_1^2 = t_i^2$ erhalten wir als Radienquadrate der beiden Kreise, in welchen der der Distanz d entsprechende Kegelschnitt die äusseren und die inneren gemeinsamen Tangenten schneidet, die Werthe mit constanter dem geometrischen Mittel der Radien gleicher Differenz

$$\frac{1}{4}\{(r_1 + r_2)^2 + d^2\} \quad \text{und} \quad \frac{1}{4}\{(r_1 - r_2)^2 + d^2\},$$

die daher nur gleich werden, wenn einer der Radien den Werth Null hat, womit in der That die beiden Paare gemeinsamer Tangenten sich vereinigen.

12. Wenden wir unsere elementaren Formeln auch auf die Bestimmung der Berührungselemente in § 8 an, so erhalten wir weitere Ergebnisse. Die dort benutzten Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_{2d}$ und $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_{1d}$ haben die Gleichungen

$$(x + c)^2 + y^2 - r_1^2 = 0, \qquad (x - c)^2 + y^2 - (r_2^2 + d^2) = 0;$$

$$(x - c)^2 + y^2 - r_2^2 = 0, \qquad (x + c)^2 + y^2 - (r_1^2 + d^2) = 0$$

und liefern als *Sehnen der Doppelberührungen* ihre Potenzlinien

$$4cx = r_1^2 - r_2^2 - d^2, \qquad 4cx = r_1^2 - r_2^2 + d^2;$$

d. h. dieselben sind äquidistant von der durch $4cx = r_1^2 - r_2^2$ dargestellten Potenzlinie der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, welche auch die von $\mathfrak{K}_{1d}$, $\mathfrak{K}_{2d}$ ist.

Die Berührungspunkte selbst oder die Schnitte von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_{2d}$ und von $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_{1d}$ liegen in dem aus der Mitte der Centrale beschriebenen *Kreise* $\mathfrak{K}$, dessen Gleichung die Summe der Gleichungen von jenen ist und der somit das *Radiusquadrat* $\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 + d^2) - c^2$ hat. Es wird für $d^2 = t_e^2$ resp. $d^2 = t_i^2$ zu $c^2 + r_1 r_2$ und $c^2 - r_1 r_2$ und man sieht, dass die Summe und Differenz der Radienquadrate der Kreise durch die vier Berührungspunkte der äusseren und die vier der inneren gemeinsamen Tangenten zweier Kreise gleich der Hälfte vom Quadrat ihrer Centraldistanz und resp. gleich dem doppelten Product ihrer Radien ist.

Jeder Kreis $\mathfrak{K}$, welcher um die Mitte der Centrale beschrieben wird, schneidet die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in je zwei Punkten, welche Berührungspunkte desselben sie doppelt berührenden Kegelschnittes sind. (St. 1852; p. 454.) Ist R sein Radius, so erhält man die zugehörige Distanz d aus der Relation $d^2 = 2(R^2 - c^2) - (r_1^2 + r_2^2)$ und man construiert sie, indem man den mit $\mathfrak{K}_2$ concentrischen Kreis $\mathfrak{K}_{2d}$ beschreibt, der mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ dieselben Schnittpunkte — die Berührungspunkte — oder dieselbe Potenzlinie — Berührungssehne — hat als die halbe $\mathfrak{K}_2$ berührende Sehne desselben; etc.

Die Sehnen der doppelten Berührung an $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ haben nach ihren Ausdrücken die gleichen Abstände $d^2:4c$ von der Potenzlinie der Kreise und somit den Abstand $d^2:2c$ von einander; da nun die eine derselben in der um die Distanz d höher gelegenen Kehlkreisebene des zweiten Hyperboloids liegt, so ist $d:2c$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Ebene des Durchdringungskegelschnittes mit den Axen der Hyperboloide einschliesst, oder diese ist ein constantes Vielfaches der Distanz. Die Subtraction der Gleichungen der sich durchdringenden Hyperboloide

$$(x + e)^2 + y^2 - z^2 = r_1^2 \quad \text{und} \quad (x - c)^2 + y^2 - (z + d)^2 = r_2^2$$

führt mit

$$2cx + dz = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2 - d^2)$$

als Gleichung der Durchdringungsebene zu demselben Resultat; mit Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten in die Potenzlinie wird diese Gleichung zu

$$2cx + dz = -\frac{1}{2}d^2.$$

Aus jener Proportionalität folgt aber, *dass die Spur der Ebene der Durchdringung in der Axenebene der Flächen eine Parabel umhüllt,* welche in der Umlegung der Axenebenen um die Centrale C_1C_2 in die Tafel dadurch definiert ist, dass die Centrale ihre Axe und die Potenzlinie p von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ ihre Scheiteltangente ist, indess ihre Directrix und ihr Brennpunkt im Abstand c von der Potenzlinie resp. auf der Seite des in der Tafel und des im Abstand d von ihr entfernten Kehlkreises liegen; denn für $d = 2c$ erhält man die Parabel als Durchdringung, weil dann der Mittelpunkt der zweiten Fläche im Asymptotenkegel der ersten liegt mit einerlei Tangentialebenen für beide Kegel längs der verbindenden Mantellinie, oder auch gemäss der Gleichung der Durchdringungsprojection in § 11, in welcher dann das Glied mit x^2 verschwindet. Für jede Distanz d ist die zweite Tangente dieser Parabel aus dem Punkte der Scheiteltangente im Abstande $\frac{1}{2}d$ vom Scheitel die Spur der Durchdringungsebene in der Axenebene; ihr Berührungspunkt mit der Parabel liegt in der Potenzlinie p_2 von $\mathfrak{K}_2$ mit $\mathfrak{K}_{1d}$ und die beiden symmetrischen Tangenten der Parabel aus den Punkten in $\pm\frac{1}{2}d$ liefern nach der orthogonalen Symmetrie der bezüglichen Hyperboloide $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_2^*$, als Spuren der Durchdringungsebene genommen, einerlei Durchdringungsprojection.

13. Wir denken nun zu der *Parabel* des Vorigen die *Meridianhyperbel* des Hyperboloides $\mathfrak{K}_1$ in der Axenebene hinzu, also die gleichseitige Hyperbel, welche die in der Centrale liegenden Punkte A_1, B_1 des Kreises $\mathfrak{K}_1$ zu Scheiteln hat. Eine Tangente der Parabel schneidet dieselbe im Allgemeinen in zwei Punkten A, B, welche so lange sie reell sind die *Hauptaxenscheitel* des Durchdringungskegelschnittes bilden (§ 5); die von ihnen auf die Centrale der Kreise gefällten Perpendikel markieren in dieser die *Scheitel der Projection;* wenn jene imaginär sind, so ist die Projection eine Hyperbel, deren Nebenaxe in der Centrale liegt. Zieht man durch jene Schnittpunkte A, B die zu den Axen unter 45° geneigten Geraden, so schneiden sich diese als in der Axenebene liegende Mantellinien der durch die Durchdringung gehenden gleichseitigen Rotationskegel in zwei Punkten M_1, M_2 im Endlichen, die die Mittelpunkte dieser Kegel sind; auch ist der Schnittpunkt der Geraden AB und M_1M_2 der *Mittelpunkt* des Kegelschnittes und das von ihm zur Centrale gefällte Perpendikel liefert in dieser den Mittelpunkt der Projection. Ebenso erhält man in den Fusspunkten der von M_1 und M_2 zur Centrale erfällten Perpendikel die *Brennpunkte* der Projection; denn das allgemeine Gesetz der constanten Summe oder Differenz der Tangentenlängen zweier doppelt berührenden Kreise aus allen Punkten des Kegelschnittes geht in das von der constanten Summe oder Differenz der Abstände von jenen Fusspunkten über und gilt resp. für den ganzen Umfang der elliptischen oder hyperbolischen Durchdringungsprojection, weil die Doppelberührungen mit Kreisen vom Radius Null nothwendig imaginär sind; diese Constante, die Distanz d der Kehlkreisebenen, ist der in der Richtung der Axen gemessene Abstand der Kegelspitzen M_1, M_2 und daher zugleich der in der Richtung ihrer Normalen gemessene Abstand der Scheitel A, B, d. h. die Hauptaxe der Durchdringungsprojection. (Vergl. § 9.) Auch das Verhältniss der Entfernung eines Punktes von einem Nullkreise oder Brennpunkt zu seinem Abstand von der zugehörigen Berührungssehne oder Directrix d. h. die numerische Excentricität ist constant, näm-

lich der Tangente der Winkels α der Durchdringungsebene zur Tafel gleich, in Übereinstimmung damit, dass den Fällen $\alpha \lesseqgtr 45^\circ$ Ellipsen, die Parabel und Hyperbeln resp. entsprechen. (1)

Fallen die Scheitel A, B zusammen oder berührt die Spur der Durchdringungsebene die Meridianhyperbel von $\mathfrak{K}_1$ in der Axenebene, so vereinigen sich auch die Kegelspitzen M_1, M_2 mit ihnen, die Schicht hat die Höhe Null, die Durchdringung wie ihre Projection bestehen aus zwei zur Axenebene symmetrischen Geraden; jene aus den gemeinsamen Mantellinien der beiden Hyperboloide durch den Punkt AB, diese aus dem entsprechenden Paar der gemeinsamen Tangenten der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, wie wir aus § 11 schon wissen. Wenn aber die Tangente der Parabel die Meridianhyperbel nicht reell trifft, wozu die Berührung zwischen beiden den Übergang bilden wird, so hat das Flächenbüschel der bezüglichen Hyperboloide keine reellen Kegel und die Brennpunkte der Projection des Durchdringungskegelschnittes liegen nicht in der Centrale, sondern in einer Normale zu ihr als ihrer Hauptaxe.

Für die Bestimmung der *Brennpunkte und Hauptaxenscheitel* der Durchdringungsprojection bieten aber auch die *Elemente ihrer Doppelberührung mit den Kreisen* in der Tafel $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ die ausreichenden Mittel, und nach der nicht projectivischen Natur der Brennpunkte ist zu erwarten, dass nur diese in allen Fällen zum Ziele führen werden. Sind s_1, s_2 die aus der bekannten Distanz d nach § 8 ermittelten Sehnen der Doppelberührung mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ respective und S_1, S_2 die zugehörigen Pole derselben, so bestimmen die beiden Paare C_1, S_1 und C_2, S_2 die *Brennpunktsinvolution* des Kegelschnittes, d. h. eine Involution, deren Doppelpunkte die Brennpunkte sind, während ihr Mittelpunkt auch der Mittelpunkt des Kegelschnittes ist. Zugleich liefern die Doppelpunkte der zweiten Involution, in welcher den Punkten S_1, S_2 die Schnittpunkte der Centrale mit den Berührungssehnen s_1, s_2 entsprechen, die in der Centrale liegenden Scheitel des Kegelschnittes. Die Doppelpunkte beider Involutionen sind gleichzeitig reell und resp. imaginär. Weil aber die reellen Brennpunkte des Kegelschnittes die Scheitelpunkte rechtwinkliger Polarinvolutionen in Bezug auf ihn sind, so erhält man sie dann, wenn jene Paare sich trennen, als die reellen Grundpunkte des Büschels von Kreisen, welches über den

(1) Für weitere Ausführung vergl. meine *Cyklographie,* Abschnitt IV.

Segmenten C_1S_1, C_2S_2 der Involution als Durchmessern gebildet wird; die Potenzlinie dieses Büschels ist die Hauptaxe des Kegelschnittes und in derselben erhält man dann auch die Scheitel wieder durch einen Punkt und die zugehörige Tangente des Kegelschnittes. Im andern Falle sind die Brennpunkte die Grenzpunkte oder Nullkreise desselben Büschels und seine Potenzlinie ist die Nebenaxe des Kegelschnittes. (Fig. 5.)

14. Diese Construction bequemt sich leicht unserer elementaren Rechnung an und wird durch dieselbe dadurch näher bestimmt, dass zu dem Büschel dieser Kreise stets auch der Ähnlichkeitskreis $\mathfrak{K}_a$ von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gehört, so dass die reellen Brennpunkte, wenn sie in der Centrale liegen, mit den Ähnlichkeitspunkten I und E eine harmonische Gruppe bilden und wenn die Centrale die Nebenaxe ist, auf dem Ähnlichkeitskreis $\mathfrak{K}_a$ liegen. Denn für die gegebenen Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ resp. als

$$(x + c)^2 + y^2 - r_1^2 = 0, \qquad (x - c)^2 + y^2 - r_2^2 = 0$$

sind die über den Durchmessern C_1S_1 und C_2S_2 beschriebenen oder den von jenen resp. mit dem Kreis $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ um die Mitte der Centrale bestimmten Büscheln angehörigen Kreise durch C_1 resp. C_2 ausgedrückt durch

$$(x^2 + y^2)(c^2 - R^2 + r_1^2) + 2cx(c^2 - R^2) + c^2(c^2 - R^2 - r_1^2) = 0,$$

$$(x^2 + y^2)(c^2 - R^2 + r_2^2) - 2cx(c^2 - R^2) + c^2(c^2 - R^2 - r_2^2) = 0$$

resp., so dass ihre Potenzlinie und damit der *Mittelpunkt* des Kegelschnittes durch die *Abscisse*

$$x = \frac{c(r_1^2 - r_2^2)}{2(c^2 - R^2) + r_1^2 + r_2^2}$$

bestimmt ist. Dabei ist die Gleichung des *Ähnlichkeitskreises*, weil sein Mittelpunkt als Mitte zwischen I und E die Abscisse $c\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}$ hat und sein Radius $\frac{2cr_1r_2}{r_1^2 - r_2^2}$ ist,

$$x^2 + y^2 - 2cx\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} + c^2 = 0,$$

und man sieht, dass seine Potenzlinie mit jedem der beiden ersten Kreise dieselbe ist, wie die oben bestimmte dieser Kreise selbst.

Die Gleichung derselben zeigt, dass sie für $c = 0$ und für $r_1^2 = r_2^2$ immer mit der Senkrechten in der Mitte der Centrale zusammenfällt; wie denn die räumliche Anschauung sofort zeigt, dass die bezüglichen Durchdringungsprojectionen concentrisch sind; in dieselbe Linie fällt für $r_1^2 = r_2^2$ auch der Ähnlichkeitskreis (§ 29), während er für $c = 0$ auf den gemeinsamen Mittelpunkt reduciert ist. Unsere Anschauung führt aber zur Umgestaltung des Nenners durch Einführung der Distanz d an Stelle des Radius R; wegen $2R^2 = r_1^2 + r_2^2 + d^2 - 2c^2$ (§ 12) wird die *Mittelpunktsabscisse*

$$x = \frac{c(r_1^2 - r_2^2)}{4c^2 - d^2}$$

und gewährt eine Bestätigung durch ihren unendlich grossen Werth für $d = 2c$, dem Mittelpunkt der *Parabel* entsprechend, die dann entsteht; wir bemerken auch, dass sie für $d > 2c$ stets negativ und für unendlich grosses d Null wird. Natürlich erhält man für $d = 0$ die Abscisse der Potenzlinie wieder, und für $d^2 = t_i^2$ resp. $d^2 = t_e^2$ die Abscissen der beiden Ähnlichkeitspunkte I und E von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, nämlich resp.

$$c\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \quad \text{und} \quad c\frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}.$$

Nach dem hier entwickelten Zusammenhange erhält man nun immer die *Brennpunkte aus dem Mittelpunkt mittelst des Ähnlichkeitskreises.* Beschreibt man um jenen den Kreis, welcher den Ähnlichkeitskreis orthogonal durchschneidet, so trifft dieser die Centrale in den zugehörigen Brennpunkten und sein Radius ist die *lineare Excentricität* des Kegelschnittes. Es ist die Construction des gemeinsamen Paares von zwei Involutionen, nämlich des zu einem gegebenen Punkte symmetrischen Paares in einer durch ihre Doppelpunkte gegebenen Involution. Liegt der Mittelpunkt aber in der endlichen Strecke zwischen den Ähnlichkeitspunkten, so wird jener Orthogonalkreis rein imaginär und sein reeller Vertreter ist der vom Ähnlichkeitskreis diametral geschnittene Kreis, den man um ihn mit der kleinsten halben Sehne des Ähnlichkeitskreises beschreiben kann; die Schnittpunkte beider sind nun die reellen Brennpunkte des Kegelschnittes. Für die Parabel und den Mittelpunkt im Unendlichen wird der

Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises zu dem im Endlichen gelegenen Brennpunkt; für diesen als Mittelpunkt des Kegelschnittes werden die Endpunkte des zur Centrale normalen Durchmessers des Ähnlichkeitskreises die Brennpunkte des Kegelschnittes, der unter jenen die grösste lineare Excentricität hat und für den das Distanzquadrat

$$d^2 = \frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{r_1^2 + r_2^2} - 4c^2$$

ist. Man bestimmt offenbar auch immer *aus einem Brennpunkt den anderen:* als den andern Endpunkt der durch ihn gehenden zur Centrale normalen Sehne im Ähnlichkeitskreis, wenn er in diesem liegt, und als den ihm conjugiert harmonischen in Bezug auf die Ähnlichkeitspunkte, wenn in der Centrale. In jedem Falle ist *das Product der Abstände der Brennpunkte eines Kegelschnittes vom Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises constant, nämlich dem Quadrate seines Radius gleich.* (St. 1852; p. 453.) Neue Hülfsmittel für die Bestimmung der Halbaxenlängen im Anschluss an das Vorige begegnen noch weiterhin.

15. Aber der *Ähnlichkeitskreis* hat zu den im Vorigen erörterten Constructionen noch eine andere Beziehung, welche wieder zu merkwürdigen Resultaten führt. Weil die Ähnlichkeitspunkte I, E zweier Kreise ihre Centraldistanz C_1C_2 innerlich und äusserlich nach dem Verhältniss ihrer Radien $r_1 : r_2$ theilen, so sind die von einem Punkte P nach ihnen gehenden Geraden PI, PE die Halbierungslinien für die Winkel derjenigen Geraden PC_1, PC_2, die denselben mit den Mittelpunkten der Kreise verbinden. In Folge dessen sind die Entfernungen des Punktes von diesen PC_1 und PC_2 gleichfalls diesen Radien $r_1 : r_2$ proportional; und wenn von dem Punkte aus an beide Kreise reelle Tangenten PT_1, PT_1^* und PT_2, PT_2^* von den resp. Längen t_1 und t_2 gezogen werden können, was immer gleichzeitig stattfindet oder nicht, so ist der Winkel $T_1PT_1^*$ zwischen den Tangenten des einen Kreises dem Winkel $T_2PT_2^*$ zwischen den Tangenten des andern Kreises gleich, weil die bezüglichen rechtwinkligen Dreiecke aus Radien und Tangenten mit ihren Hälften ähnlich sind. Ziehen wir dann (Fig. 6) die Gerade T_1T_2 (oder ebenso $T_1^*T_2$, $T_1T_2^*$, $T_1^*T_2^*$) zwischen den Berührungspunkten von zwei Tangenten beider Kreise, so schneidet dieselbe jeden von ihnen noch in einem Punkte U_1, U_2 resp. und für V_1 als Mitte der Sehne $T_1U_1 = 2s_1$ und V_2 als die Mitte der Sehne $T_2U_2 = 2s_2$;

sowie O als Fusspunkt des von P auf T_1T_2 gefällten Perpendikels und mit Einzeichnung der Radien C_1V_1 und C_2V_2 hat man wegen der Gleichheit der Winkel PT_1O und $T_1C_1V_1$, PT_2O und $T_2C_2V_2$

$$\frac{s_1}{r_1}:\frac{s_2}{r_2}=\frac{t_2}{t_1}=\frac{r_2}{r_1} \quad \text{oder} \quad s_1=s_2;$$

d. h. *die Sehnen beider Kreise auf der Verbindungslinie der Berührungspunkte des einen und des andern mit Tangenten aus einem Punkte ihres Ähnlichkeitskreises sind gleich lang.* Und zwar verlaufen bei zweien der vier durch die vorige Construction erhaltenen Sehnen T_1T_2 und $T_1^*T_2^*$ die endlichen Strecken dieser Sehnen T_1U_1 und T_2U_2 in entgegengesetztem Sinn, sodass die Mitte der Strecke T_1T_2 zugleich die Mitte der Strecke U_1U_2 ist; bei den zwei anderen $T_1T_2^*$, $T_1^*T_2$ aber in gleichem Sinne, sodass die Mitte z. B. von $T_1U_2^0$ auch die von $T_2^*U_1^0$ ist. Es ist evident, dass das aus der Mitte M der Centrale beider Kreise zu den bezüglichen Geraden T_1T_2, $T_1T_2^*$ resp. gefällte Perpendikel stets durch diesen Mittelpunkt der Segmente in ihr hindurchgeht und dass in Folge dessen für die Geraden der ersten Art $MT_2=MT_1$ und für die der zweiten Art $MT_2^*=MU_1^0$ ist, sodass die betrachteten Punkte T_1 und T_2, T_1^* und T_2^* etc. in concentrischen Kreisen aus der Mitte der Centrale liegen und somit auch die Perpendikelfusspunkte aus M auf die Geraden T_1T_2, $T_1T_2^*$, $T_1^*T_2$, $T_1^*T_2^*$ als Punkte gleicher Tangentenlängen in der Potenzlinie p der Kreise. Die von einem Punkte P des Ähnlichkeitskreises ausgehenden Tangenten geben vier Gerade $T_1T_2U_1U_2$, $T_1T_2^*U_1^0U_2^0$, $T_1^*T_2U_1^1U_2^1$, $T_1^*T_2^*U_1^*U_2^*$ und es liegen auf Kreisen um M die Punktegruppen T_1, T_2, U_1^1, U_2^0; T_1^*, T_2^*, U_2^1, U_1^0; U_1, U_2; U_1^*, U_2^*. Sowie nun die Tangenten in T_1, T_2; T_1^*, T_2^* durch den angenommenen Punkt P des Ähnlichkeitskreises gehen, so gehen wieder die in U_1^1, U_2^0, U_2^1, U_1^0, sodann die in den Tripeln T_1, U_2, U_2^0; T_2, U_1, U_1^1; T_1^*, U_2^1, U_2^* und T_2^*, U_1^0, U_2^*, endlich die in den Paaren U_1, U_2 und U_1^*, U_2^* je durch einen Punkt des Ähnlichkeitskreises; die Sehnen $T_1U_1^0$, $T_1^*U_1^1$, $T_2U_2^1$, $T_2^*U_2^0$ sind gleich lang; ebenso T_1U_1, T_2U_2 und wieder $T_1^*U_1^*$, $T_2^*U_2^*$.

