SUR LA GÉNÉRATION DE SYSTÈMES RÉCURRENTS AU MOYEN D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE DIFFÉRENTIELLE

PAR

S. PINCHERLE

À BOLOGNE.

Le présent mémoire a pour objet principal la détermination du développement d'une fonction donnée en série ordonnée suivant les fonctions d'un système récurrent dont on connaît l'échelle de relation; mais pour arriver à ce résultat, je dois toucher à plusieurs autres questions, dont j'essaie de donner une idée dans le résumé qui suit.

Supposons donnée une équation linéaire récurrente entre $p + 1$ quantités qui dépendent d'un indice n; les coefficients de cette équation soient des polynômes entiers en n, du degré m. Une solution quelconque de cette équation aura pour fonction génératrice (au sens de LAPLACE) une intégrale d'une équation différentielle linéaire d'ordre m, dont le second membre sera, en général, un polynôme entier contenant m constantes arbitraires. A chaque détermination de ces constantes correspond une solution particulière de l'équation récurrente. En particulier, il existe une détermination spéciale des constantes, pour laquelle le système récurrent admet une série génératrice convergente dans un cercle qui est le plus grand possible: j'appelle ce système *l'intégrale distinguée* de l'équation récurrente, et par une méthode fondée sur la transformation que j'appelle de HEINE, je détermine cette intégrale distinguée. A côté de l'équation récurrente donnée il s'en présente une seconde que j'appelle *inverse* de la première, et dont les intégrales ont, avec celles de l'équation donnée, des relations remarquables. Supposons maintenant que, dans les coefficients de l'équation récurrente, il entre un paramètre x au premier degré; les intégrales de cette équation, ainsi que celles de son inverse, seront des fonctions de ce paramètre, et l'on demande s'il est possible, en général, de développer une fonction analytique donnée en série ordonnée selon les fonctions de ce système. On peut répondre affirmativement à cette demande; de plus, on arrive aisément à former les coefficients du développement en question et à en donner les conditions de convergence, au moyen de l'intégrale distinguée de l'équation inverse.

Je me permets d'insister sur l'importance que me semble présenter le concept d'intégrale distinguée d'une équation linéaire aux différences. Ce concept n'est autre, en effet, que la généralisation de celui de la fraction continue; car si l'on considère l'équation récurrente du second ordre

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + b_{n+1}p_{n-1},$$

et si p'_n, p''_n sont les deux intégrales particulières distinctes pour lesquelles

$$p'_0 = 1, \qquad p'_1 = a_1, \qquad p''_0 = 0, \qquad p''_1 = 1,$$

l'intégrale générale a la forme

$$p_n = \lambda p'_n + \mu p''_n;$$

or, si l'on détermine λ et μ en sorte que la série $\Sigma p_n x^n$ converge dans le cercle le plus grand possible, p_n est *l'intégrale distinguée* de l'équation récurrente, et en même temps le rapport $-\mu:\lambda$ des constantes correspondantes est précisément la valeur de la fraction continue dont la réduite $n^{\text{ème}}$ est $\frac{p'_n}{p''_n}$. Le développement que j'obtiens dans ce mémoire peut donc être regardé comme la généralisation du développement d'une fonction donnée en série ordonnée suivant les dénominateurs des réduites d'une fraction continue algébrique donnée; développement qu'a donné HEINE,[1] sans toutefois en faire connaître les conditions de convergence.

Pour l'historique de la question que je traite dans ce travail, je dois ajouter que c'est M. POINCARÉ qui, le premier, a reconnu les diffé-

---

[1] *Handbuch der Kugelfunctionen,* Zweite Auflage, Bd. 1, p. 293.

rentes manières d'aller à l'infini des intégrales d'une équation aux différences dont les coefficients sont des polynômes en n,[2] et c'est son travail qui m'a suggéré l'idée d'entreprendre la recherche de l'intégrale distinguée, que cet auteur doit sans doute avoir entrevue.

Équation linéaire aux différences finies.

1. Je prends comme point de départ une équation différentielle linéaire d'ordre m, à coefficients polynômes et de la forme:

$$\sum_{k=0}^{m}(a_{0.k}t^r + a_{1.k}t^{r-1} + \ldots + a_{r.k})t^k \frac{d^kU}{dt^k} = t^\mu R(t), \tag{1}$$

où r et μ sont des nombres entiers positifs et où $R(t)$ est un polynôme entier de degré $r-1$. Pour abréger, j'indiquerai par Δ l'opération exécutée sur U dans le premier membre, en sorte que l'équation (1) pourra s'écrire

$$\Delta U = t^\mu R(t).$$

Je suppose les coefficients $a_{0.m}$ et $a_{r.m}$ essentiellement différents de zéro.

En même temps, je considère l'équation aux différences finies ou équation récurrente d'ordre r

$$a_r(n)p_{n+r} + a_{r-1}(n)p_{n+r-1} + \ldots + a_0(n)p_n = 0, \tag{2}$$

où l'on a posé

$$a_h(n) = a_{h.m}(n+h)_m + a_{h.m-1}(n+h)_{m-1} + \ldots + a_{h.1}(n+h)_1 + a_{h.0},$$

avec

$$h = 0, 1, 2, 3, \ldots, r,$$

et

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1),$$

et j'appelle l'équation (1) *équation génératrice* de l'équation (2).

---

[2] *Sur les équations linéaires aux différentielles* etc. American Journal of Mathematics, Vol. 7, p. 46.

2. En donnant des valeurs arbitraires à r consécutives des quantités p_n, par exemple à

$$p_\mu, p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+r-1},$$

on détermine, au moyen de l'équation (2), le système de ces quantités depuis $p_{\mu+r}$ jusqu'à l'infini, en supposant, comme nous le ferons désormais, que l'équation

$$a_r(n) = 0 \tag{3}$$

n'ait pas de racines entières. Chaque système récurrent p_n ainsi déterminé sera une intégrale particulière de l'équation (2), et au moyen de r intégrales particulières

$$p_{1.n}, p_{2.n}, \ldots, p_{r.n}$$

telles que le déterminant

$$\Sigma \pm p_{1.\mu} p_{2.\mu+1} \ldots p_{r.\mu+r-1}$$

soit différent de zéro, toute autre intégrale pourra s'exprimer par la formule

$$p_n = \lambda_1 p_{1.n} + \lambda_2 p_{2.n} + \ldots + \lambda_r p_{r.n},$$

où les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont indépendantes de l'indice n.

