SUR LES DÉTERMINANTS INFINIS ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

PAR

HELGE VON KOCH
À STOCKHOLM.

Dans une note récente,[1] j'ai appelé l'attention sur le parti qu'on peut tirer des déterminants infinis pour la théorie générale des équations différentielles linéaires et, particulièrement, pour la résolution du problème suivant. Étant donnée une équation différentielle linéaire homogène dont les coefficients sont holomorphes à l'intérieur d'un certain anneau circulaire: obtenir pour ce domaine un système fondamental d'intégrales sous la forme analytique qui, d'après les recherches de M. FUCHS,[2] caractérise toujours les intégrales à l'intérieur d'une telle partie du plan.

Grâce aux travaux de MM. FUCHS, HAMBURGER, PICARD et MITTAG-LEFFLER,[3] on possède des méthodes pour résoudre *implicitement* le problème, c'est-à-dire, on peut trouver certaines formules analytiques qui donnent les intégrales pour le domaine considéré sous une forme qui est, toutefois, essentiellement différente de celle signalée primitivement par M. FUCHS.

---

[1] *Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires,* Acta mathematica, t. 15.

[2] FUCHS, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten,* Journal für Mathematik, t. 66.

[3] FUCHS, Journal für Mathematik, t. 75; HAMBURGER, Journal für Mathematik, t. 83; PICARD, Comptes rendus des séances de l'académie des sciences de Paris, Mars 1879; MITTAG-LEFFLER, Acta mathematica, t. 15.

Le problème direct, qui consiste à obtenir les intégrales sous leur forme explicite, a été l'objet de recherches nombreuses, parmi lesquelles il convient de rappeler ici celles de M. FUCHS déjà citées et celles de M. THOMÉ.[1] Ces auteurs ne se sont pourtant occupés que de certains cas particuliers. De plus, on sait que les recherches profondes et extrêmement remarquables qu'a publiées M. POINCARÉ[2] au sujet des intégrales irrégulières, n'ont pas eu pour but d'obtenir actuellement ces intégrales, mais de les représenter asymptotiquement au moyen de certaines séries divergentes.

Dans la note citée, j'ai indiqué comment on pourrait traiter le problème d'une manière générale à l'aide des déterminants infinis, mais je n'ai donné la solution définitive que sous certaines restrictions. Dans le mémoire présent, le problème sera résolu dans toute sa généralité. Pour atteindre ce but, il faut d'abord s'occuper un peu de la théorie des déterminants infinis. En effet, cette théorie nouvelle dont l'introduction dans l'analyse est due à MM. HILL[3] et POINCARÉ,[4] n'a pas encore, à ce qu'il paraît, captivé l'attention des géomètres tant qu'elle le mérite et, naturellement, il doit rester bien des lacunes à combler et beaucoup de théorèmes à établir. Dans ce qui suit nous nous bornerons à développer (I, § 1) ce qui paraît nécessaire pour pouvoir appliquer l'instrument nouveau d'une manière absolument rigoureuse au problème que nous nous sommes proposé.

Le § 2 contient une application des déterminants infinis à la résolution de certains systèmes d'équations linéaires où le nombre des inconnus de même que celui des équations est infini.

Dans la partie II se trouvent les appliquations qui se rapportent à la théorie des équations différentielles linéaires.

---

[1] THOMÉ, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen,* Journal für Mathematik, t. 74 et suiv.

[2] POINCARÉ, *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires,* Acta mathematica, t. 8. Voir aussi: *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies,* American Journal of Mathematics, t. 7.

[3] HILL, *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon,* Cambridge, Wilson 1877; Acta mathematica, t. 8.

[4] POINCARÉ, *Sur les déterminants d'ordre infini,* Bulletin de la Société mathématique de France, t. 14.

I.