Dies liefert die Sätze von den *Wechselsehnen* und *Wechselschnitten* bei St. 1852; p. 455. Denn Wechselsehnen sind die Verbindungslinien der Schnittpunkte des Kreises $\mathfrak{K}_1$ und des Kreises $\mathfrak{K}_2$ mit irgend einem Kreis aus der Mitte der Centrale, Wechselschnitte die Schnittpunkte der zugehörigen Tangenten von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$. Der Ort der Wechselschnitte ist der Ähnlichkeitskreis; *die Wechselsehnen sind gleich lang und umhüllen nach der angegebenen Beziehung zur Potenzlinie und zur Mitte der Centrale eine Parabel, mit der Potenzlinie als Scheiteltangente und der Mitte der Centrale als Brennpunkt* — die gemeinsamen Tangenten der Kreise gehören zu ihnen als von der gleichen Länge Null, die Potenzlinie und die unendlich ferne Gerade als Träger der gemeinsamen Sehnen beider Kreise.

Im Sinne unserer räumlichen Anschauung sind die Punkte T_1, T_2, U_1^1, U_2^0 der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ die Projectionen der Durchgänge des Kegelschnittes durch die Kehlkreisebenen der sich durchdringenden Hyperboloide; die zugehörigen Tangenten dieser Kreise sind die Projectionen der Paare durch dieselben gehender Mantellinien und die Tafelspuren der ihnen entsprechenden Tangentialebenen. Die Durchschnittslinien dieser Tangentialebenen des einen und des andern Hyperboloids projicieren sich in den Punkten des Ähnlichkeitskreises oder derselbe ist der Ort der scheinbaren Durchschnittspunkte der bezeichneten Mantellinien der Hyperboloide. Man kann dieses weiter ausführen, aber eine andere, nicht minder darstellendgeometrische Richtung der Untersuchung (vergl. § 39) scheint natürlicher auf die Gruppe von Eigenschaften zu führen, von welcher hier ein sehr specieller Fall erschienen ist. Für diese sei auf den 2. Bd. meiner *Darstellende Geometrie* etc. 3. Aufl. §§ 25, 27 verwiesen.

Die Durchdringungen bei festen Hauptkreisprojectionen und veränderlicher Distanz.

16. Schon früher ist vielfach das Interesse hervorgetreten, welches die *Betrachtung aller Durchdringungsprojectionen bei festen Kehlkreisen und veränderlicher Distanz* der Kehlkreisebenen haben müsste, und mit den letzten Entwickelungen sind wir bestimmt auf diese Erörterung gewiesen, da dieselben alle diese Kegelschnitte zu einem *System* verbinden, *welches dieselben Wechselschnitte*, die Punkte des Ähnlichkeitskreises von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, und *dieselben Wechselsehnen hat,* die Tangenten der Parabel in der Schaar derselben Kreise. Dieselben bilden eine Gruppe in der Gesammtheit der Kegelschnitte, welche diese Kreise doppelt berühren, und der Überblick über diese ist die nothwendige Vorbereitung für die Erkentniss

des Gesammtsystems. Wir beginnen mit dem *Falle reeller ausser einander liegender Kehlkreisprojectionen*, der auch bisher meist vorausgesetzt worden ist, ohne dass dies überall nöthig war.

Wir nehmen (Fig. 7) zwei reelle Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ mit den Mittelpunkten C_1, C_2 von der Distanz $2c$ und den Durchmesserendpunkten in der Centrale A_1, B_1 und A_2, B_2 an, welche wir in dieser Ordnung im Sinne der Bewegung von C_1 nach C_2 über $2c$ folgend denken, setzen auch $\mathfrak{K}_1$ als den grösseren der Kreise und als fest in der Tafel voraus, während wir das Hyperboloid von der Kehlkreisprojection $\mathfrak{K}_2$ vom Zusammenfallen auch seiner Kehlkreisebene mit der Tafel aus sich so bewegen lassen, dass die Distanz d nach einander alle positiven Werthe von Null bis Unendlich erhält. Wir wissen, dass die Spuren der Durchdringungsebenen in der Umlegung der Axenebene der Flächen die Tangenten einer Parabel sind, welche die Centrale der Kreise zur Axe und ihre Potenzlinie zur Scheiteltangente, sowie die der Distanz $2c$ entsprechende *Spur der Parabelebene* zur 45° Tangente hat. Die Kreise $\mathfrak{K}_{2d}$ und $\mathfrak{K}_{1d}$ (§ 8) für $d = 2c$ liefern durch ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}_1$ resp. $\mathfrak{K}_2$ die in unserem Falle stets reellen Berührungspunkte P_1, P_1^* und P_2, P_2^* nebst Tangenten der Parabelprojection mit diesen Kreisen; wir kennen ihren Brennpunkt als den Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und erhalten den Scheitel als Fusspunkt des Perpendikels zur Centrale, welches durch den Fusspunkt des Perpendikels vom Brennpunkt auf eine jener Tangenten geht.

Weil nun die Durchdringungsebenen für alle Distanzen zwichen Null und $2c$, als den Parabeltangenten im Übergang von der im Scheitel zur 45° Tangente entsprechend, mit der Tafel Winkel α von mehr als 45° einschliessen, so entspringen aus ihnen *hyperbolische* Durchdringungen mit ebensolchen Projectionen; während alle Werthe der Distanz, welche $2c$ übersteigen, wegen $\alpha < 45^\circ$ *elliptische* Durchdringungen und Projectionen liefern, bis für $d = \infty$ die Durchdringungs-Ebene und Projection der Tafel parallel und zum unendlich grossen *Kreise* um den Mittelpunkt der Centrale werden (§ 14), der aber die Centra C_1, C_2 als die zu ihm symmetrischen und zu den Ähnlichkeitspunkten I, E von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ harmonisch conjugierten zu Brennpunkten hat. (Siehe St. 1852; p. 453.) In der That ergeben sich dieselben unmittelbar aus der stereometrischen Construction in § 13 als die Kegelspitzen durch die Durchdringung, wenn die Scheitel A, B derselben die unendlich fernen Punkte der Meridian-hyperbeln sind. Und man erhält die Relation: Der Kreis über der Centrale als Durchmesser ist orthogonal zum Ähnlichkeitskreis der Kreise. Ferner ist nach § 13 offenbar, dass unter den *Hyperbeln* des Systems *die beiden Paare der gemeinsamen Tangenten* von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ als *die degenerierten* erscheinen, den Distanzen d gleich

$$t_i = \sqrt{4c^2 - (r_1 + r_2)^2} \quad \text{und} \quad t_e = \sqrt{4c^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

entsprechend, die in I und E resp. normal zur Centrale abgetragen auf dem Meridian des ruhenden Hyperboloides in der Axenebene die beiden Berührungsstellen mit Meridianlagen des bewegten Hyperboloides $\mathfrak{K}_2$ bezeichnen, für welche die gemeinsamen Tangenten die Parabel der Spuren (§ 12) berühren; daraus aber folgt, dass die zwischen denselben liegenden Parabeltangenten jene Meridianhyperbel nicht treffen und als Spuren zu hyperbolischen Durchdringungen Anlass geben, durch welche keine reellen Kegel gehen (§ 5) und deren Projectionen ihre reellen Brennpunkte im Ähnlichkeitskreis haben (§ 14), während die Centrale ihre Nebenaxe ist und ihre Mittelpunkte in der endlichen Strecke zwischen E und I gelegen sind.

Wenn hiernach die Intervalle der Distanzwerthe von Null bis t_i, von t_i bis t_e und von t_e bis $2c$ die Folge der hyperbolischen Durchdringungsprojectionen in *drei Gruppen* sondern, die den durch die Parabel bei $d = 2c$ von ihnen getrennten Ellipsen als einer zweiten Hauptgruppe gegenüberstehen, so entspringt eine Gliederung innerhalb beider Gruppen durch die Berücksichtigung derjenigen *Kegelschnitte* des Systems der Projectionen, *welche den einen oder andern der Kreise* $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ *in einem Scheitel vierpunktig berühren* (§ 7), d. h. der Durchdringungskegelschnitte, bei denen die Durchgangspunkte durch eine der Kehlkreisebenen der sich durchdringenden Flächen in einem Endpunkte des in der Axenebene liegenden Kehlkreisdurchmessers vereinigt sind. Sie entsprechen nach § 8 denjenigen Distanzen d, für die zwischen den Kreisen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_{2d}$ oder zwischen $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_{1d}$ Berührung stattfindet, sodass die bezüglichen $\mathfrak{K}_{2d}$ die aus C_2 durch A_1 resp. B_1 und die $\mathfrak{K}_{1d}$ die aus C_1 durch A_2 resp. B_2 beschriebenen Kreise sind, während die entsprechenden Distanzen die Längen der von A_1 und B_1 an $\mathfrak{K}_2$ und der von A_2 und B_2 an $\mathfrak{K}_1$ gehenden Tangenten a_1, b_1, a_2, b_2 sind. Die

Quadrate dieser Distanzen, nach wachsender Grösse b_1, a_2, b_2, a_1 geordnet, sind daher resp. (Siehe St. 1852, p. 450 f.)

$$(2c - r_1)^2 - r_2^2, \quad (2c - r_2)^2 - r_1^2, \quad (2c + r_2)^2 - r_1^2, \quad (2c + r_1)^2 - r_2^2,$$

wie man diess auch durch Einsetzen von $x = -c \pm r_1$, $x = c \mp r_2$ in die Gleichungen der Sehnen der doppelten Berührung in § 12 bestätigt. Aus der Relation $2c > r_1 + r_2$, die der ausschliessenden Lage der Kreise entspricht, sieht man dann, dass die beiden ersten Quadrate kleiner sind als t_i^2 und die beiden letzten nicht nur grösser als t_e^2 sondern auch grösser als $(2c)^2$. Man sieht daraus, dass von den vier in Rede stehenden Kegelschnitten der Tafel *zwei*, nämlich die in B_1 und A_2 resp. $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ berührenden, zu den *Hyperbeln der ersten Gruppe* (Distanzen 0 bis t_i) und die beiden anderen in B_2 und A_1 an $\mathfrak{K}_2$ resp. $\mathfrak{K}_1$ berührenden zu den *Ellipsen* gehören. Damit erhalten wir folgende Übersicht des ganzen Systems.

17. Die *erste Gruppe der Hyperbeln* $d = 0$ bis $d = t_i$, welche ihre Scheitel und Brennpunkte in der Centrale haben, beginnt, von der doppelt zählenden Potenzlinie der Kreise ausgehend, mit Hyperbeln von sehr stumpfen Asymptotenwinkeln, welche beide Kreise imaginär doppelt berühren; mit der Distanz b_1 tritt mit vierpunktiger Berührung in B_1 an $\mathfrak{K}_1$ die reelle Doppelberührung an $\mathfrak{K}_1$ ein, bei welcher mit wachsender Distanz die Berührungspunkte von B_1 weg aus einander rücken, während die Doppelberührung an $\mathfrak{K}_2$ noch imaginär bleibt bis sie auch da bei der Distanz a_2 mit vierpunktiger Berührung in A_2 reell zu sein beginnt; für die Distanzen zwischen a_2 und t_i haben die Hyperbeln reelle Doppelberührungen mit beiden Kreisen, indem nun auch die Berührungspunkte von A_2 aus auf $\mathfrak{K}_2$ sich von einander entfernen — sie rücken hier wie die auf dem Kreise $\mathfrak{K}_1$ vor bis zu den Berührungspunkten der inneren gemeinsamen Tangenten. Die Mittelpunkte dieser Gruppe liegen in der Strecke vom Fusspunkt der Potenzlinie bis zum inneren Ähnlichkeitspunkt I, ihre linearen Excentricitäten nehmen von der Anfangs- zur End-Lage ab, vom Halbmesser des zum Ähnlichkeitskreis orthogonalen Kreises aus dem Fusspunkt der Potenzlinie bis zu Null für die inneren gemeinsamen Tangenten.

Den Distanzen zwischen t_i und t_e entsprechen die *Hyperbeln mit der*

Nebenaxe in der Centrale; durch die Degenerationsform der inneren gemeinsamen Tangenten hindurch ist die Curve aus den Winkeln der Asymptoten, in denen die Centrale liegt, in die Nebenwinkel derselben übergegangen. Die Berührungen mit beiden Kreisen sind reell doppelt und die Berührungspunkte rücken auf denselben vor von den Berührungsstellen der inneren bis zu denen der äusseren gemeinsamen Tangenten. Der Mittelpunkt bewegt sich vom inneren bis zum äusseren Ähnlichkeitspunkt und die Brennpunkte durchlaufen den Ähnlichkeitskreis, wobei die lineare Excentricität zuerst von Null bis zum Radius dieses Kreises wächst, um dann wieder bis Null in E abzunehmen. Mit dem *Durchgang durch die zweite Degenerationsform* der äusseren gemeinsamen Tangenten bei $d = t_e$ treten die Hyperbeln wieder in die Winkelflächen der Asymptoten, in welchen die Centrale liegt, und ihre Scheitel und Brennpunkte fallen wieder in diese Gerade: Denn die Spur der Durchdringungsebene in der Ebene der Axen schneidet die Meridianhyperbel von $\mathfrak{K}_1$ wieder in reellen Punkten und die Mittelpunkte der durch die Curve gehenden eigentlichen Kegel sind reell. Die doppelte Berührung mit beiden Kreisen bleibt reell und die Berührungspunkte rücken auf denselben von denen der äussern gemeinsamen Tangenten bis zu denen der *Parabel* für $d = 2c$ vor; aber der im Durchgang durch die Degenerationsform t_e stattfindende Wechsel der Lage hat auch bewirkt, dass nun der nämliche Ast jeder Hyperbel beide Kreise reell doppelt berührend umschliesst, wie diess auch die Parabel thut, während in der vorigen Gruppe jeder Ast beide Kreise ausschliessend berührt, sodass von den Punkten derselben reelle Tangenten an die Hyperbeln gehen und in der ersten Gruppe die umschliessenden Doppelberührungen am einen Kreise dem einen Ast und die am andern dem andern Ast der Curve angehören.

Die Mittelpunkte der dritten Gruppe rücken von E aus in dem Sinne der vorigen Bewegung bis in's Unendliche und die linearen Excentricitäten durchlaufen gleichzeitig alle Werthe von Null bis Unendlich.

Die *Hauptgruppe der Ellipsen* sodann lässt sich folgendermassen charakterisieren: Alle Ellipsen umschliessen beide Kreise, sie zuerst beide auch reell doppelt berührend, indem die Berührungspunkte von denen der Parabel aus gegen den Durchmesserendpunkt A_1 resp. B_2 fortrücken; mit $d = b_2$ vereinigen sich die Berührungspunkte am kleinen Kreis in B_2 und von da bis zur Distanz a_1 wird nur der grössere Kreis noch reell, zuletzt in A_1 vierpunktig, der kleinere aber imaginär doppelt berührt; für noch weiter wachsende Distanz wird auch die Berührung mit $\mathfrak{K}_1$ imaginär, alle folgenden Ellipsen berühren wie der unendlich grosse Kreis aus der Mitte der Centrale — als dem Centrum des concentrischen Kreissystems durch die Berührungspunkte — mit den Brennpunkten C_1, C_2, imaginär doppelt. (Vergl. St. 1852; p. 450—452 [1].)

Die Mittelpunkte dieser Ellipsen rücken auf der Seite des Kreises $\mathfrak{K}_1$ aus dem Unendlichen in der Centrale bis zur Mitte M derselben heran; in der endlichen Strecke von da bis zum Fusspunkt der Potenzlinie liegen nur Mittelpunkte imaginärer doppelt berührender Kegelschnitte; es giebt auch keine reellen Werthe von d, welche ihnen entsprechen, wohl aber zeigt der Werth der Mittelpunktsabscisse in § 14, dass sie für die negativen Werthe von d^2 zwischen ∞ und 0 erhalten werden und wir werden den Sinn davon weiterhin erkennen (§ 18 f.). Die linearen Excentricitäten nehmen ab von der unendlich grossen der Parabel bis zu der des unendlich grossen Kreises, die gleich c ist. Die entsprechenden elementaren Rechnungen sind leicht anzustellen und auch nicht ohne Interesse: Für die vier vierpunktig berührenden Kegelschnitte des Gesammtsystems bilden die reciproken Werthe der Mittelpunktsabscissen die Summe Null; etc.

18. Wir denken nun unter Festhaltung der übrigen Bestimmungen von vorher die reellen Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ durch Bewegung von C_2 gegen C_1 hin einander näher rückend, wodurch die Asymptotenwinkel der ersten Hyperbelgruppe von § 17 zwischen immer engere Grenzen eingeschränkt werden, etc., und verweilen bei dem *Grenzfalle, wo sich jene Kreise ausschliessend berühren* und somit die Punkte B_1 und A_2 zusammenfallen. Die innern gemeinsamen Tangenten sind nun mit der Potenzlinie der Kreise vereinigt, der Spielraum des Asymptotenwinkels für die erste Hyperbelgruppe ist verschwunden: Die Potenzlinie ist die Projection des Durchdringungskegelschnittes für $d = 0$ und den gemeinsamen Mantellinien der Hyperboloide in dieser Berührungslage $d = t_i$ entsprechend; ihre Scheitel und Brennpunkte fallen mit den Mittelpunkten der Kegel des Büschels zusammen; auch die in A_2 an $\mathfrak{K}_2$ und resp. in B_1 an $\mathfrak{K}_1$ vierpunktig

[1] Dazu die Anmerkung, dass sich hier p. 452 der Werke II ein störender Druckfehler eingeschlichen hat, den der Originaldruck nicht enthält; vor Anfang der vierten Zeile sind die Worte ausgefallen »darnach berührt die E^2 nur noch den Kreis A^2 reell doppelt, bis $l = u$ wird, wo sie ihn in U vierpunktig berührt und zum Krümmungskreise hat«.

berührenden Kegelschnitte des Büschels sind hier vereinigt. Das System der Durchdringungsprojectionen beginnt mit den Hyperbeln, welche die Centrale zur Nebenaxe haben, deren Brennpunkte den Ähnlichkeitskreis erfüllen und bei denen jeder Ast beide Kreise reell berührt. Ihre linearen Excentricitäten wachsen von Null bis zum Radius des Ähnlichkeitskreises und nehmen wieder bis auf Null ab mit der Grenz- und Degenerationsform der äusseren gemeinsamen Tangenten. Es folgen die Hyperbeln, bei denen der nämliche Ast beide Kreise reell doppelt berührt, bis mit $d = 2c = r_1 + r_2$ die Parabel; sodann für weiter wachsende d die Reihe der Ellipsen, in welcher für $4r_2(r_1 + r_2)$ und $4r_1(r_1 + r_2)$ als Werthe des Distanzquadrates die bei B_2 mit $\mathfrak{K}_2$ und resp. die bei A_1 mit $\mathfrak{K}_1$ sich vierpunktig berührenden hervortreten; etc.

Rückt nun der Mittelpunkt C_2 noch weiter gegen C_1 hin, so *schneiden einander die Kreise* $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in zwei reellen Punkten (Fig. 8), deren Verbindungslinie die Potenzlinie ist, während der innere Ähnlichkeitspunkt I nun gegen den Mittelpunkt des grösseren Kreises hin über sie hinübergerückt ist und die Längen der inneren gemeinsamen Tangenten imaginär oder ihre Quadrate negativ geworden sind; eben dies führt zu neuen Ergebnissen gemäss der früher (§ 1) begründeten Bedeutung dieses Überganges. Wir überblicken zuerst die Durchdringungsprojectionen für die *reellen* Distanzen der Kehlkreisebenen.

