

DIE KRISIS IN CANTOR'S MATHEMATISCHEM SCHAFFEN.

VON

A. SCHOENFLIES

in FRANKFURT A. MAIN.

Der Herausgeber dieser Zeitschrift, Herr Gösta Mittag-Leffler, besitzt eine grössere Zahl Cantorscher Briefe; viele von ihnen mit hochinteressantem Inhalt. Gern folge ich seiner Anregung, die Briefe, soweit tunlich, ihrer Verborgenheit zu entziehen. Wer den Reiz von Cantor's Persönlichkeit nur einmal erfahren hat, weiss, dass sie voller Witz und Temperament war, geistsprühend und originell, dabei leicht zur Explosion neigend, und voll heller Freude an den eigenen Einfällen. Man darf daher eine selten reizvolle Wirkung der Briefe erwarten. Aber sie sind zugleich voller Bitterkeit und voll von harten nicht ungerechtfertigten Anklagen, wie es seinem Glauben an sich und seine wissenschaftlichen Ideen entsprach und wie es die ablehnende Haltung mit sich brachte, die sie an bevorzugter Stelle, zumal von Seiten Kronecker's erfuhren. All das Ungemach, das ihm widerfahren, spiegeln sie wieder, und all den Groll, der sich in ihm seit Jahren aufgespeichert. Selbst Weierstrass, den er im übrigen rückhaltlos verehrt, nimmt er davon nicht aus, und man darf glauben, dass ihn hierin sein Empfinden nicht völlig getäuscht hat. Sie alle, gegen die er seiner Bitterkeit freien Lauf lässt, deckt bereits die Erde, aber doch ist es vielfach unmöglich, die Schärfe des Ausdrucks wörtlich wiederzugeben, die die Wallungen seines Blutes seinen Briefen mitteilten; andererseits verlören sie ihren impulsiven Reiz, wenn man sie lückenhaft hierhersetzte. So muss ich eine Veröffentlichung vieler Briefe besser unterlassen, insbesondere aller, die er nicht nur zur Verteidigung seines eigenen Schaffens geschrieben hat.¹

¹ Erst nach dem Druck des obigen Aufsatzes sind mir die Antwortbriefe von Herrn Mittag-Leffler an Cantor zu Gesicht gekommen. Ich habe ihnen noch einiges entnommen, das die Cantorschen Äusserungen und Eindrücke bestätigen wird. Vgl. die Anmerkungen.

Ich hoffe aber, dass die wenigen, deren Abdruck hier folgt, doch ein deutliches Bild des Kämpfens und Leidens, des Vorstellens und Befürchtens geben, wie es sich aus der Gesamtheit der Briefe dem Leser aufdrängen würde.

Die meisten Briefe, allein 52 an der Zahl, stammen aus dem Jahr 1884. Es ist das Jahr, das für Cantor's mathematisches Forschen eine Art Schicksalswendung bedeutet. Stellen wir zunächst die Vorfrage, was er bis zum Beginn des Jahres 1884 erreicht hatte. Zunächst zwei Hauptresultate über die Punktmengen selbst. Bei keinem Problem war er bisher auf andere unendliche Mengen gestossen, als abzählbare und perfekte und solche, die sich aus ihnen durch Addition oder Subtraction ergaben; zudem wusste er bereits, dass alle perfekten Mengen dieselbe Mächtigkeit besitzen wie das Linearkontinuum. Zweitens war es ihm gelungen, die überendlichen Indizesymbole der Ableitungen zu mathematischen Objekten zahlentheoretischer Natur zu stempeln, und in ihrer Gesamtheit eine Menge zu erkennen, der man, gemäss den von ihm begründeten Kriterien der Mengenvergleichung, die zweite Mächtigkeit beizulegen hatte. Ihre Individuen waren formal durch ähnliche Grenzprozesse bestimmt, wie die irrationalen Zahlen; so erklärt es sich wohl, dass er in der Mächtigkeit der zweiten Zahlklasse auch die sichere Mächtigkeit des Kontinuums erblickte. Immer wieder hat er darin das letzte Ziel gesehen, zu dem er unfehlbar gelangen müsse. Auch seine letzte damalige Annalenarbeit (vom 15. November 1883) schliesst mit diesem Hinweis. Er hoffte wohl, dass das Jahr 1884 die bestimmte Erfüllung seiner Hoffnungen bringen würde — aber das vergebliche Ringen, zusammen mit dem Unmut über das erlittene Unrecht und über seine wissenschaftliche Verlassenheit, verursachte eine Depression, deren Stärke und Dauer ihn schliesslich bestimmte, dem mathematischen Schaffen zunächst einmal völlig zu entsagen.

Cantor stand damals im vierzigsten Lebensjahr. Über 10 Jahre waren bereits seit dem ersten Erscheinen seiner grundlegenden Arbeiten verstrichen. Bei Kronecker hatte er den schärfsten Gegensatz gefunden. Es übersteigt nicht das erlaubte Mass, wenn ich sage, dass die Kroneckersche Einstellung den Eindruck hervorbringen musste, als sei Cantor in seiner Eigenschaft als Forscher und Lehrer ein Verderber der Jugend. Er besass zwar in den Annalen eine bereitwillige Stelle für seine Publikationen, aber ein wissenschaftlicher Einfluss auf Andere oder gar eine sichtbare Anerkennung war ihm daraus in Deutschland vor dem Jahre 1884 kaum erwachsen.¹ Er fühlte sich einsam und verlassen

¹ Die Arbeiten von Ludwig Scheeffer erschienen erst im Jahr 1884, vgl. Acta math. 5, S. 45, 183, 279.

auch von denen, die er verehrte, und sogar auch von Weierstrass. Um dies ganz zu würdigen, erinnere man sich, dass bei seinen Schöpfungen dreierlei zu unterscheiden ist; erstens die allgemeine Mengenlehre nebst den Punktmengensätzen, zweitens die transfiniten Zahlen und drittens die philosophischen Argumente, durch die er sie stützte. Ihm selbst lag Alles in gleicher Weise am Herzen, wie er überhaupt allen seinen Ideen, mit Einschluss der nichtmathematischen, mit gleicher Liebe ergeben war. Ganz anders war die Stellung der wissenschaftlichen Umwelt. Wenn er für das Philosophische nirgends die gewünschte Aufnahme fand, so hat er dies vielleicht am ehesten verschmerzt. Anders aber steht es um die zweite Zahlklasse. Zweifellos ist sie das am meisten bewunderungswerte Kunstwerk seines Genius — ganz abgesehen davon, ob es vor der Geschichte Bestand haben wird oder nicht — und ebenso zweifellos war dies auch seine eigene Überzeugung. Gerade dafür aber fand er bei den Mächtigen keine Zustimmung, er hat sich wohl auch darin nicht geirrt, dass selbst Weierstrass ihm insofern höchstens lau gestimmt war. Wie musste es da auf ihn wirken, als ihm in Mittag-Leffler endlich ein verständnisvoller Freund und tätiger Helfer erstanden war! Er hatte bereits in den Acta die hauptsächlichen Cantorschen Resultate abgedruckt; vor allem aber war es ihm gelungen, durch eine glänzende Arbeit die Bedeutung der Cantorschen Ideen für die Funktionentheorie ins Licht zu setzen! Zu ihm flüchtete er, wenn es ihn drängte sich seinen Groll vom Herzen zu schaffen und seiner Bitterkeit in ungemilderten Worten Luft zu machen, wie seine leidenschaftliche Empfindung sie ihm eingaben. Dies ist es, was die Lektüre der Briefe zu einem eigenartigen Genuss stempelt.

Die Stimmung, mit der er in das Jahr 1884 eintrat, zeigt der Brief vom $\frac{1}{4}$, zugleich der erste der Sammlung; ich setze ihn auch deshalb hierher, weil er ein typisches Beispiel seines humoristischen Stils giebt. Augenscheinlich hatte er sich um eine Stelle in Berlin beworben und schreibt darüber:

»Sie fassen den Sinn meiner Bewerbung *ganz richtig* auf; ich habe nicht im Entferntesten daran gedacht, dass ich jetzt schon nach Berlin kommen würde. Da mir aber daran liegt, nach einiger Zeit hinzukommen und mir bekannt ist, dass Schwarz und Kronecker seit Jahren fürchterlich gegen mich intrigieren, aus Furcht ich könnte einmal hinkommen, so habe ich es für meine Pflicht gehalten, die Initiative selbst zu ergreifen und mich an den Minister zu wenden. Den nächsten Effect davon wusste ich ganz genau voraus, dass nämlich Kr. wie von einem Skorpion gestochen auffahren und mit seinen Hülfsstruppen ein Geheul anstimmen würde, dass Berlin sich in die Sandwüsten Afrika's, mit ihren Löwen,

Tigern und Hyänen versetzt glauben wird. Diesen Zweck habe ich, so scheint es, wirklich erreicht.»

