SUR LA POLARISATION PAR DIFFRACTION

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

I.

On sait à quelles discussions a donné lieu la question de savoir si la vibration lumineuse est perpendiculaire au plan de polarisation comme le veut FRESNEL, ou parallèle comme le pense NEUMANN. Une discussion de même nature a été soulevée depuis que la théorie électromagnétique semble, aux yeux de beaucoup de savants, devoir remplacer la théorie élastique. On s'est demandé si la force électrique est perpendiculaire au plan de polarisation et la force magnétique parallèle à ce plan, ou si c'est le contraire. Cette seconde question semble aujourd'hui à peu près résolue et on est d'accord pour admettre la première hypothèse. Mais si l'on conserve la théorie élastique, la question de la direction de la vibration lumineuse reste sans solution certaine.

On a espéré quelque temps trouver cette solution dans l'étude des phénomènes de polarisation par diffraction. Une application, que je crois erronée, du principe de HUYGHENS avait fait croire à presque tous les physiciens que le plan perpendiculaire à la vibration devait par la diffraction, se rapprocher du plan de diffraction. L'hypothèse de FRESNEL serait donc vérifiée si le plan de polarisation se rapprochait du plan de diffraction.

Les résultats des expériences furent contradictoires, ce qu'on expliqua par la complexité des phénomènes; il se produit sur les réseaux, une réflexion ou une réfraction, dont les effets viennent compliquer ou même masquer l'action exercée par la diffraction sur le plan de polarisation.

Je crois que ce n'est pas là la principale cause de l'insuccès de ces tentatives. Le principe de HUYGHENS a donné lieu à de nombreuses objections et elles n'ont été complètement réfutées que par KIRCHHOFF qui a donné à ce principe sa forme définitive. Sous cette forme, ce principe est une conséquence des équations fondamentales. Or, ces équations sont les mêmes pour le vecteur qui dans le langage de la théorie électromagnétique s'appellerait force électrique et pour celui qui s'appellerait force magnétique. Le principe de HUYGHENS est donc vrai pour l'un et l'autre vecteur. Si donc l'application qu'on en a voulu faire était légitime, elle le serait pour les deux vecteurs, et non pas seulement pour celui qui représente en grandeur, direction et sens la vibration lumineuse. Les plans normaux à ces deux vecteurs devraient donc l'un et l'autre se rapprocher du plan de diffraction, ce qui est impossible puisque ces deux plans normaux sont rectangulaires. Cela seul devrait suffire pour nous avertir de l'insuffisance de la théorie adoptée; mais une analyse plus complète confirme cette première impression; pour faire passer le principe de HUYGHENS de la forme que lui donne KIRCHHOFF à celle que lui donnait FRESNEL il faut négliger certains termes. Cela était légitime dans les cas où FRESNEL l'a fait, cela ne l'est plus si le réseau est très serré et la déviation grande ce qui est nécessaire pour qu'on puisse observer la rotation du plan de polarisation. On doit donc renoncer à tout espoir de résoudre de cette manière la question de savoir si la vibration lumineuse est perpendiculaire ou parallèle au plan de polarisation, ou ce qui revient au même si elle est représentée par le vecteur que la théorie électromagnétique appelle force électrique ou par celui qu'elle appelle force magnétique.

On n'en était pas encore tout à fait convaincu quand M. FIZEAU publia dans le tome 52 des *Comptes rendus de l'Académie des sciences* les résultats d'un grand nombre d'expériences intéressantes sur certains phénomènes très-curieux. L'illustre physicien observa en effet que la lumière réfléchie régulièrement ou irrégulièrement sur des stries très fines tracées à la surface d'un métal, de même que la lumière transmise à travers une fente très fine à parois métalliques, présente une polarisation souvent notable et tantôt perpendiculaire, tantôt parallèle à la direction des stries ou de la fente. Dans le mémoire que je viens de citer il donna une explication générale de ces phénomènes, qu'il attribua à l'interférence des rayons réfléchies avec ceux qui n'ont pas subi de réflexion. J'avertis tout de suite que le présent travail n'est que la développement analytique dans un cas très particulier de l'explication de M. FIZEAU. Une vingtaine d'années après M. GOUY a observé des phénomènes de polarisation par diffraction qui se rattachent évidemment aux précédents, mais qui sont beaucoup moins complexes et il est arrivé ainsi à formuler plusieurs lois simples dont je rappellerai plus loin l'énoncé. Ses recherches sont décrites en détail dans le Tome 8, 6^e série des Annales de physique et de chimie et dans les Comptes rendus de l'Academie des sciences (12 mars 1883, 1884 et 1885). Les expériences ont été tout récemment reprises et complètées par M. HURMUZESCU (Comptes rendus, 1^er semestre 1892).

C'est à l'explication des phénomènes observés par M. GOUY que je consacrerai exclusivement ce qui va suivre; mais bien que les circonstances soient beaucoup moins compliquées que dans les expériences de M. FIZEAU, je ne pouvais songer à aborder le problème dans toute sa généralité et j'ai dû me restreindre à un cas extrêmement particulier; me bornant ensuite dans les deux paragraphes V et VI à indiquer par des aperçus plus ou moins grossiers, dans quel sens les diverses circonstances que j'avais d'abord négligées pouvait modifier les résultats. J'ai l'intention d'y revenir plus tard dans une seconde partie de ce travail et d'étudier l'influence de ces circonstances par une analyse plus complète et plus rigoureuse.

J'aurais même à peine osé publier des résultats aussi incomplets si je n'y avais été encouragé par la phrase suivante qui se trouve dans le mémoire de M. FIZEAU cité plus haut: »tout au plus peut-on espérer qu'en appliquant le calcul à quelques cas théoriques plus simples, on arriverait à des déductions rigoureuses qui pourraient éclairer la question».

J'ai trouvé plus commode d'employer le langage de la théorie électromagnétique; mais il ne faut pas s'y tromper; il ne faut pas croire que les faits s'expliquent dans la théorie de MAXWELL et ne s'expliquent pas dans la théorie élastique. Les équations sont exactement les mêmes dans les deux théories et si l'une rend bien compte des faits il en est certainement de même de l'autre.

J'ai désigné par X, Y, Z les composantes de la force électrique qui d'après FRESNEL représente en grandeur direction et sens la vibration lumineuse; j'ai désigné à l'exemple de MAXWELL par α, β, γ les composantes de la force magnétique qui d'après NEUMANN représenterait cette même vibration.

Dans toutes les applications que j'ai faites, j'ai pris pour axe des z la direction de celle de ces deux forces que je considérais. Deux des composantes sont alors nulles et j'ai pu employer les lettres α et β pour représenter d'autres quantités.

Si la lumière est homogène on a:

$$Z = Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt$$

ou

$$Z = \text{partie réelle } (Z_0 - iZ_1) e^{ipt},$$

Z est ainsi la partie réelle d'une exponentielle imaginaire, et cette exponentielle comme il est aisé de le voir satisfait aux mêmes équations que Z.

Pour cette raison, il me sera quelquefois commode, comme on le fait souvent, de désigner par Z, non pas la force électrique, c'est à dire la partie réelle de l'exponentielle, mais l'exponentielle elle-même. Afin d'éviter toute confusion je previens tout de suite que dans les §§ III et IV c'est la partie réelle de l'exponentielle que je désigne par Z et que dans les §§ V et VI c'est l'exponentielle imaginaire elle-même. De même pour γ.

J'emploierai aussi une notation qui est souvent usitée. Soit S une surface quelconque, M un point de cette surface, MN la normale à cette surface M' un point de cette normale infiniment voisin de M; je désignerai par dn la longueur MM'. Soit ensuite $F(x, y, z)$ une fonction quelconque; F_0 la valeur de cette fonction au point M. Je désignerai par

$$F_0 + \frac{dF}{dn} dn$$

la valeur de cette même fonction au point M', et le rapport $\frac{dF}{dn}$ s'appellera la dérivée de la fonction F estimée suivant la normale à la surface S.

II.

Rappelons d'abord succinctement les résultats obtenus par M. Gouy et qu'il s'agit d'expliquer. Ce physicien se sert d'un écran métallique formé d'une sorte de biseau très aigu, et il concentre la lumière à l'aide d'une lentille sur l'arête de ce biseau. Il observe ensuite la lumière diffractée à l'aide d'un microscope de faible grossissement pointé sur cette même arête.

Dans ces conditions la lumière diffractée est sensible dans une direction quelconque et on peut observer des rayons qui ont subi des déviations considérables pouvant aller jusqu'à 160°. M. Gouy a découvert de la sorte les lois suivantes:

1°. A l'intérieur de l'ombre géométrique, la lumière est polarisée perpendiculairement au plan de diffraction. Cette polarisation est d'autant plus marquée qu'on se rapproche davantage de l'écran, c'est à dire que la déviation est plus grande, et peut devenir presque complète.

2°. A l'extérieur de l'ombre géométrique la lumière est polarisée au contraire dans le plan de diffraction. La polarisation nulle quand la déviation est très petite, atteint son maximum vers 30° ou 40°; dans de bonnes conditions elle peut être alors presque complète; elle décroit ensuite lentement, mais elle est encore notable pour une déviation de 160°.

3°. Pour une même déviation, la lumière diffractée est maximum quand le faisceau incident et le faisceau diffracté font des angles égaux avec l'écran.

4°. Quand les bords sont très tranchants et que la lumière incidente est naturelle, la quantité de lumière diffractée est la même pour une même déviation que cette déviation ait lieu vers l'intérieur ou vers l'extérieur.

5°. A l'intérieur de l'ombre géométrique, la lumière polarisée perpendiculairement au plan de diffraction est en général fortement colorée tandis que la lumière polarisée dans le plan de diffraction reste blanche.

6°. Si la lumière incidente et polarisée dans un plan oblique au plan de diffraction on peut la décomposer en deux composantes; l'une polarisée dans le plan de diffraction et l'autre perpendiculairement à ce plan; et ces deux composantes éprouvent dans la diffraction une différence de marche qui croît avec la déviation (à l'intérieur de l'ombre géométrique) reste bien inférieure à $\frac{\lambda}{4}$ si le tranchant est très fin, mais peut approcher de $\frac{\lambda}{2}$ avec des bords arrondis; c'est la composante polarisée dans le plan de diffraction (c'est à dire la composante blanche et faible) qui prend l'avance.