Dieselben gehen aus von dem ausserhalb der Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gelegenen Theil ihrer Potenzlinie, welcher die Projection der Durchdringungshyperbel der Hyperboloide bei vereinigten Kehlkreisebenen ist und die constante Differenz der Tangentenlängen Null hat. Mit von Null aus reell wachsenden Distanzen bis zu $d = t_e$ erhält man Hyperbeln der zweiten Gruppe, von denen jeder Ast beide Kreise reell berührt und die ihre Brennpunkte in dem ausserhalb beider Kreise gelegenen Theil ihres Ähnlichkeitskreises, ihre Mittelpunkte in der Strecke vom Fusspunkt der Potenzlinie in der Centrale bis zum äusseren Ähnlichkeitspunkt haben. Ihnen folgt für $d = t_e$ das Paar der gemeinsamen Tangenten, dann die Hyperbeln, welche mit einem Aste beide Kreise reell doppelt berühren, begrenzt durch die Parabel des Systems, endlich die Ellipsen mit den bei B_2 an $\mathfrak{K}_2$ und resp. bei A_1 an $\mathfrak{K}_1$ vierpunktig berührenden wie vorher. Der Mittelpunkt hat die unendliche Strecke vom Fusspunkt der Potenzlinie bis zur Mitte der Centrale durchlaufen; aber die Strecke von jenem bis zum innern Ähnlichkeitspunkt ist nicht von Mittelpunkten von Durchdringungsprojectionen für reelle Distanzen erfüllt, und der im Innern der Grundkreise liegende Bogen des Ähnlichkeitskreises enthält keine Brennpunkte von solchen; während doch Kreise aus der Mitte der Centrale, deren Radien den Werth $(r_1 - c)$ übertreffen, ohne den Werth

$$\sqrt{\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) - c^2}$$

zu erreichen, mit welchem ein solcher Kreis durch die Schnittpunkte der Grundkreise geht, beide Kreise in Punkten schneiden, welche Berührungspunkte mit Kegelschnitten des Systems sein sollten, und durch zu den von der planimetrischen Anschauung geforderten Ellipsen innerhalb der von beiden Kreisen umschlossenen Linsenfläche gehören könnten, ohne doch im Sinne unserer stereometrischen Anschauung als Durchdringungsbilder von Hyperboloiden mit reeller Distanz der Kehlkreisebenen erhalten werden zu können. Aber eben dadurch, dass sie nur aus nicht reellen Distanzen zwischen o und t_i entspringen können, liefert unsere Grundanschauung sofort ihre reelle Construction. Denn wir wissen aus der einleitenden Übersicht von der Methode der Cyklographie, dass mit dem Übergang von reellen zu imaginären Distanzen von der Tafel — d wie z — durch den Wechsel des Vorzeichens der Quadrate und Producte von z und d die einfachen Hyperboloide in reelle Kugeln übergehen, deren Punkte dargestellt sind durch Kreise, die von einem reellen festen Kreis, dem Hauptkreis der Kugel, im Durchmesser geschnitten werden, sobald jener in der Tafel liegt, oder für deren Projectionen die kürzeste durch sie gehende Halbsehne in diesem Kreis die Höhe des Originals über der Ebene desselben angiebt. Desshalb muss für alle Punkte der Projection eines ebenen Querschnittes der Kugel das Verhältniss der durch sie gehenden kürzesten Halbsehnen der Hauptkreisprojection zu ihrem Abstand von der Projection der bezüglichen Spur der Ebene constant, nämlich der trigonometrischen Tangente des Winkels der Ebene zur Tafel gleich sein. (Vergl. § 7.) Und in Folge dessen gilt auch für die Punkte der Projection der Durchdringung von zwei solchen Kugeln das Gesetz, *dass die Summe oder Differenz der zugehörigen kürzesten Halbsehnen der entsprechenden Hauptkreisprojectionen constant, nämlich der Distanz der Hauptkreisebenen gleich ist; sowie sie auch zum Abstand der Spuren der Durchdring-*

ungsebene in der Projection d. h. der Sehnen der doppelten Berührung der Durchdringungsprojection mit den Hauptkreisen in demselben constanten Verhältniss $\operatorname{tg}\alpha$ *steht.*

19. In der That ist für $-z^2$ als das Quadrat der halben kleinsten Sehne durch den Punkt (x, y) innerhalb des Kreises vom Radius r um den Mittelpunkt (α, β)

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = -z^2;$$

die Definition der Potenz umfasst diesen sowie den vorher betrachteten Fall oder geht für einen inneren Punkt naturgemäss in die jetzige Fassung über. Und für die Projection und Durchdringung der Kugeln (wofür nun d und z reell sind)

$$(x+c)^2 + y^2 + z^2 - r_1^2 = 0, \qquad (x-c)^2 + y^2 + (z+d)^2 - r_2^2 = 0$$

erhält man natürlich durch Elimination von z zwischen beiden Gleichungen ein Resultat, welches auch aus dem entsprechenden in § 11 durch Verwandlung von d^2 in $-d^2$ sich ergiebt; dasselbe spricht die Constanz jener Summe oder Differenz der halben kleinsten Sehnen aus und wir haben wieder wie früher die *Summe* für alle Punkte *innerhalb* der durch die Hauptebenen begrenzten *Schicht*, die *Differenz* für alle Punkte *ausserhalb* derselben zu nehmen. Die Symbolik und die damit begründeten Sätze des § 11 bleiben in Gültigkeit. Auch ergiebt sich für die Ebene der Durchdringung

$$2cx - dz = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2 + d^2)$$

oder mit Verlegung des Anfangspunktes in die Potenzlinie

$$2cx - dz = \frac{1}{2}d^2$$

(vergl. § 12), was sofort als die Enveloppe ihrer Spur in der Axenebene die zur Potenzlinie symmetrische von der *Parabel der Spuren* für reelle Distanzen erkennen lässt. Damit erhalten wir die anschauliche Entwickelung für diesen Theil unseres Kegelschnittsystems. Für die rein imaginären Werthe zwischen $d = 0$ und $d = t_i$ oder

$$d = \sqrt{4c^2 - (r_1 + r_2)^2} = i\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}$$

liefern bei reell aufgetragenen d die Kugeln mit dieser Distanz der Hauptebenen und den gegebenen Kreisen als Hauptkreisprojectionen kreisförmige Durchdringungen, deren Projectionen *Ellipsen* sind, *welche von jenen Kreisen umschliessend reell oder imaginär doppelt berührt werden.* Wir erhalten ihre in der Centrale liegenden Scheitel als die Fusspunkte der Perpendikel zu dieser, welche von den Durchschnittspunkten des Kreises $\mathfrak{K}_1$ mit demjenigen Kreise vom Radius r_2 ausgehen, der seinen Mittelpunkt (C_2) in dem in C_2 errichteten Perpendikel zur Centrale im reellen Abstand id hat; es sind die Scheitel der Nebenaxe. Nach der Methode der darstellenden Geometrie erhält man aber auch sofort die Scheitel der Hauptaxe: Die gemeinsame Sehne jener beiden Kreise giebt als das Perpendikel von ihrer Mitte zur Centrale die Linie und zugleich durch ihre Länge die Grösse derselben. Endlich erhält man für die Bestimmung der Berührungspunkte der Ellipse mit den Kreisen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ aus dem Umstande, dass sie die Projectionen der Durchgangspunkte der Durchdringung durch die Hauptkreisebenen der betreffenden Kugeln sind, die einfache Regel: Man beschreibt aus C_1 resp. C_2 diejenigen Kreise $\mathfrak{K}_{1d}$, $\mathfrak{K}_{2d}$, welche die halben Sehnen von $\mathfrak{K}_1$ resp. $\mathfrak{K}_2$ mit dem Centralabstand d zu Halbmessern haben; ihre Potenzlinien mit $\mathfrak{K}_2$ resp. $\mathfrak{K}_1$ sind die *Sehnen der Doppelberührung* mit diesen Kreisen und ihre *Pole* in denselben die Schnittpunkte der zugehörigen gemeinsamen Tangenten. Weil die Kreise $\mathfrak{K}_{1d}$ und $\mathfrak{K}_{2d}$ die resp. Radienquadrate $(r_1^2 - d^2)$ und $(r_2^2 - d^2)$ haben, so erkennt man wie in § 12, dass die Büschel $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_{1d}$ und $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_{2d}$ den Kreis aus der Mitte M der Centrale mit dem Radiusquadrat $\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 - d^2) - c^2$ gemein haben oder dass auch jetzt die vier Berührungspunkte mit $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ immer auf einerlei Kreis um M gelegen sind, sodass durch einen der Berührungspunkte das Tripel der übrigen und die Distanz der Hauptkreisebenen bestimmt ist. In Folge dessen schneiden sich ferner die Kreise derselben Büschel, die durch den Mittelpunkt des zugehörigen Grundkreises und den Pol seiner Berührung gehen, wie in §§ 13, 14 auf dem *Ähnlichkeitskreis* und die dort entwickelte Theorie der *Brennpunkte* und die der *Wechselsehnen* und *Wechselschnitte* bleibt in unveränderter Gültigkeit. Dieselbe konnte sich desshalb auch nicht in Abhängigkeit von den geraden Mantellinien der einfachen Hyperboloide ergeben.

20. Wir können nun die Übersicht des Systems für den vorgelegten

Fall beendigen. Der Distanz Null als Grenze der rein imaginären Distanzwerthe entspricht *der doppelt gezählte im Innern beider Kreise gelegene Theil ihrer Potenzlinie* als Ort der Punkte gleicher kürzester Sehnen in beiden Kreisen, *eine Ellipse,* welche beide Kreise in ihren Schnittpunkten mit einander berührt — wie denn für $\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) - c^2$ als das Radiusquadrat des Kreises aus der Mitte der Centrale das Distanzquadrat verschwindet.

Wächst nun der absolute Werth der Distanz von Null aus, so nimmt der Radius des Kreises um M durch die Berührungspunkte ab und die Berührungspunkte rücken, sich trennend, auf beiden Kreisen gegen die inneren Durchmesserendpunkte B_1 und A_2 hin; die entsprechenden Ellipsen berühren beide Kreise reell doppelt, sodass ihre Umfänge durch die Berührungsstellen in *vier Theile* zerlegt werden, von denen zwei die constante der Distanz gleiche *Summe* und die beiden andern durch jene von einander getrennten die constante derselben Distanz gleiche *Differenz der zugehörigen kleinsten Halbsehnen beider Kreise* zeigen — jene die Projectionen der in der Schicht der Hauptkreisebenen gelegenen Bögen des Durchdringungskreises, diese die Projectionen seiner Bögen ausserhalb derselben Schicht; in den Berührungspunkten selbst sind daher die kleinsten Halbsehnen des jeweilen nicht berührten Kreises einander gleich, weil sie jener Distanz gleich sind.

Dem Werthe der Distanz $d = \sqrt{r_2^2 - (2c - r_1)^2}$ (vergl. § 16), d. h. dem Centralabstand derjenigen Sehnen des Kreises $\mathfrak{K}_2$, deren Hälften dem Radius des aus C_2 durch B_1 beschriebenen, also $\mathfrak{K}_1$ ausschliessend berührenden Kreises gleich sind, entspricht die Vereinigung der beiden Berührungsstellen der Durchdringungsprojection an $\mathfrak{K}_1$ in B_1, bei noch getrennter reell doppelter Berührung an $\mathfrak{K}_2$; der eine der elliptischen Bögen mit constanter Differenz ist verschwunden und man behält zwei durch die Stellen dieser Berührung getrennte Theile des Umfangs, in deren einem der vierpunktigen Berührung B_1 nicht benachbartem die Constanz der Summe besteht, während im grösseren andern die Differenz denselben Werth hat, etc.

Bei weiterem Wachsen von d wird die Berührung an $\mathfrak{K}_1$ imaginär doppelt und mit $d = \sqrt{r_1^2 - (2c - r_2)^2}$ vereinigen sich auch die Stellen der Berührung an $\mathfrak{K}_2$ zu einer vierpunktigen Berührung in A_2, sodass für noch grössere Distanzen die Berührungen der Ellipse mit beiden Kreisen imaginär doppelt sind und dieselbe ganz in das Innere der Linsenfläche zwischen ihnen zurücktritt, während für alle Punkte des Umfangs constante Summe der kleinsten Halbsehnen beider Kreise besteht.

Die Ellipse wird dabei immer kleiner und für $d = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}$ als den reellen Factor von t_i hat sich dieselbe in den inneren Ähnlichkeitspunkt zusammengezogen; derselbe ist die Projection des Berührungspunktes der Kugeln in der durch diese Distanz bestimmten Lage und da diese Distanz die grösste ist, für welche unsere Durchdringung noch reell wird, so zeichnet den *inneren Ähnlichkeitspunkt sich schneidender reeller Kreise* unter allen Punkten die Eigenschaft aus, *dass die Summe der durch ihn gehenden kleinsten Halbsehnen der Kreise den grössten möglichen Werth besitzt.* (St. 1852; p. 458.)

Es ist evident, dass die Mittelpunkte dieser Ellipsen vom Fusspunkt der Potenzlinie in der Centrale bis zum inneren Ähnlichkeitspunkt hin liegen und dass ihre *Brennpunkte den im Innern beider Kreise liegenden Theil ihres Ähnlichkeitskreises* erfüllen, sowie dass gleichzeitig die lineare Excentricität von dem Werthe der halben Sehne in der Potenzlinie bis zur Null stetig abnimmt. Endlich ist die von den *Wechselsehnen* umhüllte *Parabel* durch die Potenzlinie als Scheiteltangente und die Mitte der Centrale als Brennpunkt wie sonst bestimmt, da die Realität der gemeinsamen Tangenten dabei keine Rolle spielt; die Wechselschnitte auch für diese Ellipsen sind im Ähnlichkeitskreis.

21. Wenn wir den kleineren Kreis $\mathfrak{K}_2$ tiefer in den grösseren hineinrücken lassen, so wächst der Winkel der äusseren gemeinsamen Tangenten stetig und in der *Grenzlage der umschliessenden Berührung* fallen sie mit einander und mit der Potenzlinie zusammen, der Berührungspunkt ist B_1, B_2 und E und der Ähnlichkeitskreis berührt beide Kreise in ihm. Die reellen Werthe der Distanz beginnen nun mit $t_e = 0$, während die beiden Regionen von 0 bis t_i und von t_i bis t_e dem imaginären Werthbereich angehören und statt umschliessender Hyperbeln *umschlossene Ellipsen* liefern. Den reellen Distanzen zwischen 0 und $2c$ entsprechen *Hyperbeln*, welche mit dem einen Aste beide Kreise doppelt berühren, den grösseren reell und den kleineren imaginär; für $d = 2c$ folgt die *Parabel*, die sich ebenso verhält. Die zugehörigen Mittelpunkte erfüllen den äusseren unendlichen Theil der Centrale vom Berührungspunkt der Kreise aus, dem

Mittelpunkt, Scheitel und Brennpunkt der Projection der gemeinsamen Mantellinien der Hyperboloide für $d = 0$; ihre Brennpunkte vertheilen sich auf die unbegrenzte Strecke der Centrale auf der gleichen Seite bis zum Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises hin, die linearen Excentricitäten wachsen von Null bis Unendlich. Nach der Parabel, für alle $d > 2c$ folgen die *umschliessenden Ellipsen*, welche den Kreis $\mathfrak{K}_1$ zuerst unter Vorrücken der Berührungspunkte von denen der Parabel gegen A_1 hin reell doppelt berühren, bis sich die Berührungsstellen für $d = \sqrt{(c + r_1)^2 - r_2^2}$ in A_1 zur vierpunktigen Berührung vereinigen, sodass von da an nur noch imaginäre Berührungen statthaben. Die Mittelpunkte rücken auf der der Potenzlinie entgegengesetzten Seite vom Unendlichen bis zur Mitte der Centrale heran, indess die Brennpunkte den vom Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises nach der Seite von C_1 hin liegenden unbegrenzten Theil der Centrale erfüllen.

Alle übrigen Kegelschnitte, deren Brennpunkte dem Ähnlichkeitskreis angehören, entstehen aus Durchdringungen von *Kugeln*, weil mit *imaginären Distanzen*. Sie beginnen mit dem der Distanz $d = 0$ als Grenze der rein imaginären Werthe entsprechenden *Berührungspunkte* der Kreise und der Kugeln als unendlich kleiner *Ellipse;* daher der Differenz Null der kleinsten Halbsehnen — während für alle übrigen Punkte der Potenzlinie die Differenz der Tangentenlängen gleich Null ist. Mit der Verschiebung der Kugel $\mathfrak{K}_2$ unter Festhaltung ihrer Hauptkreisprojection entstehen reelle Durchdringungskreise bis $d = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}$ oder $2\sqrt{r_1 r_2}$, bei welcher ausschliessende Berührung zwischen beiden Kugeln stattfindet; sie liefern reelle Ellipsen, die den grösseren Kreis stets imaginär, den kleineren zum Theil reell berühren, indem die reell doppelten Berührungen an diesem durch eine vierpunktige Berührung in A_2 beschlossen werden. Schliesslich zieht sich die Ellipse auf den inneren Ähnlichkeitspunkt als die Projection jenes Berührungspunktes der Kugeln zusammen, für den damit die Summe der durch ihn gehenden kleinsten Halbsehnen den Maximalwerth $2\sqrt{r_1 r_2}$ erreicht. Die Potenzlinie unter jenen und der Berührungspunkt unter diesen Durchdringungen berühren allein beide Kreise reell, und sie sind zugleich vierpunktig berührende Kegelschnitte resp. unter denen aus reellen und denen aus rein imaginären Distanzen.

22. Wir kommen endlich zu dem Falle, in welchem der *Kreis* $\mathfrak{K}_2$ *ohne Berührung vom Kreise* $\mathfrak{K}_1$ *umschlossen* wird, in welchem also beide Ähn-

lichkeitspunkte und der ganze Ähnlichkeitskreis im Innern von $\mathfrak{K}_2$ liegen (Fig. 9). Die Kegelschnitte aus den Durchdringungen der Hyperboloide beginnen in diesem Falle mit *Hyperbeln* der dritten Gruppe, bei denen derselbe Ast beide Kreise umschliesst und $\mathfrak{K}_1$ reell doppelt berühren kann. Sie entfalten sich aus der Potenzlinie $d = 0$ und berühren zuerst wie diese nicht reell, für $d = 2c$ folgt die *Parabel* mit derselben allgemeinen Lage, endlich die *umschliessenden Ellipsen* wie früher.

Ob die *Parabel* den Kreis $\mathfrak{K}_1$ *schon reell doppelt*, ob sie ihn *im Scheitel vierpunktig* oder ob sie ihn *nicht reell berührt*, ist davon abhängig, ob die Länge der vom Durchmesserende B_1 von $\mathfrak{K}_1$ auf der Seite der Potenzlinie an $\mathfrak{K}_2$ gezogenen Tangente, die Distanz für die bezeichnete vierpunktige Berührung, $\lesseqgtr 2c$ ist; im ersten Falle berühren die Parabel und eine Reihe vorausgehender Hyperbeln von der jener Distanz entsprechenden ab reell doppelt, die der Parabel folgenden Ellipsen bis zu der in A_1 vierpunktig berührenden bei der Distanz a_1 thun dasselbe, und erst von da ab sind alle Berührungen imaginär; ist $b_1 = 2c$, so beginnen die reellen Berührungen mit der vierpunktigen der Parabel und dauern in der Reihe der Ellipsen bis zur vorerwähnten Grenze; endlich für $b_1 > 2c$ berührt auch die Parabel noch nicht reell, es folgen ihr imaginär doppelt berührende Ellipsen bis zu der in B_1 vierpunktig berührenden, etc. — *sodass in diesem Falle das System der Ellipsen aus den Durchdringungen für reelle Distanzen im Anfang und wieder am Ende durchaus imaginär berührende enthält,* die sich jedoch in einem wichtigen Punkte von einander unterscheiden. Sowie für die nicht reell berührenden Hyperbeln im Anfange der Durchdringungen aus reellen Distanzen nach ihrer Lage ausserhalb der Scheitel der Hauptkreisebenen ringsum *constante Differenz der Tangentenlängen* besteht, so auch noch *für die erste Gruppe der Ellipsen in diesem letzteren Falle,* weil erst mit der vierpunktigen Berührung die Durchdringung an die eine Grenzebene der Schicht *heran* und mit der reellen Doppelberührung in sie *hinein* tritt; nach jener findet also für den Theil des Umfangs zwischen den Punkten der Doppelberührung auf der Seite von B_1 constante Summe der Tangentenlängen statt, und bei weiter wachsender Distanz wächst dieser Theil des Umfangs, bis er mit der vierpunktigen Berührung in A_1 zum ganzen Umfange geworden ist — d. h. *für die nicht reell berührenden Ellipsen am Ende des Systems der Durchdringungen für reelle Distanzen findet ringsum constante Summe der*

Tangentenlängen statt, sie selbst liegen ganz innerhalb der Schicht. (St. 1852; p. 460.) (1)

Für die *Durchdringungen mit imaginären Distanzen* ist die Potenzlinie eine imaginäre Ellipse und die Spur der Durchdringungsebene in der Axenebene oder die Tangente der Parabel von § 19 trifft von ihr ausgehend zuerst $\mathfrak{K}_1$ nicht reell; erst mit $d = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 - 4c^2}$ beginnen die reellen Durchdringungen und sie endigen mit $d = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}$, für jenen Werth wird die Kugel $\mathfrak{K}_2$ von $\mathfrak{K}_1$ *umschliessend* und für diesen *ausschliessend berührt;* die erste Berührung ist im äusseren E, die zweite im inneren Ähnlichkeitspunkt I projiciert, in natürlicher Umkehrung der Ordnung gegenüber den Distanzwerthen in Folge des Zeichenwechsels ihrer Quadrate. Jener entspricht dem kleinsten Werthe der Distanz unter den reellen Durchdringungen aus Kugeln und dieser dem grössten; und da der erste sich ausserhalb, der zweite innerhalb der bezüglichen Schicht befindet, so erhält man für den letzteren wie es sein muss den Satz von § 20 wieder, für den ersteren aber den ergänzenden Satz: *Für den äusseren Ähnlichkeitspunkt von zwei Kreisen, von denen der eine den andern umschliesst, ist die Differenz der zugehörigen halben kleinsten Sehnen ein Minimum.* Man erhält auf den Perpendikeln zur Centrale in den Ähnlichkeitspunkten I und E sofort jenes Maximum wie dieses Minimum. (St. 1852; p. 459.)