Aber bald machte dieser humoristische Unterton einem andern Platz. Er hatte von Mittag-Leffler die Mitteilung erhalten, Kronecker beabsichtige, seiner wissenschaftlichen Auffassung in einem in den Acta abzudruckenden Artikel Ausdruck zu geben. Sie erfüllte ihn alsbald mit der Besorgnis, er könne den Einzigen, der ihm treu ergeben, durch das Gewicht der Mächtigen noch verlieren. Der Brief, der die unmittelbare Antwort auf Mittag-Leffler's Mitteilung bildet, zeigt noch kein Zeichen der Gärung, die alsbald in ihm aufkeimte; in seinem wesentlichen Teil lautet er:

Halle 21. Jan. 1884.

Mein theuerster Freund!

In Beantwortung Ihres Briefes vom 17ten schreibe ich Ihnen, dass ich mit allem einverstanden bin, was Sie zu thun gedenken.

Ihr Brief enthält sehr viel Interessantes; es wäre mir *sehr lieb*, wenn Kronecker seine Absicht zur Ausführung bringen würde und seinen Groll wider die Funktionentheorie und die allgemeine Mengenlehre, von welcher jene ein Glied ist, in gedruckte Worte fasste . . .

Nun bin ich neugierig, was er Ihnen für die Acta zusenden wird; sollte er dies wirklich thun, so wird sein Aufsatz voll von Malicen gegen den Nachbar in Halle—Wittenberg sein; wer weiss ob seine natürliche Klugheit nicht doch noch die Oberhand über ihn gewinnt und er sein Rüstzeug wie bisher im Versteck behalten wird, womit er jedenfalls mehr Erfolg erzielt hat, als ihm eine offene Gegnerschaft eintragen dürfte . . .

Ich grüsse Sie vielmals und bin de tout mon cœur Votre ami dévoué

GEORGE CANTOR.

Aber bald begann es in ihm zu gären und so schreibt er vier Tage später:

Halle 25. Jan. 1884.

Mein lieber Freund!

Meinen Brief vom 21ten werden Sie erhalten haben. Ich möchte Sie doch warnen davor, die von Kronecker intendierte Publikation ohne Weiteres für aufnahmewerth für Ihr Journal zu halten. Diesem Manne gegenüber beherzigen Sie das Wort »timeo Danaos et dona ferentes«.

Enthält sein Aufsatz nur mathematische Stoliditäten, so können Sie ihn ja ruhig abdrucken. Sind aber ausserdem *versteckte Malicen* darin, so kann verlangt werden, dass er sie in *seinem eigenen Journal zum Besten gebe*.

Es ist *höchst verdächtig*, dass er das Produkt des in ihm wider die Funktionentheorie und Mengenlehre angesammelten *Giftes* gerade Ihnen für *Ihr Journal* anbieten lässt; ich vermute, dass er hiermit *keine andere Absicht* verfolgt, als mich oder vielmehr meine Aufsätze auch aus den »Acta« zu vertreiben, da ihm dasselbe mit Bezug auf das »Crellesche Journal« durchaus gelungen ist. Der Grund warum ich seit sieben Jahren *nichts dorthin* geschickt, ist kein anderer, als dass ich für immer *jede Gemeinschaft* mit Herrn Kr. *perhorresziere*; dies weiss er sehr gut und nun will er mich auch zwingen, nicht mehr in den Acta zu publizieren.

Ich will sehen, ob ich nicht Recht behalte. Seien sie herzlichst gegrüsst von Ihrem

treu ergebenen Freund

GEORGE CANTOR.

Die quälenden Gedanken waren damit noch nicht zur Ruhe gekommen; am nächsten Tage schreibt er sogar zwei Briefe. Der erste klingt in die Worte aus: »Sollten Sie das« (nämlich die Ablehnung von Kronecker's Arbeit) »aus Rücksicht auf seine Stellung nicht können, so verlieren Sie mich wahrscheinlich als *Mitarbeiter*, behalten mich aber in allen Lagen und allen Verhältnissen gegenüber als Ihren unwandelbar treuen Freund Georg Cantor.« Der zweite, in dem die Erregung den Siedepunkt erreicht hatte, lautet in seiner Gesamtheit:

Halle 26. Jan. 1884.

Mein lieber Freund.

Nehmen Sie mir die Offenheit und Geradheit nicht übel, die ich in meinen Briefen an Sie betätige, die Freundschaft, welche ich für Sie hege, ist eine unbeschränkte und ich müsste es als eine Einschränkung derselben ansehen, wenn ich mich Ihnen gegenüber nicht ganz als denjenigen hingäbe, der ich nun einmal bin.

Ich kann Ihnen nicht sagen, wie sehr mich die *Anmassung* Kronecker's empört, in den »Acta« zeigen zu wollen, »dass die Ergebnisse der modernen Funktionentheorie und Mengenlehre von keiner realen Bedeutung sind«. Was versteht Herr Kr. unter »realer Bedeutung«? Meint er damit »wissenschaft-

lichen Wert und Nutzen», so frage ich, was *ihn* zum Richter über Wert und Nutzen in der Wissenschaft macht? Ich vermute, dass er sich selbst dazu erheben will in seiner grenzenlosen Eitelkeit und Borniertheit, welche Naturgaben ihn bereits im Anfang seiner Carriere vor dreissig Jahren dazu verführten, mit Geringschätzung von den Leistungen eines Galois zu sprechen, dem er au fond wegen aller seiner sieben Sachen zum grössten Dank verpflichtet sein müsste. Ebenso dankbar müsste er Weierstrass sein, diesem genialen grossen Funktionentheoretiker, von dem er so ungeheuer viel gelernt, so viel Anregungen empfangen hat. Aber weit vom Dank entfernt, will er nun kommen und den Mathematikern zeigen, dass Alles von Weierstrass geschaffene, oder doch Vieles davon, falsch sei.¹ Und die »Acta« sollen gut genug dazu sein, dieses schmutzige Zeug zu verbreiten, sein eigenes Journal will er dazu nicht nehmen.

Wie *darf* Herr Kr. Ihnen sagen lassen, »er hoffe, Sie werden seine Arbeiten mit derselben *Unparteilichkeit* in die Acta aufnehmen, wie die Untersuchungen Ihres Freundes Cantor«?

Mögen *seine* Machwerke der *Unparteilichkeit* und grosser Nachsicht und Rücksichtnahme auf das Bischen vergängliche Machtstellung, die er sich zu machen gewusst hat, bedürfen, für *meine* Arbeiten *beanspruche* ich *Parteilichkeit*, aber nicht *Parteilichkeit* für meine vergängliche Person, sondern *Parteilichkeit* für die *Wahrheit*, welche *ewig* ist und mit der souveränsten Verachtung auf die Wühler herabsieht, die sich einzubilden wagen, mit ihrem elenden Geschreibsel gegen sie auf die Dauer etwas ausrichten zu können.

Herzlichen Gruss von Ihrem ewig getreuen Freunde GEORGE CANTOR.

Damit verrauchte der Brand in seinem Innern; am $31/1$ kommt er nochmals, wie den Sturm von weitem überschauend, auf die Dinge zurück; er schreibt:

Halle 31. Jan. 1884.

Mein lieber Freund,

Nochmals bitte ich Sie um Entschuldigung, dass ich Sie in der letzten Zeit mit Expectorationen belästigt, die bei mir heraus mussten, damit Sie, mein bester Freund, ganz genau wissen, wie ich in Bezug auf Verhältnisse mich stelle, die den von mir vertretenen Ideen ausgesprochen feindlich sind; ich kenne hierin keinen Pardon; nur wissenschaftlichen Einwänden gebe ich gern Gehör. Ich

¹ Gemeint ist offenbar Kronecker's bekannte Gegnerschaft gegen die Irrationalzahl.

möchte noch hinzufügen, dass ich in allen Dingen, also auch in denen, um welche es sich hier handelt, mich gern unter die Beeinflussung Ihres milden Characters stelle und Conzessionen Ihnen machen würde, die ich Anderen verweigere. Und nun genug davon.»