A l'extérieur de l'ombre géométrique cette différence de marche est de même sens que celle que produirait la réflexion mais plus petite à déviation égale.

Tels sont les faits dont nous avons à rendre compte; il ne serait pas facile de mettre en équations toutes les données d'un problème aussi complexe et de les résoudre ensuite, si l'on ne cherchait à diviser la difficulté.

Je traiterai donc d'abord une question beaucoup plus simple.

Je supposerai que les ondes incidentes sont cylindriques, les génératrices du cylindre étant parallèles au tranchant du biseau; il en résulte alors évidemment qu'il en sera de même des ondes diffractées. On réaliserait ce cas en concentrant la lumière sur le bord de l'écran non plus avec une lentille sphèrique, mais avec une lentille cylindrique. Supposons alors qu'on prenne le bord de l'écran comme axe des z; les diverses quantités que nous aurons à considérer, c'est à dire les composantes du déplacement d'une molécule d'éther dans la théorie élastique ou les composantes de la force électrique ou de la force magnétique dans la théorie électromagnétique) seront alors des fonctions de x, de y et du temps t, mais ne dépendront pas de z.

Si la lumière incidente est polarisée dans le plan de diffraction, il en sera de même de la lumière diffractée, et comme la force électrique est perpendiculaire au plan de polarisation, elle devra être parallèle à l'axe des z. Appelons alors Z cette force électrique, elle devra satisfaire à l'équation:

$$V^2\left(\frac{d^2Z}{dx^2}+\frac{d^2Z}{dy^2}\right)=\frac{d^2Z}{dt^2},$$

V désignant la vitesse de la lumière. L'intensité de la lumière est proportionnelle à Z^2 et il est facile de déduire de la connaissance de la fonction Z, celle des composantes de la force magnétique α et β; la troisième composante γ de cette force magnétique est toujours nulle.

Supposons maintenant au contraire que la lumière incidente soit polarisée perpendiculairement au plan de diffraction et qu'il en soit par conséquent de même de la lumière diffractée. Comme la force magnétique est parallèle au plan de polarisation, elle sera parallèle à l'axe des z. Si nous la désignons par γ elle satisfera à l'équation:

$$V^2\left(\frac{d^2\gamma}{dx^2}+\frac{d^2\gamma}{dy^2}\right)=\frac{d^2\gamma}{dt^2},$$

l'intensité de la lumière sera proportionnelle à γ^2; et la connaissance de γ entraînera celle des composantes X et Y de la force électrique; la troisième composante Z étant toujours nulle.

La seconde simplification que j'introduirai étonnera sans doute davantage. Peut être plus d'un lecteur ne la trouvera-t-il légitime qu'après avoir lu le § V. On sait que vis à vis des oscillations hertziennes tous les métaux se comportent absolument de la même manière et par conséquent de la même façon que des conducteurs parfaits. En d'autres termes, au moins avec la précision assez faible que comportent les expériences, les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface des conducteurs. Au contraire vis à vis des oscillations lumineuses il n'en est plus rigoureusement de même, l'étude de la réflexion métallique nous l'apprend; la condition des métaux n'est plus tout à fait la même que celle d'un conducteur parfait; mais elle s'en rapproche d'autant plus que le pouvoir réflecteur est plus grand.

Eh bien, nous supposerons que *notre écran se comporte comme un conducteur parfait,* c'est à dire que les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface. Comment cette condition s'exprime-t-elle analytiquement?

Si la lumière est polarisée dans le plan de diffraction, la force électrique est parallèle à l'axe des z, parallèle par conséquent à la surface de l'écran qui est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à cet axe; cette force n'a donc pas de composante normale à cette surface et comme d'après l'hypothèse que nous venons de faire elle ne doit pas avoir non plus de composante tangentielle, elle doit être nulle. On aura donc

$$Z=0$$

à la surface de l'écran.

Si au contraire la lumière est polarisée perpendiculairement au plan de diffraction, la force magnétique γ est parallèle à l'axe des z. Considérons un point de la surface de l'écran que nous prendrons pour un instant comme origine des coordonnées, pendant que l'axe des x sera la tangente à la section droite de l'écran cylindrique et l'axe des y la normale à cette section. Les dérivées par rapport au temps de la force électrique seront à un facteur constant près:

$$\frac{d\gamma}{dy}, \quad -\frac{d\gamma}{dx}, \quad 0.$$

La première de ces composantes devra être nulle, c'est à dire que la dérivée de γ estimée suivant la normale à l'écran devra être nulle. Nous écrirons donc, en renonçant aux axes particuliers que nous avions choisis pour un instant

$$\frac{d\gamma}{dn} = 0.$$

Cette égalité aura lieu en tous les points de la surface de l'écran, et on en voit aisément la signification. Si M est un point de cette surface, γ la valeur de la force magnétique en ce point, si M' est un point infiniment voisin, tel que MM' soit normale à la surface la valeur de la force magnétique au point M' sera

$$\gamma + \frac{d\gamma}{dn} MM'.$$

Comme troisième simplification je supposerai que le tranchant du biseau est parfait c'est à dire que la surface de l'écran se réduit à deux plans qui se coupent suivant l'axe des z, sous un angle très aigu.

Je simplifierai encore le problème en supposant que cet angle est infiniment petit. Enfin je supposerai que la lentille cylindrique qui concentre la lumière sur le bord de l'écran est parfaitement aplanétique et que sa ligne focale coïncide rigoureusement avec l'axe des z.

Réduit à ces termes, le problème est facile à résoudre et on peut déjà rendre compte des particularités les plus importantes découvertes par M. Gouy. Néanmoins on pourrait croire que les hypothèses très particulières que je viens de faire jouent un rôle essentiel et que les résultats seraient profondément modifiés si on les abandonnait. Ces hypothèses, je le rappelle sont au nombre de 5:

1°. L'angle du biseau est infiniment petit.

2°. Le tranchant du biseau est parfait.

3°. L'écran se comporte comme un conducteur parfait.

4°. La lentille convergente a sa ligne focale sur l'axe des z.

5°. Cette lentille est cylindrique.

Un examen plus approfondi est donc indispensable. Je vais par conséquent procéder de la façon suivante.

Je traiterai d'abord le problème complètement en admettant ces cinq hypothèses puis je les abandonnerai successivement et je verrai quelles modifications j'introduis ainsi dans les résultats.

Je les abandonnerai d'ailleurs dans l'ordre où je viens de les énoncer en dernier lieu.

III.

Rappelons d'abord les propriétés des fonctions de Bessel qui nous seront utiles dans la suite. Soit:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\Big[1 - \frac{x^2}{2.2n} + \frac{x^4}{2.4.2n.2n+2} - \frac{x^6}{2.4.6.2n.2n+2.2n+4} + \ldots\Big],$$

où n est un nombre entier, fractionnaire ou même incommensurable. On sait que $J_n x^{-n}$ est une fonction entière de x et que J_n satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2J_n}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n}{dx} + J_n\left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) = 0. \tag{1}$$

La fonction J_n n'est généralement pas réductible à des fonctions plus simples; il y a pourtant un cas où il en est ainsi, c'est quand $2n$ est un entier impair; il vient alors:

$$J_n = (-1)^{n-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n-\frac{1}{2}} \cos x.$$

On voit ainsi que J_n est un polynôme entier en $\cos x$, $\sin x$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

J'aurai besoin aussi de la valeur asymptotique de $J_n(x)$ pour x très grand. Cette valeur est:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Cela posé supposons d'abord la lumière polarisée dans le plan de diffraction.

Notre équation s'écrit alors:

$$V^2\left(\frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2}\right) = \frac{d^2Z}{dt^2}.$$

Si nous supposons que la lumière soit homogène, c'est à dire que nous ayons

$$Z = Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt,$$

Z_0 et Z_1 ne dépendant que de x et de y, il viendra:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -p^2 Z;$$

si nous posons:

$$\alpha = \frac{p}{V}$$

notre équation devient:

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2} + \alpha^2 Z = 0. \tag{2}$$

La longueur d'onde est alors égale à $\frac{2\pi}{\alpha}$.

Passons aux coordonnées polaires en posant:

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega,$$

l'équation deviendra:

$$\frac{d^2Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dZ}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2Z}{d\omega^2} + \alpha^2 Z = 0. \tag{3}$$

Si l'écran est un biseau parfait, les équations des deux plans qui limitent cet écran seront de la forme:

$$\omega = \omega_0, \qquad \omega = \omega_1.$$

Si nous supposons comme nous venons de le faire que l'angle du biseau est infiniment petit, ces équations pourront s'écrire:

$$\omega = 0, \qquad \omega = 2\pi.$$

Nous ferons varier ω de 0 à 2π; pour $\omega = 0$ et pour $\omega = 2\pi$, Z devra être nul; mais $\frac{dZ}{d\omega}$ pourra éprouver une discontinuité quand on franchira l'écran qui se trouve ici réduit à un plan. Au contraire s'il n'y avait pas d'écran, Z ne serait pas assujetti à s'annuler pour $\omega = 0$, mais ce serait une fonction périodique de ω de période 2π, qui serait continue ainsi que sa dérivée. Comment ces conditions se traduisent elles analytiquement.

S'il n'y avait pas d'écran, on pourrait écrire, en vertu de la formule de Fourier

$$Z = \Sigma P_n \cos n\omega + \Sigma P'_n \sin n\omega, \tag{4}$$

n étant un entier, P_n et P'_n des fonctions de ρ. Mais avec un écran nous devrons remplacer cette formule par la suivante:

$$Z = \sum P_n \sin\frac{n\omega}{2}, \tag{5}$$

n étant un entier et P_n une fonction de ρ et de t. Le développement (5) ne doit pas contenir de cosinus parce que Z doit s'annuler pour $\omega = 0$ et pour $\omega = 2\pi$. En revanche le développement (4) ne doit pas contenir de fonctions trigonométriques de $\frac{n\omega}{2}$ (n impair) parce que Z et $\frac{dZ}{d\omega}$ doivent être continues.