Die zwischen jenen Grenzwerthen liegenden Distanzen liefern reelle *Ellipsen* als Durchdringungsprojectionen der Kugeln, welche zuerst auch den inneren Kreis imaginär, dann im Scheitel vierpunktig bei B_2, später reell doppelt berühren, um weiterhin durch die vierpunktige Berührung wieder zur imaginären zurück zu kommen; die zur Centrale normalen Halbsehnen von $\mathfrak{K}_1$, welche $\mathfrak{K}_2$ bei B_2 und resp. A_2 berühren, liefern die Distanzen der Hauptkreisebenen, welchen jene vierpunktigen Berührungen entspringen. Die Mittelpunkte aller dieser reellen Ellipsen erfüllen die Centrale zwischen den Ähnlichkeitspunkten und ihre Brennpunkte den Ähnlichkeitskreis. Die Potenzlinie als Scheiteltangente und die Mitte der Centrale als Brennpunkt bestimmen die von den Wechselsehnen umhüllte Parabel.

---

(1) Die Ausgabe der Werke hat hier p. 460 Zeile 16 v. o. den störenden Druckfehler $u_1 < AB$, wofür also stehen muss und im ersten Druck wirklich steht $u_1 > AB$.

23. Es bleibt übrig nach den verschiedenen Fällen der reellen Hauptkreise die *Fälle* zu besprechen *wo einer der Hauptkreise rein imaginär ist oder wo beide es sind;* die Fälle von verschwindendem Radius bei einem der Kreise oder bei beiden mögen dann als Specialfälle einer besondern Erörterung unterworfen werden.

Zunächst denken wir den Kreis $\mathfrak{K}_1$ *rein imaginär* oder von negativem Radiusquadrat $-r_1^2$ und durch seinen Symmetriekreis $\mathfrak{K}_1$ (Fig. 10) vertreten, den anderen $\mathfrak{K}_2$ *reell;* jenem als in der Tafel gelegen entspricht ein festes gleichseitiges zweifaches Rotationshyperboloid mit der Tafel als Hauptebene und den Scheitelabständen r_1 von der Tafel, diesem ein einfaches, welches wir in der Art bewegt vorstellen, dass die Projection $\mathfrak{K}_2$ seines Kehlkreises unverändert bleibt und nur die Distanz der Ebene desselben von der Tafel wechselt. Ist d diese Distanz, so erhalten wir den in der Tafel gelegenen Parallelkreis $\mathfrak{K}_{2d}$ des einfachen Hyperboloides aus seinem Radiusquadrat $(r_2^2 + d^2)$; wir erhalten dagegen die Projection für den in der Kehlkreisebene des einfachen Hyperboloids liegenden Parallelkreis des zweifachen mit dem Radiusquadrat $(-r_1^2 + d^2)$, rein imaginär so lange der reelle Factor von r_1 grösser ist als d, als Punkt C_1 für d als demselben gleich, und reell für grössere Distanzen; im ersten Falle trägt man d in C_1 rechtwinklig zur Centrale auf, geht durch den erhaltenen Punkt parallel zu ihr bis zum Kreis $\mathfrak{K}_{1s}$ und erhält in dieser Strecke, der zur Distanz d als Centrum gehörigen Halbsehne in diesem Kreise, den Radius für den Symmetriekreis des bezüglichen imaginären Parallelkreisbildes; andernfalls zieht man von dem Endpunkt der so abgetragenen Distanz die Tangente an $\mathfrak{K}_{1s}$ und hat in ihrer Länge den Radius des reellen Parallelkreises in dieser Distanz vom Hauptschnitt — die Darstellung der Meridianhyperbel aus dem Kreisbüschel mit reellen Grenzpunkten. (§ 1.) Die Potenzlinien der so erhaltenen Kreise $\mathfrak{K}_{2d}$ und $\mathfrak{K}_{1d}$ mit $\mathfrak{K}_1$ resp. $\mathfrak{K}_2$, die natürlich mit Rücksicht auf das Vorzeichen der Radienquadrate aus $4cx = r_1^2 - r_2^2$ (§ 12) zu construieren sind, liefern die Spuren der Ebene der Durchdringung auf den Hauptschnittebenen in dieser Lage; die durch die resp. Kreise auf ihnen bestimmten Involutionen harmonischer Pole gehören dem entstehenden Kegelschnitt an.

Die *Ebene der Durchdringung* aus

$$(x + c)^2 + y^2 - z^2 = -r_1^2, \qquad (x - c)^2 + y^2 - (z + d)^2 = r_2^2$$

ist

$$2cx + dz = -\frac{1}{2}(d^2 + r_1^2 + r_2^2)$$

und wird durch Verlegung des Anfangspunktes in die Potenzlinie

$$4cx = -(r_1^2 + r_2^2) \quad \text{mit} \quad 2cx + dz = -\frac{1}{2}d^2$$

berechnet, wie in § 12; ihre Spur in der Axenebene der Flächen umhüllt dieselbe *Parabel* wie dort. Die Projection des Durchdringungskegelschnittes wird aus der früheren (§ 11) durch Wechsel des Zeichens von r_1^2 erhalten, mit $d = 2c$ die Parabel des Systems, der die 45° Ebene $x + z = -c$ entspricht. Der allgemeine Werth der *Mittelpunkts-Abscisse* ist (§ 14)

$$-c\frac{r_1^2 + r_2^2}{4c^2 - d^2};$$

sie wird nur für reelle $d > 2c$ positiv.

Der Brennpunkt der Systemsparabel ist der Mittelpunkt des *Ähnlichkeitskreises* von der Abscisse (§ 14)

$$c\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 + r_2^2},$$

während sein Radius mit den beiden Ähnlichkeitspunkten zugleich imaginär oder sein Quadrat negativ (§ 14) geworden ist. Die gemeinsamen Tangenten und auch die Quadrate ihrer Längen t_i, t_e sind imaginär geworden (§ 11); die bezüglichen Durchdringungen werden aus einer rein imaginären Kugel mit einer veränderlichen reellen Kugel nach dem Vorgange von § 19 bestimmt und ihre Projectionen sind *imaginäre Kegelschnitte,* wenn schon die Ebenen von jenen und ihre Spuren in der Axenebene, sowie die Mittelpunkte und Brennpunktspaare von diesen reell bleiben nach den Gleichungen

$$2cx - dz = \frac{1}{2}(d^2 - r_1^2 - r_2^2), \qquad x = -c\frac{r_1^2 + r_2^2}{4c^2 + d^2}.$$

Und da die Brennpunkts-Involution elliptisch ist, so hat sie mit der durch den Mittelpunkt bestimmten symmetrischen Involution stets ein reelles Paar gemein, oder alle Kegelschnitte des Systems haben ihre reellen *Brennpunkte in der Centrale*, wie es sein muss, weil der Ähnlichkeitskreis rein imaginär ist.

24. Die Übersicht unseres Kegelschnittsystems gestaltet sich also wie folgt: Es beginnt für $d = 0$ mit der *Potenzlinie* der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ als dem Ort der Centra von Kreisen, welche $\mathfrak{K}_1$ diametral und $\mathfrak{K}_2$ orthogonal schneiden (§ 3), der Projection der zur Tafel symmetrischen gleichseitigen Hyperbel, deren Brennpunkte mit den zugehörigen Kegelmittelpunkten vereinigt in diejenigen Punkte der Centrale fallen, wo sie von dem aus dem Fusspunkte der Potenzlinie beschriebenen unter jenen Kreisen geschnitten wird. Bis $d = 2c$ folgen *Hyperbeln* von bis Null abnehmenden Asymptotenwinkeln, die anfänglich den reellen Kreis umschliessend imaginär berühren, bis mit einer vierpunktigen Berührung im Scheitel bei A_2 mit $d = a_2 = \sqrt{(2c - r_2)^2 + r_1^2}$ (§ 16) die reelle Doppelberührung beginnt, bei welcher die Berührungspunkte von A_2 aus auf $\mathfrak{K}_2$ bis zu den Berührungspunkten der *Parabel* vorrücken. Ihre Mittelpunkte rücken von der Potenzlinie aus auf der Seite des nicht reellen Kreises bis in's Unendliche für jene Parabel. Mit den für $d > 2c$ entspringenden *Ellipsen* rücken sie aus dem Unendlichen auf der Seite des reellen Kreises wieder herein, während die zugehörigen Berührungspunkte auf $\mathfrak{K}_2$ näher und näher gegen B_2 zusammen rücken, um sich mit der Durchdringung für die Distanz $d = b_2 = \sqrt{(2c + r_2)^2 + r_1^2}$ dort zur vierpunktigen Berührung zu vereinigen. Die Distanzen für die vierpunktigen Berührungen werden construiert als Radien der Kreise aus A_2 resp. B_2, welche den Kreis $\mathfrak{K}_{1s}$ diametral schneiden — in consequenter Anwendung des Satzes (§ 1), wornach der orthogonale Schnitt mit einem rein imaginären Kreis durch den diametralen Schnitt mit seinem Symmetriekreis vertreten wird. Mit dem unendlich grossen Kreis um die Mitte der Centrale d. h. von der Mittelpunktsabscisse Null und den Brennpunkten in C_1 und C_2 (§ 16) endet das System. Reelle Kegelschnitte aus nicht reellen Distanzen erscheinen nicht.

Das zugehörige System der *Wechselschnitte* ist nicht reell; die Enveloppe der *Wechselsehnen* aber nach wie vor die Parabel, welche die Potenzlinie zur Scheiteltangente und die Mitte der Centrale zum Brennpunkt hat. Die Tangenten dieser Parabel schneiden den reellen Kreis in nicht reellen Sehnen, welche mit denen des imaginären Kreises in ihnen gleiche Länge haben oder für welche die bezüglichen beiden Polinvolutionen elliptisch und von einerlei Potenz sind, aber von verschiedenen Mittelpunkten, letzteres mit einziger Ausnahme der Potenzlinie und der unendlich fernen Geraden; aber auch die zu ihnen gehörigen Punkte des Systems der Wechselschnitte sind imaginär.

Lagenunterschiede des reellen und des rein imaginären Kreises von ähnlicher Art wie bei den reellen Kreisen sind nicht hervorzuheben, weil eine Berührung zwischen ihnen unmöglich ist und von einem Ausschliessen und Einschliessen des einen durch den andern auch nicht die Rede sein kann, vielmehr von einem gegenseitigen Einschliessen gesprochen werden sollte, wenn mit solchem Ausdruck irgend eine Verwendung verbunden wäre.

25. So kommen wir zu dem wieder sehr lehrreichen *Falle von zwei rein imaginären Kreisen* oder zwei zweifachen Hyperboloiden, deren eines wir mit dem Hauptkreis $\mathfrak{K}_1$ in der Tafel als fest und das andere durch alle Distanzen d so bewegt denken, dass die Projection seines Hauptkreises $\mathfrak{K}_2$ ebenfalls fest bleibt; wir setzen beide Kreise durch ihre Symmetriekreise (Fig. 11) $\mathfrak{K}_{1s}$ und $\mathfrak{K}_{2s}$ resp. vertreten voraus. Dann ist die Potenzlinie der Hauptkreise die in Bezug auf die Mitte der Centrale zur Potenzlinie der Symmetriekreise symmetrische Gerade. Man bestimmt ferner für irgend eine Distanz d sowohl den Parallelkreis des verschobenen Hyperboloids in der Tafel wie den Parallelkreis des ruhenden in der Hauptebene des verschobenen nach dem für den letzteren in § 23 beschriebenen Verfahren und erhält die Potenzlinien der bezüglichen beiden Kreispaare durch Construction ihres Abstandes von der Mitte der Centrale mit Rücksicht darauf, ob die Radien beide rein imaginär sind oder der eine derselben reell geworden ist. Die *Ebene der Durchdringung* ist ausgedrückt durch

$$2cx + dz = -\frac{1}{2}(d^2 + r_1^2 - r_2^2) \quad \text{resp.} \quad 2cx + dz = -\frac{1}{2}d^2,$$

liefert also die Parabel des § 12. Die Berührungen sind sämmtlich imaginär doppelt als Schnitte reeller Geraden mit rein imaginären Kreisen. Die *Mittelpunkts-Abscisse* der Projection wird

$$-c\frac{r_1^2 - r_2^2}{4c^2 - d^2},$$

wesentlich negativ für $r_1 > r_2$ für alle $d < 2c$ und positiv für die $d > 2c$.

Für $d = 2c$ entsteht die *Parabel* des Systems, aus denselben Gründen wie bei der Durchdringung der einfachen Hyperboloide, nämlich weil der Mittelpunkt des zweiten auf dem Asymptotenkegel des ersten liegt, etc. (§ 12); mit ihr sind wir auf den Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises geführt, der ihr Brennpunkt sein wird, und damit zu der Frage nach dem Ähnlichkeitskreis von zwei rein imaginären Kreisen. Wir finden sofort, dass die Abscissen der Ähnlichkeitspunkte I und E durch Einsetzen von ir_1 und ir_2 für r_1 und resp. r_2 ihre Werthe nicht ändern, ebenso wie sein Radius (§ 14); oder *dass der Ähnlichkeitskreis von zwei rein imaginären Kreisen der ihrer Symmetriekreise ist.*

Aber auch die inneren und äusseren gemeinsamen Tangenten haben reelle leicht zu construierende Längen; man erhält ihren Ausdruck aus dem für reelle Kreise

$$\sqrt{4c^2 - (r_1 \pm r_2)^2} \quad \text{in der Form} \quad \sqrt{4c^2 + (r_1 \pm r_2)^2};$$

und ihre graphische Bestimmung folgt auch direct aus der Bemerkung, dass ihre Längen ja Summe resp. Differenz der Radien derjenigen beiden Kreise sind, die um den inneren resp. den äusseren Ähnlichkeitspunkt der Kreise so beschrieben werden, dass sie diese orthogonal schneiden; dass sie also für rein imaginäre Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ zu den Summen resp. Differenzen der Radien der entsprechenden Kreise werden, welche die Symmetriekreise $\mathfrak{K}_{1s}$, $\mathfrak{K}_{2s}$ diametral durchschneiden. Zieht man also die beiden zur Centrale normalen Durchmesser der Symmetriekreise so sind die Längen der neuen Verbindungslinien ihrer Endpunkte die Längen der gemeinsamen Tangenten, der inneren und äusseren, jenachdem sie durch I resp. E gehen; man sieht dabei zugleich, dass durch den Wechsel der Vorzeichen der Radienquadrate wenigstens *die* Veränderung eingetreten ist, dass die inneren gemeinsamen Tangenten jetzt die grössere Länge haben, und dass die Längen beider die Centraldistanz übertreffen, sodass nun die Folge $2c < t_e < t_i$ stattfindet.

Kegelschnitte, welche einen der rein imaginären Kreise vierpunktig im Scheitel berühren, erhält man nicht; die zugehörigen Distanzen sind complex (§ 16); weil sich aber für rein imaginäre Distanzen d und z die zweifachen Hyperboloide in rein imaginäre Kugeln verwandeln, so erhält man auch jetzt für solche Distanzen nur *imaginäre Kegelschnitte*, immerhin diese letzteren *mit reellen Mittelpunkten und Brennpunktpaaren* ihrer Projectionen.

26. Wir überblicken das Gesammtsystem. Mit $d = 0$ erhält man die *Potenzlinie* als Projection der Durchdringung beider centrischen Hyperboloide d. h. als Ort der Centra von Kreisen, welche sowohl $\mathfrak{K}_{1s}$ als $\mathfrak{K}_{2s}$ diametral schneiden; der zu ihrem Fusspunkte gehörige Kreis dieses Büschels giebt zugleich die entsprechenden Brennpunkte in der Centrale an. Für wachsende d unter dem Werthe $2c$ folgen *Hyperbeln* mit bis Null abnehmenden Asymptotenwinkeln; ihre Mittelpunkte rücken von der Potenzlinie weg auf der der Spurparabel entgegengesetzten Seite bis in's Unendliche für die *Parabel*, die ihren endlichen Brennpunkt im Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises hat. Wir gelangen zu *Ellipsen* für Distanzwerthe $d > 2c$ und $< t_e$ und sehen den Mittelpunkt derselben von der andern Seite der Centrale aus dem Unendlichen heran rücken bis zum äusseren Ähnlichkeitspunkt E der Kreise; dabei verkleinert sich zugleich die Ellipse fortwährend, bis Hauptaxenscheitel und Brennpunkte mit dem Mittelpunkt in E vereinigt sind, entsprechend der *punktförmigen Berührungsdurchdringung der beiden Hyperboloide*, welche zuerst bei der Distanz t_e stattfindet.

Die Projectionen der Durchdringungen und diese selbst werden für weiter wachsende Distanzen zwischen den Werthen t_e und t_i *rein imaginäre Ellipsen*, diese in reellen Ebenen, jene mit reellen Mittelpunkten in der endlichen Strecke zwischen den Ähnlichkeitspunkten und mit reellen Brennpunkten im Ähnlichkeitskreis; es sind die rein imaginären Durchdringungen, auf die wir schon in § 5 hinwiesen als Grundcurven von Büscheln zweifacher Hyperboloide ohne reelle eigentliche Kegel. Für $d = t_i$ fällt alles wieder im *inneren Ähnlichkeitspunkt* zusammen, der Projection der zweiten punktförmigen Berührungsdurchdringung unserer Hyperboloide entsprechend. Die gemeinsame Tangentialebene schneidet in jenem wie in diesem Falle beide Flächen in denselben zwei punktiert und planiert imaginären Geraden, die als die 45° Linien der besagten Ebene betrachtet werden müssen und nicht reell sein können, weil die Tafelneigung der Ebene selbst 45° nicht erreichen kann; die Paare der gemeinsamen Tangenten sind die Projectionen dieser Geraden, ihre Längen im Raume sind ebenfalls reell angebbar, als die $\sqrt{2}$-fachen der Längen ihrer Projectionen — natürlich in beiden Fällen kleiner als die Abstände der parallelen Geraden, in denen ihre Endpunkte als imaginäre Punkte zu suchen sind.

Wächst die Distanz über t_i hinaus weiter, so erhalten wir wieder *reelle Ellipsen*, deren Mittelpunkte vom inneren Ähnlichkeitspunkt bis zum Mittelpunkt der Centrale hin liegen, den letzteren erst für unendlich grosse Distanz erreichend; etc. wie früher.

Wir bemerkten schon, dass das Schneiden resp. Umschliessen des einen Symmetriekreises durch den andern keine wesentlichen Änderungen im Charakter des Systems herbei führt; die unwesentlichen, welche solche Änderungen mit sich bringen, wollen wir nicht erörtern.

Die *Parabel der Wechselsehnen* ist reell wie immer, die Potenzlinie als Scheiteltangente und die Mitte der Centrale als Brennpunkt bestimmen sie; aber die von den Punkten des Ähnlichkeitskreises an die Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ gehenden Tangentenpaare sind nicht reell; die Parabel umschliesst diese Kreise.