Die Besorgnis, es könne den Machenschaften seiner Gegner gelingen, ihm seinen einzigen wissenschaftlichen Freund abwendig zu machen, bewegte ihn noch öfter; zumal auch deshalb, weil Mittag-Leffler ihm auch in der Auffassung der zweiten Zahlklasse zugestimmt hatte; »es ist mir sehr lieb« — schreibt er am $18/2$ — »dass Sie sich jetzt meiner Auffassung, dass ω , ω^ω etc. als *wirkliche* Zahlen, was sie in der That *mit demselben* Rechte sind, wie 1, 2 oder 7, angeschlossen haben, da sonst die Leute eine bezügliche Differenz zwischen uns vermuthet hätten». ¹ Seine Befürchtung entstammte wohl hauptsächlich Äusserungen von Hermite, die ihm hinterbracht waren, und in denen er meinte Berliner Einwirkungen zu erkennen. So heisst es in einem Brief vom $9/9$ 84: »Sehr interessant ist es mir, aus Ihrer heutigen Karte zu ersehen, dass Ihnen Ihre Arbeit momentan und zunächst in Frankreich nur geschadet hat; weil Sie darin auf meine Arbeiten recurriren . . . Ich vermuthete, dass der Ton in dieser Affaire von Berlin und Göttingen ausgegangen und dass die guten Franzosen hierbei *nur aus Courtoisie* einstimmen. Daran dürfte selbst Weierstrass nicht unschuldig sein; *auch ihm passt es nicht*, dass Sie sich mir in Freundschaft angeschlossen haben.» ²

Und einige Tage später ($17/9$):

»Meine in meinem letzten Briefe ausgesprochene Ansicht, dass Weierstrass *nicht unschuldig* an dem momentanen Misserfolg Ihrer Arbeit in Frankreich ist, werden Sie mir hoffentlich nicht übel nehmen. Ich habe alle Ursache anzunehmen, dass W. mit meinen Untersuchungen nicht sympathisiert; diess gilt daher auch von den Ihrigen, *soweit sie auf die meinigen Bezug nehmen*. Sie können dies schon daraus entnehmen, dass er sich über Ihren Beweis des Laurentschen Satzes entzückt ausgesprochen hat, nicht aber von Ihrer grossen, viel wichtigeren Abhandlung.»

¹ In einem Briefe von M. L. vom $5/2$ 84 heisst es: »In meiner letzten Arbeit stelle ich mich ganz auf Ihren Standpunkt, und was gegen Sie gesagt wird, trifft deshalb mich ebensogut wie Sie . . . so werde ich z. B. Ihre letzte Terminologie einführen und von Zahlen der zweiten Zahlklasse statt von Unendlichkeitssymbolen sprechen».

² Hier mag folgende Stelle aus einem Brief von M. L. ($2/8$ 84) Erwähnung finden: Kronecker est très irrité contre moi à cause de l'emploi que j'ai fait de vos théories. Il appelle cela une généralisation stérile. Weierstrass au contraire paraît être content et il veut communiquer le principe de mon mémoire au seminaire de Berlin». In einem andern Brief ($13/10$ 84) wird auch der grosse Einfluss von Kronecker in Paris und besonders auf Hermite erörtert. Aber von sich selbst schreibt M. L. nur ($3/6$): »Ich nehme es ruhig auf; die Wahrheit bleibt immer die Wahrheit».

Und am ²²/₉ schreibt er: »Was Sie mir über die Aufnahme Ihrer Arbeit in Frankreich sagen und über die Gründe, weshalb die Herren dort der Arbeit nicht gewogen sind, grenzt ans Unglaubliche; was habe ich den Herren angethan, dass sie mir so wenig gewogen sind? Die Erklärung dieser Erscheinung wird aber von Ihnen richtig gegeben; es sind Hetzereien deutscher Collegen, auf welche die ablehnende Haltung der französischen zurückzuführen ist. Ich finde dies weder für die ersteren noch für die letzteren ehrenvoll.« In der That handelte es sich um Briefe, die Kronecker an Hermite geschrieben hatte. Von ihnen heisst es am ¹⁷/₁₂: »Lassen Sie sich doch in Paris von Herrn Hermite die Briefe zeigen, in denen er mit seiner giftigen Feder meine Arbeiten herabzusetzen und mich zu diskreditieren sucht; Sie brauchen mir, wenn Sie nicht wollen, nichts Genaueres später darüber mitzuteilen . . .« Die volle Schale seines Zornes entlud sich nochmals bei dieser Gelegenheit.

Wie schon erwähnt, war der Sommer 1884 höchst unheilvoll für ihn. Er unterlag einer Depression, die seine geistige und seelische Kraft in betrübender Weise schwächte. Es ist zu vermuten, dass es Familie und Arzt gelang ihm die Meinung einzuflössen, die nervöse Erschöpfung beruhe wesentlich auf der überstarken und übertriebenen Gereiztheit, die ihn gegen Kronecker erfülle und an der er sogar selbst schuld sei, und dass eine Aussöhnung die Basis jeder Besserung sei.¹ Ich darf hier auf Grund eigener Eindrücke einfließen lassen, dass der Familie noch bei seinem 70ten Geburtstag die ganze Grösse seines Wertes bei weitem nicht voll aufgegangen war; so mochte sie damals nur zu gern geneigt sein, die in Cantor's Naturell gewiss vorhandene etwas stärkere Empfindlichkeit als die Hauptursache seines Zustandes zu betrachten. Jedenfalls beschäftigte auch ihn der Aussöhnungsgedanke an erster Stelle, und die Versöhnung kam — wenigstens äusserlich — zu Stande. Die Briefe, die sie anbahnten, mögen hier ebenfalls folgen; aber wie weh — und demütig klingen sie gegenüber den obigen! Zwischen den Zeilen glaubt man zu lesen, wie ein fremdes Hirn die Gedanken formte, ein fremder Wille seine Entschlüsse richtete und eine fremde Hand die Feder führte.

Zunächst folge ein Brief, noch aus der Mitte des Semesters stammend, in dem er selbst über seinen Zustand berichtet; die Schlussworte zeigen bereits, in welchem Maasse sein Selbstgefühl und die Wertung seiner Schöpfungen ihm entschwunden war.

¹ Dies ist freilich nur eine persönliche Mutmassung des Verfassers.

Halle 21. Juni 1884.

Mein lieber Freund!

Für Ihren lieben Brief vom 15. Mai sage ich Ihnen herzlichen Dank, ich würde ihn früher schon beantwortet haben, doch fühle ich mich seit einiger Zeit nicht so frisch, wie es sein sollte, in Folge dessen weiss ich auch nicht, wann ich zur Fortsetzung meiner wissenschaftlichen Arbeiten kommen werde; momentan kann ich darin gar nichts thun und beschränke mich auf die notwendige Vorlesungsthätigkeit; um wie viel lieber würde ich wissenschaftlich thätig sein, wenn ich dazu nur die nöthige geistige Frische hätte!

Ihre grosse Abhandlung zur Funktionentheorie erhalte ich heute und danke Ihnen tausendmal für die Übersendung. Hoffentlich komme ich bald dazu, sie gründlich zu studieren. Ich freue mich herzlich, dass Sie damit endlich fertig geworden sind und danke Ihnen auch für die vielen freundlichen Erinnerungen an meine Kleinigkeiten.

... Leben Sie herzlich wohl und, wenn Sie Zeit finden, erfreuen Sie gelegentlich mit Nachrichten

Ihren treu ergebenen Freund

G. CANTOR.

Die eigentlichen Aussöhnungsbriefe aus der Sommerfrische, zunächst der an Mittag-Leffler, dann der an Kronecker, lauten:

Friedrichroda 18. Aug. 1884.

Mein lieber Freund!