Adoptons donc le développement (5) et substituons le dans l'équation (3); nous aurons en égalant à o le coefficient de $\sin\frac{n\omega}{2}$:

$$\frac{d^2P_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dP_n}{d\rho} + P_n\left(\alpha^2 - \frac{n^2}{4\rho^2}\right) = 0$$

d'où puisque P_n doit rester fini pour $\rho = 0$:

$$P_n = A_n J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho),$$

A_n étant une fonction de t. On a donc:

$$Z = \sum A_n J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{2}$$

ou en remplaçant les fonctions de Bessel par leur valeur approchée, ce qui est permis dès que $\alpha\rho$ est très grand, c'est à dire dès que ρ est beaucoup plus grand que la longueur d'onde:

$$Z = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right) \sin\frac{n\omega}{2}. \tag{6}$$

Rappelons que A_n doit être linéaire et homogène en $\cos pt$ et $\sin pt$.

Pour pousser plus loin cette étude, nous devons distinguer les diverses sortes de faisceaux lumineux dont la superposition produit le mouvement de l'éther représenté par l'équation (6).

Parmi ces faisceaux il y en a un qui se rapproche du bord de l'écran c'est à dire de l'axe des z, c'est le faisceau incident; les autres s'en éloignent; à savoir, le faisceau transmis directement, le faisceau réfléchi et le faisceaux diffractés. Le premier se rapprochant de l'écran, son équation peut s'écrire:

$$Z = \frac{f(\omega)}{\sqrt{\rho}} \cos(\alpha\rho + pt + h),$$

h étant une constante qui doit être indépendante de ω, si on suppose comme il n'y a peu d'inconvénient à le faire que la phase est la même en tous les points du faisceau. Nous pourrons alors choisir l'origine du temps de façon que cette constante soit égale à $-\frac{\pi}{4}$, ce qui nous permettra d'écrire:

$$Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum B_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right) \sin\frac{n\omega}{2}, \tag{7}$$

les B_n étant des constantes.

Les autres faisceaux qui s'éloignent de l'écran doivent avoir une équation de la forme:

$$Z = \frac{f_1(\omega)}{\sqrt{\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) + \frac{f_2(\omega)}{\sqrt{\rho}} \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)$$

ce qui peut s'écrire encore:

$$\begin{aligned} Z = {} & \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum C_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) \sin\frac{n\omega}{2} \\ & + \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum D_n \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) \sin\frac{n\omega}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Le second membre de (6) doit être la somme des seconds membres de (7) et de (8). Si nous identifions en égalant les coefficients de

$$\cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sin\frac{n\omega}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sin\frac{n\omega}{2},$$

nous obtiendrons:

$$\begin{aligned} A_n \cos\frac{n\pi}{4} &= \quad B_n \cos pt + C_n \cos pt - D_n \sin pt, \\ A_n \sin\frac{n\pi}{4} &= -B_n \sin pt + C_n \sin pt + D_n \cos pt, \end{aligned}$$

d'où:

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \\ \text{si } n \equiv 1 \\ \text{si } n \equiv 2 \\ \text{si } n \equiv 3 \end{array}\right\} \bmod 4, \qquad \begin{array}{ll} B_n = C_n, & D_n = 0, \\ B_n = D_n, & C_n = 0, \\ B_n = -C_n, & D_n = 0, \\ B_n = -D_n, & C_n = 0. \end{array} \tag{9}$$

C'est le faisceau incident qui nous est donné, nous connaissons donc B_n; les équations (9) nous permettent alors de calculer C_n et D_n et nous font ainsi connaître tous les éléments des faisceaux direct, réfléchi et diffractés.

Il est curieux de voir ce que donne ce même calcul quand on l'applique au cas où il n'y a pas d'écran. On a alors pour le mouvement total:

$$(6') \qquad Z = \Sigma(A_n^0 \cos n\omega + A_n^1 \sin n\omega) J_n(\alpha\rho)$$
$$= \Sigma(A_n^0 \cos n\omega + A_n^1 \sin n\omega) \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right),$$

pour le faisceau incident:

$$(7') \quad Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right)(B_n^0 \cos n\omega + B_n^1 \sin n\omega) = f(\rho, \omega, t)$$

et pour l'ensemble des faisceaux transmis:

$$(8') \qquad Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)(C_n^0 \cos n\omega + C_n^1 \sin n\omega)$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)(D_n^0 \cos n\omega + D_n^1 \sin n\omega) = f_1(\rho, \omega, t).$$

L'identification faite absolument de la même manière que plus haut nous donne alors:

$$(9') \qquad \left.\begin{array}{r}\text{si } n \equiv 0 \\ n \equiv 1\end{array}\right\} \bmod 2, \qquad \begin{array}{lll} C_n^0 = B_n^0, & C_n^1 = B_n^1, & D_n^0 = D_n^1 = 0, \\ C_n^0 = -B_n^0, & C_n^1 = -B_n^1, & D_n^0 = D_n^1 = 0 \end{array}$$

d'où:

$$f_1(\rho, \omega, t) = f(\rho, \omega + \pi, -t)$$

ce qui veut dire en somme qu'il n'y a pas d'autre faisceau transmis que le faisceau direct, c'est à dire qu'il n'y a ni réflexion, ni diffraction.

Revenons au cas où il y a un écran et cherchons à interpréter les équations (9). Supposons que le faisceau incident soit contenu entre les deux plans $\omega = \alpha$, $\omega = \beta$ et qu'entre ces deux plans son intensité soit constante, ou plutôt ne dépende que de ρ. Soit ensuite:

$$f(\omega) = \sum B_n \sin \frac{n\omega}{2}$$

Alors $f(\omega)$ sera nulle, quand ω ne sera pas compris entre α et β, et sera constante égale à 1 par exemple, quand ω sera compris entre α et β. Si l'on observe alors que $f(\omega)$ change de signe avec ω et est une fonction périodique de période 4π, on en conclura:

$$f(\omega) = +1 \quad \text{si } 4k\pi + \alpha < \omega < 4k\pi + \beta; \ k \text{ entier},$$

$$f(\omega) = -1 \quad \text{si } 4k\pi - \beta < \omega < 4k\pi - \alpha; \ k \text{ entier},$$

$$f(\omega) = 0 \quad \text{pour les autres valeurs de } \omega.$$

Soit ensuite:

$$f_1(\omega) = \Sigma B_{2n} \sin n\omega = \frac{f(\omega) + f(\omega + 2\pi)}{2};$$

on voit que $f_1(\omega)$ a pour période 2π et est égale à

$+\frac{1}{2}$ si ω est compris entre $2k\pi + \alpha$ et $2k\pi + \beta$,

$-\frac{1}{2}$ si ω est compris entre $2k\pi - \beta$ et $2k\pi - \alpha$,

0 pour les autres valeurs de ω.

Posons de même:

$$f_2(\omega) = \sum B_{2n+1} \sin \frac{2n+1}{2} \omega = \frac{f(\omega) - f(\omega + 2\pi)}{2}.$$

Il résulte de cette définition:

1° que $\qquad f_2(\omega) = -f_2(\omega + 2\pi)$,

2° que $f_2(\omega)$ est égale à

$+\frac{1}{2}$ si ω est compris entre

$4k\pi + \alpha$ et $4k\pi + \beta$ ou entre $(4k + 2)\pi - \beta$ et $(4k + 2)\pi - \alpha$,

$-\frac{1}{2}$ si ω est compris entre

$4k\pi - \beta$ et $4k\pi - \alpha$ ou entre $(4k + 2)\pi + \alpha$ et $(4k + 2)\pi + \beta$,

0 pour les autres valeurs de ω.

Posons alors:

$$\frac{\pi}{2}\varphi(\omega) = \sin\omega + \frac{\sin 3\omega}{3} + \frac{\sin 5\omega}{3} + \dots$$

de telle sorte que $\varphi(\omega)$ soit égale à

$+\frac{1}{2}$ pour ω compris entre $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$,

$-\frac{1}{2}$ pour ω compris entre $(2k+1)\pi$ et $(2k+2)\pi$

on aura alors

$$2f_2(\omega) = \varphi\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right) - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right) + \varphi\left(\frac{\omega+\beta}{2} - \pi\right) - \varphi\left(\frac{\omega+\alpha}{2} - \pi\right).$$

Posons maintenant:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \psi_1(\omega) &= \sum C_n \sin\frac{n\omega}{2} = \Sigma B_{2n}(-1)^n \sin n\omega, \\ \psi_2(\omega) &= \sum D_n \sin\frac{n\omega}{2} = \Sigma B_{2n+1}(-1)^n \sin\frac{(2n+1)\omega}{2} \end{aligned}$$

l'équation (6) qui exprime le mouvement total de l'éther pourra s'écrire

$$(11) \qquad Z\sqrt{\frac{\pi\alpha\rho}{2}} = f_1(\omega)\cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right)$$

$$+ \psi_1(\omega)\cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) + \psi_2(\omega)\sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right).$$

La première équation (10) nous montre que

$$\psi_1(\omega) = f_1(\omega + \pi)$$

et par conséquent est égale à

$+\frac{1}{2}$ pour ω compris entre $\pi+\alpha$ et $\pi+\beta$ (faisceau direct),

$-\frac{1}{2}$ pour ω compris entre $\pi-\beta$ et $\pi-\alpha$ (faisceau réfléchi),

0 pour les autres valeurs de ω (ω variant de 0 à 2π).

On voit ainsi que dans le second membre de (11), le premier terme correspond au faisceau incident, le second aux faisceaux direct et réfléchi et que le troisième terme qui reste correspondra aux faisceaux diffractés.

Nous sommes donc amenés à calculer la fonction $\psi_2(\omega)$; car l'intensité de la lumière diffractée sera proportionnelle au carré de cette fonction.