27. Es bleibt übrig, die Fundamentalsätze über die Summe und Differenz d der Tangentenlängen und über das constante Verhältniss $\operatorname{tg}\alpha$ für die Durchdringung der zweifachen Hyperboloide zu erörtern; für jenen haben die gemeinsamen Tangenten der rein imaginären Kreise uns schon einen Specialfall gezeigt und die cyklographische Auffassung der zweifachen Hyperboloide giebt sofort das allgemeine Resultat. Das zweifache Hyperboloid mit der Tafel als Hauptebene ist der Ort von Punkten, deren Bildkreise den Symmetriekreis seines Hauptschnittes und Bildkreis seiner Scheitelpunkte diametral schneiden, wobei der Radius des Bildkreises der Abstand des Punktes von der Hauptebene ist (§ 1). Durchdringen sich also zwei solche Hyperboloide, so ist für einen Punkt des Durchdringungskegelschnittes zwischen den Hauptebenen beider die *Summe* der Radien seiner Bildkreise auf diesen constant nämlich *der Distanz der Hauptebenen gleich;* d. h. *die Summe der Radien der um seine Projection beschriebenen Kreise, welche beide Symmetriekreise* $\mathfrak{K}_{1s}$ und $\mathfrak{K}_{2s}$ *diametral schneiden* — statt wie die mit den Tangentenlängen beschriebene orthogonal. Und für jeden Punkt der Durchdringung *ausserhalb* der Schicht ist die *Differenz* der Radien der ebenso bestimmten Kreise jener Distanz gleich.

Auch ist ebenso direct anschaulich, dass *das constante Verhältniss* $\operatorname{tg}\alpha$ für eine solche Durchdringung für jeden Punkt ihrer Projection das

Verhältniss ist *zwischen dem Radius des um ihn beschriebenen den Symmetriekreis* $\mathfrak{K}_{1s}$ oder $\mathfrak{K}_{2s}$ *diametral schneidenden Kreises und dem Abstand des Punktes von der zugehörigen Sehne der Doppelberührung* s_1 resp. s_2, der Spur der Durchdringungsebene in der betreffenden Hauptebene; für die Parabel sind diese letzteren Verhältnisse der Einheit gleich.

Und wenn wie im vorigen Falle das eine der Hyperboloide ein einfaches und das andere ein zweifaches ist, so drückt die Distanz der Hauptschnittebenen für alle Punkte in der Projection der Durchdringung die Summe resp. Differenz der Radien derjenigen um sie beschriebenen Kreise aus, von denen der eine die Hauptkreisprojection des einfachen Hyperboloides orthogonal und der andere die Scheitelkreisprojection des zweifachen Hyperboloides diametral schneidet; wird in diesem Falle der erste Kreis von der Durchdringungsprojection reell doppelt berührt, so theilen die Berührungspunkte den Umfang derselben in einen Theil mit constanter Summe innerhalb der Schicht der Hauptschnitte und einen Theil mit constanter Differenz ausserhalb derselben; mit vierpunktiger Berührung verschwindet der eine dieser Theile. Von der Bemerkung aus, dass für die Parabel des Systems im endlichen Bogen zwischen den Berührungspunkten constante Summe stattfindet, charakterisiert man leicht das ganze System in Bezug auf diese Haupteigenschaft.

Für das System des letzten Falles giebt es keine reellen Berührungen und daher keine Übergänge der bezeichneten Art; für die aus der *Potenzlinie* der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ sich entfaltenden *Hyperbeln* gilt ringsum *constante Differenz;* ebenso für die *Parabel* und die ihr bis zur *ersten* dem äusseren Ähnlichkeitspunkt entsprechenden *Berührung* der Flächen folgenden *Ellipsen;* aber die *Ellipsen,* welche auf die *zweite* dem inneren Ähnlichkeitspunkt entsprechende *Berührung* folgen, liegen durchaus innerhalb der bezüglichen Schichten und zeigen ringsum die *constante Summe.* Die dem *äusseren Ähnlichkeitspunkt* entsprechende Differenz t_e ist die *grösste der möglichen Differenzen* und die dem *inneren* entsprechende Summe t_i die *kleinste der möglichen Summen* — die Ergänzung der in §§ 20 bis 22 entwickelten und von Steiner a. a. O. mitgetheilten Eigenschaften den eingeschlossenen Ähnlichkeitspunkte reeller Kreise: Kleinste Differenz resp. grösste Summe der kleinsten Halbsehnen. Die Anschauung führt auf diese wie jene gleich direct; das vorige ist die Theorie der doppelt berührenden rein imaginären Kreise reeller Kegelschnitte, welche sie liefert.

Es ist ersichtlich, dass die allgemeinen Eigenschaften der Durchdringung der Hyperboloide aus §§ 7 f. erst in den letzten Entwickelungen ihre wahrhaft allgemeine Gültigkeit erhalten haben; wir wollen desshalb bemerken, dass für die Constructionen des § 9 für die doppelt berührenden Kegelschnitte zu zwei Kreisen durch einen Punkt und zu einem Kreise durch drei Punkte damit zugleich die Modificationen erhalten wurden, unter denen sie für umschliessende Kreise resp. für rein imaginäre Kreise gültig bleiben — aber die Discussion ihrer bezüglichen Resultate darf hier unterlassen werden.

Die Durchdringungen mit Bezug auf die reellen eigentlichen Kegel im Büschel.

28. Wir kommen zu den Specialfällen von *Hauptkreisen mit verschwindendem Radius* und gehen in der Art vor, dass der Fall *beider* Hauptkreise als punktförmig zuletzt eingehend untersucht wird, während die vorangehenden Fälle nur kurze Erläuterung erhalten.

Ist $\mathfrak{K}_1$ ein *reeller Kreis* und $\mathfrak{K}_2$ ein *Kreis vom Radius Null* oder die eine Fläche ein einfaches Hyperboloid, die andere, die wir eventuell als mit festem $\mathfrak{K}_2$ beweglich denken wollen, ein gleichseitiger Rotationskegel, so fallen die beiden Ähnlichkeitspunkte von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in C_2, dem Mittelpunkt des letzten und die inneren mit den äusseren gemeinsamen Tangenten zusammen; das System der Hyperbeln zwischen ihnen, welches die Nebenaxe in der Centrale und die Brennpunkte im Ähnlichkeitskreis hat, fällt weg wie dieser selbst, bis auf das vereinigte Anfangs- und Endglied. Mit den gemeinsamen Tangenten fallen auch die beiden $\mathfrak{K}_2$ in einem Scheitel vierpunktig berührender Kegelschnitte zusammen.

Für die Lage von C_2 ausserhalb $\mathfrak{K}_1$ erhält man das ganze System durch Projection hyperboloidischer, für die innerhalb $\mathfrak{K}_1$ zum Theil durch Projection sphärischer Durchdringungen; weil aber die eine der Kugeln die aus dem Kegel entspringende vom Radius Null ist, so reduciert sich die Gruppe der daraus entspringenden reellen Kegelschnitte auf den Punkt C_2. Wir erhalten in beiden Fällen die Potenzlinie von $\mathfrak{K}_1$ und C_2 für $d = 0$ als Projection einer reellen zur Tafel symmetrischen Durchdringungshyperbel; C_2 ist der eine und der zu ihm in Bezug auf die Potenzlinie orthogonalsymmetrische Punkt der andere Brennpunkt ihrer Projection. Dann folgen für wachsende Distanzen *Hyperbeln*, deren einer Ast $\mathfrak{K}_1$ und der andere C_2 umschliesst, mit der Distanz $\sqrt{4c^2 - r_1^2}$ durch die gemeinsamen Tangenten getrennt von den anderen, *Hyperbeln* von denen der nämliche Ast $\mathfrak{K}_1$ und C_2 umschliesst; die aus $d = 2c$ entspringende *Parabel* führt zu den *Ellipsen* über, etc. Unter den Hyperbeln der ersten Art ist eine in B_1 an $\mathfrak{K}_1$ vierpunktig berührende für $d = 2c - r_1$ und unter den Ellipsen die bei A_1 an $\mathfrak{K}_1$ vierpunktig berührende für $d = 2c + r_1$; sie trennen die $\mathfrak{K}_1$ reell von den ihn imaginär doppelt berührenden Hyperbeln resp. Ellipsen. Mit der Angabe, dass für die Parabel des Systems im endlichen Bogen zwischen den Berührungspunkten an $\mathfrak{K}_1$ constante Summe zwischen der Länge der Tangente an $\mathfrak{K}_1$ und der Distanz von C_2 stattfindet, ergeben sich alle andern Bestimmungen dieser Art im System. Für jede Distanz d erhält man den mit ihr aus C_2 beschriebenen Kreis als $\mathfrak{K}_{2d}$ und seine Potenzlinie mit $\mathfrak{K}_1$ als die zugehörige Berührungssehne; ebenso den Kreis aus $\mathfrak{K}_1$ mit dem Radiusquadrat $r_1^2 + d^2$ als $\mathfrak{K}_{1d}$ und seine Potenzlinie mit C_2 als die zugehörige Berührungssehne oder die Directrix für den Brennpunkt C_2 der Durchdringungsprojection. Die *Mittelpunktsabscisse* hat den Werth $\frac{cr_1^2}{4c^2 - d^2}$, C_2 ist die Vereinigung der Doppelpunkte der *Brennpunktsinvolution*, die *parabolisch* ist und stets als den zu ihm symmetrischen in Bezug auf den Mittelpunkt den andern Brennpunkt liefert.

Für C_2 *im Innern des reellen Kreises* $\mathfrak{K}_1$ ergeben sich Unterschiede wie in § 22, jenachdem C_2 dem Mittelpunkt C_1 oder der Peripherie des Kreises $\mathfrak{K}_1$ näher liegt.

Die Parabel der Spuren in der Axenebene hat C_2 zum Brennpunkt und wie die Parabel der Wechselsehnen die Potenzlinie zur Scheiteltangente, während für diese die Mitte der Centrale der Brennpunkt ist; diese letztere berührt auch $\mathfrak{K}_1$ in den Berührungspunkten der Tangenten aus C_2, welche die einzigen reell begrenzten Wechselsehnen sind. Der *Grenzfall*, wo C_2 in der Peripherie von $\mathfrak{K}_1$ liegt und die Potenzlinie die zugehörige Tangente ist, liefert die über dem Drittheil des Umfangs reell doppelt berührende Parabel und eine der Potenzlinie gegenüber in A_1 vierpunktig berührende Ellipse für $d = 2r_1$, während die vierpunktig berührende Hyperbel sich ebenfalls mit der Potenzlinie und den gemeinsamen Tangenten verschmolzen hat.

29. Wäre $\mathfrak{K}_1$ *rein imaginär* und durch $\mathfrak{K}_{1s}$ vertreten, so entsteht das System aus Durchdringungen des festen zweifachen Hyperboloides mit $\mathfrak{K}_{1s}$ als Bildkreis der Scheitel mit dem längs seiner Axe verschiebbar gedachten Kegel $\mathfrak{K}_2$. Die Potenzlinie ist nicht mehr wie vorher der Ort der Centra der Kreise durch C_2, welche $\mathfrak{K}_1$ orthogonal sondern welche $\mathfrak{K}_{1s}$ diametral schneiden, aber der zu ihr symmetrische Punkt von C_2 ist noch immer der andere Brennpunkt der zugehörigen Hyperbelprojection. Es folgen die Hyperbeln der ersten und dritten Gruppe — ohne eine vierpunktig berührende — sodann die *Parabel* für $d = 2c$, und nach ihr in zwei Gruppen getrennt durch die punktförmige Durchdringungsprojection für die Lage der Kegelspitze im Mantel des Hyperboloides bei $d = \sqrt{4c^2 + r_1^2}$ Ellipsen; die erste Gruppe als Projectionen von Durchdringungen ganz *ausserhalb* der Schicht mit ringsum constanter *Differenz*, die zweite Gruppe als solche von *innerhalb* mit constanter *Summe*. Der Punkt C_2 ist zugleich die einzige vierpunktig berührende Ellipse des Systems, mit der grössten Differenz und hier zugleich der kleinsten Summe der Distanz von C_2 und des Radius eines um ihn beschriebenen $\mathfrak{K}_{1s}$ diametral schneidenden Kreises.

Zu dem Falle *von zwei Kreisen mit dem Radius Null* oder von zwei Kegeln als den sich durchdringenden Flächen können wir durch gleichmässige Veränderung der absoluten Werthe der Radien sowohl von *zwei gleichen reellen als zwei gleichen imaginären* Kreisen aus gelangen d. h. dieselben Kegel können als Asymptotenkegel von einfachen wie von zweifachen Hyperboloiden von gleichem Radius erhalten werden; wir betrachten daher kurz die Besonderheiten des Falles *gleicher Kreise*. Im Falle ihrer Realität (Fig. 12) haben wir die Durchdringungen von zwei gleichen einfachen, im andern Falle die von zwei gleichen zweifachen Hyperboloiden, deren eines centrisch und ruhend und das andere beweglich bei fester Hauptkreisprojection gedacht wird. In beiden Fällen geht die Potenzlinie p durch die Mitte der Centrale M, mit der auch der innere Ähnlichkeitspunkt I zusammenfällt, während der äussere unendlich fern liegt, sodass die Potenzlinie zugleich den im Endlichen liegenden Theil des Ähnlichkeitskreises bildet. In beiden Fällen sind für irgend eine Distanz d die Potenzlinien von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_{2d}$ und $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_{1d}$ durch $4cx = \mp d^2$ gegeben oder zur Mitte der Centrale symmetrisch, der Anschauung entsprechend: *Beide Kreise werden* *gleichzeitig reell und resp. imaginär doppelt berührt und die Berührungspunkte bilden ein Rechteck mit M als Mittelpunkt und den Seiten parallel und normal zur Centrale, sodass M der gemeinsame Mittelpunkt aller Kegelschnitte des Systems ist,* wie der Nullwerth der Mittelpunktsabscisse bestätigt. Im Falle reeller Kreise berühren auch die nämlichen beiden Kegelschnitte des Systems beide zugleich in A_2 und B_1 resp. A_1 und B_2 vierpunktig; eine Hyperbel und eine Ellipse, wenn die Kreise ausser einander liegen, eine umschlossene und eine umschliessende Ellipse, jene aus einer Kugel und diese aus einer Hyperboloid-Durchdringung, wenn sie einander schneiden wie in Fig. 12. Im Falle *imaginärer gleicher Kreise* existieren solche nicht, weil überhaupt keine reellen Berührungen möglich sind. In beiden Fällen sind *die äusseren gemeinsamen Tangenten* von derselben Länge $2c$ und vertreten die *Parabel des Systems,* die in zwei parallele Gerade zerfallen muss, weil ihr Brennpunkt als Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises im Unendlichen liegt, — die inneren gemeinsamen Tangenten haben im ersten resp. zweiten Falle die Längen $2\sqrt{c^2 - r_1^2}$ und $2\sqrt{c^2 + r_1^2}$ und markieren die Verschiedenheit der Distanzen, in denen die Berührung bei einfachen und bei zweifachen Hyperboloiden stattfindet; im ersten Falle sind die innern wie die äussern Tangenten reelle Durchdringungsprojectionen und selbst reell, im zweiten sind sie imaginär, wie die Berührungsdurchdringungen der zweifachen Hyperboloide sein müssen. Die Parabel der Spuren wird wie sonst durch die Ebene der Durchdringungsparabel bestimmt, und hat daher C_2 zum Brennpunkt, während die Directrix durch C_1 geht; die Parabel der Wechselsehnen ist in den Mittelpunkt und den unendlich fernen Punkt der Centrale degeneriert, weil die *Wechselsehnen offenbar theils Durchmesser des Kegelschnittes, theils Parallelen zur Centrale* sind.

Die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2^i$, den $\mathfrak{K}_{2s}$ vertritt, haben keine reellen Ähnlichkeitspunkte und die Quadrate der Längen der gemeinsamen Tangenten sind complex, aber der Mittelpunkt des Ähnlichkeitskreises hat bei gleichen absoluten Werthen ihrer Radien die Abscisse 0 und sein Radius ist ic oder sein Symmetriekreis ist der durch C_1 und C_2 gehende Kreis aus M. Die Mittelpunkts-Abscisse ist negativ für alle Hyperbeln und positiv für alle Ellipsen des Systems. Die an $\mathfrak{K}_2$ in A_2 und B_2 resp. vierpunktig berührenden Kegelschnitte entsprechen den reellen Distanzen $\sqrt{(2c - r_1)^2 + r_1^2}$ und $\sqrt{(2c + r_1)^2 + r_1^2}$ und die Potenzlinie ist $2cx = -r_1^2$, geht also nicht durch die Mitte der Centrale, sodass die von den Wechselsehnen umhüllte Parabel nicht degeneriert. Das System ist dem allgemeinen des Falles wesentlich analog.

30. Mit dem Verschwinden von r_1 gehen alle drei vorher betrachteten Fälle in den *Fall mit zwei Nullkreisen* oder festen Brennpunkten C_1, C_2 und festem Mittelpunkt M (Fig. 13, 14) über. Für jede Distanz d liefern die mit ihr um C_1, C_2 beschriebenen Kreise $\mathfrak{K}_{1d}$, $\mathfrak{K}_{2d}$ als ihre Potenzlinien mit $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_1$ resp. die zu C_2, C_1 gehörigen Directrixen; für $d < 2c$ liegen ihre Fusspunkte in der endlichen Strecke C_1C_2 und die entstehenden Kegelschnitte sind *Hyperbeln,* die sich aus der durch M gehenden Potenzlinie ($d = 0$) entfalten, die Hyperbeln der ersten Gruppe des allgemeinen Falles reeller aussereinander liegender Kreise; die Hyperbeln der zweiten und dritten Gruppe sind mit ihrer Grenze, der *Parabel,* vereinigt, weil $t_i = t_e = 2c$ ist, und diese Parabel wird von der doppeltzählenden Linie C_1C_2 gebildet, der Projection der *Berührungsdurchdringung der beiden Kegel*, für die die Directrixen durch die zugehörigen Brennpunkte gehen. Auf C_1C_2 ist zwischen diesen Punkten die *Summe* und ausserhalb die *Differenz* der Radien Vectoren constant, auf den sämmtlichen *Hyperbeln* die *Differenz.* Für alle $d > 2c$ liegen die Directrixen ausserhalb C_1C_2 und die *elliptischen* Durchdringungen ganz innerhalb der Schicht, sodass in allen *Ellipsen* des Systems ringsum die *Summe* der Radien Vectoren constant ist; die Entfernung der Scheitel A, B giebt diese Summe wie vorhin die Differenz, weil in dem Rechteck aus 45° Linien (vergl. § 10) $M_1(A)M_2(B)$ der Horizontalabstand der Gegenecken (A), (B) d. i. AB dem Verticalabstand der Gegenecken M_1, M_2 oder d gleich ist. Das System schliesst mit dem unendlich grossen Kreise um M; die vierpunktig berührenden desselben sind mit den degenerierten und der Parabel in der doppelt zählenden Centrale vereint. Die *Wechselsehnen* sind entweder Durchmesser aller Kegelschnitte des System oder der Centrale parallel aus denselben Gründen wie vorher. Für jeden Kegelschnitt des Systems ist auch das Verhältniss der Entfernungen seiner Punkte von einem Brennpunkte zu den Entfernungen derselben Punkte von der zugehörigen Directrix constant, der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels α der Durchdringungsebene zur Tafel gleich, daher auch für beide Paare von Brennpunkt und Directrix dasselbe und für alle Hyperbeln grösser, für alle Ellipsen kleiner als Eins; diese Constante soll hinfort die

numerische Excentricität ε des Kegelschnittes genannt werden. Im Zusammenhange der Kegel mit den Hyperboloiden des Flächenbüschels, und unter Rückkehr zur Untersuchung *eines* Kegelschnittes als der Projection des endlichen Theiles der Grundcurve desselben, werden wir die Constante ε in vielseitige Beziehungen treten sehen. Wir denken dazu *eines der Hyperboloide des Büschels und die beiden Kegel desselben,* nehmen die Hauptschnittebene von jenem als Tafel und setzen die Kegel als durch ihre Spurkreise $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ in dieser Tafel gegeben voraus; ihre Mittelpunkte mögen wie bisher C_1, C_2 heissen, aber nach ihrer jetzigen veränderten Bedeutung sollen ihre Radien durch v_1, v_2 unterschieden werden — sie sind die Längen der Radien Vectoren der Kegelschnittpunkte P, P^*, welche beide Kreise in ihren Schnittpunkten hervorbringen. Ist die Durchdringung *hyperbolisch,* so liegen dann beide Kegelmittelpunkte M_1, M_2 auf derselben Seite der Tafel und der Durchstosspunkt der Verbindungslinie derselben, der Mittelpunktslinie des Büschels (§ 4), also der Mittelpunkt desjenigen Hyperboloides in demselben, welches die Tafel zur Hauptebene hat, ist der *äussere* Ähnlichkeitspunkt E der beiden Kreise; ist dagegen die Durchdringung *elliptisch,* so liegen die Kegelmittelpunkte auf verschiedenen Seiten der Tafel und der Durchstosspunkt ihrer Verbindungslinie ist der *innere* Ähnlichkeitspunkt I der Kreise; in jenem Falle ist der aus E und in diesem Falle der aus I beschriebene Kreis des Büschels $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ der Hauptkreis des Hyperboloides, zugleich immer der in den Punkten von den Vectoren v_1, v_2 doppelt berührende Kreis der vorigen Entwickelungen — der *Potenzkreis* der gegebenen Kreise aus den ersten Arbeiten J. Steiner's. Er ist reell, wenn das Hyperboloid ein einfaches ist und imaginär, wenn ein zweifaches, also nach den in § 5 entwickelten Regeln; wenn die Kreise $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ sich schneiden, so sind beide Potenzkreise reell d. h. Kehlkreise einfacher Hyperboloide und in P, P^* reell doppelt berührend; liegen die Kreise ausser einander, so ist der Potenzkreis um E reell und ein Kehlkreis, aber nicht reell doppelt berührend, während der Potenzkreis um I der Scheitelkreis eines zweifachen Hyperboloides oder Vertreter eines rein imaginären Kreises ist; und wenn der eine Kreis den andern umschliesst, ist der äussere Potenzkreis ein Scheitelkreis und der innere ein Kehlkreis. Im ersten Fall, dem Falle reeller und reell doppelt berührender Potenzkreise, ist der Raduis r_e des äusseren die Normale der Hyperbel nach Lage und Grösse im üblichen Sinn und der des andern r_i die Lage und Grösse der Tangente derselben, beides für die Punkte P, P^*; zugleich ist r_i die Normale der Ellipse und r_e die Tangente derselben in denselben beiden Punkten. Der orthogonale Schnitt der confocalen Kegelschnitte in einem Punktepaar und die Eigenschaft der Potenzkreise, die Winkel zwischen den Grundkreisen zu halbieren und desshalb einander rechtwinklig zu schneiden, sind äquivalent. (1) Im zweiten und dritten Falle sind E und I nur noch die reellen Schnittpunkte zusammengehöriger aber nicht reeller Paare von Tangenten und Normalen, ein Paar der Brennpunkts-Involution.