... Die Aufregungen, welche ich in diesem Sommer gehabt habe, von denen ich Ihnen schrieb und die hinter mir liegen, hatten, wie ich Ihnen nun sagen kann, ihren Grund in den Differenzen, in welche ich, nicht ohne eigene Schuld, durch meine wissenschaftlichen Arbeiten hineingeraten bin. Vielleicht haben Sie solches auch richtig vermutet. — Nicht Anstrengung von Arbeiten, sondern Reibungen, die ich vernünftiger Weise hätte vermeiden können, *waren die Ursache meiner Verstimmung.*

Der Umstand, dass Kr. so scharf gegen meine Arbeiten sich geäussert hat, hätte mich nicht so gegen ihn enflamieren sollen, wie Sie das im vergangenen Winter gesehen haben, in meinem Eifer bin ich in den Briefen, die ich Ihnen darüber geschrieben, gewiss *bis zur Ungerechtigkeit* gegangen. *Dies tut mir aufrichtig leid.* Und wenn Kr. auch den Anlass dazu gegeben hat, so habe ich mich doch entschlossen, ihm die Hand zu bieten und eine Aussöhnung mit ihm zu

versuchen. Ich glaube weder *mir* noch *meiner Wissenschaft* dadurch etwas zu vergeben, dass ich einem so hoch verdienten Manne gegenüber, wie es Kronecker ist, den ersten Schritt zur Aussöhnung tue. Führt derselbe auch nicht zum Ziele, so brauche ich ihn auch nicht zu bereuen und habe mein Herz erleichtert. Ich schicke Ihnen beifolgend die Abschrift des Briefes, den ich heute an H. Kronecker gesandt habe.

Mit herzlichem Gruss Ihr ergebener Freund

G. CANTOR.

Friedrichroda 18. Aug. 1884.

Hochverehrter Herr Professor!

Möchten die folgenden Zeilen eine wohlwollende Aufnahme bei Ihnen finden. In Folge einer gewissen Schärfe in der Beurtheilung meiner wissenschaftlichen Arbeiten bin ich, nicht ohne meine eigene Schuld, in einen Gegensatz zu Ihnen hineingeraten, aus dem ich mich aufs Tiefste heraussehne. Ich gebe mich der Hoffnung hin, dass Sie mir freundlichst Gelegenheit geben werden, eine Verständigung anzubahnen, die zu einer Aussöhnung führen möchte. Es giebt ja nichts Trostloseres, als ein Zwiespalt, zumal ein solcher, der in wissenschaftlichen Gegensätzen seinen letzten Grund hat und zumal in einer Wissenschaft, wie die Mathematik, wo keine Differenzen herrschen sollten.

Wenn, wie ich hoffe, es mir vergönnt sein wird, zum Schlusse der Herbstferien nach Berlin zu kommen und Sie dort anzutreffen, wird es mir vielleicht gelingen, durch genauere Erklärung meiner Arbeiten Sie demjenigen, was ich Mengenlehre nenne, geneigter zu stimmen, so dass Sie den einen oder andern Gedanken darin für annehmbar oder nicht ganz schlecht halten, oder auch mir die Überzeugung beibringen, dass ich in dem oder Jenem geirrt habe, was ja Jedem passieren kann.

Dass die Aussöhnung nicht mit einem Male geschehen kann, verhehle ich mir nicht; so bitte ich Sie heute nur, mir bei der *allmählichen* Ausgleichung *aller* Gegensätze gütigst behilflich zu sein, wofür ich Ihnen stets dankbar bleiben werde . . .

Mit der Bitte, mich Ihrer Frau Gemahlin respektvoll zu empfehlen bin ich hochachtungsvoll Ihr ergebenster

G. CANTOR.

Nachdem die Antwort Kronecker's an ihn eingelaufen war, schreibt er alsbald an Mittag-Leffler

Friedrichroda den 23. Aug. 1884.

Mein lieber Freund!

Von Kr. erhielt ich heute eine sehr liebenswürdige ausführliche Antwort auf meinen Brief, aus welcher für mich aufs unzweifelhafteste hervorgeht, dass er die von mir angebotene Hand *annimmt* und dass unser persönliches Verhältniss bei aller Verschiedenheit in wissenschaftlichen Ansichten wieder ein *vollkommen gutes werden wird*. Ich kann Ihnen nicht sagen, wie glücklich mich diess macht; denn ich war mir bewusst, innerlich mich *zu sehr* dem Unmuth über die mir von ihm gewordene Opposition hingegeben zu haben und nun lebe ich in dem frohen Gefühle, dass selbst die starke Verschiedenheit in unsern wissenschaftlichen Ansichten mit einem freundschaftlichen Verhältniss verträglich sein wird.

Wenn ich auch nicht hoffen kann, ihn in allen Fragen auf meine Seite zu ziehen, denn er hat *sich in seine Ansichten doch schon zu sehr eingelebt* und die meinigen sind zum Theil neu und ungewöhnlich, so weiss ich doch jetzt, dass ich von nun an meine Theorien weiter verfolgen kann, ohne in persönliche Feindschaft zu gerathen.

Besonders aber freut es mich, dass er jetzt auch in ein freundlicheres Verhältniss zu Ihren schönen funktionentheoretischen Arbeiten wird treten müssen, in denen Sie so gütig waren, auf meine Theorien Bezug zu nehmen. Denn es war mir ungemein schmerzlich, von Ihnen die unnachsichtigen Urtheile Kr.'s über Ihre Arbeiten zu hören; ich musste mir sagen, dass ich Schuld daran bin, dass auch Ihr Verhältniss zu Kr. getrübt wurde; nun wird hoffentlich auch diess sich bald ändern.

Wenn Sie sich dafür interessiren, so schicke ich Ihnen gelegentlich Kr.'s Brief. Er schreibt mir darin auch, dass er demnächst en passant seine Ansichten über die streitigen Punkte veröffentlichen werde. *Damit bin ich sehr einverstanden*, ich glaube aber nicht, dass sein Standpunkt aufrecht erhalten bleiben kann. Meine Ansichten, die ich in den »Grundlagen« und in den späteren Arbeiten niedergelegt habe und noch hoffentlich weiter entwickeln werde, sind, das bin ich überzeugt, die umfassenderen und zeitgemässeren. Es schadet aber gar nichts, dass Kr. seine Theorie publizieren will.

In der Hoffnung gelegentlich wieder von Ihnen zu hören in herzlicher Freundschaft

Ihr G. CANTOR.

Die gute Wirkung der Kroneckerschen Antwort erwies sich auch darin, dass er alsbald einen Dankesbrief an Kronecker richtete, schon wesentlich sachlichen Inhalts; er versuchte, ihm seine »Transfiniten« sozusagen schmackhafter zu machen.

Sein Aufenthalt in Friedrichroda dauerte noch weitere drei Wochen. Sie taten ihm wohl und verhalfen ihm dazu, sich selbst vollständig wiederzufinden. So schreibt er in dem Briefe vom 9. Sept., in dem er seine bevorstehende Reise nach Berlin berührt:

... »Dann besuche ich auch Herrn Kronecker und will sehen, ob Ihre gute Meinung von meiner Überredungsgabe sich an ihm bewähren wird; ich erwarte dies nicht, denn es handelt sich hier *gewissermassen* um eine *Machtfrage* und die kann niemals durch Überredung entschieden werden; es wird sich fragen, welche Ideen mächtiger, umfassender und fruchtbarer sind, die Kronecker's oder die meinigen; nur der Erfolg wird nach einiger Zeit unsern Kampf entscheiden!!»

Vier Wochen später fand die Begegnung zwischen Cantor und Kronecker in dessen Hause statt; über sie berichtet der folgende Schlussbrief.

Mein lieber Freund!

Berlin 9. Oct. 84.

Sie wollen zwar, so scheint es, nichts mehr von mir wissen, indessen will ich Ihnen doch mittheilen, wie meine gestrige Unterredung mit Herrn Kr. ausgefallen ist. Ich kam um sieben Uhr Abends, um Visite zu machen, hin, er bat mich aber sehr zum Thee en famille zu bleiben, was ich auch that; die Unterredung dauerte bis 1 Uhr Nachts. Sie werden sich denken können, dass ich diplomatisch mich sehr zusammennahm und es selbst, wenn auch nur tropfenweise, an den ihm so süßen Früchten der Schmeichelei nicht fehlen liess; so wenig ernst es mir damit ist, so amusant erscheint es mir, zu beobachten, wie dieser Mann für so schaaale Kost empfänglich ist, während die wichtigsten Wahrheiten ihm in das eine Ohr hinein, aus dem andern wieder herausgehen.

Nicht ohne Belang erscheint es mir, dass er mit seinen Marotten durch den Erfolg meiner Arbeiten aus der Offensive *in die Defensive* gerathen ist. Wie er mir sagte, will er nächstens seine auf Arithmetik und Funktionentheorie bezüglichen Ansichten veröffentlichen. Nur zu, ich wünsche dazu Glück!