Rappelons le développement connu:

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+e^{i\omega}}{1-e^{i\omega}} = \frac{e^{i\omega}}{1} + \frac{e^{3i\omega}}{3} + \frac{e^{5i\omega}}{5} + \ldots.$$

En égalant les parties imaginaires on trouve:

$$\frac{\pi}{2}\varphi(\omega) = \frac{\sin\omega}{1} + \frac{\sin 3\omega}{3} + \ldots$$

et en égalant les parties réelles

$$\frac{1}{2}\log\left|\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\right| = \frac{\cos\omega}{1} + \frac{\cos 3\omega}{3} + \frac{\cos 5\omega}{5} + \ldots.$$

Changeant ω en $\omega + \frac{\pi}{2}$, il vient:

$$\frac{1}{2}\log\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = -\frac{\sin\omega}{1} + \frac{\sin 3\omega}{3} - \frac{\sin 5\omega}{5} + \ldots$$

ou enfin

$$\frac{\pi}{2}\varphi_1(\omega) = \frac{1}{2}\log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sin\omega}{1} - \frac{\sin 3\omega}{3} + \frac{\sin 5\omega}{5} - \ldots$$

en sorte que pour passer de $\varphi(\omega)$ à $\varphi_1(\omega)$ il suffit de changer le signe du coefficient de $\sin(4n+3)\omega$.

Il en résulte qu'on passera de $\varphi\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right)$ à $\varphi_1\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right)$ en changeant le signe du coefficient de $\sin\frac{4n+3}{2}\omega$ ou de $\cos\frac{4n+3}{2}\omega$.

De même pour passer de $f_2(\omega)$ à $\psi_2(\omega)$, il suffit de changer le signe du coefficient de $\sin\frac{4n+3}{2}\omega$. Or, on a:

$$2f_2(\omega) = \varphi\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right) - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right) + \varphi\left(\frac{\omega+\beta}{2}-\pi\right) - \varphi\left(\frac{\omega+\alpha}{2}-\pi\right).$$

On aura par conséquent:

$$2\psi_2(\omega) = \varphi_1\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right) + \varphi_1\left(\frac{\omega+\beta}{2} - \pi\right) - \varphi_1\left(\frac{\omega+\alpha}{2} - \pi\right)$$

ou enfin:

$$\psi_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\omega-\alpha+\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\omega+\beta-\pi}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\omega-\beta+\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\omega+\alpha-\pi}{4}}\right|. \tag{12}$$

Telle est l'expression de la racine carrée de l'intensité de la lumière diffractée. Une chose nous frappera d'abord; c'est que cette expression peut devenir infinie. Elle le devient en effet pour les valeurs suivantes de ω,

$$\omega = \alpha + \pi, \qquad \omega = \beta + \pi, \qquad \omega = \pi - \alpha, \qquad \omega = \pi - \beta,$$

c'est à dire sur les bords du faisceau direct et du faisceau réfléchi. Cette circonstance pourrait d'abord provoquer des doutes.

En premier lieu au point de vue purement analytique; nous avons été amenés à plusieurs reprises à supposer que la fonction Z restait finie; et si à la fin du calcul, nous trouvons un résultat contradictoire avec cette hypothèse, on peut se demander si tout notre échafaudage de raisonnements ne s'écroule pas; on sera rassuré si l'on observe que l'équation (11) n'est qu'approchée et qu'on l'obtient en remplaçant les fonctions de Bessel par leur valeur approchée; or cela n'est permis que si ρ est infini; pour toutes les valeurs finies de ρ, l'expression exacte de Z demeure finie.

Ensuite au point de vue physique, ce résultat n'est pas conforme aux observations. Il est vrai que comme on observe à l'aide d'un microscope, l'objectif de ce microscope a forcément une certaine ouverture et serait vu de l'axe des z sous une angle fini; de sorte que la racine carrée de l'intensité observée, n'est pas $\psi_2(\omega)$, mais:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \psi_2(\omega)\,d\omega.$$

Or cette intégrale est évidemment toujours finie; la différence $\omega_1 - \omega_0$

était relativement assez grande, dans les expériences de M. Gouy elle était égale à $\beta - \alpha$.

Mais cette explication est insuffisante, ce résultat paradoxal tient aux hypothèses extrêmes que nous avons faites; nous nous en rendrons mieux compte dans les paragraphes suivants, quand nous abandonnerons successivement ces hypothèses. Mais dès maintenant je puis mettre en évidence l'effet d'une d'entre elles. Nous avons admis que l'intensité du faisceau incident était constante pour ω compris entre α et β et était nulle quand ω n'était pas compris entre ces limites. Il en résultait que $f(\omega)$ était une fonction discontinue; c'est ce qui n'arrivera pas dans la réalité; or il est aisé de voir par une analyse toute pareille à celle qui précède et sur laquelle nous reviendrons à la fin de ce paragraphe que si $f(\omega)$ est continu, $\psi_2(\omega)$ est fini.

Ne nous arrêtons donc pas pour le moment à cette difficulté; et appliquons la même méthode au cas où la lumière est polarisée dans un plan perpendiculaire au plan de diffraction. Nous devons alors satisfaire à l'équation:

$$\frac{d^2\gamma}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\gamma}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\gamma}{d\omega^2} + \alpha^2\gamma = 0. \tag{3''}$$

Sur le bord de l'écran, c'est à dire pour

$$\omega = 0, \qquad \omega = 2\pi$$

on devra avoir:

$$\frac{d\gamma}{d\omega} = 0$$

de sorte que γ sera de la forme:

$$\gamma = \sum P_n \cos\frac{n\omega}{2}$$

P_n étant fonction de ρ et de t. On verrait comme plus haut que:

$$P_n = A_n J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho)$$

A_n dépendant seulement de t; d'où l'équation approchée analogue à (6)

$$\gamma = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right)\cos\frac{n\omega}{2}. \tag{6''}$$

Les équations (7) et (8) qui donnent l'expression de la lumière incidente et celle des lumières transmise directement, réfléchie et diffractée seront encore vraies ici avec cette différence que Z sera remplacé par γ et $\sin\frac{n\omega}{2}$ par $\cos\frac{n\omega}{2}$.

On aura donc:

$$(7'') \qquad \gamma = \sum B_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right) \cos\frac{n\omega}{2},$$

$$(8'') \qquad \gamma = \sum C_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\theta \cos\frac{n\omega}{2} + \sum D_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sin\theta \cos\frac{n\omega}{2}$$

en posant pour abréger:

$$\theta = \alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt.$$

En identifiant le second membre de (6″) avec la somme des seconds membres de (7″) et de (8″) nous retrouverons les équations (9) qui sont donc encore vraies dans le cas qui nous occupe maintenant.

Posons encore

$$f(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n\omega}{2}.$$

La fonction $f(\omega)$ aura pour période 4π, elle ne changera pas quand ω se changera en $-\omega$; d'autre part ses valeurs entre 0 et 2π sont connues, elle est égale à 1 quand ω varie de α à β et à 0 pour les valeurs de ω comprises entre 0 et 2π et non comprises entre α et β. Nous aurons donc:

$$f(\omega) = 1 \quad \text{pour } \omega \text{ compris entre}$$

$$4k\pi + \alpha \quad \text{et} \quad 4k\pi + \beta \quad \text{ou entre} \quad 4k\pi - \beta \quad \text{et} \quad 4k\pi - \alpha,$$

$$f(\omega) = 0 \quad \text{pour les autres valeurs de } \omega.$$

Soit maintenant:

$$f_1(\omega) = \sum B_{2n} \cos n\omega = \frac{f(\omega) + f(\omega + 2\pi)}{2},$$

$$f_2(\omega) = \sum B_{2n+1} \cos\frac{(2n+1)\omega}{2} = \frac{f(\omega) - f(\omega + 2\pi)}{2}$$

il est clair que l'on aura:

$$f_2(\omega) = \frac{1}{2} \quad \text{pour } \omega \text{ compris entre}$$

$$4k\pi + \alpha \quad \text{et} \quad 4k\pi + \beta \quad \text{ou entre} \quad 4k\pi - \beta \quad \text{et } 4k\pi - \alpha,$$

$$f_2(\omega) = -\frac{1}{2} \quad \text{pour } \omega \text{ compris entre}$$

$$(4k+2)\pi+\alpha \quad \text{et} \quad (4k+2)\pi+\beta \quad \text{ou entre} \quad (4k+2)\pi-\beta \quad \text{et} \quad (4k+2)\pi-\beta,$$

$$f_2(\omega) = 0 \quad \text{pour les autres valeurs de } \omega.$$

Cela peut s'exprimer par l'équation suivante:

$$2f_2(\omega) = \varphi\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right) - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+\beta}{2} - \pi\right) + \varphi\left(\frac{\omega+\alpha}{2} - \pi\right).$$

Soit, comme plus haut:

$$\psi_1(\omega) = \sum C_n \cos\frac{n\omega}{2} = \Sigma B_{2n}(-1)^n \cos n\omega,$$

$$\psi_2(\omega) = \sum D_n \cos\frac{n\omega}{2} = \Sigma B_{2n+1}(-1)^n \cos\frac{2n+1}{2}\omega.$$

Nous aurons dans l'expression complète de γ un terme en $f(\omega)$ correspondant au faisceau incident, un terme en $\psi_1(\omega)$ correspondant aux faisceaux direct et réfléchi, un terme en $\psi_2(\omega)$ correspondant aux faisceaux diffractés. On voit d'abord que:

$$\psi_1(\omega) = f_1(\omega + \pi).$$

Quant à $\psi_2(\omega)$ on l'obtiendra en partant de $f_2(\omega)$ et en changeant le signe du coefficient de $\cos\frac{4n+3}{2}\omega$.

On trouvera ainsi:

$$2\psi_2(\omega) = \varphi_1\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{\omega+\beta}{2} - \pi\right) + \varphi_1\left(\frac{\omega+\alpha}{2} - \pi\right)$$

ou bien enfin:

$$\psi_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\omega-\alpha+\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\omega+\alpha-\pi}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\omega-\beta+\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\omega+\beta-\pi}{4}}\right|.$$

Telle est l'expression de la racine carrée de l'intensité de la lumière diffractée. On voit que cette expression n'est pas la même suivant que la lumière est polarisée dans le plan de diffraction ou perpendiculairement à ce plan. Par conséquent si la lumière incidente est naturelle, la lumière diffractée sera polarisée.