3. Indiquons par U la série

$$U(t) = \sum_{n=\mu}^{\infty} p_n t^n$$

et par $U', U'', \ldots, U^{(m)}, \ldots$ ses dérivées. Selon une locution très employée jadis en analyse, notamment par Laplace, cette série pourra s'appeler la *fonction génératrice* du système p_n.

En multipliant le polynôme $a_h(n)$ par $p_{n+h} t^{n+h}$ et en sommant depuis $n = \mu$ jusqu'à l'infini, on obtient l'expression

$$a_{h.m} t^m U^{(m)} + a_{h.m-1} t^{m-1} U^{(m-1)} + \ldots + a_{h.0} U$$
$$-\{a_h(\mu - h) p_\mu + a_h(\mu - h + 1) p_{\mu+1} t + \ldots + a_h(\mu - 1) p_{\mu+h-1} t^{h-1}\} t^\mu.$$

Si donc on multiplie l'équation (2) par t^{n+r}, et si l'on somme ensuite depuis l'ndice μ jusqu'à l'infini, on obtient en appliquant l'expression précédente et en ordonnant convenablement:

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{m}(a_{0.k}t^r + a_{1.k}t^{r-1} + \ldots + a_{r.k})t^k U^{(k)}$$
$$= t^\mu \sum_{h=1}^{r} t^{r-h}[a_h(\mu - h)p_\mu + a_{h+1}(\mu - h)p_{\mu+1} + \ldots + a_r(\mu - h)p_{\mu+r-h}].$$

Nous obtenons ainsi une équation de la forme (1), ce qui justifie le nom que nous lui avons donné de génératrice de l'équation (2), puisque toute intégrale de l'équation (2) a pour fonction génératrice une intégrale de (1); et l'on voit que, réciproquement, toute intégrale de cette dernière équation développable en série de puissances de t, est la fonction génératrice d'une intégrale de (2).

Le second membre de l'équation (4) dépend linéairement des indéterminées $p_\mu, p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+r-1}$; son degré d'indétermination est donc le même que celui du système p_r. On peut d'ailleurs voir que si l'on se donne le second membre de l'équation (1) sous la forme

$$R(t) = b_1 t^{r-1} + b_2 t^{r-2} + \ldots + b_r$$

et que l'on identifie cette équation avec la (4), on a

$$(5) \qquad b_h = a_h(\mu - h)p_\mu + a_{h+1}(\mu - h)p_{\mu+1} + \ldots + a_r(\mu - h)p_{\mu+r-h}, \qquad (h=1,2,3,\ldots,r)$$

d'où l'on peut déduire sans ambiguité les valeurs de $p_\mu, p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+r-1}$. En effet, le déterminant du système (5) n'est autre que

$$a_r(\mu - 1)a_r(\mu - 2)\ldots a_r(\mu - r),$$

lequel n'est pas nul, d'après l'hypothèse que l'équation (3) n'a pas de racines entières.

4. Considérons maintenant l'équation linéaire sans second membre

$$(6) \qquad \Delta U = 0$$

dont les points singuliers sont, outre $t = 0$ et $t = \infty$, les racines de l'équation

$$(7) \qquad a_{0.m}t^r + a_{1.m}t^{r-1} + a_{2.m}t^{r-2} + \ldots + a_{r.m} = 0,$$

racines que j'indiquerai par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, en supposant

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq |\alpha_3| \ldots \leqq |\alpha_r|.$$

L'équation déterminante de (6) par rapport au point singulier $t = 0$ est

$$a_r(\rho - r) = 0;$$

or, cette équation n'ayant pas de racines entières, il s'ensuit que l'équation sans second membre (6) n'admet pas d'intégrale développable en série de puissances entières de la variable dans un domaine du point $t = 0$. Par conséquent, l'équation à second membre (1) aura une seule intégrale particulière développable en une série de cette forme

$$U = \Sigma p_n t^n$$

dans le domaine du point $t = 0$, dont le rayon de convergence sera l'un des modules $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_r|$, et en général le plus petit. On a donc, suivant une notation souvent employée:

$$p_n \sim \frac{1}{|\alpha_i|^n}$$

et même

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{\alpha_i},$$

où l'on doit supposer en général $i = 1$. Il peut cependant se faire que par un choix convenable des arbitraires $p_\mu, p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+r-1}$ (ou par un choix convenable de $R(t)$, ce qui revient au même) on puisse avoir $i > 1$ et même $i = r$. Lorsque ce dernier cas se présente, la série $\Sigma p_n t^n$ est convergente dans le cercle le plus grand possible et je dis alors que le système p_n correspondant est *l'intégrale distinguée* de l'équation (2). Nous verrons bientôt comment on peut démontrer l'existence de cette intégrale et la déterminer.

La transformation de Heine.

5. Avant d'aller plus loin, il nous faut étudier une opération fonctionnelle sous forme d'intégrale définie, qui nous sera très utile par

la suite. Soit $f(t)$ une fonction analytique, apte à l'intégration le long d'une ligne c. Je dis que l'on opère sur cette fonction la transformation de HEINE[1] lorsqu'on en déduit une nouvelle fonction $\varphi(u)$ par la position

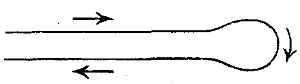
$$\varphi(u) = \int_{(c)} \frac{f(t)\,dt}{t-u}. \tag{8}$$

En indiquant par H l'opération ainsi exécutée sur $f(t)$, l'égalité précédente pourra donc s'écrire

$$\varphi(u) = H(f(t));$$

cette opération est évidemment distributive.