31. Der erste Fall umfasst alle reellen Punkte des Kegelschnittes und mag nach einander für den Fall der *Ellipse* und für den der Hyperbel, endlich in Verbindung für beide näher untersucht werden. Man hat (Fig. 13) $C_1C_2 = 2c$, $AB = 2a = v_1 + v_2$ die Hauptaxenlänge, und setze $C_1I = i_1$, $C_2I = i_2$, $IP = IP^* = r_i$; dann ist der Neigungswinkel der Ebene der Durchdringungs-Ellipse zur Tafel gleich dem Winkel zwischen der Mittelpunktsgeraden M_1M_2 und den Axen der Kegel, beide haben das Verhältniss $c:a$ zur trig. Tangente, die *numerische Excentricität der Ellipse.* In der Figur der Umlegung der Kegelmantellinien aus der Axenebene, die diess zeigt, wenn man z. B. mittelst der Parallelen M_2C zur Centrale aus M_2 (C ist der Schnittpunkt mit der Axe M_1C_1) durch Schnitt mit $(A)(B)$ die dem Brennpunkt C_2 entsprechende Directrix bestimmt, geben die ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke M_1M_2C, M_1IC_1, M_2IC_2 als Verhältnisse der Katheten

$$(v_1 + v_2):2c = a:c = 1:\varepsilon = v_1:i_1 = v_2:i_2;$$

woraus

$$i_1v_2 = i_2v_1, \qquad i_1 = \frac{c}{a}v_1 = \varepsilon v_1, \qquad i_2 = \frac{c}{a}v_2 = \varepsilon v_2$$

und somit

$$i_1 + i_2 = \frac{c}{a}\,.\,2a = 2c = \varepsilon(v_1 + v_2),$$

aber auch

$$i_1i_2 = \frac{c^2}{a^2}v_1v_2 = \varepsilon^2v_1v_2$$

(1) Für die systematische Ableitung dieser letzteren Eigenschaft sehe man § 64 meiner *Cyklographie.*

folgt. Ferner ist die Potenz des inneren Ähnlichkeitspunktes I oder das Radiusquadrat des inneren Potenzkreises

$$p_i = r_i^2 = IA_1 . IA_2 = (v_1 + i_1)(v_2 - i_2) = v_1 v_2 - i_1 i_2$$

wegen $i_1 v_2 = i_2 v_1$ und somit

$$r_i^2 = v_1 v_2 (1 - \varepsilon^2) = v_1 v_2 \frac{a^2 - c^2}{a^2} = i_1 i_2 \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} = i_1 i_2 \frac{a^2 - c^2}{c^2}$$

d. h. durch Einführung der kleinen Halbaxe mit $b^2 = a^2 - c^2$

$$r_i^2 = v_1 v_2 \frac{b^2}{a^2} = i_1 i_2 \frac{b^2}{c^2}.$$

Dies sind die Relationen und man formuliert sie leicht zu den Sätzen, welche J. Steiner in der Abhandlung von 1847 *Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften* (Crelle's Journal, Bd. 37, p. 161—192) gegeben hat; wir werden dieselbe weiterhin durch St. 1847 mit der pag. der Werke Bd. II citieren, hier als p. 393 f.

Man erhält den Cos. des Winkels γ zwischen der Normale und den Radien Vectoren ihres Fusspunktes als Hälfte des Winkels P im Dreieck C_1PC_2 nach der Regel $\cos\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$ ausgedrückt durch

$$\cos\frac{1}{2}(v_1, v_2) = \cos\gamma = \sqrt{\frac{(v_1 + v_2 + 2c)(v_1 + v_2 - 2c)}{4v_1 v_2}} = \sqrt{\frac{(a+c)(a-c)}{v_1 v_2}} = \frac{b}{\sqrt{v_1 v_2}},$$

oder durch Einsetzen von $v_1 v_2 = \frac{a^2}{b^2} r_i^2$ auch

$$\cos\gamma = \frac{b^2}{a r_i} \quad \text{oder} \quad r_i \cos\gamma = \frac{b^2}{a} = p$$

für p als den Halbparameter: Die Projection der Normale auf den Radius Vector ist dem Halbparameter, der Länge der Brennpunktsordinate, gleich, deren Product mit der grossen Halbaxe mit dem Quadrat der kleinen übereinstimmt. (St. 1847; p. 394, (14).) Ist γ' der entsprechende halbe Winkel der Radien Vectoren am Endpunkte P' des zum Durchmesser $MP = b_1$ von P conjugierten Durchmessers a_1, so hat man wegen $a_1 = \sqrt{v_1 v_2}$

$$a_1 \cos\gamma = b; \quad \text{ebenso} \quad b_1 \cos\gamma' = b$$

und somit in Folge von

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad \mathrm{tg}^2\gamma = \frac{a_1^2 - b^2}{b^2}, \qquad \mathrm{tg}^2\gamma' = \frac{b_1^2 - b^2}{b^2}$$

$$\mathrm{tg}^2\gamma + \mathrm{tg}^2\gamma' = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Für die Axenscheitel ist $\mathrm{tg}^2\gamma' = 0$, $\mathrm{tg}^2\gamma = \frac{c^2}{b^2}$ (a. a. O. p. 396). Und in dem besonderen Falle

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad b = c, \quad a = c\sqrt{2}$$

erhält man

$$i_1 i_2 = \frac{1}{2} v_1 v_2 = r_i^2, \qquad r_i \cos\gamma = p = c\sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad \mathrm{tg}^2\gamma + \mathrm{tg}^2\gamma' = 1, \text{ etc.}$$

32. Eine ganz analoge Entwickelung ergiebt sich für die *Hyperbel*. Die Hauptaxe (Fig. 14) $AB = 2a$ ist $= v_1 - v_2$; wir setzen $C_1E = e_1$, $C_2E = e_2$, $EP = EP^* = r_e$ und haben $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{c}{a} > 1$. Aus den wie vorher und für den gleichen Zweck gebildeten rechtwinkligen Dreiecken M_1M_2C, M_1EC_1 und M_2EC_2 folgen dann als Verhältnisse der Katheten

$$(v_1 - v_2) : 2c = a : c = 1 : \varepsilon = v_1 : e_1 = v_2 : e_2;$$

also

$$e_1 v_2 = e_2 v_1, \qquad e_1 = \frac{c}{a} v_1 = \varepsilon v_1, \qquad e_2 = \frac{c}{a} v_2 = \varepsilon v_2$$

und somit

$$e_1 - e_2 = \frac{c}{a}(v_1 - v_2) = 2c = \varepsilon(v_1 - v_2),$$

aber auch

$$e_1 e_2 = \frac{c^2}{a^2} v_1 v_2 = \varepsilon^2 v_1 v_2.$$

Sodann ist die Potenz des äusseren Ähnlichkeitspunktes E unserer Kreise oder das Radiusquadrat des äusseren Potenzkreises

$$p_e = r_e^2 = EB_1 . EA_2 = (e_1 - v_1)(e_2 + v_2) = e_1 e_2 - v_1 v_2$$

weil $e_1 v_2 = e_2 v_1$ ist und somit

$$r_e^2 = v_1 v_2 (\varepsilon^2 - 1) = v_1 v_2 \frac{c^2 - a^2}{a^2} = e_1 e_2 \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} = e_1 e_2 \frac{c^2 - a^2}{c^2}$$

oder mit $b^2 = c^2 - a^2$

$$r_e^2 = v_1 v_2 \frac{b^2}{a^2} = e_1 e_2 \frac{b^2}{c^2}.$$

Diese und die entsprechende Formel in § 31 bilden die von St. 1852, p. 453 gegebene zweite Regel zur Bestimmung der Axenlängen; die Formel zur Bestimmung der Distanz a. a. O. p. 454 ist der Ausdruck von $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{a}$ mittelst der Distanz d und der Centraldistanz der doppelt berührenden Kreise.

Man erhält den Cos. des Winkels der Normale mit den Radien Vectoren ihrer Fusspunkte als des halben Nebenwinkels zu dem Winkel bei P im Dreieck $C_1 P C_2$ nach der Regel $\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ mit

$$\cos \frac{1}{2}(v_1, v_2) = \cos\gamma = \sqrt{\frac{(v_2 - v_1 + 2c)(v_1 - v_2 + 2c)}{4 v_1 v_2}} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{v_1 v_2}} = \frac{b}{\sqrt{v_1 v_2}},$$

also durch Einsetzen von $v_1 v_2 = \frac{a^2}{b^2} r_e^2$

$$\cos\gamma = \frac{b^2}{a r_e} \quad \text{oder auch} \quad r_e \cos\gamma = \frac{b^2}{a} = p$$

dem Halbparameter. Der Satz vom Halbparameter als Projection der Normale auf den Radius Vector ist durch seine Fassung als von der Grösse und Realität der Axen unabhängig und für alle Kegelschnitte gültig charakterisiert.

In dem besonderen Falle

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}, \qquad \varepsilon^2 = 2 \quad \text{wird} \quad b^2 = a^2 \quad \text{und} \quad c = a\sqrt{2},$$

also — es ist die gleichseitige Hyperbel —

$$e_1 e_2 = 2 v_1 v_2 = 2 r_e^2; \qquad r_e \cos\gamma = c\sqrt{\frac{1}{2}}$$

(St. 1847; p. 397 f.).

Die Normale ist das geometrische Mittel zwischen den Radien Vectoren und da auch der Halbmesser MP bei der gleichseitigen Hyperbel diesem geometrischen Mittel gleich ist, so sind *für die gleichseitige Hyperbel Normale und Radius einander gleich* — eine wesentliche Analogie derselben zum Kreis.

33. Setzt man die Verhältnisszahlen vom Quadrat der Normale zum Product der Abschnitte, in welche sie die Brennpunkt-Distanz zerlegt — bei der Ellipse innerlich, bei der Hyperbel äusserlich — derselben Zahl q gleich, so hat man aus der Entwickelung für die Ellipse und aus der für die Hyperbel resp.

$$\varepsilon^2 - 1 = q\varepsilon^2, \qquad \varepsilon^2 = \frac{1}{1-q}; \qquad 1 - \varepsilon^2 = q\varepsilon^2, \qquad \varepsilon^2 = \frac{1}{1+q}$$

und erhält für das Verhältniss der Hauptaxen dieser Ellipse und Hyperbel, weil dieselben durch $\frac{2c}{\varepsilon}$ in beiden Fällen ausgedrückt werden

$$\sqrt{1+q} : \sqrt{1-q};$$

zugleich ist in beiden Curven das Quadrat der Nebenaxe, abgesehen vom Zeichen, nach demselben Verhältniss zu q proportional. Ist dann S einer der Schnittpunkte dieser Kegelschnitte, so hat man für die Quadrate seiner Normalen in beiden

$$r_i^2 : i_1 i_2 = r_e^2 : e_1 e_2 = q;$$

das Dreieck C_1SC_2 muss an der Ecke S rechtwinklig sein und der über C_1C_2 als Durchmesser beschriebene Kreis ist der Ort der Durchschnittspunkte der Paare von Kegelschnitten, welche mit denselben Brennpunkten gebildet werden für alle möglichen Werthe des Verhältnisses zwischen dem Quadrat der Normale und dem Product der von ihrem Fusspunkt in der Geraden zwischen jenen gebildeten Abschnitte. (St. 1847; p. 398.) Man ist damit auch zu der *Fragestellung* geführt, von welcher Steiner in dieser Abhandlung ausgeht: »Aus der Spitze C eines Dreieckes ABC nach einem Punkte D der Grundlinie eine Gerade CD zu ziehen, deren Quadrat zu den Abschnitten der Grundlinie $AD.BD$ ein gegebenes Verhältniss hat, wie $m:n$. Wenn die Grundlinie AB der Grösse und Lage nach gegeben ist, so soll die Grenzlage für die Spitze C gefunden werden, über welche hinaus die vorige Forderung unmöglich wird.» Diese Grenze wird von den beiden Kegelschnitten der vorigen Betrachtung als den Enveloppen ihrer reell doppelt berührenden Kreise gebildet. (Vergl. besonders die II. Auflös. a. a. O. p. 399 f.)

34. Für die confocalen Kegelschnitte, welche sich in P, P^* durchschneiden, ist die zugehörige Normale des einen zugleich die Tangente des andern; beide Gerade schneiden die Nebenaxe der Kegelschnitte, wir wollen setzen (Fig. 15) in Punkten I^* und E^*, und geben dadurch in PI^*, PE^* die Radienlängen r_i^* und r_e^* doppelt berührender Kreise anderer Gruppen für dieselben Kegelschnitte. Sie bringen dadurch mit den Axen ähnliche Dreiecke hervor, die zu einer Fülle weiterer Relationen führen. Es ist

$$\Delta MII^* \sim \Delta ME^*E \sim \Delta PIE \sim \Delta PE^*I^*$$

und somit die Proportionen-Kette

$$MI : II^* : I^*M = ME^* : E^*E : EM = PI : IE : EP = PE^* : E^*I^* : I^*P,$$

aus deren durch das vorige bekannten Gliedern sich alle übrigen ausdrücken lassen. Wir wollen zur Abkürzung $v_1 + v_2 = 2a$, $v_1 - v_2 = 2a'$ setzen und die Nebenaxen b, b' wie früher einführen und haben dann

$$MI = c - i_2 = c\frac{a'}{a}, \quad EM = c + e_2 = c\frac{a}{a'}, \quad PI = r_i = \frac{1}{a}\sqrt{v_1 v_2 (a^2 - c^2)} = \frac{b}{a}\sqrt{v_1 v_2},$$

$$IE = e_2 + i_2 = \frac{c v_1 v_2}{a a'}, \quad EP = r_e = \frac{1}{a'}\sqrt{v_1 v_2 (c^2 - a'^2)} = \frac{b'}{a'}\sqrt{v_1 v_2}.$$

Daraus finden wir

$$II^* = \frac{c^2}{ab}\sqrt{v_1 v_2}, \qquad I^*M = c\frac{b'}{b}, \qquad ME^* = c\frac{b}{b'}, \qquad E^*E = \frac{c^2}{a'b'}\sqrt{v_1 v_2},$$

$$PE^* = \frac{a'}{b'}\sqrt{v_1 v_2}, \qquad E^*I^* = \frac{c v_1 v_2}{b b'}, \qquad I^*P = \frac{a}{b}\sqrt{v_1 v_2}.$$

Diese Relationen laden zu Verbindungen ein und liefern z. B.

$$PI . II^* = \frac{c^2}{a^2} v_1 v_2 = i_1 i_2 = C_1 I . IC_2$$

und

$$EP.EE^* = \frac{c^2}{a'^2} v_1 v_2 = e_1 e_2 = C_1 E.EC_2$$

— woraus auch $PE.EE^*:PI.II^* = a^2:a'^2$ folgt — und man sieht damit, dass die Punkte P, I^*, C_1, C_2 und wieder P, E^*, C_1, C_2 auf einem und natürlich demselben Kreise liegen. Daraus folgert man wieder die Ähnlichkeiten

$$\Delta PIC_1 \sim \Delta PC_2 I^* \sim \Delta C_2 II^*, \qquad \Delta PI^*C_1 \sim \Delta PC_2 I \sim \Delta C_1 I^* I,$$

und ebenso

$$\Delta PEC_1 \sim \Delta PC_2 E^* \sim \Delta C_2 EE^*, \qquad \Delta PE^*C_1 \sim \Delta PC_2 E \sim \Delta C_1 E^* E,$$

aus denen entsprechende Proportionenreihen hervorgehen, welche nun liefern z. B.

$$C_2 I^* = C_1 I^* = \frac{c}{b}\sqrt{v_1 v_2}, \qquad C_2 E^* = C_1 E^* = \frac{c}{b'}\sqrt{v_1 v_2}$$

und daraus

$$I^*P : \widehat{I^*C_1} = a:c, \qquad E^*P : \widehat{E^*C_1} = a':c,$$

die erste Formel zur Bestimmung der Axenlängen in St. 1852; p. 453.

Ferner

$$II^*:C_1 I^* = c:a = C_1 I^*:PI^*, \quad EE^*:C_1 E^* = c:a' = C_1 E^*:PE^*;$$

$$PI:PI^*:II^* = b^2:a^2:c^2, \qquad PE:PE^*:EE^* = b'^2:a'^2:c^2;$$

$$PE^*.EE^*:PI^*.II^* = b^2:b'^2, \text{ etc.}$$

Ebenso $PE^*.PE = v_1 v_2 = PI^*.PI$, (St. 1847; p. 395 bis p. 397.)

$$PI^*.II^* = \frac{c^2 v_1 v_2}{b^2}, \qquad PE^*.EE^* = \frac{c^2 v_1 v_2}{b'^2}; \text{ etc.}$$

Für die gleichseitige Hyperbel mit $c = a'\sqrt{2}$ und die entsprechende Ellipse mit $a = c\sqrt{2}$ erhält man auch

$$v_1 v_2 = \frac{1}{2}\overline{C_1 E^*}^2 = \overline{E^*P}^2 = \frac{1}{4}\overline{EE^*}^2 = \frac{1}{2} PE^*.EE^*, \qquad PE:EE^*:E^*P = 1:2:1;$$

resp.

$$v_1 v_2 = \overline{C_1 I^*}^2 = \frac{1}{2}\overline{I^* P}^2 = 2\overline{II^*}^2 = PI^*.II^*, \qquad PI:II^*:I^*P = 1:1:2.$$

Endlich, um nur noch ein Beispiel zu geben, wird

$$PI:PI^* = b^2:a^2 \quad \text{und} \quad PE:PE^* = b'^2:a'^2,$$

d. h. die Abschnitte der Normalen eines Kegelschnittes vom Fusspunkt bis zur Haupt- und Nebenaxe stehen zu einander im Verhältniss der Quadrate der Neben- und Hauptaxe; oder *irgend zwei Normalen* z. B. PII^* und $P_1 I_1 I_1^*$ *eines Kegelschnittes werden durch dessen Axen ähnlich getheilt und sind daher mit diesen und der Sehne zwischen ihren Fusspunkten Tangenten derselben Parabel.* Die Berührungspunkte der Normalen mit den aus ihnen, den zugehörigen Tangenten und den Axen bestimmten Parabeln sind die zugehörigen *Krümmungs-Centra* des Kegelschnittes als Schnittpunkte jener Normalen mit den ihnen unendlich nahe benachbarten; etc.

35. Für *die vierpunktig berührenden Kreise in den Scheiteln der Hauptaxe* ist

$$PI^* = a \quad \text{resp.} \quad PE^* = a'$$

und

$$v_1 v_2 = (a + c)(a - c) \quad \text{resp.} \quad v_1 v_2 = (c + a')(c - a');$$

daher

$$MI = c\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} = \frac{c^2}{a}, \quad \text{resp.} \quad ME = c\frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2} = \frac{c^2}{a'}.$$

Die zugehörigen *Radien* sind

$$a - \frac{c^2}{a} = \frac{b^2}{a} \quad \text{und resp.} \quad \frac{c^2}{a'} - a' = \frac{b'^2}{a'}$$

(vergl. St. 1847; p. 400); für die besondere Ellipse $a = c\sqrt{2}$ und die gleichseitige Hyperbel $c = a'\sqrt{2}$ haben beide denselben Werth $\frac{c}{\sqrt{2}}$. Stereometrisch sind sie immer die normal zu den Kegelaxen gemessenen Abstände der Scheitel (A) und (B) der Durchdringung von der Linie der Centra $M_1 M_2$ im Flächenbüschel.