§ 1. *Sur quelques propriétés des déterminants infinis.*

1. Soit A_{ik} $(i, k = -\infty \,..\, +\infty)$ une suite doublement infinie de nombres donnés et désignons par

$$D_m = [A_{ik}]_{i,k=-m..+m}$$

le déterminant des quantités A_{ik} $(i, k = -m \,..\, +m)$; si, pour des valeurs indéfiniment croissantes de m, la quantité D_m a une limite déterminée D, on dit que le déterminant infini

$$[A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

est convergent et a D pour valeur. Dans le cas où la limite D n'existe pas, le déterminant en question sera dit divergent. En d'autres termes, le déterminant infini

$$[A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

est convergent, si à chaque quantité positive δ correspond un nombre positif entier n' tel qu'on ait

$$|D_{n+p} - D_n| < \delta$$

pour toute valeur de n supérieure à n' et pour des valeurs quelconques de l'entier positif p; le déterminant est divergent, si un tel nombre n' n'existe pas.

Convenons d'adopter les dénominations suivantes. La *diagonale principale* du déterminant D est l'ensemble des éléments A_{ii} $(i = -\infty \,..\, +\infty)$; la *ligne* i est constituée par les éléments A_{ik} $(k = -\infty \,..\, +\infty)$ et la *colonne* k par les éléments A_{ik} $(i = -\infty \,..\, +\infty)$. Un élément quelconque A_{ik} s'appellera élément *diagonal* ou *non-diagonal* suivant qu'on a $i = k$ ou $i \gtrless k$. Enfin, l'élément A_{00} sera nommé *l'origine* du déterminant considéré: c'est celui des éléments diagonaux qui appartient à la fois aux deux diagonales de chacun des déterminants D_m.

Il est clair qu'on peut former avec les éléments A_{ik} une infinité de déterminants infinis ayant les mêmes diagonales principales mais des origines différentes; rien ne permet d'affirmer *a priori* qu'ils sont convergents ou divergents en même temps ou, s'ils convergent, que leurs valeurs sont les mêmes. Un déterminant infini n'aura donc en général aucun sens déterminé que quand on connaît sa diagonale principale et son origine.

2. Soit donné un déterminant infini D; pour que D converge, il suffit que le produit des éléments diagonaux converge absolument et que la somme des éléments non-diagonaux converge absolument.

Posons, en effet, $A_{ik} = a_{ik}$ (pour $i \gtrless k$) et $A_{ii} = 1 + a_{ii}$: par hypothèse, la série

$$\sum_i \sum_k |a_{ik}| \qquad {\scriptstyle (i,k=-\infty..+\infty)}$$

est convergente, d'où l'on conclut immédiatement qu'il en est de même du produit

$$\overline{P} = \prod_i (1 + \sum_k |a_{ik}|). \qquad {\scriptstyle (i,k=-\infty..+\infty)}$$

Formons les produits

$$P_m = \prod_{i=-m}^{+m} (1 + \sum_{k=-m}^{+m} a_{ik}); \qquad \overline{P}_m = \prod_{i=-m}^{+m} (1 + \sum_{k=-m}^{+m} |a_{ik}|);$$

si, dans le développement de P_m, on remplace certains termes par zéro et change les signes de certains autres termes, on obtiendra D_m; par conséquent, à chaque terme dans le développement de D_m correspond un terme dans le développement de $\overline{P}_m$ de telle manière que celui-ci n'est jamais plus petit que la valeur absolue de celui-là; de plus, en remplaçant certaines quantités a_{ik} par zéro, certains termes s'annulleront dans les développements de D_{m+p} et $\overline{P}_{m+p}$ et, parmi les termes de $\overline{P}_{m+p}$ qui s'évanouissent, on trouvera évidemment ceux qui correspondent aux termes annullés de D_{m+p}; or, en remplaçant les quantités a_{ik} $[i, k = \pm(m+1), .., \pm(m+p)]$ par zéro, D_{m+p} et $\overline{P}_{m+p}$ deviennent égaux à D_m et $\overline{P}_m$ de sorte que, dans ce cas, $D_{m+p} - D_m$ et $\overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m$ représentent respectivement les termes de D_{m+p} et $\overline{P}_{m+p}$ qui s'annullent. Par conséquent, on a

$$|D_{m+p} - D_m| \leqq \overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m.$$

En vertu de la convergence du produit $\overline{P}$, on peut faire correspondre à chaque quantité positive δ un entier positif n' tel qu'on ait, pour $n > n'$ et pour des valeurs quelconques de l'entier positif p,

$$\overline{P}_{n+p} - \overline{P}_n < \delta \therefore |D_{n+p} - D_n| < \delta,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour le cas où les éléments diagonaux sont tous égaux à l'unité, ce théorème est dû à M. Poincaré (Bulletin de la Société mathématique de France, t. 14, p. 77).