6. Prenons comme chemin c une ligne qui venant de l'infini dans une certaine direction, y retourne dans le même direction, comme dans la figure ci-contre, et supposons que la fonction $f(t)$ soit infinie d'un ordre fini ρ (positif, nul ou négatif) pour $t=\infty$, en sorte que l'on puisse déterminer un nombre entier et positif μ tel que l'on ait



$$\rho - \mu = -r - \varepsilon,$$

où r est un entier donné positif et ε une quantité positive. L'expression

$$H\left(\frac{f(t)}{t^\mu}\right)$$

est alors évidemment convergente.

7. On a, en posant

$$\varphi(u) = u^\mu H\left(\frac{f(t)}{t^\mu}\right),$$

que

$$\varphi(u) = \int_{(c)} f(t)\left(\frac{1}{t-u} - \frac{1}{t} - \frac{u}{t^2} - \ldots - \frac{u^{\mu-1}}{t^\mu}\right)dt,$$

[1] A cause de l'usage qu'en a fait ce géomètre dans le cas où $f(t)$ est l'intégrale d'une équation linéaire du deuxième ordre. (V. *Handbuch der Kugelfunctionen,* Bd. 1, p. 389 et Journal de Crelle, t. 60: *Über die Lamé'schen Functionen verschiedener Ordnungen.*)

d'où, en dérivant par rapport à u et en intégrant par parties, en remarquant de plus que la partie aux limites est nulle, il vient:

$$\varphi'(u) = u^{\mu-1} H\left(\frac{f'(t)}{t^{\mu-1}}\right),$$

et en appliquant de nouveau la dérivation par rapport à u et l'intégration par parties, on trouve quel que soit k:

$$\frac{\varphi^{(k)}(u)}{u^{\mu-k}} = H\left(\frac{f^{(k)}(t)}{t^{\mu-k}}\right). \tag{9}$$

8. Soit maintenant l'intégrale

$$H(f^{(k)}(t)t^{h+k-\mu}) = \int_{(c)} \frac{f^{(k)}(t)t^{h+k}dt}{t^{\mu}(t-u)}$$

qui est aussi convergente, d'après le choix de μ, pour $h < r$. Elle peut s'écrire identiquement

$$\int_{(c)} \frac{f^{(k)}(t)}{t^{\mu-k}}\{t^{h-1} + t^{h-2}u + \dots + u^{h-1}\}dt + u^h \int_{(c)} \frac{f^{(k)}(t)dt}{t^{\mu-k}(t-u)}.$$

Cette dernière intégrale n'est autre, d'après la formule (9), que

$$\varphi^{(k)}(u)u^{k+h-\mu};$$

quant à la première, c'est une fonction rationnelle et entière de u, du degré $h - 1$, dont les coefficients sont les intégrales, toutes convergentes

$$\int_{(c)} f^{(k)}(t)t^{g+k-\mu}dt. \qquad (g=0,1,2,\dots,h-1)$$

En intégrant k fois successives par parties et en remarquant à chaque fois que la partie aux limites est nulle d'après le choix de μ, on a

$$\int_{(c)} f^{(k)}(t)t^{g+k-\mu}dt = (-1)^k(g+k-\mu)_k \int_{(c)} f(t)t^{g-\mu}dt,$$

d'où il résulte enfin

$$(10)\quad H(f^{(k)}(t)t^{h+k-\mu}) = \varphi^{(k)}(u)u^{h+k-\mu} + \sum_{g=0}^{h-1}(\mu - 1 - g)_k u^{h-g-1}\int_{(c)} f(t)t^{g-\mu}dt.$$

Cette formule nous exprime les propriétés fondamentales de l'opération H.

Applications de la transformation de Heine.

9. Reprenons l'équation homogène (6), et supposons que α_i soit une racine simple de l'équation (7), en sorte que l'équation déterminante relative au point α_i n'aura qu'une racine non entière. D'après la théorie bien connue de M. Fuchs, on n'aura alors qu'une intégrale particulière qui, après une rotation autour du point α_i, se reproduit multipliée par une constante différente de l'unité; soit U_i cette intégrale que l'on dira *correspondante* au point α_i.

Décrivons maintenant la ligne c indiquée au § 6 en sorte que partant de l'infini dans la direction du rayon qui joint l'origine au point α_i, elle décrive un contour qui embrasse le point α_i et revienne ensuite à l'infini suivant la même direction, sans contenir aucun autre point singulier de l'équation (6); soit c_i la ligne ainsi parcourue. Les intégrales de l'équation (6) sont toutes, pour $t = \infty$, infinies d'un ordre nécessairement fini; en effet, l'équation déterminante relative au point $t = \infty$ est

$$a_{0.m}\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - m + 1) + a_{0.m-1}\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - m + 2) + \ldots + a_{0.0} = 0,$$

et l'on a supposé $a_{0.m}$ essentiellement différent de zéro.

Soit donc ρ_i l'ordre d'infini de l'intégrale U_i pour $t = \infty$; nous pourrons appliquer à cette intégrale divisée par t^μ la transformation de Heine, pourvu que nous prenions l'entier μ assez grand pour que l'on ait

$$\rho_i - \mu = -r - \varepsilon,$$

ε étant une quantité positive; cherchons donc quel est le résultat de cette opération en prenant pour chemin d'intégration la ligne c_i que nous venons de définir. Nous poserons pour cela:

$$(11)\quad \varphi_i(u) = u^\mu \int_{(c_i)} \frac{U_i(t)dt}{t^\mu(t-u)}.$$

Or, comme l'opération H est distributive, en appliquant cette opération à (6), divisée préalablement par t^μ, on a

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{h=0}^{r} a_{r-h.k} H(t^{h+k-\mu} U_i^{(k)}) = 0$$

qui, par l'application des formules (9) et (10), devient

$$(12)\qquad \frac{\Delta\varphi_i(u)}{u^\mu} = -\sum_{k=0}^{m}\sum_{h=0}^{r}\sum_{g=0}^{h-1} a_{r-h.k}(\mu-1-g)_k u^{h-g-1}\int_{(c_i)} U_i t^{g-\mu} dt;$$

c'est là une équation de la forme (1) dont $\varphi_i(u)$, donnée par la formule (11), est une intégrale.