Die zugehörigen *Krümmungsmittelpunkte* liegen in den Abständen

$$c - \frac{c^2}{a} \quad \text{und resp.} \quad \frac{c^2}{a'} - c$$

von den Brennpunkten, bei der Ellipse in dem endlichen Segment zwischen ihnen, bei der Hyperbel ausserhalb desselben; sie begrenzen die Region der Mittelpunkte reeller und reell doppelt berührender Kreise, dieselbe bei der Ellipse einschliessend und bei der Hyperbel ausschliessend. In den zwischen ihnen und den benachbarten Brennpunkten liegenden Strecken liegen die Mittelpunkte der imaginär doppelt berührenden reellen Kreise, die mit den Brennpunkten selbst als solchen vom Radius Null schliessen.

Zugleich sind PI^* und PE^* resp. die Radien doppelt berührender Kreise der Ellipse und der Hyperbel *aus Punkten ihrer Nebenaxen* mit MI^* resp. ME^* als den Abständen ihrer Centra vom Mittelpunkte. Sind v_1 und v_2 für die Ellipse gleich a oder ist P der Scheitel der Nebenaxe, so erhält man für den zugehörigen Radius des vierpunktig berührenden Kreises und den Mittelpunktsabstand seines Mittelpunktes

$$PI^* = \frac{a^2}{b} \quad \text{und} \quad MI^* = \frac{c^2}{b};$$

bei der Hyperbel ist im gleichen Falle

$$PE^* = \frac{a'^2}{b'} \quad \text{und} \quad ME^* = \frac{ic^2}{b'}.$$

(Vergl. St. 1847; p. 400.) Damit sind die beiden Systeme doppelt berührender Kreise, welche wir früher fanden, in ihren metrischen Beziehungen hervorgetreten.

Wir bemerken schliesslich die durch die entwickelten Ausdrücke angezeigten Relationen für die Ellipse und respective Hyperbel

$$\frac{\overline{MI}^2}{a^2 - b^2} + \frac{\overline{PI}^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{\overline{PI}^2}{a^2} - \frac{\overline{MI}^2}{a^2 - b^2} = 1;$$

$$\frac{\overline{ME}^2}{a'^2 + b'^2} - \frac{\overline{PE}^2}{b'^2} = 1, \qquad \frac{\overline{PE}^2}{a'^2} - \frac{\overline{ME}^2}{a'^2 + b'^2} = 1.$$

Auch sie finden in einer darstellendgeometrischen Betrachtung mittelst der Cyklographie, welche alle den Kegelschnitt berührenden Kreise zusammen fasst, ihre anschauliche Erklärung; und ebenso die Relationen, welche aus ihnen hervorgehen, wenn man die Zeichen der $\overline{PI}^2$, $\overline{PE}^2$, $\overline{PI^*}^2$, $\overline{PE^*}^2$ in die entgegengesetzten verwandelt; ich verweise jedoch für dieselbe auf den im Druck befindlichen Bd. II der 3. Aufl. meiner *Darstell. Geometrie* (§ 47).

36. Bei der *Ellipse* ist unter den Kreisen aus Punkten der Hauptaxe der aus ihrem Mittelpunkt mit dem Radius b beschriebene der grösste, welcher die Nebenaxe zur Berührungssehne hat; je weiter der Mittelpunkt nach der einen oder andern Seite vom Berührungspunkt absteht, desto kleiner werden Radius und Berührungssehne; mit dem Abstand $c^2:a$ verschwindet die letztere in der vierpunktigen Berührung, mit dem Abstand c in den Brennpunkten der Radius, während die imaginär begrenzte Berührungssehne in der zugehörigen Directrix liegt.

Unter den doppelt berührenden Kreisen aus Punkten der Nebenaxe ist der um M mit der halben Hauptaxe beschriebene, der die Hauptaxe zur Berührungssehne hat, der kleinste; von da gegen die Nebenaxenscheitel hin nimmt der Radius der doppelt berührenden Kreise bis zu dem Werthe $a^2:b$ für die in den Scheiteln selbst vierpunktig berührenden zu und die Länge der Berührungssehne bis Null ab. Diese Kreise umschliessen die Ellipse, die vorigen werden von ihr umschlossen.

Im Falle der *Hyperbel* werden die Kreise aus Punkten der Hauptaxe von der Curve umschlossen und die beiden Berührungen eines jeden gehören demselben Aste an, während die aus Punkten der Nebenaxe die Curve ausschliessen und jeden ihrer Äste einmal berühren. Die reellen doppelt berührenden Kreise aus der Hauptaxe haben ihre Mittelpunkte in den unbegrenzten Strecken ausserhalb der Brennpunkte, in diesen mit dem Radius Null und imaginärer Berührung in der zugehörigen Directrix beginnend, die reelle Berührung im Scheitel mit der Sehnenlänge Null für den Radius $c^2:a'$, und mit von da aus wachsenden Sehnen und Radien stets reell berührend. In der Nebenaxe ist jeder Punkt der Mittelpunkt eines reellen und reell doppelt berührenden Kreises, M für den mit dem kleinsten Radius a'.

Im Falle der *Parabel* sind ihre Tangenten als die im endlichen Raum liegenden Theile der doppelt berührenden Kreise aus den Punkten der Nebenaxe anzusehen, der unendlich ferne Punkt der zugehörigen Normale als der zugehörige Mittelpunkt, die unendlich ferne Gerade der Tafel immer als der andere Theil. Die reellen Kreise aus den Punkten der Hauptaxe beginnen mit dem Radius Null für den Brennpunkt bei imaginärer Doppelberührung in der Directrix, die reelle Doppelberührung tritt ein mit der vierpunktigen im Scheitel. Und da bei der parabolischen Durchdringung die Ebene der Parabel den einen der gleichseitigen Rotationskegel des Flächenbüschels vertritt und die zu ihrer Falllinie gegen die Tafel durch die Spitze M des anderen gehende Parallele, d. h. die eine Umrisslinie des Kegels, die Mittelpunktsgerade des Büschels ist, so ist der Radius r des Potenzkreises immer diejenige Sehne in dem mit dem Radius Vector CP um den Brennpunkt beschriebenen Kreise, welche von P nach seinem Durchmesserendpunkt auf der dem Scheitel A entgegengesetzten Seite geht; für den Scheitel A selbst ist sie also eben diesem Durchmesser gleich oder gleich $2AC$.

Dass nun damit auch die Vertheilung der Mittelpunkte der rein imaginären doppelt berührenden Kreise gezeichnet ist, ist klar; ihre Radienquadrate und damit ihre Symmetriekreise erhalten wir ebenso aus den vorher entwickelten metrischen Relationen, wie construierend nach dem Früheren als die Scheitelkreise der zu den betreffenden Lagen der Tafel gehörigen centrischen zweifachen Hyperboloide.

Schluss.

37. In Bezug auf die *Allgemeinheit und Vollständigkeit* der erlangten Resultate bleibt noch Einiges hinzuzufügen, was wir anknüpfen können an die Aufgabe des § 9, von der *Construction der Kegelschnitte aus einem doppelt berührenden Kreis und drei Punkten.* Wir bemerken, dass die gegebene Lösung mit ihrer durch das Spätere erhaltenen Erweiterung auf rein imaginäre Kreise wesentlich identisch ist mit der allgemeinen projectivischen Lösung der Aufgabe: Zu einem eventuell durch sein Polarsystem vertretenen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ die doppelt berührenden Kegelschnitte durch drei Punkte 1, 2, 3 zu finden. Denn zur Lösung der letzteren hat man auf den Geraden 12 und 23 die dem Kegelschnitt ensprechenden Involutionen harmonischer Pole zu bestimmen und ihre zu 1, 2 resp. 2,

3 harmonisch conjugierten Paare X, X_1 und Y, Y_1 anzugeben, deren Verbindungslinien XY, $X_1 Y$, XY_1, $X_1 Y_1$ die vier Sehnen der Doppelberührung zwischen dem gegebenen Kegelschnitt und den gesuchten Kegelschnitten sind. Und die beiden Ähnlichkeitspunkte der Kreise, die um zwei Punkte 1, 2 orthogonal zu einem gegebenen Kreise $\mathfrak{K}$ beschrieben werden (§ 9) sind in der That dasjenige Paar in der Involution harmonischer Pole von $\mathfrak{K}$ auf der Geraden 12, welches durch 1, 2 harmonisch getrennt wird. Natürlich liefert nun die dual entsprechende Construction auch die Bestimmung der Kegelschnitte zu drei Tangenten und einem doppelt berührenden Kegelschnitt.

Verlangt man dann die *Kegelschnitte durch zwei Punkte* 1, 2, *die einen gegebenen Kegelschnitt* $\mathfrak{K}$ *doppelt berühren,* so erhellt aus der vorigen Construction, dass dieselben sich *in zwei Systeme* theilen werden. Wenn wir wieder durch X, X_1 das zu 1, 2 harmonisch conjugierte Paar der Involution harmonischer Pole von $\mathfrak{K}$ auf der Geraden 12 bezeichnen, so ist jede Gerade des Büschels um X und wieder jede Gerade des Büschels um X_1 Berührungssehne von $\mathfrak{K}$ mit einem Kegelschnitte, der den Bedingungen entspricht. Für 1 und 2 als die unendlich fernen imaginären Kreispunkte sind X, X_1 die Richtungen der Axen des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$, d. h. die Berührungssehnen eines Kegelschnittes mit doppelt berührenden Kreisen laufen seinen Axen parallel.

Die der allgemeinen dual entsprechende Construction bestimmt die Kegelschnitte zu zwei Tangenten, die einen gegebenen doppelt berühren.

Wir schliessen daraus aber weiter, *dass sich diejenigen Kegelschnitte, welche zwei gegebene doppelt berühren, in drei Systeme theilen werden, welche sich auf die Ecken des gemeinsamen Tripels harmonischer Pole der gegebenen Kegelschnitte beziehen.* Unsere darstellendgeometrische Entwickelung hat in § 16 f. für den Fall zweier Kreise *ein* solches System vollkommen erläutert, und es bleibt jetzt übrig, die Kenntniss der beiden andern Systeme zu begründen. Dann wird man auch die drei Paare von Kegelschnitten construieren können, die durch einen Punkt gehen und zwei gegebene doppelt berühren; etc. Wenn man erinnert, dass durch jede Ecke des gemeinsamen Tripels harmonischer Pole von zwei Kegelschnitten zwei Verbindungslinien ihrer vier gemeinsamen Punkte gehen, und in jeder Seite desselben Tripels zwei Schnittpunkte ihrer vier gemeinsamen Tangenten liegen, welche je durch die beiden andern Ecken harmonisch getrennt werden, so sieht man, dass für zwei Kreise derselben Ebene die Centrale eine Seite x und die Richtung ihrer Normalen eine Ecke X — die gegenüberliegende — des gemeinsamen Tripels ist, und erkennt, dass das in § 16 f. entwickelte System das auf X und x bezügliche Theilsystem des gesammten ist. Die Potenzlinie und die unendlich entfernte Gerade sind die beiden durch X gehenden Sehnen, die beiden Ähnlichkeitspunkte die Schnittpunkte der gemeinsamen Tangentenpaare in x. Die Paare der Berührungssehnen seiner Kegelschnitte mit beiden Kreisen gehen durch X und bilden eine Involution, welche die von X ausgehenden gemeinsamen Sehnen beider Kreise zu Doppelstrahlen hat — speciell, weil der eine Doppelstrahl unendlich fern ist, eine symmetrische Involution mit dem andern Doppelstrahl als Symmetrieaxe. (§ 12.)

38. Die beiden anderen Ecken des gemeinsamen Tripels V und W liegen also in der Centrale und bilden dort das gemeinsame Paar der durch beide Kreise in ihr bestimmten Involutionen harmonischer Pole, zugleich auch das zur Potenzlinie symmetrische Paar, welches durch die Ähnlichkeitspunkte harmonisch getrennt wird; die übrigen Seiten w, v des gemeinsamen Tripels sind die Verbindungslinien von X mit V und W oder die in V und W auf der Centrale errichteten Perpendikel.

Als gemeinsames Paar der Involutionen harmonischer Pole in x, welche durch ihre Doppelpunkte resp. symmetrischen Paare A_1, B_1 und A_2, B_2 bestimmt sind — jenes für reelle, dieses für rein imaginäre Kreise — sind V und W stets reell, so lange nicht die Kreise reell sind und sich schneiden, oder die Doppelpunktstrecken A_1B_1 und A_2B_2 beider Involutionen sich trennen; in diesem Falle des § 18 sind sie imaginär. In den Fällen der ausschliessenden oder umschliessenden Berührung der Kreise fallen sie mit einander und mit B_1A_2 resp. B_1B_2 zusammen, natürlich zugleich auch v, w mit der Potenzlinie. Nach denselben Eigenschaften sind V und W auch die Grenzpunkte des Büschels der Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ oder die Grundpunkte des zu ihm conjugierten Büschels, d. h. die gemeinsamen Punkte der vier Kreise, welche man aus den Schnittpunkten der gemeinsamen Tangenten mit der Potenzlinie mit je der halben Länge der bezüglichen Tangenten t_e, t_i beschreiben kann, oder des Orthogonalkreises beider gegebenen aus dem Fusspunkte der Potenzlinie in der Centrale. (Fig. 16.)

Durch diese Punkte V und W gehen die beiden Paare von imaginären gemeinsamen Sehnen der gegebenen Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, welche ihre Schnittpunkte im Endlichen mit den imaginären Kreispunkten im Unendlichen verbinden; dieselben sind die Doppelstrahlen der Involutionen von Paaren von Berührungssehnen, welche den V resp. W ebenso, wie das bisher betrachtete System X, zugeordneten $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ doppelt berührenden Kegelschnitten zukommen, und diese Involutionen sind daher Involutionen rechter Winkel. Da nun von den Axen eines solchen Kegelschnittes, gleich viel ob er dem System V oder dem System W angehört, immer die eine durch den Mittelpunkt C_1 des ersten und die andere durch den Mittelpunkt C_2 des zweiten Kreises gehen muss, und dazu beide den Strahlen eines Paares der bezüglichen Involution der Berührungssehnen um V oder W parallel sein müssen, so ist der *Ort der Mittelpunkte für die Kegelschnitte der Systeme* V und W *der über der Centrale* C_1C_2 *als Durchmesser beschriebene Kreis;* und zwar ist jeder Punkt dieses Kreises der Mittelpunkt für zwei Kegelschnitte, einen des Systems V und einen des Systems W.

Sowie die Centrale als Mittelpunktsort durch die Mittelpunkte C_1, C_2 und die Ähnlichkeitspunkte I, E als Mittelpunkte der dem System X angehörigen degenerierten Kegelschnitte hindurchgeht, so auch der Mittelpunkte-Kreis der Systeme V, W. Die gemeinsamen Tangenten der Kreise zählen zum System V und zum System W wie zu dem X; die vier Schnittpunkte E_w, I_w und E_v, I_v, die sie ausser den Ähnlichkeitspunkten E und I oder E_x und I_x mit einander bilden, liegen daher auf dem aus M durch C_1 und C_2 beschriebenen Kreis, wie wir aus § 11 schon wissen. Derselbe schneidet sie aus den Geraden v resp. w heraus und zwar sind für zwei rein imaginäre Kreise alle diese vier Punkte nicht reell, für einen reellen und einen rein imaginären Kreis liegen in dem ersten zwei reelle Punkte T_{1w}, T_{2w}, während die beiden anderen imaginär sind. (¹) Nach dem Schluss von § 29 ist jener Kreis im Falle gleicher Radien der Symmetriekreis des Ähnlichkeitskreises. Die zugehörigen Axen, d. h. die Halbierungslinien der von den Tangenten im Schnittpunkt jeweilig gebildeten Winkel, gehen durch C_1 und C_2 resp.; die Berührungssehnen jedes Paares an beiden Kreisen gehen durch V oder W und schneiden

(¹) Es mag nebenbei angemerkt werden, dass T_{1w}, T_{2w} zugleich die Fusspunkte der Focalstrahlen für denjenigen schiefen Kreiskegel sind, der den reellen Kreis zur Spur in der Tafel und den durch den Symmetriekreis des rein imaginären Kreises cyklographisch bestimmten Punkt des Raumes zum Mittelpunkt oder zur Spitze hat.

sich dort rechtwinklig; diejenigen von zwei complementären Paaren wie E_w, I_w und wieder E_v, I_v der gemeinsamen Tangenten bilden zwei Rechtwinkelpaare in W resp. in V, die von den vier nicht complementären Paaren E_w, E_v; E_w, I_v; I_w, E_v; I_w, I_v immer ein Rechtwinkelpaar in V und eines in W. Die Geraden w und v des Tripels sind die durch V und W gehenden Verbindungsgeraden ihrer complementären Schnittpunktepaare.

Und so wie der Ort der Brennpunkte des dem unendlich fernen Pol X und der Centrale x als Polare zugeordneten Systems aus zwei Kreisen besteht, die durch die beiden Gegenecken I_x, E_x des Vierseits der gemeinsamen Tangenten der Grundkreise gehen, indem sie einander orthogonal schneiden, wesshalb dann der endliche Theil des einen in ihre Potenzlinie I_xE_x selbst übergeht, so wird der Ort der Brennpunkte des Systems mit dem Pol W und der Polare VX oder w von zwei Kreisen aus C_1 und resp. C_2 gebildet, welche einander in den Schnittpunkten E_w und I_w orthogonal durchschneiden; und der Ort der Brennpunkte des Systems mit dem Pol V und der Polare v von zwei Kreisen aus C_1, C_2, welche sich in E_v und I_v orthogonal schneiden. Es sind Kreise aus C_1, C_2, weil die Linien nach den Mittelpunkten aus ihren Schnitten, ebenso wie bei E_x, I_x die Linien E_xI_x und E_xX resp. I_xX, die Axen orthogonaler Symmetrie für die gemeinsamen Tangenten bilden müssen. (Vergl. St. 1852; p. 465.)

39. Weil diese Erweiterungen sich aus dem Vorhergehenden leicht ergeben und von Steiner in der citierten Abhandlung ausführlich angegeben, endlich in der damit verbundenen Arbeit *Allgemeine Betrachtungen über einander doppelt berührende Kegelschnitte* (Werke II, p. 471 f.) auch auf den projectivisch allgemeinen Fall doppelt berührter Kegelschnitte übertragen worden sind, so dürfen wir hier abbrechen, ohne zu übersehen, dass dieser allmählige Fortschritt zur projectivischen Allgemeinheit und die Erreichung dieser letzteren ganz im Geiste der Methode liegen.

Steiner ist auch von der Bestimmung des Kegelschnittes, der drei gegebene Kreise von einerlei Centrale doppelt berührt (Werke II, p. 461) (1), also

(1) Die Correctur der Steiner'schen Formeln, die offenbar schon dimensorisch falsch sind, in Bd. II, p. 740 hat falsche Zahlencoefficienten; man hat in den Nennern rechts die 2 durch 4 zu ersetzen und auch das erste Glied in der Klammer mit dem Coefficienten 4 statt 2 zu schreiben. Für d_1, d_2, d_3 als die auf die Kreispaare $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$; $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_1$; $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ respective bezüglichen Distanzsummen und mit $M_1M_2 = c_3$, $M_2M_3 = c_1$, $M_3M_1 = c_2$

in unserem Sinne der Projection der Durchdringung von drei Hyperboloiden desselben Büschels mit gegebenen Kehlkreisprojectionen weitergegangen zur Aufstellung der Lagen-Relationen, welche drei Kegelschnitte derselben Ebene erfüllen müssen, damit sie von einem vierten Kegelschnitt je doppelt berührt werden; vergleiche in der ersten Abhandlung Werke II, p. 415 f. und in der zweiten ibid. p. 481 f.