Die sechsstündige Unterhaltung, welche ich mit ihm geführt, hat keinen einzigen neuen Gedanken seinerseits zu Tage gefördert, und was er gegen meine transfiniten Zahlen vorbringt, ist nichts anderes, als was vor zweitausend Jahren von der griechischen *Skopsis* viel geistreicher gegen das Actual unendliche gesagt worden ist; die Wiederholung dieser Argumente, resp. Sophismen, selbst im Munde eines so gewandten und wohlsituirten Mannes wie Herr Kr. macht nicht, dass sie stärker, überzeugender und zutreffender werden. Ich bedaure diejenigen, welche sich durch die Titel des Herrn Kr. veranlasst sehen, seine Agitationen

gegen Ihre bedeutende functionentheoretische Arbeit für berechtigt zu halten und ich bin völlig ausser Stande zu begreifen, wieso die Herren Weierstrass und Hermite, vermuthlich gegen ihre eigene bessere Überzeugung, die Angriffe Kronecker's gegen meine Theorien favorisiren können. Was das persönliche Verhältniss zu Kronecker anbetrifft, so ist und bleibt es ein vortreffliches, nachdem ich ihm in versöhnlichster Weise entgegengekommen und nachdem er in liebenswürdigster Weise die von mir ihm dargebotene Hand acceptirt hat . . .».

Damit fand diese Episode ihren Abschluss. Er bedeutete nur den äusseren Frieden, der innere war durch den wissenschaftlichen Gegensatz ausgeschlossen. Kronecker's nicht schweigende Gegnerschaft war und blieb der schwarze Punkt seines Lebens. Noch oft wird dies in den späteren Briefen gestreift, besonders in denen des Jahres 1885, die der Vorbereitung der Weierstrassfeier zu Ehren seines 70ten Geburtstages dienten, und bei dem Plan, ihm eine Büste von Künstlerhand zu überreichen. Immer sind es wirkliche oder vermeintliche »Intriguen« Kronecker's, die ihn beschäftigen. Nur ein Brief möge noch eine Stelle finden; er stammt aus dem Jahr 1891, als sich Cantor mit den Vorbereitungen zur Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Halle beschäftigte. Am 5. September schreibt er über ihn:

»Vor einem halben Jahre habe ich ihm den *Eröffnungsvortrag* in unserer mathematischen Section offerirt und er hat diese Offerte *mit grosser Befriedigung* angenommen.

Nun glaubte ich, dass er durch *meine Courtoisie* bewogen werden würde, *wenigstens in diesem Sommer* seine Feindseligkeiten gegen mich einzustellen. Allein ganz im Gegentheil! Zufällig erhalte ich *in meinen Besitz* eine Nachschrift seiner in diesem Sommersemester über den Zahlbegriff an der Universität Berlin gehaltenen öffentlichen Vorlesung und habe hier *schwarz auf weiss* den Beweis, dass er in der schamlosesten Weise und *ohne jeden Versuch einer wissenschaftlichen Begründung* meine mathematischen Arbeiten vor seinen unreifen urtheilslosen Zuhörern *herabgesetzt* hat. Was sagen Sie dazu?»

Ich habe die vorstehenden Briefe ohne Kürzungen und ohne jeglichen inneren Commentar abgedruckt. Man mag fragen, zu wessen Nutz und Frommen es geschieht, ob es nicht besser unterblieben wäre, und ob es nicht geeignet ist, das Andenken an erste mathematische Persönlichkeiten zu verunglimpfen. Darauf habe ich das folgende zu erwidern. Was zunächst mich selbst betrifft, so habe ich mich bereits an anderer Stelle über den Gegensatz Cantor—Kronecker

ausgesprochen¹, die Schlussworte, die ich hier wiederhole, lauten: »hier habe — so bedauerlich es ist, es sagen zu müssen — der Kroneckersche Genius einmal versagt«. Ausserdem gehören Kronecker und Cantor heute bereits der Geschichte an; die Wissenschaft hat sich über ihr Verhältnis, ihre beiderseitigen Leistungen und Verdienste längst ein Urteil gebildet; so besteht keine Gefahr, dass sich dies auf Grund der Briefe ändern könnte. Und was Cantor selbst betrifft, so ist seine Persönlichkeit von so hohem Wert und Interesse, dass wir es als einen reizvollen Gewinn betrachten dürfen, wenn die ungewöhnliche Eigenart seines Naturells durch die Briefe in so lebendiger und drastischer Form für Jedermann zu Tage tritt. Er schreibt einmal (^{19/9} 84), dass »er seine Briefe schnell und sofort ins Reine schreibe«; sie enthalten also gerade das, was nach Zeit und Umständen in ihm war und aus ihm herausdrängte, und darin besteht ein Hauptreiz, den sie ausüben. Zu alledem aber kommt — und das ist der innerste Grund für die Veröffentlichung — das folgende: Die Briefe stempeln, gerade wegen aller ihrer Übertreibungen, das Verhalten von Kronecker zu Cantor zu einem Schulbeispiel dafür, wie unheilvoll es für den Einzelnen und die Wissenschaft ausschlagen kann, wenn neue Gedanken eines Jüngeren an machtvoller Stelle in der Weise abgelehnt und befeindet werden, wie es durch Kronecker leider geschehen ist.

In den »Grundlagen« hat Cantor bekanntlich seinen wissenschaftlichen Wahlspruch in die Form gesetzt: »Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit«.² Er selbst war gern bereit, diese Freiheit, die er für den eigenen Ideenkreis vermisste, jedem jungen Forscher zuzuerkennen, der mit selbständigen Gedanken in die Wissenschaft eintrat; so schreibt er z. B. am ^{20/10} 84: »Ich liebe an jungen Mathematikern nichts mehr als Sinn für Freiheit und Unabhängigkeit und bin hierin das Gegentheil des Herrn Kronecker, an dessen Adresse ganz speziell meine Apologie der Freiheit innerhalb der Mathematik, die Sie in § 8 meiner Grundlagen finden, ebensowohl, wie die mittlere Partie des § 4 derselben Schrift, gerichtet war, doch scheint er diess bis jetzt nicht bemerkt zu haben«.³

Und diese so verstandene Freiheit des Schaffens hätte ihm auch vollständig genügt. Sie war das, wonach er geizte; ein besonderes Lob seiner Leistungen verlangte er keineswegs. Einige Belege dafür aus den Briefen mögen hier folgen:

¹ Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. Bd. 31 (1922), S. 99.

² In § 8; vgl. auch Math. Ann. Bd. 21, S. 564.

³ So schreibt auch M. L. (^{4/5} 83): »Zuerst meinen wärmsten Dank für Ihr edles und wahrhaft wissenschaftliches Benehmen gegen Herrn Bendixson«.

Im Frühjahr 1884 machte er eine Reise nach Paris. Er hatte gelegentlich nur erfahren, dass »ein jüngerer talentvoller Pariser Mathematiker sich mit den Grundlagen ennuyiert habe.« Die Benutzung seiner Arbeiten durch Poincaré in den Acta III (S. 77), die den Auftact zu dem Siegeszug seiner Ideen bildet, war ihm offenbar entgangen, »ich weiss nicht — schreibt er am $1/1$ 84 — von welcher Poincaréschen Arbeit Sie sprechen, in welcher er von meiner Theorie Gebrauch gemacht habe«. Und weiter am $6/1$: »der in Ihrem Brief vom $28/12$ ausgesprochene Gedanke, dass auch die französischen Mathematiker anfangen würden, sich bald für meine Arbeiten zu interessieren, will mir nicht recht einleuchten, . . . denn so lange ich wissenschaftlich arbeite, sind meine Arbeiten von Kronecker systematisch angegriffen und als leere Phantasieen, ohne realen Boden verdächtigt worden«. So erwartete er auch, als er Ostern 1884 Paris besuchte, keine näheren Kenntnisse seines Schaffens. »Ein Eingehen auf meine Arbeiten bin ich weit entfernt zu beanspruchen«, schreibt er sogar am $25/3$. Übrigens konnte er mit Poincaré in Paris nur eine kurze Unterredung haben; er lernte durch sie wenigstens, dass Poincaré, wie ihm schien, »ganz genau seine Arbeiten in den Acta und ihre Beziehungen zur Funktionentheorie kannte«.