10. Les intégrales définies qui figurent au paragraphe précédent sont toutes convergentes, d'après le choix de μ. Posons:

$$(13)\qquad p_{\mu-g} = \int_{(c_i)} U_i t^{g-\mu-1} dt; \qquad {\scriptstyle (g=1,2,3,\ldots,r)}$$

les coefficients des puissances de u dans le second membre de l'équation (12) seront des fonctions linéaires des quantités $p_{\mu-1}, p_{\mu-2}, \ldots, p_{\mu-r}$, et l'on voit facilement en ordonnant le second membre de (12) suivant les puissances de u, que cette équation prend la forme:

$$(14)\qquad \Delta\varphi_i(u)$$
$$= -u^\mu \sum_{h=1}^{r} u^{r-h}\{a_0(\mu-h)p_{\mu-h} + a_1(\mu-h)p_{\mu-h+1} + \cdots + a_{h-1}(\mu-h)p_{\mu-1}\}.$$

11. L'expression (11) est développable en une série de puissances entières et positives de u, pour toutes les valeurs de u dont le module est inférieur au module minimum de t le long du chemin d'intégration. Mais comme ce chemin est aussi rapproché de α_i qu'on le veut, on peut dire que le développement en série de $\varphi_i(u)$ converge dans un cercle de centre $u = 0$ et dont le rayon diffère de $|\alpha_i|$ d'aussi peu qu'on le veut. Nous indiquons ce fait par la notation

$$p_n \sim \frac{1}{|\alpha_i|^n}$$

quand on pose

$$(15)\qquad \varphi_i(u) = \sum_{n=\mu}^{\infty} p_n u^n;$$

Or, on a

$$(16) \qquad p_n = \int_{(c_i)} U_i t^{-n-1} dt;$$

ce système p_n obéit donc à la relation récurrente (2), d'où il résulte (§ 4) que le cercle de convergence de (15) est précisément $|\alpha_i|$.

Tandis que l'on définit ainsi p_n au moyen de la formule (16), pour les valeurs de l'indice depuis $n = \mu$ jusqu'à l'infini, la formule (13) définit encore p_n pour les valeurs de l'indice depuis $\mu - r$ jusqu'à $\mu - 1$. Mais si l'on substitue dans l'équation (12) la série de puissances (15) qui représente $\varphi_i(u)$, il résulte du calcul développé au § 3 que le second membre de l'équation différentielle (12) est de la forme (v. éq. (4))

$$u^\mu \sum_{h=1}^{r} u^{r-h}[a_h(\mu - h)p_\mu + a_{h+1}(\mu - h)p_{\mu+1} + \dots + a_r(\mu - h)p_{\mu+r-h}].$$

Cette forme devant être identique avec le second membre de l'équation (14), on obtient, en identifiant les coefficients:

$$\begin{aligned} a_0(\mu - h)p_{\mu-h} + a_1(\mu - h)p_{\mu-h+1} + \dots + a_{h-1}(\mu - h)p_{\mu-1} \\ + a_h(\mu - h)p_\mu + \dots + a_r(\mu - h)p_{\mu+r-h} = 0; \qquad {\scriptstyle (h=1,2,3,\dots,r)} \end{aligned}$$

c'est là l'équation récurrente (2), qui se trouve donc vérifiée non seulement pour les valeurs de l'indice depuis $n = \mu$ jusqu'à $n = \infty$, mais encore pour les valeurs depuis $n = \mu - r$ jusqu'à $n = \mu - 1$. L'intégrale p_n de l'équation (2) est donc parfaitement déterminée par les r valeurs (13).

12. La méthode indiquée dans ce qui précède nous permet de déterminer r intégrales de l'équation (2), en donnant à l'indice i les valeurs $1, 2, \dots, r$. Si les modules des racines α_i sont tous différents, chacune des r séries φ_i aura un cercle de convergence différent, et en posant

$$\psi_i = \lambda_i \varphi_i + \lambda_{i+1} \varphi_{i+1} + \dots + \lambda_r \varphi_r,$$

où les constantes $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r$ (pour lesquelles on peut faire abstraction d'un multiplicateur commun) donnent une variété ∞^{r-i}, la série ψ_i converge dans le cercle de rayon $|\alpha_i|$. Les coefficients P_n du développement de ψ_i en série nous donnent donc une intégrale de l'équation (2) telle que

$$P_n \sim \frac{1}{|\alpha_i|^n}, \tag{17}$$

et nous venons de voir que les intégrales de l'équation (2) qui vérifient cette condition (17) constituent une variété ∞^{r-i}. Le même raisonnement montre donc qu'il n'y a en général, (c'est-à-dire lorsqu'il n'y a qu'une racine simple de l'équation (7) dont le module ait la valeur maxima $|\alpha_r|$) qu'une seule intégrale de l'équation (2) telle que

$$P_n \sim \frac{1}{|\alpha_r|^n}; \tag{17'}$$

c'est là l'intégrale distinguée, que nous représenterons par ϖ_n; la fonction génératrice est

$$\varphi_r = u^\mu \int\limits_{(c_r)} \frac{U_r(t)\,dt}{t^\mu(t-u)} \tag{11'}$$

et l'on a

$$\varpi_n = \int\limits_{(c_r)} U_r(t) t^{-n-1} dt. \qquad (n=\mu-1, \mu-r+1, \ldots, \infty) \tag{16'}$$

La convergence de ces intégrales résulte de la façon dont on a choisi l'exposant μ.