Pour simplifier la discussion, supposons que α soit très peu différent de β et négligeons les termes en $(\beta-\alpha)^2$; il viendra pour les deux expressions de $\psi_2(\omega)$:

$$\frac{\beta-\alpha}{4\pi}\left|\frac{1}{\cos\frac{\omega-\alpha}{2}}-\frac{1}{\cos\frac{\omega+\alpha}{2}}\right| \quad \text{(polarisation parallèle au plan de diffraction),}$$

et

$$\frac{\beta-\alpha}{4\pi}\left|\frac{1}{\cos\frac{\omega-\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\omega+\alpha}{2}}\right| \quad \text{(polarisation perpendiculaire au plan de diffraction).}$$

Les circonstances de la polarisation dépendront donc de la valeur du rapport:

$$\left|\frac{\frac{1}{\cos\frac{\omega-\alpha}{2}}-\frac{1}{\cos\frac{\omega+\alpha}{2}}}{\frac{1}{\cos\frac{\omega-\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\omega+\alpha}{2}}}\right| = \left|\frac{\cos\frac{\omega+\alpha}{2}-\cos\frac{\omega-\alpha}{2}}{\cos\frac{\omega+\alpha}{2}+\cos\frac{\omega-\alpha}{2}}\right|.$$

Plus ce rapport s'éloignera de 1, plus la polarisation sera intense. S'il est plus grand que 1, le plan de polarisation sera parallèle au plan de diffraction; s'il est plus petit que 1 ces deux plans seront perpendiculaires.

La condition pour que le rapport soit plus grand que 1, c'est que ω soit compris entre $\alpha+\pi$ et $\pi-\alpha$, c'est à dire que le rayon diffracté soit compris entre le faisceau direct et le faisceau réfléchi. On aura donc:

entre l'écran et le faisceaux direct (diffraction intérieure) de la lumière polarisée perpendiculairement au plan de diffraction;

entre le faisceau direct et le faisceau réfléchi (diffraction extérieure) de la lumière polarisée parallèlement au plan de diffraction.

Ces résultats sont conformes à l'observation; les expériences n'ont pas porté sur le troisième cas où ω serait compris entre o et $\pi - \alpha$.

Pour $\omega = 2\pi$, le rapport s'annule, la polarisation est donc complète ce qui est encore conforme à l'observation. Pour $\omega = \pi$, le rapport devient infini et la polarisation devrait encore être complète; il est probable que le mélange des rayons réfléchis sur le bords qui sont toujours arrondis, s'oppose à ce qu'on puisse l'observer.

M. Gouy a observé que l'intensité totale de la lumière diffractée est maximum à déviation égale quand les axes optiques du collimateur et du microscope font des angles égaux avec l'écran. Notre formule donne un résultat contraire, l'intensité totale qui est proportionnelle à:

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\omega-\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\omega+\alpha}{2}}$$

est au contraire minimum quand les conditions que je viens d'énoncer sont remplies c'est à dire quand

$$\omega + \alpha = 2\pi.$$

Nous chercherons plus loin, quand nous abandonnerons successivement nos hypothèses simples, à expliquer cette divergence. Il ne sera pas inutile néanmoins de voir ce que deviennent nos formules quand on suppose $\omega + \alpha = 2\pi$. J'appellerai δ la déviation $\omega - \alpha - \pi$ qui sera positive à l'intérieure.

Je trouve alors que la racine carrée de l'intensité de la lumière diffractée est proportionnelle à

$$\left| \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} - 1 \right|$$

si le plan de polarisation est parallèle au plan de diffraction et à

$$\left| \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} + 1 \right|$$

si ces deux plans sont perpendiculaires.

L'intensité totale sera proportionnelle à

$$1 + \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Elle ne change donc pas quand on change δ en $-\delta$, ce qui est conforme à l'une des lois de M. Gouy, celle que nous avons énoncée plus haut sous le n° 4.

Nous rendrons donc compte déjà des principales circonstances observées par M. Gouy; mais en revanche il en est d'autres qui échappent à notre explication comme la coloration des rayons diffractées et la différence de marche entre les deux composantes (lois énoncées plus haut sous les n°s 5 et 6). Nous verrons dans les paragraphes suivants si nous pouvons en rendre compte.

J'ai dit plus haut que si la fonction $f(\omega)$ était continue, la fonction $\psi_2(\omega)$ ne deviendrait pas infinie; il est aisé de s'en assurer, on trouve en effet si $f(\omega)$ est nul pour $\omega = 2\pi$ et si l'on suppose par exemple que le plan de polarisation soit parallèle au plan de diffraction:

$$\psi_2(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} f'(\alpha) \log \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega - \alpha + \pi}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\omega + \alpha - \pi}{4}} \right| d\alpha.$$

Il est clair que si $f'(\omega)$ est fini, cette intégrale ne pourra devenir infinie.

IV.

Voyons maintenant comment les résultats précédents sont modifiés quand on ne suppose plus que l'angle du biseau soit infiniment petit. Soit

$$\omega = 0, \qquad \omega = \lambda\pi$$

les deux plans qui limitent le biseau.

Supposons d'abord que le plan de polarisation soit parallèle au plan de diffraction Z qui doit s'annuler pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \lambda\pi$ sera de la forme:

$$Z = \sum A_n J_{\frac{n}{\lambda}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{\lambda}$$

en se bornant à la valeur approchée on retrouvera l'équation

$$(6) \qquad Z = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2\lambda}\right) \sin\frac{n\omega}{\lambda}.$$

Soit

$$(7) \qquad Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum B_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right) \sin\frac{n\omega}{\lambda}$$

l'équation du faisceau incident et

$$(8) \quad Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum \sin\frac{n\omega}{\lambda}\left[C_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) + D_n \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)\right]$$

celle des faisceaux qui s'éloignent de l'écran. On trouvera par un calcul tout pareil à celui du paragraphe précédent:

$$A_n \cos\frac{n\pi}{2\lambda} = B_n \cos pt + C_n \cos pt - D_n \sin pt,$$

$$A_n \sin\frac{n\pi}{2\lambda} = - B_n \sin pt + C_n \sin pt + D_n \cos pt$$

d'où les équations

$$(9) \qquad \begin{aligned} C_n &= \cos\frac{n\pi}{\lambda} B_n, \\ D_n &= \sin\frac{n\pi}{\lambda} B_n. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir qu'en y faisant $\lambda = 2$, on retrouve les équations (9) du paragraphe précédent.

L'équation (8) devient alors:

$$Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum B_n \sin\frac{n\omega}{\lambda} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt - \frac{n\pi}{\lambda}\right).$$

Si nous posons alors comme dans le paragraphe précédent:

$$f(\omega) = \sum B_n \sin \frac{n\omega}{\lambda}$$

fonction proportionnelle à la racine carrée de l'intensité du faisceau incident, nous aurons à calculer les fonctions

$$\psi_1(\omega) = \sum B_n \cos \frac{n\pi}{\lambda} \sin \frac{n\omega}{\lambda},$$

$$\psi_2(\omega) = \sum B_n \sin \frac{n\pi}{\lambda} \sin \frac{n\omega}{\lambda},$$

et l'intensité de la lumière transmise soit directement, soit par réflexion, soit par diffraction sera proportionnelle à:

$$\psi_1^2(\omega) + \psi_2^2(\omega).$$

Remarquons d'abord que la fonction $f(\omega)$ est périodique de période $2\lambda\pi$, qu'elle change de signe avec ω, et qu'elle est égale à 0 quand ω varie de 0 à α ou de β à $\lambda\pi$; et égale à 1 quand ω varie de α à β. La fonction $f(\omega)$ et par conséquent les coefficients B_n sont entièrement déterminés. Considérons alors la fonction suivante $\eta(z)$ de la variable imaginaire z; soit:

$$\eta(z) = \Sigma B_n z^n.$$

La fonction $\eta(z)$ est évidemment égale à:

$$\eta(z) = \frac{-1}{\pi} \log \frac{\left(z - e^{\frac{i\alpha}{\lambda}}\right)\left(z - e^{-\frac{i\alpha}{\lambda}}\right)}{\left(z - e^{\frac{i\beta}{\lambda}}\right)\left(z - e^{-\frac{i\beta}{\lambda}}\right)}.$$

On vérifie en effet que la partie imaginaire de

$$\eta\left(e^{\frac{i\omega}{\lambda}}\right)$$

est bien égale à $f(\omega)$; je désignerai par $f_1(\omega)$ la partie réelle qui est évidemment égale à

$$f_1(\omega) = \frac{-1}{\pi} \log \left| \frac{\sin \frac{\omega - \alpha}{2\lambda} \cdot \sin \frac{\omega + \alpha}{2\lambda}}{\sin \frac{\omega - \beta}{2\lambda} \cdot \sin \frac{\omega + \beta}{2\lambda}} \right| = \sum B_n \cos \frac{n\omega}{\lambda}.$$

Il vient ensuite:

$$2\psi_1(\omega) = \sum B_n \sin\frac{n(\omega+\pi)}{\lambda} + \sum B_n \sin\frac{n(\omega-\pi)}{\lambda} = f(\omega+\pi) + f(\omega-\pi)$$

ce qui montre que le terme $\psi_1(\omega)$ correspond encore aux faisceaux direct et réfléchi à savoir le terme $f(\omega+\pi)$ au faisceau direct et le terme $f(\omega-\pi)$ au faisceau réfléchi. Quant au terme $\psi_2(\omega)$ il représentera comme dans le paragraphe précédent les faisceaux diffractés; étudions le de plus près.

Il vient:

$$2\psi_2(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n(\omega-\pi)}{\lambda} + \sum B_n \cos\frac{n(\omega+\pi)}{\lambda} = f_1(\omega-\pi) - f_1(\omega+\pi)$$

ou:

$$(10)\qquad \psi_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\sin\frac{\omega+\pi-\alpha}{2\lambda}\cdot\sin\frac{\omega+\pi+\alpha}{2\lambda}\cdot\sin\frac{\omega-\pi-\beta}{2\lambda}\cdot\sin\frac{\omega-\pi+\beta}{2\lambda}}{\sin\frac{\omega-\pi-\alpha}{2\lambda}\cdot\sin\frac{\omega-\pi+\alpha}{2\lambda}\cdot\sin\frac{\omega+\pi-\beta}{2\lambda}\cdot\sin\frac{\omega+\pi+\beta}{2\lambda}}\right|.$$

On retrouverait la formule du paragraphe précédent en faisant $\lambda = 2$. Si nous supposons que la différence $\beta - \alpha$ soit infiniment petite, cette formule se simplifie un peu et on voit que $\psi_2(\omega)$ est égal à un facteur constant près à:

$$(11)\qquad \left|\frac{1}{\sin\frac{\omega+\pi-\alpha}{2\lambda}\sin\frac{\omega-\pi-\alpha}{2\lambda}} - \frac{1}{\sin\frac{\omega+\pi+\alpha}{2\lambda}\sin\frac{\omega-\pi+\alpha}{2\lambda}}\right|.$$

Je ferai observer que les expressions (10) et (11) s'annulent pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \lambda\pi$, c'est à dire sur le bord de l'écran; c'est le résultat auquel nous étions déjà parvenus dans le paragraphe précédent.