Den gleichen Character zeigt sein Verhalten, als (1885) Mittag-Leffler von einer ihm für die Acta gesandten Arbeit (sie betraf die allgemeine Theorie der Ordnungstypen) schrieb, er sei überzeugt, es sei besser, ihre Publikation zurückzustellen.¹ »Den in ihrem freundlichen Schreiben enthaltenen Ratschlägen — schreibt er am $15/3$ — bin ich durchaus zugänglich. Sie theilen mir als mein Freund diese Überzeugung mit, ich bin Ihnen für diesen erneuten Beweis Ihrer Freundschaft dankbar«. Und weiter am $26/9$ 85: »Eine Äusserung von Weierstrass veranlasst mich, Ihnen sofort zu schreiben und Sie zu bitten, mein längeres Schweigen nicht falsch zu deuten . . . Der Umstand, dass Ihnen meine Typentheorie für die Acta nicht geeignet erschien, spielt bei mir keine Rolle; es ändert dies nicht das Geringste in meinem Verhältnis zu Ihnen«. Von besonderem Interesse erscheint in dieser Hinsicht eine Äusserung vom $31/1$ 84 (also vor dem Depressionszustand) über sich und seine Leistungen: »Hoffentlich wird Ihnen auch diese neue Nummer gefallen; namentlich freue ich mich stets darüber, wenn Sie die Kunst der Stylistik und die Oeconomie der Darstellung loben, denn darauf verwende ich allerdings einige Mühe, und wenn es gut gelingt, so ist dies mein eigenes Werk; was das übrige betrifft, so ist dies nicht mein Verdienst,

¹ Es handelt sich wohl um das, was später (1887) in der Zeitschrift für Philosophie Bd. 92 erschienen ist.

ich bin in Bezug auf den Inhalt meiner Arbeiten nur Berichterstatter und Beamter». Wahrlich eine Äusserung, die das Gegentheil von dem darstellt, was man Anmassung oder Überheblichkeit nennen könnte. Und als Mittag-Leffler im Jahr 1905 sein Bild für die Acta wünscht, sendet er es ihm freilich, fügt aber hinzu: »Lieber wäre es mir, wenn Sie mein Bild nicht publizieren, denn ich finde, es wäre eine viel zu grosse Ehre für mich».

Über 10 Jahre hatte das Zerwürfnis mit Kronecker an ihm genagt, ehe es in den Briefen von 1884 zum Ausdruck kam; es wäre aber grundverkehrt, darin die alleinige Schuld an der sommerlichen Depression zu erblicken, obwol Cantor selbst in dem obigen Brief vom $18/8$ es behauptet. Der Kampf mit dem Continuumproblem, den er das ganze Leben hindurch gekämpft hat, und an den er seine beste Kraft setzte, hat daran sicherlich nicht minderen Anteil. Die letzte Annalenarbeit aus dieser Zeit, vom 15. November 1883 unterzeichnet, schliesst mit den Worten (Bd. 23, S. 488): »Hieraus wird mit Hilfe der in Bd. 21, S. 582 bewiesenen Sätze geschlossen werden, dass das Linearcontinuum die Mächtigkeit der zweiten Zahlklasse hat». Es handelt sich a. a. O. um die wolbekannten Sätze, die die Mächtigkeit der zweiten Zahlklasse und ihrer Teilmengen betreffen. Er war überzeugt, in ihnen das sichere Mittel zur Bestimmung der Continuummächtigkeit zu besitzen; sie sollten ihm die Krönung des Gebäudes bringen. Sicher liess er nicht ab, daran immer wieder zu arbeiten. Ein jeder muss erfahren, wie das Gelingen die Schaffenskraft steigert, wie das dauernde Misslingen sie zermürbt. Als das Jahr 1884 nach vergeblichem Mühen zu Ende ging, hatte es den Entschluss in ihm gereift, den mathematischen Problemen zu entsagen. Einige Briefe mögen das Entstehen dieses ihm als notgedrungen erscheinenden Entschlusses schildern.

Schon am $26/8$ hatte er von Friedrichroda aus geschrieben:

»Ich bin jetzt im Besitz eines höchst einfachen Beweises für den wichtigsten Satz der Mengenlehre, dass das Continuum die Mächtigkeit der Zahlenklasse II hat.

Ich zeige zuerst, dass es *abgeschlossene* Punktmengen der *zweiten* Mächtigkeit giebt. Sei P eine solche. Nach einem bekannten Satz zerfällt P in eine perfecte Menge S und eine andere R der ersten Mächtigkeit.

S als *Theilmenge* von P kann keine höhere Mächtigkeit haben als P ; S hat also (da perfecte Mengen nicht von der ersten Mächtigkeit sein können) die *zweite* Mächtigkeit. Jede perfecte Menge hat aber die Mächtigkeit des Continuum. Folglich hat auch das Continuum die *zweite* Mächtigkeit.

Sie sehen also, es kommt alles jetzt darauf hinaus, nur eine einzige *abgeschlossene* Menge zweiter Mächtigkeit zu definiren. Wenn ich Alles in Ordnung gebracht, schreibe ich Ihnen das Genauere.»

Es wird nicht überraschen, dass ihm die Aufstellung einer abgeschlossenen Menge zweiter Mächtigkeit nicht geglückt ist. In ganz anderer Richtung bewegen sich die folgenden Briefe, die über das Mühen des Winters berichten. Er hatte inzwischen den Begriff der »homogenen« Mengen steigender Mächtigkeit eingeführt, und hoffte wohl, in ihnen einen fördernden Hilfsbegriff für das Problem erlangt zu haben.¹ Der erste Brief lautet:

Halle ¹⁴/₁₁ 1884.

Mein lieber Freund.

... Was ich Ihnen heute zu schreiben habe, ist eine *Berichtigung*, sowohl von gewissen Sätzen meines letzten grösseren Briefes vom 20ten Oktober², wie auch von einer sich auch in meinen Arbeiten, wenn auch nur mehr oder weniger vermuthungsweise und nicht ganz sicher ausgesprochenen Behauptung. *Glücklicherweise habe ich diese Behauptung niemals als Beweismittel gebraucht, so dass meine übrigen gedruckten Sätze nirgends darunter zu leiden haben.*

Sie wissen, dass ich oft im Besitze eines strengen Beweises dafür zu sein glaubte, dass das Linearcontinuum die Mächtigkeit der zweiten Zahlklasse besitze; immer wieder fanden sich Lücken in meinen Beweisen und stets strengte ich von neuem meine Kräfte in derselben Richtung an und wenn ich dann wieder glaubte am heissersehnten Ziele angelangt zu sein, so prallte ich plötzlich zurück, weil ich in einer versteckten Ecke einen Fehlschluss wahrnahm.

Und als ich in diesen Tagen wieder mich um denselben Zweck abmühte, da fand ich was? Ich fand einen *strengen* Beweis dafür, dass das Continuum *nicht* die Mächtigkeit der zweiten Zahlklasse und noch mehr, dass es überhaupt keine durch eine Zahl angebbare Mächtigkeit hat.

So fatal ein Irrthum, den man so lange gehegt hat, auch sei, die endgültige Beseitigung ist dafür ein um so grösserer Gewinn.

Sie werden also hieraus ersehen, dass in meinem Briefe vom 20. October

¹ Diese Meinung bildete ich mir in einem Gespräch, das sich im Jahre 1904 an den Heidelberger Congress und den Königschen Vortrag schloss.

² Vgl. S. 18 u 22. dieses Aufsatzes.

der Satz (*M*) resp. die Formeln (10) und (11) nicht richtig sind.¹ Alles übrige wird nicht tangiert, nur in dem Satze (*L*) muss auf der rechten Seite noch ein Glied hinzukommen, welches eine *homogene* Menge darstellt von der Mächtigkeit des Linearcontinuum. Wunderbarer Weise folgt also aus diesem Resultate und aus meinen in Acta IV bewiesenen Sätzen (die völlig richtig sind), dass es *keine abgeschlossenen* Mengen von der *zweiten, dritten* etc. Mächtigkeit giebt, sondern nur von der *ersten* Mächtigkeit und von der Mächtigkeit des *Linearcontinuum*.

Es wird Sie diese Seite des Resultats im Interesse der Functionentheorie gewiss freuen, da Sie hier bei den singulären Punkten nur diese beiden Fälle zu berücksichtigen haben.

Für heute bitte ich Sie mit dieser kurzen Ankündigung fürlieb zu nehmen; ich bin selbst so erstaunt darüber, wie ich es Ihnen nicht sagen kann.»