13. Lorsque la racine non entière de l'équation déterminante relative au point α_i a sa partie réelle plus grande que -1, il est clair qu'on peut substituer à l'intégrale définie prise le long du chemin c_i, l'intégrale, qui n'en diffère que par un facteur, prise de α_i à l'infini selon le prolongement du rayon qui joint l'origine au point α_i. Dans ce cas, les formules (11) et (16) peuvent être remplacées respectivement par

$$\varphi_i(u) = u^\mu \int_{\alpha_i}^{\infty} \frac{U_i(t)\,dt}{t^\mu(t-u)},$$

et

$$p_n = \int_{\alpha_i}^{\infty} U_i(t) t^{-n-1} dt.$$

L'équation récurrente inverse.

14. Changeons dans l'équation aux différences (2), le polynôme $a_h(n)$ en $a_h(n-h)$ et p_{n+h} en q_{n-h}; nous obtenons ainsi une nouvelle équation aux différences:

$$(18)\quad a_r(n-r)q_{n-r}+a_{r-1}(n-r+1)q_{n-r+1}+\ldots+a_1(n-1)q_{n-1}+a_0(n)q_n=0.$$

Nous dirons que cette équation est *l'inverse* de l'équation (2). Si l'on répète sur l'équation (18) l'opération qui a servi à passer de (2) à (18), on trouve l'équation inverse de (18); or le calcul, fort simple, montre immédiatement que cette nouvelle équation ne diffère aucunement de l'équation (2), sauf le changement de l'indice n en $n+r$.

15. Il est facile de former l'équation différentielle génératrice de l'équation (18). A cet effet, mettons-la sous la même forme que l'équation (2), c'est-à-dire changeons n en $n+r$: il vient ainsi

$$\sum_{h=0}^{r}(a_{r-h.m}(n+r)_m+a_{r-h.m-1}(n+r)_{m-1}+\ldots+a_{r-h.1}(n+r)_1+a_{r-h.0})q_{n+h}=0;$$

mais on peut poser

$$\begin{aligned}&a_{r-h.m}(n+r)_m+a_{r-h.m-1}(n+r)_{m-1}+\ldots+a_{r-h.0}\\&=\mathfrak{a}_{r-h.m}(n+h)_m+\mathfrak{a}_{r-h.m-1}(n+h)_{m-1}+\ldots+\mathfrak{a}_{r-h.0},\end{aligned}$$

où les coefficients $\mathfrak{a}_{r-h.k}$ se calculent très aisément au moyen d'une formule bien connue, tout-à-fait analogue à celle de TAYLOR et applicable aux fonctions entières ordonnées suivant les factorielles $(n+r)_k$. Il importe de remarquer que

$$\mathfrak{a}_{h.m}=a_{h.m}, \qquad (h=0,1,2,\ldots,r)$$

et

$$\mathfrak{a}_{0.k}=a_{0.k}. \qquad (k=0,1,2,\ldots,m)$$

L'équation (18) qui s'écrit maintenant

$$\sum_{h=1}^{r}(\mathfrak{a}_{r-h.m}(n+h)_m+\mathfrak{a}_{r-h.m-1}(n+h)_{m-1}+\ldots+\mathfrak{a}_{r-h.0})q_{n+h}=0$$

a la même forme que l'équation (2), et on peut donc immédiatement en déduire l'équation différentielle génératrice, comme on l'a vu au § 1. Cette équation différentielle est

$$(19)\qquad \sum_{k=0}^{m}(\mathrm{a}_{r.k}t^r + \mathrm{a}_{r-1.k}t^{r-1} + \dots + \mathrm{a}_{0.k})t^k\frac{d^kV}{dt^k} = t^\mu R(t).$$

16. De la remarque que $\mathrm{a}_{k.m} = a_{k.m}$, il résulte que le coefficient de $t^m V^{(m)}$ dans l'équation (19) est

$$a_{r.m}t^r + a_{r-1.m}t^{r-1} + \dots + a_{0.m},$$

qui, égalé à zéro, donne les points singuliers autres que $t = 0$ et $t = \infty$ de cette équation (19). Or l'équation algébrique que l'on obtient ainsi n'est autre que la réciproque de (7); les points singuliers en question sont donc en ordre de modules non *décroissants*:

$$\frac{1}{\alpha_r},\ \frac{1}{\alpha_{r-1}},\ \dots,\ \frac{1}{\alpha_1}.$$

En outre, de la remarque que $\mathrm{a}_{0.k} = a_{0.k}$, il suit que l'équation déterminante de (19), relative au point $t = 0$, est précisément l'équation déterminante de (1) relative au point $t = \infty$, tandis que l'équation déterminante de (19) pour $t = \infty$ ne diffère de celle de (1) pour $t = 0$ que par le changement de ρ en $\rho + r$.

17. Pour les intégrales de l'équation récurrente (18), on a en général

$$\lim_{n=\infty}\frac{q_{n+1}}{q_n} = \alpha_r.$$

Exceptionnellement, c'est-à-dire pour certaines intégrales particulières, il pourra se faire que cette limite ait un module moindre et précisément le module d'une autre des racines de (7). Les paragraphes précédents nous donnent une méthode pour déterminer ces intégrales, et en particulier l'intégrale distinguée, pour laquelle

$$\lim_{n=\infty}\frac{q_{n+1}}{q_n} = \alpha_1.$$

Applications.

18. Supposons $r = 1$. Alors l'équation (1) prend la forme

$$\sum_{k=0}^{m} (a_k t + b_k) t^k \frac{d^k U}{dt^k} = t^\mu R(t);$$

le rapport de deux coefficients consécutifs dans le développement en série de son intégrale est une fonction rationnelle de l'indice n. C'est là le type hypergéométrique généralisé de M. GOURSAT.