L'expression peut d'ailleurs s'écrire au facteur constant 2 près:

$$\left|\frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda} - \cos\frac{\omega-\alpha}{\lambda}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda} - \cos\frac{\omega+\alpha}{\lambda}}\right|.$$

Sous cette forme on voit aisément que les seules valeurs de ω pour lesquelles cette expression puisse s'annuler sont:

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \omega = \lambda\pi.$$

Passons maintenant au cas où la lumière est polarisée perpendiculairement au plan de diffraction; on doit alors avoir:

$$\frac{d\gamma}{d\omega} = 0$$

pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \lambda\pi$; il en résulte que γ sera de la forme:

$$\gamma = \sum A_n J_{\frac{n}{\lambda}}(\alpha\rho) \cos\frac{n\pi}{\lambda}$$

la partie de γ qui correspond au faisceau incident, sera si ρ est assez grand:

$$(7') \qquad \gamma = \sum \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} B_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right) \cos\frac{n\omega}{\lambda}$$

et l'équation des faisceaux qui s'éloignent de l'écran sera:

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum B_n \cos\frac{n\omega}{\lambda} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt - \frac{n\pi}{\lambda}\right).$$

Si alors nous posons, comme plus haut:

$$f(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n\omega}{\lambda},$$

$$\psi_1(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n\pi}{\lambda} \cos\frac{n\omega}{\lambda}, \qquad \psi_2(\omega) = \sum B_n \sin\frac{n\pi}{\lambda} \cos\frac{n\omega}{\lambda},$$

la racine carrée de l'intensité de la lumière sera proportionnelle à

$f(\omega)$ pour le faisceau incident,

$\psi_1(\omega)$ pour les faisceaux direct et réfléchi,

$\psi_2(\omega)$ pour les faisceaux diffractés.

On trouve d'ailleurs:

$$2\psi_1(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n(\omega + \pi)}{\lambda} + \sum B_n \cos\frac{n(\omega - \pi)}{\lambda} = f(\omega + \pi) + f(\omega - \pi)$$

ce qui montre que les propriétés des faisceaux direct et réfléchi sont les mêmes que dans le cas précédent.

Reste à étudier $\psi_2(\omega)$.

Si nous posons comme plus haut:

$$\eta(z) = \Sigma B_n z^n,$$

il viendra:

$$\eta(z) = \frac{i}{\pi} \log \frac{\left(z - e^{\frac{i\alpha}{\lambda}}\right)\left(z - e^{-\frac{i\beta}{\lambda}}\right)}{\left(z - e^{\frac{i\beta}{\lambda}}\right)\left(z - e^{-\frac{i\alpha}{\lambda}}\right)} + \frac{\alpha - \beta}{\pi\lambda}$$

car pour $z = e^{\frac{i\omega}{\lambda}}$ la partie réelle de $\eta(z)$ doit être égale à $f(\omega)$, c'est à dire à $+1$ pour ω compris entre α et β ou entre $-\beta$ et $-\alpha$, et à 0 pour toutes les autres valeurs de ω depuis $-\lambda\pi$, jusqu'à $+\lambda\pi$.

On aura alors:

$$\eta\left(e^{\frac{i\omega}{\lambda}}\right) = f(\omega) + if_1(\omega)$$

en posant

$$f_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{\sin\frac{\omega - \alpha}{2\lambda} . \sin\frac{\omega + \beta}{2\lambda}}{\sin\frac{\omega - \beta}{2\lambda} . \sin\frac{\omega + \alpha}{2\lambda}} \right| = \sum B_n \sin\frac{n\omega}{\lambda}.$$

D'autre part:

$$2\psi_2(\omega) = \sum B_n \sin\frac{n(\omega + \pi)}{\lambda} - \sum B_n \sin\frac{n(\omega - \pi)}{\lambda} = f_1(\omega + \pi) - f_1(\omega - \pi)$$

d'où enfin:

$$\psi_2(\omega) = \frac{-1}{2\pi} \log \left| \frac{\sin\frac{\omega-\pi-\alpha}{2\lambda} . \sin\frac{\omega+\pi-\beta}{2\lambda} . \sin\frac{\omega-\pi+\beta}{2\lambda} . \sin\frac{\omega+\pi+\alpha}{2\lambda}}{\sin\frac{\omega+\pi-\alpha}{2\lambda} . \sin\frac{\omega-\pi-\beta}{2\lambda} . \sin\frac{\omega+\pi+\beta}{2\lambda} . \sin\frac{\omega-\pi+\alpha}{2\lambda}} \right|.$$

En faisant $\lambda = 2$ on retrouve la formule du paragraphe précédent; si nous supposons $\beta - \alpha$ très petit, cette formule se simplifie un peu et l'on trouve que $\psi_2(\omega)$ est égal à un facteur constant près à:

$$\left| \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda} - \cos\frac{\omega - \alpha}{\lambda}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda} + \cos\frac{\omega + \alpha}{\lambda}} \right|.$$

Les circonstances de la polarisation dépendent alors de la valeur du rapport:

$$\left|\frac{\cos\frac{\omega-\alpha}{\lambda}-\cos\frac{\omega+\alpha}{\lambda}}{\cos\frac{\omega-\alpha}{\lambda}+\cos\frac{\omega+\alpha}{\lambda}-2\cos\frac{\pi}{\lambda}}\right|.$$

Ce rapport s'annule pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \lambda\pi$; il est plus petit que 1 pour $\omega > \alpha + \pi$ c'est à dire dans le cas de la diffraction intérieure; il est plus grand que 1 pour ω compris entre $\pi - \alpha$ et $\pi + \alpha$ c'est à dire dans le cas de la diffraction extérieure.

Les résultats sont donc absolument les mêmes que ceux du paragraphe précédent; nous rendrons compte des lois les plus importantes de la diffraction, mais il y a quelques circonstances que nous ne pouvons encore expliquer; c'est donc seulement dans les paragraphes suivants que nous pouvons espérer en trouver la clef.

V.

Nous aurons maintenant à tenir compte de ce fait que l'écran n'est pas formé d'un conducteur parfait, mais d'un métal et que la force électrique n'est par conséquent pas rigoureusement normale à la surface de cet écran.

Supposons d'abord que la lumière soit polarisée dans le plan de diffraction et voyons quelles sont les équations auxquelles nous devrons satisfaire.

Dans l'air, c'est à dire de $\omega = 0$ à $\omega = \lambda\pi$, nous aurons:

$$\frac{d^2Z}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dZ}{d\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2Z}{d\omega^2}+\alpha^2 Z = 0. \tag{1}$$

Pour pouvoir appliquer les formules de la réflexion métallique, nous emploierons la méthode des exponentielles imaginaires. Par hypothèse, la lumière étant homogène Z sera de la forme:

$$Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt$$

ce sera donc la partie réelle de

$$(Z_0 - iZ_1)e^{ipt}.$$

Cette quantité complexe satisfait aux mêmes équations que Z. C'est elle que nous appellerons Z, quitte à ne conserver à la fin du calcul que la partie réelle.

Dans le métal c'est à dire de $\omega = \lambda\pi$ à $\omega = 2\pi$, on aura:

$$\frac{d^2Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dZ}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2Z}{d\omega^2} + \beta^2 Z = 0 \tag{2}$$

β étant une constante complexe.

D'autre part Z et $\frac{dZ}{d\omega}$ doivent être continues quand on passe du métal à l'air et réciproquement, c'est à dire que les valeurs de ces deux quantités pour $\omega = \lambda\pi - \varepsilon$ doivent très peu différer des valeurs de ces deux quantités pour $\omega = \lambda\pi + \varepsilon$ et que leurs valeurs pour $\omega = 2\pi - \varepsilon$ doivent très peu différer de leurs valeurs pour $\omega = + \varepsilon$.

Tel est le résultat auquel conduisent toutes les théories de la réflexion métallique que nous n'avons pas à discuter ici. Le problème aussi posé est très compliqué, mais une circonstance permet de le simplifier; c'est que la lumière est éteinte à une profondeur excessivement faible au dessous de la surface du métal. Il en résulte que dans l'intérieur du métal, Z doit être représentée par une somme d'exponentielles où l'exposant est la distance du point considéré à la surface du métal, multipliée par un coefficient très grand et négatif. Pour mieux nous en rendre compte, rappelons ce qui se passe dans le cas simple et bien connu de la réflexion d'une onde plane sur une surface métallique plane. Il convient pour cela de revenir aux coordonnées rectangulaires, en prenant par exemple la surface du métal comme plan des yz, et le plan de polarisation coincidant avec le plan d'incidence comme plan des xy. Nos équations déviennent alors:

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2} + \alpha^2 Z = 0 \quad \text{dans l'air}$$

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2} + \beta^2 Z = 0 \quad \text{dans le métal,}$$

et à la surface de séparation Z et $\frac{dZ}{dx}$ devront être continues.

Soit φ l'angle d'incidence; il viendra:

$$\frac{d^2Z}{dy^2} = -\alpha^2 \sin^2\varphi Z$$

d'où:

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \alpha^2 \cos^2\varphi Z \qquad = 0 \quad \text{dans l'air,}$$

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + (\beta^2 - \alpha^2 \sin^2\varphi) Z = 0 \quad \text{dans le métal.}$$

Si donc nous faisons pour abréger:

$$\alpha^2 \sin^2\varphi - \beta^2 = \delta^2$$

en choisissant le signe de δ de telle façon que la partie réelle de δ soit positive, nous devrons avoir dans le métal:

$$Z = f(y)e^{\delta x} + f_1(y)e^{-\delta x}$$

comme la lumière doit s'éteindre dès que x a une valeur positive sensible (en supposant par exemple que le métal soit du côté des x positifs et l'air du côté des x négatifs) la première fonction de y, $f(y)$ doit être nulle et il restera:

$$Z = f_1(y)e^{-\delta x}$$

d'où:

$$\frac{dZ}{dx} = -\delta Z. \tag{3}$$

Comme Z et $\frac{dZ}{dx}$ sont continues, cette même relation (3) devra être encore vraie dans l'air dans le voisinage du plan de séparation $x = 0$. Telle est la condition aux limites à laquelle nous avons à satisfaire.