Aber schon am nächsten Tage kann er diesen Brief zurücknehmen, er schreibt, völlig ruhig und kurz:

Halle ^{15/11} 1884.

Mein lieber Freund.

Die Gründe, von denen ich Ihnen gestern schrieb, gegen den Satz von der *zweiten* Mächtigkeit des Linearcontinuum, habe ich heute von Neuem *widerlegt*; es treten also wiederum alle Gründe dafür, dass das Continuum die zweite Mächtigkeit hat, unbesiegt in den Vordergrund und ich will hoffen, dass ich endlich diese wichtigste Frage für oder gegen endgültig bald entscheiden werde. Glücklicherweise hängen alle meine übrigen Sätze von diesem nicht ab; und ich schicke Ihnen, was ich habe, in kurzer Zeit für die Acta.»

Die ausführliche Aufklärung folgte am nächsten Tage; sie lautete:

Halle 16. Nov. 1884.

Mein lieber Freund.

Sie werden meine Briefe vom 14. und 15. Nov. erhalten haben; ich bin Ihnen Aufklärung schuldig, was mich vorgestern in Bezug auf die Richtigkeit der Behauptung, dass das Continuum die IIte Mächtigkeit hat, wie auch in Bezug auf die Richtigkeit einiger Stellen meines Briefes vom 20ten Okt. stutzig gemacht hat und wie ich gestern wiederum bei nüchterner Betrachtung mich überzeugt habe, dass die vorgestrigen Bedenken wertlos sind.

¹ Es sind die Formeln, die der Gleichung (16) in Acta VII (S. 118) entsprechen und die Zerlegung jeder Menge in homogene Bestandteile jeder endlichen oder transfiniten Ordnung darstellen.

Als ich vor einem Jahre die in Acta IV gedruckte Arbeit über die Mächtigkeit der *perfecten* Mengen schrieb, fand ich unter Anderen auch folgenden ganz richtigen Satz (*S*).

»Ist (φ) eine im Intervall $(a \dots b)$ gelegene und darin *überalldichte* Menge, zu welcher a und b *nicht* mit gehören, ist (ψ) eine im Intervall $(c \dots d)$ gelegene und darin *überalldichte* Menge, zu welcher c und d *nicht* mit gehören, und sind (φ) und (ψ) beide von der *ersten* Mächtigkeit, so kann man (φ) und (ψ) (auf unendlich viele Weisen) gegenseitig eindeutig so aufeinander beziehen, dass jede von ihnen eine *monotone* Funktion der andern wird».

Der Beweis wird *ganz ebenso* geführt, wie ich in Acta IV und in Ann. Bd. XXIII pag. 482 gezeigt habe, dass die dort mit $\{(a_n \dots b_n)\}$ bezeichnete *Intervallmenge* in *monotone Beziehung* zu der dort mit $\{\varphi_n\}$ bezeichneten Punktmenge gesetzt werden kann.

Nun wollte es mir vorgestern scheinen, dass ich den Satz (*S*), der wie gesagt völlig richtig ist, auch in dem Falle beweisen könne, dass (φ) und (ψ) , alles andere ungeändert, *homogene Mengen zweiter Mächtigkeit* wären; ich habe mich jedoch in diesem Punkte, wie ich Ihnen gestern schrieb, *geirrt*. Wäre diese Modifikation des Satzes (*S*) richtig, so würde allerdings hieraus folgen, dass das Linearcontinuum *nicht* von der *zweiten Mächtigkeit* wäre. Denn gesetzt einmal, der so modifizierte Satz (*S*) wäre richtig, und gesetzt ferner, es wäre der Inbegriff *aller Zahlen* >0 und <1 von der zweiten Mächtigkeit, wir wollen diesen Inbegriff (φ) nennen, so würde auch der Inbegriff *aller irrationalen Zahlen* >0 und <1 ebenfalls eine *homogene Punktmenge zweiter Mächtigkeit* sein; wir wollen diesen Inbegriff (ψ) nennen. Daher liesse sich nach dem *modificirten* als richtig supponirten Satze (*S*) (ψ) als *monotone* Funktion von (φ) darstellen, die, wie leicht zu sehen, eine *stetige* Funktion der *stetigen* Variablen (φ) wäre; eine *stetige* Funktion einer stetigen Variablen nimmt aber *zweifellos* alle Werte >0 und <1 an, während doch (ψ) die rationalen Werte *nicht* annimmt.

Sie sehen also, dass allerdings aus der *supponirten* Gültigkeit des wie oben *modificirten* Satzes (*S*) aufs *unerschütterlichste* folgen würde, dass das Continuum nicht die *zweite Mächtigkeit* haben könnte.

Der Beweis, welchen ich für den *modificirten* Satz (*S*) zu haben glaubte, *ist aber hinfällig*; also sind auch die daraus von mir gefolgerten *Consequenzen hinfällig* . . .»

Die Bestimmung der Mächtigkeit des Continuum ist und bleibt eines der obersten Probleme der Mengenlehre. Wer den Mächtigkeitbegriff nicht etwa

ganz ablehnt, kann sich der Frage nicht entziehen, ob es zwischen den beiden von einander verschiedenen Mächtigkeiten der abzählbaren Menge und des Kontinuums noch andere Mächtigkeiten giebt oder nicht. Noch heute harren wir auf eine unbeanstandete Lösung; zumal auf eine, die die Einfachheit und Durchsichtigkeit besitzt, die Cantor's sämtlichen Begriffen und Beweisen anhaftet, die ihren Reiz ausmacht und ihren Sieg begründete; eine Lösung, die, mit Hilbert zu reden, der Mann auf der Strasse verstehen kann — was man leider auch von der Behandlung des Kontinuumproblems, die Hilbert selbst kürzlich gegeben hat, nicht sagen kann.

Ich zweifle nicht daran, dass der damalige Misserfolg auf Cantor die katastrophale Wirkung ausübte, die ich im Anfang andeutete. Sie war es wohl, die den durch Kampf und Bitterkeit Ermatteten bestimmte, das Ringen um das Kontinuumproblem zu beenden und sich seinen sonstigen Neigungen zu überlassen. Allerdings erscheint im Jahr 1885 noch die grosse Arbeit der Acta VII; ihren Inhalt hatte er aber im wesentlichen schon am $^{20/10}$ 84 an Mittag-Leffler mitgeteilt.¹ Nur mit Betrübnis liest man die Briefe, in denen er um die Jahreswende 84/85 seinen Entschluss ausspricht. Hat er doch sogar den Gedanken erwogen (nach dem Brief vom $^{20/10}$) das Ministerium zu ersuchen, ihn wenigstens in den Vorlesungen von der Mathematik zur Philosophie übergehen zu lassen. Ein Brief vom $^{22/9}$ mag wegen der eigentümlichen Schlusswendung zunächst hier folgen:

... »Ausserdem bin ich mit Untersuchungen über Anwendungen der Mengenlehre auf die Naturlehre der Organismen beschäftigt, auf welche sich die bisherigen mechanischen Prinzipien nicht anwenden lassen... Dazu müssen auch ganz neue mathematische Hilfsmittel geschaffen werden, die aber im Wesentlichen in dem von mir bearbeiteten Theile der Mengenlehre schon vorhanden sind. Mit diesen Ideen einer genaueren Ergründung des Wesens alles Organischen beschäftige ich mich schon seit 14 Jahren, sie bilden die eigentliche Veranlassung, weshalb ich das mühsame und wenig Dank verheissende Geschäft der Untersuchung von Punktmengen unternommen und in diesem Zeitraum keinen Augenblick aus den Augen verloren habe.«²

Wir wissen, dass es schliesslich noch ein ganz anderer Stoff war, der ihn

¹ Die S. 15 erwähnte Arbeit über Ordnungstypen stammt ebenfalls wesentlich aus dem Jahre 1884; er hatte sogar auch eine Arbeit über quadratische Formen für die Acta für den Beginn 1885 in Aussicht gestellt.