19. Supposons maintenant $r = 2$. L'équation aux différences (2) prend alors la forme

$$\text{(a)} \qquad a_2(n) p_{n+2} + a_1(n) p_{n+1} + a_0(n) p_n = 0,$$

que nous écrirons pour abréger:

$$\text{(b)} \qquad p_{n+2} = c_{n+2} p_{n+1} + c'_{n+2} p_n.$$

Déterminons maintenant deux intégrales de cette équation par les conditions

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} p_{\mu-2} = 1, & p'_{\mu-2} = 0, \\ p_{\mu-1} = 0, & p'_{\mu-1} = 1, \end{cases}$$

puis considérons la fraction continue:

$$\text{(d)} \qquad \sigma = \cfrac{c'_\mu}{c_\mu + \cfrac{c'_{\mu+1}}{c_{\mu+1} + \cfrac{c'_{\mu+2}}{c_{\mu+2} + \dots}}}$$

On voit aisément que sa réduite est, en général, $\frac{p_n}{p'_n}$, où p_n et p'_n sont déterminées précisément par les conditions initiales (c).

Il s'agit de rechercher si cette fraction continue est convergente, et d'en trouver la valeur. Cette recherche peut se faire comme il suit.

a) Je commence par remarquer que toute intégrale de l'équation (b) peut s'écrire

$$P_n = \lambda p_n + \mu p'_n,$$

où λ et μ sont des constantes. On en tire

$$\frac{P_n}{p'_n} = \lambda \frac{p_n}{p'_n} + \mu$$

et si la limite de $P_n : p'_n$ est nulle pour $n = \infty$, il en résultera précisément

$$\sigma = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

b) D'après cette remarque, on voit que la recherche de la valeur de σ coïncide avec la recherche des valeurs des constantes λ, μ, pour lesquelles la limite de $P_n : p'_n$ est nulle.

Reprenons pour cela l'équation (1) qui a actuellement la forme

$$\text{(e)} \qquad \Delta U = \sum_{k=0}^{m} (a_k t^2 + b_k t + c_k) t^k \frac{d^k U}{dt^k} = t^\mu R(t),$$

et posons

$$a_m t^2 + b_m t + c_m = (t - \alpha)(t - \beta), \qquad |\beta| > |\alpha|.$$

On voit alors, si U est l'intégrale correspondante au point β de l'équation $\Delta U = 0$, que

$$\varphi(u) = \int\limits_{(c)} \frac{U dt}{t^\mu (t - u)},$$

est l'intégrale de l'équation (e) prise sous la forme

$$\sum_{k=0}^{m} (a_k u^2 + b_k u + c_k) u^k \frac{d^k U}{du^k}$$

$$= - u^\mu \{ a(\mu - 1) u \varpi_{\mu-1} + a(\mu - 2) \varpi_{\mu-2} + b(\mu - 1) \varpi_{\mu-1} \}$$

où

$$\varpi_{\mu-1} = \int\limits_{(c)} \frac{U dt}{t^\mu}, \qquad \varpi_{\mu-2} = \int\limits_{(c)} \frac{U dt}{t^{\mu-1}}.$$

c) Cela posé, rappelons que l'intégrale $\varphi(u)$ est développable en une série de puissances entières et positives de u, $\Sigma\varpi_n u^n$, où ϖ_n est l'intégrale distinguée de l'équation (b) puisque U est l'intégrale correspondante au point singulier de plus grand module de l'équation $\Delta U = 0$. On peut poser

$$\varpi_n = \lambda p_n + \mu p'_n$$

et l'on sait que la limite de $\varpi_n : p'_n$ est nulle pour $n = \infty$. On a en outre, à cause des (c),

$$\lambda = \varpi_{\mu-2} = \int_{(c)} \frac{U dt}{t^{\mu-1}}, \qquad \mu = \varpi_{\mu-1} = \int_{(c)} \frac{U dt}{t^{\mu}},$$

d'où il suit enfin

$$\text{(g)} \qquad \sigma = -\frac{\mu}{\lambda} = -\frac{\int_{(c)} U t^{-\mu} dt}{\int_{(c)} U t^{1-\mu} dt},$$

formule qui transforme une fraction continue dont les éléments sont des fonctions rationnelles de l'indice en un quotient d'intégrales définies, et qui renferme comme cas particulier le développement en fraction continue que Gauss a fait connaître pour le quotient de deux fonctions hypergéométriques contigues.

Systèmes récurrents de fonctions.

20. Nous avons supposé jusqu'ici que les coefficients de l'équation (1) soient des constantes. Regardons maintenant ces mêmes coefficients comme dépendant d'un certain nombre de paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_j$ dont ils soient des fonctions analytiques. En indiquant par $[x]$ un système déterminé de valeurs de ces paramètres, on pourra dire, pour abréger le langage, que $[x]$ est un point de l'hyperespace S_{2j} à $2j$ dimensions défini par le système des j paramètres complexes $x_1, x_2, \ldots, x_j$.

En considérant alors l'équation (7), on voit que ses racines seront aussi des fonctions analytiques des paramètres x. Les points $[x]$ pour lesquels deux de ces racines ont même module forment un hyperespace S' à $2j - 1$ dimensions contenu dans S_{2j}; si l'on prend un point $[x_0]$

de S_{2j} qui n'appartient pas à S', pour tout point d'un domaine de $[x_0]$ suffisamment restreint, on pourra ordonner les racines de (7) selon leur module croissant

$$|\alpha_1| < |\alpha_2| < \ldots < |\alpha_r|;$$

d'après les résultats des paragraphes précédents, on a un système ∞^{r-i} d'intégrales p_n de l'équation aux différences (2) pour lesquelles

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_{n-1}}{p_n} = \alpha_i,$$

et en particulier une unique intégrale (intégrale distinguée) pour laquelle cette limite est α_r. Pour tous les points du domaine considérée de x_0, la limite du rapport de cette intégrale distinguée à une intégrale quelconque de l'équation (2) est nulle pour $n = \infty$; dans le cas particulier où l'équation récurrente est du deuxième ordre, cette intégrale distinguée constitue le système des restes de la fraction continue dont les numérateurs et dénominateurs des réduites satisfont à la même équation. Je n'en dirai pas davantage sur le cas général où les coefficients de (2) sont des fonctions analytiques quelconques des paramètres, et je m'arrêterai plutôt à l'hypothèse particulière qui suit, et qui est la plus intéressante, parcequ'elle offre la généralisation des fractions continues algébriques ordinaires.