L'étude des déterminants infinis dont les éléments remplissent les conditions énoncées plus haut et dont la convergence vient d'être établie, sera l'objet principal des pages suivantes. Nous convenons de dire que ces déterminants sont de la *forme normale.*

3. Dans le n° 1 nous avons défini un déterminant convergent comme la limite D vers laquelle tendent les déterminants D_m pour des valeurs indéfiniment croissantes de m. Dans le cas des déterminants de la forme normale, on voit facilement qu'un mode de génération plus général conduit au même résultat. Désignons par $D_{m,n}$ le déterminant $[A_{ik}]_{i,k=-n..+m}$ et par $\overline{P}_{m,n}$ le produit

$$\overline{P}_{m,n} = \prod_{i=-n}^{+m}(1 + \sum_{k=-n}^{+m}|a_{ik}|);$$

si p désigne le plus grand des nombres m et n, il est clair que tous les termes de $D_{m,n}$ se trouvent dans le développement de $D_{p,p}$ et que chaque terme de $\overline{P}_{m,n}$ est aussi un terme de $\overline{P}_{p,p}$, d'où il suit, en raisonnant comme plus haut, que

$$|D_{p,p} - D_{m,n}| \leqq \overline{P}_{p,p} - \overline{P}_{m,n};$$

or, pour des valeurs indéfiniment croissantes de m et de n, les quantités $\overline{P}_{p,p}$, $\overline{P}_{m,n}$ tendent vers la même limite $\overline{P}$; donc $D_{p,p}$ et $D_{m,n}$ tendent vers une limite commune et, comme $D_{p,p}$ désigne le même déterminant que nous avons désigné auparavant par D_p, cette limite est égale à D. Donc, pour définir le déterminant D, on peut faire usage des déterminants $D_{m,n}$ tout aussi bien que des déterminants D_m du n° 1.

Appliquons ce résultat à un cas particulier. Soit λ un entier quelconque, mais déterminé, et posons, pour un moment,

$$D_{m,m} = D_m, \qquad D_{m+\lambda,m-\lambda} = \Delta_m;$$

les deux suites infinies

$$(D) \qquad D_0\,, D_1\,, D_2\,, \ldots, D_m\,, \ldots$$

$$(\Delta) \qquad \Delta_0\,, \Delta_1\,, \Delta_2\,, \ldots, \Delta_m\,, \ldots$$

auront la même limite D; or nous savons, d'après le n° 1, que la suite (D) définit le déterminant $[A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$ et que (Δ) définit le déterminant $[A_{\lambda+i,\lambda+k}]_{i,k=-\infty..+\infty}$ c'est-à-dire celui qu'on obtient en choisissant l'élément $A_{\lambda\lambda}$ pour origine dans la table des éléments A_{ik}. Par conséquent, dans un déterminant de la forme normale, on peut prendre un élément diagonal quelconque pour origine: la valeur du déterminant reste toujours la même.

4. Un déterminant de la forme normale reste convergent si l'on remplace les éléments d'une ligne quelconque par une suite de quantités qui sont toutes plus petites en valeur absolue qu'un nombre positif donné.