Pour un métal parfaitement conducteur, β et par conséquent δ sont très grands et la relation (3) se réduit à $Z = 0$, c'est à dire à la relation que nous avons admise dans le § III.

Passons maintenant au cas où le plan de polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence et où par conséquent la force magnétique γ est parallèle à l'axe des z; nous retrouvons alors les deux équations:

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \alpha^2\gamma = 0, \qquad \frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \beta^2\gamma = 0$$

d'où nous pourrons déduire encore que l'on a dans le métal

$$\gamma = f_1(y)e^{-\delta x}$$

et

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\delta\gamma.$$

Seulement ici les conditions aux limites ne sont plus les mêmes; γ doit être continu, mais il n'est pas de même de $\frac{d\gamma}{dx}$; si l'on considère deux points très voisins de la surface de séparation et de part et d'autre de cette surface, les valeurs de $\frac{d\gamma}{dx}$ en ces deux points, dans l'air et dans le métal seront entre elles comme α^2 est à β^2. Nous aurons donc dans l'air et dans le voisinage du plan $x = 0$:

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\frac{\alpha^2\delta}{\beta^2}\gamma. \tag{4}$$

Si le métal est parfaitement conducteur et β très-grand, cette condition se réduit à

$$\frac{d\gamma}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\gamma}{dn} = 0$$

qui est celle que nous avons adoptée au § III.

Ces formules sont celles de la réflexion métallique; toutes les théories de cette réflexion, entre lesquelles nous n'avons pas à choisir, conduisent à des équations qui n'en diffèrent que par quelques termes très petits que nous pouvons négliger. Mais nous allons faire de ces formules un usage différent de celui qu'on en fait d'ordinaire. On s'en sert en effet pour comparer le rayon réfléchi au rayon incident. Soit par exemple, en supposant le rayon polarisé dans le plan d'incidence,

$$Z = \text{partie réelle de } Ae^{i(a\sin\varphi y - a\cos\varphi x + pt)} \tag{5}$$

l'équation du rayon incident et

$$Z = \text{partie réelle de } Be^{i(a\sin\varphi y + a\cos\varphi x + pt)} \tag{6}$$

celle du rayon réfléchi. Le rapport $\frac{B}{A}$ est une quantité imaginaire dont le carré du module représente le pouvoir réflecteur et dont l'argument représente la différence de phase entre le rayon réfléchi et le rayon incident. En substituant dans l'équation (3) et remarquant que la valeur totale de Z dans l'air doit être la somme des deux expressions (5) et (6) nous trouvons:

$$i(A - B)\alpha \cos\varphi = \partial(A + B). \tag{7}$$

En faisant le même calcul dans le cas où le rayon est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, c'est à dire en faisant la substitution non plus dans l'équation (3), mais dans l'équation (4) nous trouvons:

$$i(A - B)\beta^2 \cos\varphi = \partial\alpha(A + B). \tag{8}$$

On se sert ordinairement des équations (7) et (8) pour calculer le rapport $\frac{B}{A}$; nous allons au contraire nous en servir pour étudier le rapport

$$\frac{A + B}{A} = \eta.$$

L'étude de η nous fera ainsi connaître le rapport des amplitudes de la vibration totale en un point du plan des yz, et de la vibration partielle que l'on aurait en ce même point si le rayon incident existait seul; elle nous fera connaître également la différence de phase de ces deux vibrations; en d'autres termes elle nous renseignera sur les circonstances de l'interférence du rayon réfléchi avec le rayon incident.

Dans le cas extrême des métaux parfaitement conducteurs auxquels nous nous étions restreints dans les deux paragraphes précédents, β est infiniment grand et les deux équations (7) et (8) se réduisent respectivement à

$$A + B = 0, \qquad A - B = 0.$$

On a alors dans les deux cas

$$\left|\frac{B}{A}\right| = 1$$

ce qui veut dire que si le rayon incident est naturel, il en sera de même du rayon réfléchi.

Au contraire on a:

$$\left|\frac{A+B}{A}\right| = 0 \quad \text{dans le premier cas}$$

et

$$\left|\frac{A+B}{A}\right| = 2 \quad \text{dans le second cas}$$

de sorte que si l'on fait interférer les deux rayons et que l'on étudie la vibration dans le plan des yz lui-même, le rayon résultant de cette interférence sera complètement polarisé.

M. Fizeau, dans le mémoire que nous avons cité plus haut, a déjà fait remarquer que deux rayons naturels peuvent par leur interférence produire un rayon polarisé, et c'est ainsi qu'il expliquait les phénomènes qu'il avait découverts et qui ont, comme nous l'avons dit, les plus grands rapports avec ceux dont nous nous occupons.

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons vu que dans le voisinage immédiat de la surface métallique la polarisation est complète; et cela tient, comme on pourra s'en assurer en revoyant le calcul, à ce que nous avons supposé que sur cette surface même la valeur totale de Z est nulle. Cette valeur totale est égale à $A + B$ dans le cas simple que nous venons de traiter et qui est celui de la réflexion d'une onde plane. On voit ainsi une analogie qui pourrait échapper au lecteur inattentif, mais qui n'en est pas moins profonde entre l'analyse des deux paragraphes précédents et l'explication de M. Fizeau, fondée sur ce fait que l'interférence des deux rayons produit une polarisation beaucoup plus complète que la simple réflexion.

Revenons au cas des métaux ordinaires à pouvoir réflecteur considerable pour lesquels β est très grand, sans être infini. Appelons η et η' les valeurs du rapport $\frac{A+B}{A}$ tirées respectivement des équations (7) et (8). Il viendra:

$$\eta = \frac{2ia\cos\varphi}{ia\cos\varphi + \delta}, \qquad \eta' = \frac{2ia\cos\varphi}{ia\cos\varphi + \frac{\delta a^2}{\beta^2}}.$$

L'intensité de la polarisation, c'est à dire le rapport des intensités des deux composantes principales, est mesurée par le rapport

$$\left|\frac{\eta'^2}{\eta^2}\right|.$$

Ce rapport sous une incidence voisine de l'incidence rasante peut devenir égal à $\left|\frac{\beta^4}{\alpha^4}\right|$ c'est à dire plus grand que la 4^e puissance du coefficient d'absorption.

Ajoutons que l'argument de η varie plus rapidement avec φ que celui de η'; et rappelons que cet argument de η représente la différence de phase entre la vibration résultant de l'interférence des rayons incident et réfléchi et la vibration incidente.

Dans les expériences de M. Gouy, on se trouve placé dans des conditions bien différentes puisque non-seulement l'onde incidente n'est pas plane, mais que la surface réfléchissante qui est celle du tranchant, loin d'être plane a un rayon de courbure très petit.

On conçoit néanmoins que les choses doivent se passer à peu près de même. En effet ce qu'il y a d'essentiel dans notre raisonnement subsiste. Si la force électrique Z est parallèle à l'axe des z, Z et $\frac{dZ}{dn}$ sont continus (j'appelle $\frac{dZ}{dn}$ comme je l'ai expliqué à la fin du § I la dérivée de Z estimée suivant la normale à la surface réfléchissante). Mais comme la lumière doit s'éteindre très rapidement dans l'intérieur du métal, le rapport de $\frac{dZ}{dn}$ à Z doit être très grand, dans le métal et par conséquent dans l'air; par conséquent Z est très petit.

Si au contraire c'est la force magnétique γ qui est parallèle à l'axe des z, γ est encore continu, mais $\frac{d\gamma}{dn}$ ne l'est plus. La valeur de $\frac{d\gamma}{dn}$ dans l'air est à celle de $\frac{d\gamma}{dn}$ dans le métal comme α^2 est à β^2. Le rapport de $\frac{d\gamma}{dn}$ à γ est encore très grand dans le métal et du même ordre de grandeur que β; mais dans l'air ce rapport est au contraire très petit et du même ordre de grandeur que $\frac{\alpha^2}{\beta}$ (quantité qui est petite si on prend une unité de longueur comparable à la longueur d'onde) et par conséquent $\frac{d\gamma}{dn}$ est très petit.

Je me contenterai de cet aperçu et ne tenterai pas d'évaluation numérique. Je me bornerai à dire que l'on doit se rapprocher des conditions de l'incidente rasante.

Comment maintenant vont varier dans les deux cas Z et γ à une distance finie de la surface métallique. C'est ce que va nous apprendre, l'application du principe de HUYGHENS sous la forme que lui a donnée KIRCHHOFF.

Soit S la surface de l'écran, S' celle d'un cylindre de révolution ayant pour axe l'axe des z et un rayon très grand. Soit $d\omega'$ un élément quelconque d'une de ces deux surfaces, x', y', z' les coordonnées du centre de gravité de cet élément. Soit x, y, z un point intérieur au volume limité par les deux surfaces S et S' et situé par conséquent dans l'air. Soit r la distance des deux points x, y, z et x', y', z'. Soit:

$$\varphi = \frac{e^{-iar}}{r}.$$

Nous avons vu qu'en supposant la lumière homogène la force électrique sera de la forme

$$Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt = \text{ partie réelle } (Z_0 - iZ_1)e^{ipt}.$$

Nous poserons:

$$Z = (Z_0 - iZ_1)e^{ipt}$$

de sorte que ce que nous désignerons par la lettre Z ce sera non pas la force électrique elle-même, mais une exponentielle imaginaire dont cette force électrique sera la partie réelle.