21. Dans cette hypothèse, je supposerai que les coefficients de l'équation (2) dépendent d'un seul paramètre x et en outre que ce paramètre entre au premier degré dans les coefficients, excepté dans $a_{0.k}$ et $a_{r.k}$ que je regarderai comme indépendants de x. L'équation différentielle (1) pourra alors s'écrire:

$$(20) \qquad \sum_{k=0}^{m} [a_{0\,k} t^r + (a_{1.k} - x b_{1.k}) t^{r-1} + \ldots + (a_{r-1.k} - x b_{r-1.k}) t + a_{r.k}] t^k \frac{d^k U}{dt^k} = 0,$$

et l'équation (2) deviendra:

$$(21) \qquad \begin{aligned} a_r(n) p_{n+r} &+ (a_{r-1}(n) - x b_{r-1}(n)) p_{n+r-1} + \cdots \\ &+ (a_1(n) - x b_1(n)) p_{n+1} + a_0(n) p_n = 0. \end{aligned}$$

D'après le § 14, nous savons écrire l'équation inverse de l'équation (21); en y changeant le paramètre x en z, cette équation sera:

$$(22)\qquad a_r(n-r)q_{n-r} + (a_{r-1}(n-r+1) - zb_{r-1}(n-r+1))q_{n-r+1} + \cdots$$
$$+ (a_1(n-1) - zb_1(n-1))q_{n-1} + a_0(n)q_n = 0.$$

Nous allons étudier un système récurrent de fonctions défini par l'équation (21).

Développement d'une fonction en série ordonnée suivant les polynômes d'un système récurrent.

22. Déterminons une intégrale particulière de l'équation (21) par les conditions que p_0 soit égal à l'unité et que pour une valeur négative de l'indice n les p_n soient nulles: indiquons par $P_n(x)$ ce système particulier. L'équation (21) montre que $P_n(x)$ sera un polynôme entier en x, de degré précisément égal à n. Nous avons ainsi défini un système récurrent très général de polynômes de degré égal à leur indice; c'est le système dont l'échelle de relation (éq. 21) a ses coefficients linéaires en x et rationnels en n.

Je dis maintenant qu'il est possible d'obtenir le développement d'une fonction analytique quelconque de x en série ordonnée suivant les polynômes d'un tel système et d'en donner les conditions de convergence; nous allons nous occuper de cette question.

A cet effet, écrivons l'équation (21) pour toutes les valeurs de n depuis $n = -r + 1$ jusqu'à l'infini, et multiplions respectivement par q_n; en sommant ces équations et en ordonnant par rapport aux indices croissants de P_n, on a, abstraction faite de la convergence dont les conditions seront données plus loin:

$$\begin{aligned}
&P_0\{a_{r-1}(-r+1)q_{-r+1} + a_{r-2}(-r+2)q_{-r+2} + \cdots + a_0(0)q_0\}\\
&+ P_1\{a_r(-r+1)q_{-r+1} + a_{r-1}(-r+2)q_{-r+2} + \cdots + a_0(1)q_1\}\\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ P_n\{a_r(n-r)q_{n-r} + a_{r-1}(n-r+1)q_{n-r+1} + \cdots + a_0(n)q_n\} + \cdots\\
&= x[P_0\{b_{r-1}(-r+1)q_{-r+1} + b_{r-2}(-r+2)q_{-r+2} + \cdots + b_1(-1)q_{-1}\}\\
&+ P_1\{b_{r-1}(-r+2)q_{-r+2} + b_{r-2}(-r+3)q_{-r+3} + \cdots + b_1(0)q_0\}\\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ P_n\{b_{r-1}(n-r+1)q_{n-r+1} + b_{r-2}(n-r+2)q_{n-r+2} + \cdots + b_1(n-1)q_{n-1}\} + \cdots].
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que les quantités q_n satisfont à l'équation récurrente (22), que nous supposerons vérifiée à partir des valeurs de l'indice $n = 0$, $n = 1$, pour lesquelles on a:

$$a_r(-r)q_{-r} + (a_{r-1}(-r+1) - zb_{r-1}(-r+1))q_{-r+1} + \dots$$
$$+ (a_1(-1) - zb_1(-1))q_{-1} + a_0(0)q_0 = 0,$$
$$a_r(-r+1)q_{-r+1} + (a_{r-1}(-r+2) - zb_{r-1}(-r+2))q_{-r+2} + \dots$$
$$+ (a_1(0) - zb_1(0))q_0 + a_0(1)q_1 = 0;$$

d'où il suit que le premier membre de l'égalité précédente pourra s'écrire

$$P_0\{-a_r(-r)q_{-r} + z(b_{r-1}(-r+1)q_{-r+1} + b_{r-2}(-r+2)q_{-r+2} + \dots + b_1(-1)q_{-1})\}$$
$$+ zP_1\{b_{r-1}(-r+2)q_{-r+2} + b_{r-2}(-r+3)q_{-r+3} + \dots + b_1(0)q_0\}$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ zP_n\{b_{r-1}(n-r+1)q_{n-r+1} + b_{r-2}(n-r+2)q_{n-r+2} + \dots + b_1(n-1)q_{n-1}\} + \dots,$$

et par conséquent cette égalité elle-même devient:

$$P_0 a_r(-r)q_{-r}(z) = (z-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\{b_{r-1}(n-r+1)q_{n-r+1}(z)$$
$$+ b_{r-2}(n-r+2)q_{n-r+2}(z) + \dots + b_1(n-1)q_{n-1}(z)\}.$$

Mais $P_0 = 1$ par hypothèse, d'où il résulte enfin, puisque $a_r(-r) = a_{r.0}$:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{a_{r.0}q_{-r}(z)}\sum_{n=0}^{\infty}\{b_{r-1}(n-r+1)q_{n-r+1}(z) + \dots$$
$$+ b_1(n-1)q_{n-1}(z)\}P_n(x). \tag{23}$$

23. Nous avons établi formellement ce développement; il s'agit maintenant d'en rechercher les conditions de convergence. Pour cela, l'équation (7) prend actuellement la forme

$$a_{0.m}t^r + (a_{1.m} - xb_{1.m})t^{r-1} + \dots + (a_{r-1.m} - xb_{r-1.m})t + a_{r.m} = 0;$$

continuons à indiquer par α_1 sa racine de module minimum. A chaque valeur de x correspond une valeur et une seule de $|\alpha_1|$, laquelle n'est infinie pour aucune valeur de x et ne peut même dépasser la valeur

$$\rho_0 = \left|\sqrt[r]{\frac{a_{r.m}}{a_{0.m}}}\right|$$

et qui est nulle pour $x = \infty$ et pour cette valeur de x seulement.