² Cantor dürfte sich darin wohl täuschen; zweifellos hat auch die Fourier-Reihe und die Verteilung der Ausnahmepunkte einen Anstoss zur Punktmengentheorie gegeben.

alsbald völlig gefangen nahm; seine Erwähnung erscheint zuerst in einem Briefe vom $^{17}/_{12}$:

»Es wird Sie vielleicht interessieren, dass ich im Verfolg der Studien, bei denen Sie mich vorigen Sonntag, als Sie mir die Ehre Ihres Besuches erwiesen, betroffen haben, immer mehr und mehr in der Überzeugung bestärkt werde, dass die von einigen Americanern und Engländern vertretene Ansicht über die Autorschaft der unter Shakespeare's Namen bekannten Dichtungen, welche zu den grossartigsten Schöpfungen aller Zeiten gehören, die richtige ist. Francis Bacon, er und nur er allein kann der Autor dieser Meisterwerke gewesen sein; denn es ist ein und derselbe Feuergeist, der uns in den Dramen einerseits und in den »Moral essays« sowie den übrigen Werken Bacons andererseits entgegentritt . . .«:

Die Schicksalswendung, von der ich im Anfang dieses Aufsatzes sprach, war damit leider eingetreten.¹

Den humorvollen Unterton seiner Stimmung, die der Brief vom $^{1}/_{1}$ 84 zeigt, hatte er übrigens wiedererlangt; möge insofern schliesslich ein Brief vom $^{2}/_{1}$ 85 hier folgen. Er betrifft die geplante Weierstrassfeier.

»Von Frau v. Kowalewski erhielt ich gestern Antwort . . . Sie scheint grosse Angst zu haben, dass sich an diese Sache Streitigkeiten unter den deutschen Mathematikern knüpfen, diese Angst ist unbegründet; ich habe ihr beruhigend geantwortet.

Die Sache liegt nämlich so, dass ich mit unserem Herrn von Méré² nicht gross anbinde, weil ich mich nicht mit Kleinigkeiten unnöthigerweise abgebe, und dass er seinerseits sich hütet, mit mir in offenen Streit zu kommen, weil er weiss, dass ich beim geringsten Anfang seinerseits mit dem schwersten Geschütz hervortreten und mit geschwungenem Pfeil ihn mitten ins Herz treffen werde; darum ist es viel vortheilhafter für ihn, im Dunkeln gleich einem Maulwurf sowohl Weierstrass und seinen Verehrern und Schülern, wie auch mir und der Mengenlehre den Boden zu unterwühlen.

Ausser uns beiden, dem Herrn von Méré und meiner Wenigkeit giebt es aber meines Wissens keine Kampfustigen und Sie werden mir daher zugeben, dass der Friede im mathematischen Europa z. Z. gesichert ist und ich bitte Sie, auch Ihrerseits die besorgte Frau v. Kow. darüber zu beruhigen.

¹ Wenn er auch am $^{26}/_{9}$ 85 schreibt, er sei seit geraumer Zeit wieder in rein mathematischen Untersuchungen. Ebenso beschäftigt sich ein Brief vom $^{2}/_{8}$ 85 mit einem mathematischen Problem.

² So bezeichnete er Kronecker seit einiger Zeit. Marquis von Méré, ein französischer Moralist, lebte 1610—1685.

Die Friedensaussichten sind aber noch um so grösser, als ich, wie Sie wissen, degoutirt von dem persönlichen Getriebe der heutigen Mathematik, nur noch mit einem Fusse dieses widerliche Territorium berühre und bald ganz demselben entfremdet werde; dann mögen nach Herzenslust die Herren Geometer von Frankreich, Deutschland, England und Italien um das goldene Kalb unseres Herrn von Méré herumtanzen, ich mache den Zauber seit Jahren schon nicht mit.»

Die wissenschaftliche Ausbeute der Briefe für die Mengenlehre ist nicht erheblich; ihr Inhalt besteht zumeist aus vorläufigen Mitteilungen von Dingen, die später in fertiger Form veröffentlicht worden sind. Wie bereits erwähnt, ist die Arbeit aus Acta VII schon im wesentlichen in einem Brief vom $^{20}/_{10}$ enthalten. Vielleicht interessiert es, dass Cantor sich zuvor mit Ludwig Scheeffer über die neu einzuführenden Bezeichnungen besprochen hat; »mit deren Wahl ich ausserordentlich vorsichtig bin, da ich von der Ansicht ausgehe, dass es für die Entwicklung und Ausbreitung einer Theorie gar nicht wenig auf eine glückliche möglichst zutreffende Namengebung ankommt«. Auch die am Ende der Acta-Arbeit erörterten physikalischen Gedanken (dass die materiellen Atome in erster, die Ätheratome in zweiter Mächtigkeit vorhanden sind) sind in dem genannten Brief schon enthalten.

Eine kleine, nicht mehr veröffentlichte Notiz betrifft einen in den »Grundlagen« enthaltenen Beweis, der nicht stichhaltig ist.¹ Er betrifft den Satz, dass *alle* linearen perfecten Mengen die Mächtigkeit des Linearkontinuums besitzen; Cantor hatte ihn zuvor nur für nirgends dichte Mengen bewiesen. Die Lücke des Beweises besteht darin, dass die Grenzpunkte der Intervallendpunkte in ihm ausser Betracht bleiben. Die Verbesserung sollte in der nächsten Annalenarbeit erscheinen. Da eine solche aber nicht mehr zu Stande kam, so mag der kurze Beweis (vom $^{11}/_{11}$ 84) hier folgen²:

Sei S *irgend* eine perfecte lineare Menge, so wird es eine endliche oder abzählbare unendliche Menge von Intervallen geben, die ich $(c_1 \dots d_1), \dots (c_v \dots d_v) \dots$ nenne, in denen S überalldicht ist und die folglich, weil S perfect ist, *ganz* zu S gehören. Die Differenz

$$S - \Sigma \overline{(c_v \dots d_v)}$$

bezeichne ich mit V , so dass

$$S \equiv \Sigma \overline{(c_v \dots d_v)} + V.$$

¹ Er findet sich in den Annalen Bd. 23, S. 486.

² Übrigens enthält auch die Arbeit Acta IV, S. 381 einen neuen Beweis.

Hier bedeutet $\overline{(c_v \dots d_v)}$ das Intervall $(c_v \dots d_v)$ mit Ausschluss der Endpunkte c_v und d_v . V ist alsdann in keinem Intervall überalldicht, weil sonst die Intervalle $(c_v \dots d_v)$ noch vervollständigt werden könnten, gegen die Voraussetzung.

V' ist ein Bestandtheil von S , weil S perfect ist, und es kann offenbar V' keinen Punkt mit den unvollständigen Intervallen $\overline{(c_v \dots d_v)}$ gemein haben, folglich ist V' in V enthalten und daher V eine abgeschlossene, in keinem noch so kleinen Intervall überalldichte Menge. Wir haben daher

$$V \equiv R + S_0,$$

wo R von der ersten Mächtigkeit und S_0 entweder gleich Null oder perfect ist; im letzteren Fall hat S_0 , weil diese Menge in keinem noch so kleinen Intervall überalldicht ist, die Mächtigkeit des Linearcontinuuums. So haben wir nun

$$S \equiv \Sigma \overline{(c_v \dots d_v)} + S_0 + R$$

und schliessen daraus leicht, dass auch S die Mächtigkeit des Linearcontinuuums hat.

Die mathematische Wissenschaft wird sich der Dankesschuld stets bewusst bleiben, die ihr Cantor gegenüber auch dafür obliegt, dass er mit unerschütterlicher Zuversicht an seine Schöpfungen glaubte und mit seiner ganzen Kraft für sie eintrat, so lange seine Natur Stand hielt. Ebenso sind wir aber auch demjenigen zu Dank verpflichtet, der damals als einziger Freund ihm die wissenschaftliche Treue hielt, trotz der mannigfachen Versuche, ihn davon abzubringen. Es ist der Begründer dieser Zeitschrift. Dies hier am Vorabend seines 80ten Geburtstages auszusprechen, sei die Gabe, die ich selbst mich beehre ihm darzubringen.¹

Im März 1926.

¹ Es sei hier auch folgende Stelle aus einem Brief M. L.'s vom $\frac{5}{4}$ 83 erwähnt, die an Cantors Definition des »Grösser« und »Kleiner« anknüpft. »Es könnte ja sein, dass sowohl M von derselben Mächtigkeit wie ein Teil von N , wie auch N von derselben Mächtigkeit wie ein Teil von M wäre. Ich glaube wohl, dass dann M und N dieselbe Mächtigkeit haben. Aber können Sie das auch beweisen? Dies wäre gewiss von Interesse.« Der erste Beweis dieses Äquivalenzsatzes stammt bekanntlich aus dem Jahre 1895.