De même dans le cas où la force magnétique est parallèle à l'axe des z, cette force est la partie réelle d'une exponentielle de la forme

$$(\gamma_0 - i\gamma_1)e^{ipt}$$

et nous poserons:

$$\gamma = (\gamma_0 - i\gamma_1)e^{ipt}.$$

Nous conserverons les lettres Z et γ sans accent pour représenter les valeurs de ces fonctions au point x, y, z, et nous désignerons par Z' et γ' les valeurs de ces fonctions au point x', y', z'. Les notations

$$\frac{d\varphi}{dn}, \frac{dZ'}{dn}, \frac{d\gamma'}{dn}$$

représenteront les dérivées de φ, Z' et γ' éstimées suivant la normale à l'élément $d\omega'$.

Le principe de Huyghens-Kirchhoff nous donne alors:

$$(9) \qquad \begin{aligned} 4\pi Z &= \int \left(\varphi \frac{dZ'}{dn} - \frac{d\varphi}{dn} Z'\right) d\omega', \\ 4\pi\gamma &= \int \left(\varphi \frac{d\gamma'}{dn} - \frac{d\varphi}{dn}\gamma'\right) d\omega'. \end{aligned}$$

Les intégrales doivent être étendues aux deux surfaces S et S'.

On voit aisément:

1° que l'intégrale prise le long de S' ne dépend que du faisceau incident, et nullement des divers faisceaux divergents, ni par conséquent de la forme et de la nature de l'écran.

2° que l'intégrale prise le long des portions de l'écran qui ne sont pas très voisines du tranchant est négligeable.

Tout dépend donc de la valeur de l'intégrale prise le long des portions de S très voisines du tranchant.

Observons que α, avec nos unités habituelles de longueur est très grand de sorte que l'exponentielle $e^{-i\alpha r}$ qui entre en facteur dans φ varie très rapidement.

La quantité sous le signe $\int$ est donc de la forme

$$e^{-i\alpha r} F,$$

F étant une fonction de x, y et z qui varie beaucoup moins rapidement que cette exponentielle. Nous pouvons adopter pour définir la position du point x', y', z' sur la surface S tel système de coordonnées que nous voulons; nous prendrons par exemple la distance r de ce point au point x, y, z et la différence

$$z - z' = \zeta$$

et nous aurons:

$$d\omega' = M dr d\zeta,$$

M étant une fonction de r et de ζ qui n'est pas très grande non plus que ses dérivées. L'intégration par parties nous donne alors

$$\int e^{-iar} F d\omega' = \iint e^{-iar} FM dr d\zeta = \frac{-1}{ia} \int e^{-iar} PM d\zeta$$
$$+ \frac{1}{ia} \iint e^{-iar} \frac{dFM}{dr} dr d\zeta.$$

La présence de α au dénominateur nous montre quelle est la condition pour que notre intégrale ne soit pas négligeable. C'est que F soit très grand de l'ordre de α.

Or φ est fini, tandis que $\frac{d\varphi}{dn}$ est de l'ordre de α. Le rapport de $\frac{dZ'}{dn}$ à Z' est de l'ordre de β. Le rapport des deux termes

$$\varphi \frac{dZ'}{dn} \quad \text{et} \quad Z' \frac{d\varphi}{dn}$$

est donc de l'ordre de $\frac{\beta}{\alpha}$. Si le pouvoir réflecteur du métal est très grand, ce rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ est très grand et tout se passe comme si Z' était nul.

D'autre part le rapport de $\frac{d\gamma'}{dn}$ à γ' est de l'ordre de $\frac{\alpha^2}{\beta}$. Le rapport des deux termes

$$\varphi \frac{d\gamma'}{dn} \quad \text{et} \quad \gamma' \frac{d\varphi}{dn}$$

est donc de l'ordre de $\frac{\alpha}{\beta}$ c'est à dire très petit si le métal est très réfléchissant.

Ainsi tout se passera à peu près comme si l'on avait

$$Z' = \frac{d\gamma'}{dn} = 0.$$

Or c'est là l'hypothèse que nous avons faite dans les §§ III et IV. Nous avons le droit d'en conclure que la polarisation sera dans le même sens que dans le cas où nous nous étions placés dans ces deux paragraphes.

L'aperçu qui précède est beaucoup trop grossier pour me permettre une comparaison numérique même approchée. Toutefois il semble que la polarisation observée est notablement plus forte que celle à laquelle conduiraient les valeurs de β ordinairement adoptées, bien que, la phase de Z' variant plus rapidement que celle de γ' d'un point à l'autre du tranchant, on puisse supposer que les différents termes de l'intégrale

$$\int Z' \frac{d\varphi}{dn} d\omega'$$

se détruisent par une sorte d'interférence, ce qui expliquerait au moins en partie l'intensité de la polarisation. Au surplus notre analyse est beaucoup trop imparfaite pour que de cette divergence on ait le droit de rien conclure contre les hypothèses d'où nous sommes partis, et qui sont généralement admises. Quoi qu'il en soit, on voit que nous nous rapprocherons d'autant plus des conditions des deux paragraphes précédents que le pouvoir réflecteur du métal sera plus considérable. La polarisation sera donc plus marquée pour les couleurs pour lesquelles ce pouvoir réflecteur est le plus grand, c'est à dire pour les couleurs qu'affecte la lumière réfléchie par ce métal. C'est sans doute pour cette raison que dans la composante la plus forte celle qui est polarisée perpendiculairement au plan de diffraction ce sont ces couleurs qui dominent. Il semble au contraire que dans la composante la plus faible, les couleurs complémentaires (pour lesquelles $\frac{\beta}{\alpha}$ est moins grand et pour lesquelles par conséquent la polarisation devrait être moins complète) devraient dominer à leur tour. Ce n'est pas tout à fait ce qui a été observé puisque cette composante paraît blanche. Peut être une cause secondaire vient-elle neutraliser cette coloration complémentaire de la composante faible et accentuer au contraire la coloration de la composante forte, c'est que les rayons qui dominent dans cette seconde composante sont en général de grande longueur d'onde et par conséquent plus diffrangibles que les autres. Tout cela n'est encore qu'un aperçu bien insuffisant et bien des détails restent inexpliqués.

VI.

Je me propose maintenant de tenir compte de ce fait que le tranchant du biseau n'est pas parfait, de telle façon que la surface S de l'écran se compose de deux faces planes raccordées par une sorte de cylindre de rayon très petit.

Si nous supposons de nouveau β infini et le métal parfaitement conducteur, de façon à ne pas accumuler toutes les difficultés à la fois, nous devrons avoir le long de la surface S

$$Z' = \frac{d\gamma'}{dn} = 0$$

de sorte que les équations de HUYGHENS-KIRCHHOFF se réduiront à:

$$(10) \qquad 4\pi Z = \int \varphi \frac{dZ'}{dn} d\omega',$$

$$(11) \qquad -4\pi\gamma = \int \frac{d\varphi}{dn} \gamma' d\omega'.$$

En effet les intégrales des équations (9) du paragraphe précédent doivent être prises le long des surfaces S et S'. Le long de la surface S' elles sont, ainsi que nous l'avons vu, les mêmes que s'il n'y avait pas d'écran. Elles sont donc nulles, sauf à l'intérieur du faisceau directement transmis, et en dehors duquel nous nous supposerons placés. Le long de S, les termes en Z' et en $\frac{d\gamma'}{dn}$ sont nuls. Les équations (9) peuvent donc être remplacées par les équations (10) et (11).

Soit alors ψ l'angle que fait la normale à la surface S avec le rayon vecteur qui joint le point x, y, z au point x', y', z', il viendra:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{dr} \cos\psi.$$

Si le point x', y', z' est voisin du tranchant mais situé cependant sur les faces planes du biseau, et si le point x, y, z est voisin de la surface S, c'est à dire si la déviation est grande et dirigée vers l'intérieur de l'ombre géométrique; l'angle ψ différera peu de 90° et $\cos\psi$ sera petit. Donc $\frac{d\varphi}{dn}$ sera petit. Il en résulte que les parties de l'intégrale du 2[d] membre de (11) qui auront le plus d'influence sur la valeur de γ, seront celles qui appartiennent à la portion cylindrique du tranchant. Il n'en sera pas de même pour l'intégrale du 2[d] membre de (10).

Peut-être peut-on s'expliquer de cette manière que la composante la plus forte et la plus colorée, soit plus affectée que l'autre par les irrégularités que ce tranchant peut présenter.

Mais le fait que le tranchant est plus ou moins arrondi peut avoir encore une autre influence dont nous nous rendrons grossièrement compte de la façon suivante:

Représentons nous la surface de l'écran comme prismatique et formée par exemple par les deux faces du biseau AB et CD et par une très-petite face plane BC faisant des angles égaux avec AB et CD.

Si la largeur de la face BC était nulle, nous retomberions sur le cas du § IV et la polarisation qui serait prèsque complète pour de grandes déviations, serait moins grande pour les déviations médiocres que ne l'indique l'observation.

Si la largeur de la face BC était très grande par rapport à la longueur d'onde on devrait se considérer comme étant en présence d'un biseau très ouvert BCD et on pourrait encore appliquer les formules du § IV. La polarisation serait complète quand le rayon diffracté serait parallèle à BC c'est à dire pour une déviation relativement faible, et pour des déviations plus grandes, il n'y aurait plus du tout de lumière diffractée.

Si la largeur de la face BC est petite sans être nulle, (ce qui se rapproche du cas qui est effectivement réalisé) on trouverait sans doute des résultats intermédiaires; est ce pour cette raison qu'on observe pour des déviations médiocres, moins de lumière et une polarisation plus intense que ne l'indiqueraient les formules du § IV? Ce qui tendrait à le faire croire, c'est que la polarisation croît d'autant plus vite avec la déviation que le tranchant du biseau est plus arrondi.

Nous avons dit plus haut que d'après l'observation la lumière diffractée est maximum à déviation égale quand le rayon incident et le rayon diffracté font des angles égaux avec l'écran. L'explication doit probablement, comme le fait très bien observer M. Gouy, être cherchée aussi dans la courbure du tranchant.

Les paragraphes V et VI où le problème abordé est beaucoup plus complexe que celui qui a été traité dans les paragraphes III et IV ne contiennent que des aperçus qui peuvent grossièrement nous faire prévoir le sens de certains phénomènes, mais qui sont dénués de toute précision. Une analyse plus rigoureuse serait donc nécessaire. Ce sera l'objet de la seconde partie de ce travail.