Indiquons par C_ρ le lieu des points du plan x pour lesquels on a $|\alpha_1(x)| = \rho$, ρ étant une quantité positive quelconque plus petite que ρ_0. Ce lieu est une portion de la courbe analytique qui, dans le plan des x, correspond au cercle $|t| = \rho$ du plan des t. Tout point du plan x non situé sur la courbe C_ρ appartient, soit à l'ensemble des points pour lesquelles on à $|\alpha_1(x)| > \rho$ et que j'indiquerai par E_ρ, soit à l'ensemble des points pour lesquels on a $|\alpha_1(x)| < \rho$, et que j'indiquerai par E'_ρ. L'ensemble E_ρ se réduit à zéro pour $\rho = \rho_0$; pour toute valeur de $\rho < \rho_0$, E_ρ est une aire (connexe ou non) finie, tandis que E'_ρ est une aire infinie; on ne peut passer de l'une à l'autre sans traverser C_ρ, qui est donc une courbe fermée ou composée de plusieurs courbes fermées. Deux courbes $C_{\rho'}, C_{\rho'}$, où ρ' est plus grand que ρ, ne peuvent se couper, et comme C_ρ, est tout entière dans le champ E_ρ, on peut dire qu'elle est intérieure à C_ρ.

24. Tandis que nous avons parfaitement déterminé le système de polynômes $P_n(x)$ qui figure dans le second membre du développement (23), par les conditions

$$P_0 = 1, \qquad P_{-1} = P_{-2} = \ldots = 0,$$

nous n'avons pas encore déterminé $q_n(z)$, qui est jusqu'ici une intégrale quelconque de l'équation (22). Nous allons à présent déterminer cette intégrale en fixant que le systéme $q_n(z)$ soit *l'intégrale distinguée* de l'équation récurrente (22); nous l'indiquerons par $Q_n(z)$ et nous avons, ainsi qu'on l'a vu (§ 16),

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)} = \alpha_1(z).$$

Cela posé, prenons une courbe C_ρ quelconque ($\rho > \rho_0$), et soit x un point quelconque du champ E_ρ, z un point quelconque du champ E'_ρ; on aura pour de telles valeurs de x et de z:

$$|\alpha_1(z)| < |\alpha_1(x)|.$$

Je dis que pour ces valeurs de x et de z, la série (23) est convergente. Elle se compose, en effet, de la somme de $r - 1$ séries de la forme

$$(23') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_h(n-h)\,Q_{n-h}(z)\,P_n(x); \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,r-1)}$$

or, en formant le rapport d'un terme au précédent dans cette série, il vient:

$$(24) \qquad \frac{b_h(n+1-h)\,Q_{n+1-h}(z)\,P_{n+1}(x)}{b_h(n-h)\,Q_{n-h}(z)\,P_n(x)};$$

mais $b_h(n)$ étant un polynôme de degré m en n, le rapport

$$b_h(n+1-h):b_h(n-h)$$

tend à l'unité pour $n = \infty$; quant à Q_n et P_n, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)} = \alpha_1(z), \qquad \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = \frac{1}{\alpha_1(x)};$$

la limite du rapport (24) est donc pour les valeurs considérées de x et de z, plus petite que l'unité en valeur absolue, et par conséquent chacune des séries (23') et par suite aussi la série (23) est absolument convergente. Elle l'est de plus uniformément dans le champ E_ρ par rapport à x, (le contour C_ρ exclus) ainsi que cela résulte de la démonstration donnée aux §§ 9 et 10 de mon mémoire: *Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate coi medesimi,*[1] et dans le champ E'_ρ par rapport à z.

25. Il est maintenant facile de déterminer le développement d'une fonction analytique donnée $f(x)$ en une série de polynômes $P_n(x)$. Il suffit en effet que cette fonction soit donnée à l'intérieur de l'un des champs désignés par E_ρ, pour que l'on puisse lui appliquer le théorème de Cauchy; on a alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C_{\rho_1})} \frac{f(z)\,dz}{z - x},$$

z étant prise le long d'une courbe C_{ρ_1} pour $\rho_1 < \rho$ et par conséquent

[1] Annali di Matematica, S. 2, T. 12, 1884.

tout entière à l'intérieur de E'_ρ. Le développement de $\frac{1}{z-x}$ en série (23) étant uniformément convergent, on peut intégrer la série terme à terme, et il vient:

$$(25) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x),$$

où

$$2\pi i a_{r.0} C_n = \int_{(C_{\rho_1})} \{ b_{r-1}(n-r+1) Q_{n-r+1}(z) + b_{r-2}(n-r+2) Q_{n-r+2}(z) + \dots$$
$$+ b_1(n-1) Q_{n-1}(z) \} \frac{f(z)\,dz}{Q_{-r}(z)}.$$

Nous avons ainsi obtenu le développement d'une fonction analytique donnée en une série ordonnée suivant les polynômes d'un système récurrent dont (21) est l'échelle de relation, et nous avons trouvé les conditions de convergence de ce développement, toutes les fois que l'échelle de relation est d'ordre fini et que ses coefficients sont des fonctions rationnelles par rapport à l'indice et linéaires par rapport à la variable, et qu'en outre $a_{r.0}$ est différent de zéro.

Bologne, 30 juin 1891.