Wir müssen aber noch an eine *darstellendgeometrische Behandlungsweise* der Frage erinnern, welche STEINER in der Abhandlung von 1847 neben der planimetrischen und als sie ergänzend selbst angegeben hat. Man denke eine Kugel aus einem Punkte der Tafel als Mittelpunkt und den ihr umgeschriebenen Berührungscylinder von gegebener Richtung der Mantellinien L_∞; seine Spurcurve $\mathfrak{S}$ in der Tafel ist eine Ellipse, die nach der Richtung L_∞ gebildete Parallelprojection desjenigen Hauptkreises der Kugel, welcher in der zu dieser Richtung normalen Diametralebene $\mathfrak{T}$ liegt. Jede durch den zur Tafel normalen Durchmesser, wir wollen sagen die Axe der Kugel, gehende Ebene schneidet die Kugel in einem Meridian-Kreis $\mathfrak{M}$, der in zwei Punkten durch die Ebene $\mathfrak{T}$ hindurchgeht, die die Endpunkte eines Durchmessers im Berührungskreise $\mathfrak{T}$ selbst sind und daher als Endpunkte eines Durchmessers von $\mathfrak{S}$ projiciert werden. Betrachten wir dann das System der zur Tafel parallelen Querschnitte oder der Parallelkreise $\mathfrak{P}$ der Kugel, so schneidet jeder den Berührungskreis

folgen aus der Identität der Durchdringungen der bezüglichen drei Paare von Hyperboloiden die Bestimmungen

$$d_1^2 = \frac{c_1}{c_2c_3}S, \qquad d_2^2 = \frac{c_2}{c_3c_1}S, \qquad d_3^2 = \frac{c_3}{c_1c_2}S \quad \text{oder} \quad d_i^2 = \frac{c_i^2S}{c_1c_2c_3}$$

mit

$$S \equiv c_1c_2c_3 + c_1r_1^2 + c_2r_2^2 + c_3r_3^2.$$

Man hat daher auch immer

$$\frac{d_1^2}{c_1} + \frac{d_2^2}{c_2} + \frac{d_3^2}{c_3} = 0.$$

Die Grösse S liefert durch ihr Verschwinden die Relation der Radien und Centraldistanzen für drei Kreise desselben Büschels (der Kehlkreise als in einerlei Ebene, weil d_i gleich Null wird)

$$-1 = \frac{r_1^2}{c_2c_3} + \frac{r_2^2}{c_3c_1} + \frac{r_3^2}{c_1c_2},$$

welche von vielfältigem Gebrauch ist. Die Proportionalität der c_i und d_i ist der Ausdruck für die Lage der Mittelpunkte der Flächen in einer Geraden.

des Cylinders in zwei Punkten, welche zwischen zwei Grenzlagen $\mathfrak{P}_o$ und $\mathfrak{P}_u$ der Ebene $\mathfrak{P}$ — einer obersten und einer untersten in den Abständen $r\cos\lambda$ von der Tafel für r als den Radius der Kugel und λ als den Neigungswinkel der Mantellinien des Cylinders zur Tafel oder der Ebene der Berührungscurve $\mathfrak{T}$ zu ihren Normalen — reell und verschieden sind und in diesen selbst zusammenfallen; auch schneiden sie alle jede Meridianebene $\mathfrak{M}$ in einem System paralleler Durchmesser, die ihre Endpunkte im zugehörigen Meridian haben und in unserer Projection auf der Tafel in wahrer Grösse erscheinen.

Die Projection der hiermit entsprungenen Elemente auf der Kugelfläche nach der Richtung L_∞ auf die Tafel (Fig. 17) giebt uns als Bild des Kreises $\mathfrak{T}$ die Ellipse $\mathfrak{S}$ mit der Projection der Axe der Kugel als Hauptaxe; die Projectionen der Parallelkreise $\mathfrak{P}$ sind ihnen gleiche Kreise aus den Bildern ihrer Mittelpunkte in der Axe als Mittelpunkten, welche die Ellipse $\mathfrak{S}$ in den Projectionen der zwei Punkte berühren, die $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{T}$ gemein hat; also reell doppelt für Parallelkreise innerhalb jener Grenzen, vierpunktig in den Hauptaxenscheiteln für die Grenzen selbst und imaginär doppelt für die von der Tafel weiter entfernten Lagen. Bis zur Distanz r haben wir Kreise von reellem bis Null abnehmendem Radius, sodass die Endpunkte des in der Axe der Kugel gelegenen Durchmessers die Brennpunkte der Ellipse $\mathfrak{S}$ liefern; darüber hinaus endlich rein imaginäre doppelt berührende Kreise, welche auch vollkommen bestimmt sind. Die Meridiane $\mathfrak{M}$ der Kugel mit einziger Ausnahme des die Richtung L_∞ enthaltenden, der als gerade Strecke in der Axe von $\mathfrak{S}$ erscheint, werden als ein System von Ellipsen projiciert, die man erhält, indem man die Bilder der ihnen angehörigen Systeme paralleler Durchmesser projiciert, d. h. als Orte der Endpunkte der Durchmesser von der Richtung $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$ in allen Parallelkreisbildern oder in allen den doppelt berührenden Kreisen von $\mathfrak{S}$; sie berühren $\mathfrak{S}$ in den Bildern der Punkte, welche der bezügliche Meridian $\mathfrak{M}$ mit dem Berührungskreise $\mathfrak{T}$ auf der Fläche gemein hat, und diese werden nach den Regeln der darstellenden Geometrie leicht ermittelt. Sie sind die Projectionen der Endpunkte des den Ebenen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{M}$ gemeinsamen Kugeldurchmessers nach der Richtung L_∞ auf die Tafel. (Fig. 17; $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$.) Es ist evident, dass alle diese Kegelschnitte die Brennpunkte von $\mathfrak{S}$ als Projectionen der Pole der Kugel zu Endpunkten eines gemeinsamen Durchmessers haben und paarweis symmetrisch zu ihm liegen nach der Symmetrie der Meridiane in Paaren zu dem die Richtung L_∞ enthaltenden; man hebt damit unter ihnen die Projection des zur Richtung L_∞ normalen Meridians hervor, der zu sich selbst symmetrisch ist, die Brennpunkte von $\mathfrak{S}$ zu Scheiteln hat und $\mathfrak{S}$ in den Scheiteln der Nebenaxe berührt.

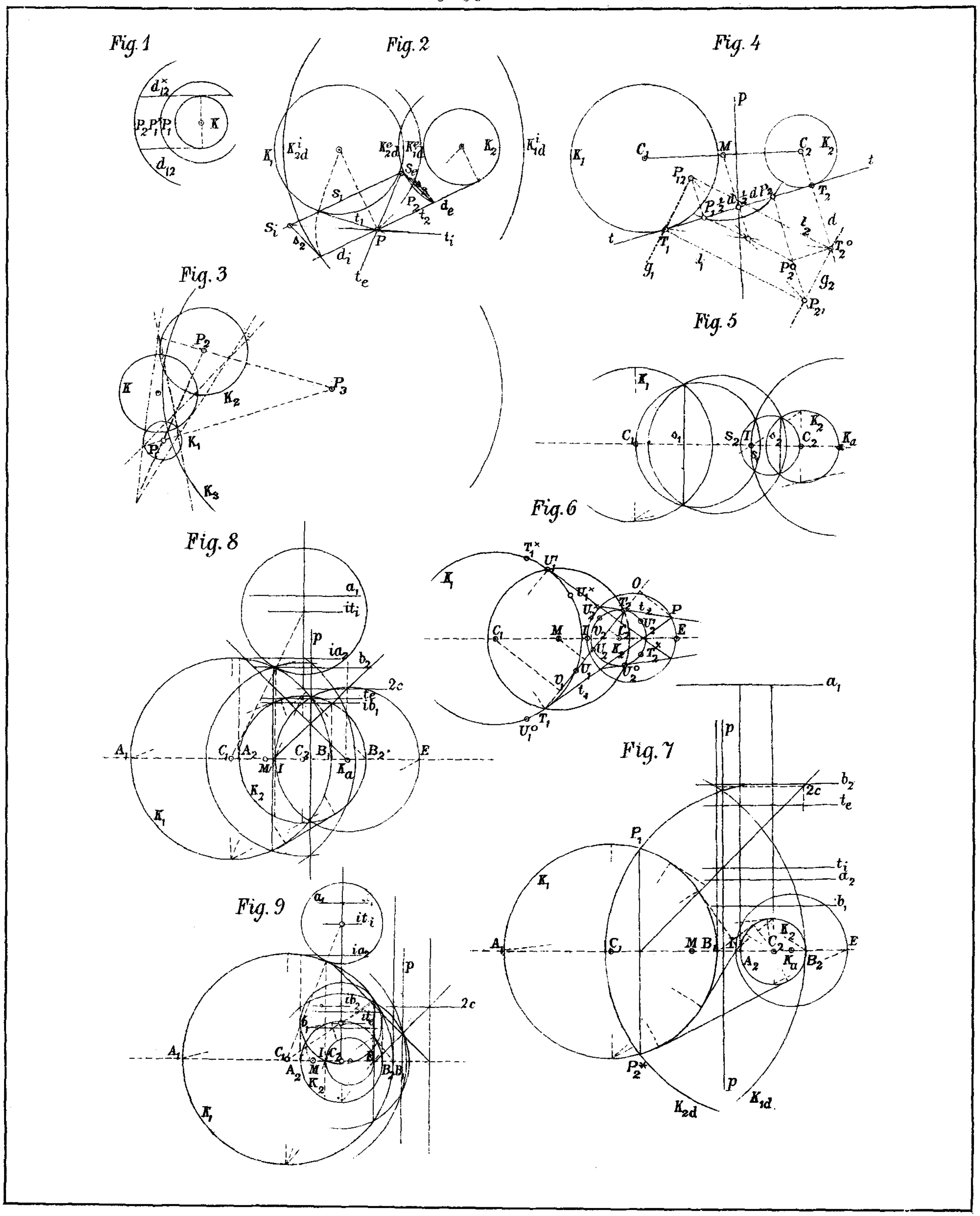
Für den interessanten Gebrauch, der sich von diesen Ergebnissen machen lässt, verweisen wir auf St. 1847; p. 406—415. Steiner hat natürlich bemerkt, dass die vorigen Betrachtungen für die Rotationsflächen zweiten Grades mit zur Tafel normalen Axen ebenso gelten, wie für die Kugel, wenn auch die Curve der Berührung zwischen Fläche und Cylinder und die Meridiane der Fläche nicht mehr Kreise sondern Ellipsen oder Hyperbeln sind; er erwähnt p. 403 der Ellipsoide und der zweifachen Rotationshyperboloide, auffallender und schwer begreiflicher Weise aber nicht der einfachen Rotationshyperboloide. Hätte er dadurch um so mehr die Aufmerksamkeit auf diese lenken wollen?

40. Gewiss kann die hier entwickelte Anschauung der zuletzt skizzierten gegenüber als umfassender und als mehr organisch bezeichnet werden; sie hat uns alle in den Abhandlungen von 1847 und 1852 niedergelegten Resultate und nicht nur einen Theil derselben geliefert, nach einheitlicher Methode bewiesen und in ein Ganzes geordnet, mit Hinzufügung einer ziemlichen Reihe von Zwischengliedern und Ergänzungen. Die Aufeinanderfolge der Resultate hat dabei erhebliche Modificationen erfahren müssen, wenn auch im Ganzen die §§ 7 bis 22 wesentlich die Arbeit von 1852 und die §§ 31 bis 35 die von 1847 reconstruieren. Natürlich fehlt bei Steiner die Parabel der Spuren der Durchdringungsebenen in der Axenebene (§ 12) und ihre Beziehung zur Scheitel- und Brennpunktsbestimmung der Durchdringungsprojection ganz, die ein wesentliches Glied in unserer Gesammtentwickelung ist. Die aus ihrer Verbindung mit der Meridianhyperbel des ruhenden Hyperboloides in den §§ 7 f. hervorgehende Curve der Kegelspitzen giebt Anlass zu einer interessanten projectivischen Curvenerzeugung aus zwei Kegelschnitten. Die Paare der Schnittpunkte des einen mit den Tangenten des andern werden mit zwei festen Punkten seiner Peripherie durch gerade Linien verbunden; die Curve ist der Ort der Punktequadrupel, in welchen diese letzteren Geraden sich schneiden.

In Bezug auf die sonstige Tragweite der entwickelten Anschauung erlaube ich mir, auf einige meiner früheren Veröffentlichungen zu verweisen. Ich habe aus ihr in der *Cyklographie* die constructive Theorie der Kreisbüschel und Kreisnetze, die Methode der reciproken Radien und die Lösungen der Probleme über den Winkelschnitt der Kreise in der Ebene, der Kugeln im Raum und der Kreise auf der Kugel entwickelt — letzteres das Programm des von Steiner 1826 als druckfertig angekündigten nun verschwundenen Manuscriptes von 25—30 Bogen; ich habe dort auch als näher ausgeführte Beispiele die Auflösung des ersten Steiner'schen Schliessungsproblems von der Figur des Pappus über den Ring einander berührender Kreise, welche zwei Kreise berühren (vergl. Werke I, p. 42 f., p. 59, p. 135 f.), in den §§ 167 bis 169 und die Discussion der vollständigen Figur des Feuerbach'schen Kreises im Dreieck in §§ 178 bis 187 mit einer Menge neuer Resultate gegeben; und ich habe in der Abhandlung *Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungsmethoden* in Bd. 27 der Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich Gelegenheit genommen, zu zeigen, dass jene stereometrische Behandlung der Feuerbach'schen Figur zu den Steiner'schen Sätzen von der Hypocycloide mit drei Spitzen führt, welche im Jahre 1856 in der Akademie von Berlin und im 53 Bd. von Borchardt's Journal mitgetheilt sind. (Werke II, p. 641 f.) Man sieht, dass die Anwendungssphäre der Methode ziemlich ausgedehnt ist und dass sie zu manchen der resultatreichen und meist ohne Beweise gegebenen Steiner'schen Veröffentlichungen als ein Wegweiser dienen kann. Es war in diesem Gedanken, dass ich am Schlusse der Vorrede zur *Cyklographie* auch auf die beiden grossen Abhandlungen von 1847 und 1852 hinwiess.

Ich habe mich a. a. O. offen dazu bekannt, dass ich lange Zeit glaubte, meine Methode sei die des Steiner'schen Manuscriptes von 1826 (vergl. Werke I, p. 21); die Stellung der beiden genannten Abhandlungen zu meiner Methode erschien mir als ein Hauptgrund für diese Ansicht, und zwar nicht nur desshalb, weil die merkwürdigen Resultate sich so anschaulich aus derselben entwickeln liessen, sondern noch aus dem andern Grunde, dass sich bei dieser Entwickelung elementare, darstellend-geometrische, cyklographische und projectivische Methoden so eng verbunden zeigen. Mir schienen von da aus Steiner's Verhalten in der Sache und seine Äusserungen zu derselben die rechte Beleuchtung zu empfangen. Er hatte gewiss 1826 die baldige Veröffentlichung der Schrift über die Kreise und Kugeln vor — wie er sagt, als Anfang zur Veröffentlichung seiner geometrischen Untersuchungen, die sich noch alle Tage erweiterten und ausdehnten. Er modificierte dann diese Absicht unter dem Eindruck und Zwang des fortwährenden Wachsens des eröffneten Untersuchungsgebietes und sprach sich darüber in dem classischen Vorwort zur *Systematischen Entwickelung* etc. von 1832 aus. Jenes Manuscript sollte den zweiten und letzten supplementären (vergl. Werke I, p. 235) Theil eines Gesammtwerkes bilden, welches aus fünf Haupttheilen bestehend eine projectivische Geometrie enthalten sollte; und die *Systemat. Entwickelung* ist der erste Theil davon. Das Manuscript von 1826 sollte zuletzt erscheinen, »da mehrere darin enthaltene Betrachtungen nur besondere Fälle von solchen sind, welche in den erstgenannten fünf Theilen vorkommen, und wiederum einige für Kreise und Kugeln selbständig entwickelte Sätze sich unmittelbar auf bestimmte Systeme von Curven und Flächen zweiten Grades übertragen lassen, wie solches in jenen fünf Theilen nachgewiesen wird.» Die Abhandlung von 1852 ist ein lehrreiches Beispiel dieser Verbindung und dasselbe ist durch die *Allgemeine Betrachtung über einander doppelt berührende Kegelschnitte* (Werke II, p. 471—483) vervollständigt worden. Dass der grosse Gesammtplan von 1832 nicht zur Ausführung kommen würde, war wohl schon bei Veröffentlichung der Abhandlung von 1847 wahrscheinlich; und Steiner gab hier statt einer rein planimetrischen Entwickelung ein Beispiel von der Kraft der darstellendgeometrischen Methode in der Bemerkung Werke II, p. 402 f. und der daran anknüpfenden Ausführung ibid. p. 406 bis 415. Zudem spricht vieles dafür, dass die beiden genannten Abhandlungen Auszüge der merkwürdigsten Resultate aus einem vorliegenden grösseren Ganzen bilden, wenn schon wir über dieses Ganze keine directe Kenntniss haben. Ich habe auch die Abhängigkeit des Ähnlichkeitskreises und der von den Wechselsehnen der Kreise umhüllten Parabel ihrer Schaar (§ 15) als sehr speciellen Fall einer darstellendgeometrischen Entwickelung erkannt und nachgewiesen — vergl. die vorläufige Mittheilung in Bd. 28 der Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich p. 289 f. — und mache schliesslich noch aufmerksam auf die einfachen Übergänge vom Reellen zum Imaginären in den entwickelten Constructionen. Habe ich ihnen zu viel Credit gegeben, wenn ich für möglich hielt, dass sie in Steiner's Bewältigung des Imaginären in der Geometrie eine Stelle gehabt hätten?

Acta Mathematica 5. W. Fiedler, Über die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen. Tafel 1.



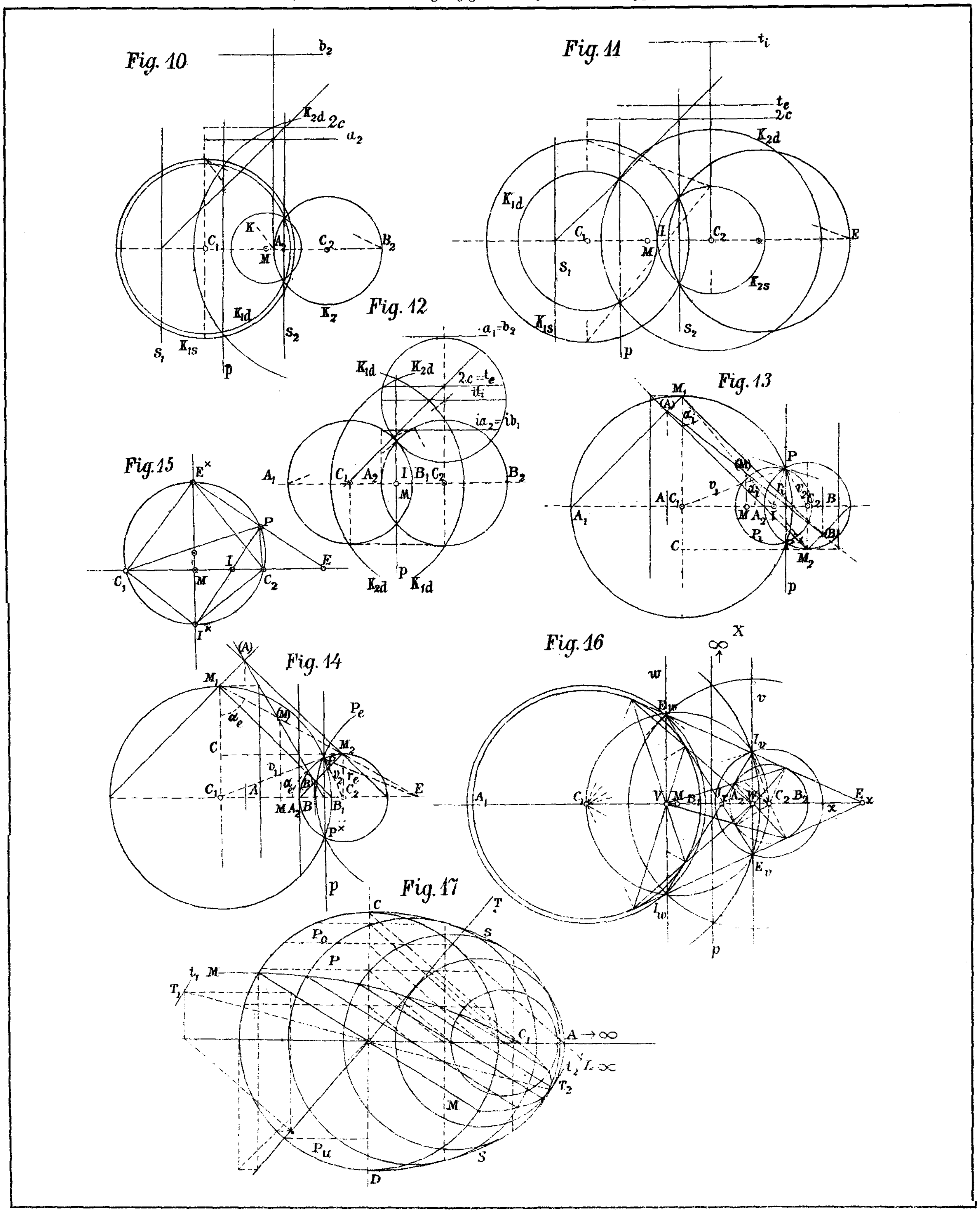


Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17