Remplaçons, par exemple, les éléments de la ligne numérotée 0:

$$\ldots A_{0,-m} \ldots A_{00} \ldots A_{0,m} \ldots$$

par des quantités

$$\ldots \mu_{-m} \ldots \mu_0 \ldots \mu_m \ldots$$

vérifiant l'inégalité

$$|\mu_r| < \mu, \qquad \mu \geqq 0,$$

et soient D'_m et D' ce que deviennent D_m et D. Désignons de plus par $\overline{P}'_m$ et $\overline{P}'$ les produits obtenus en supprimant dans $\overline{P}_m$ et $\overline{P}$ le facteur correspondant à l'indice 0; on voit immédiatement qu'aucun terme de D'_m ne peut être plus grand en valeur absolue que le terme correspondant du développement de $\mu\overline{P}'_m$ et, en raisonnant comme dans le n° 2, on obtient

$$|D'_{m+p} - D'_m| \leqq \mu\overline{P}'_{m+p} - \mu\overline{P}'_m,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Ce théorème, démontré par M. Poincaré pour le cas où tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1, peut facilement être généralisé. En se servant d'un mode de démonstration parfaitement analogue au précédent, on peut prouver qu'un déterminant de la forme normale reste convergent si l'on remplace les éléments d'un nombre quelconque de lignes ou de colonnes par des quantités qui sont, en valeur absolue, inférieures à une quantité donnée.

5. En conservant les notations du numéro précédent, il est clair qu'on a:

$$|D| \leqq \overline{P}; \qquad |D'| \leqq \mu\overline{P}'.$$

En effet, les inégalités ou égalités

$$|D_m| \leqq \overline{P}_m \leqq \overline{P}; \qquad |D'_m| \leqq \mu\overline{P}'_m \leqq \mu\overline{P}'$$

subsistent pour toutes les valeurs de m et, pour des valeurs indéfiniment croissantes de m, D_m et D'_m ont pour limites D et D'.

6. Si l'on change, dans un déterminant de la forme normale, l'une dans l'autre deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe; il est nul, si deux lignes ou deux colonnes sont identiques.

En effet, soient D' et D'_m ce que deviennent D et D_m en changeant l'une dans l'autre deux lignes quelconques; on peut toujours choisir m assez grand pour que ces lignes appartiennent toutes deux au déterminant D_m. On a donc

$$D_m = - D_m.$$

Or, en fixant arbitrairement une quantité positive δ aussi petite qu'on veut, on peut trouver un entier n' tel que, pour $n > n'$,

$$|D - D_n| < \delta, \qquad |D' - D'_n| < \delta;$$

par conséquent on aura, en choisissant n suffisamment grand,

$$D + D'| = |D - D_n + D' - D'_n| \leqq |D - D_n| + |D' - D'_n| < 2\delta,$$

ce qui conduit à l'égalité

$$D' = - D.$$

La seconde partie du théorème énoncé est une conséquence immédiate de cette égalité.

7. Le développement d'un déterminant de la forme normale peut être présenté sous beaucoup de formes différentes.

a) Partons de l'identité

$$\Delta_{2m+1} = \Delta_1 + (\Delta_2 - \Delta_1) + \ldots + (\Delta_{2m+1} - \Delta_{2m})$$

où

$$\Delta_{2r+1} = [A_{ik}]_{i,k=-r..+r}, \qquad \Delta_{2r} = [A_{ik}]_{i,k=-(r-1)..+r};$$

posons

$$A_{ik} = a_{ik}, \qquad A_{ii} = 1 + a_{ii};$$

$$\Delta_{2r+1} - \Delta_{2r} = \nabla_{2r+1}, \qquad \Delta_{2r} - \Delta_{2r-1} = \nabla_{2r}$$

$$\nabla_{2r+1} = \begin{vmatrix} a_{-r,-r} & A_{-r,-r+1} & \ldots & A_{-r,r} \\ A_{-r+1,-r} & A_{-r+1,-r+1} & \ldots & A_{-r+1,r} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ A_{r,-r} & A_{r,-r+1} & \ldots & A_{r,r} \end{vmatrix}$$

$$\nabla_{2r} = \begin{vmatrix} A_{-r+1,-r+1} & \ldots & A_{-r+1,r-1} & A_{-r+1,r} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ A_{r-1,-r+1} & \ldots & A_{r-1,r-1} & A_{r-1,r} \\ A_{r,-r+1} & \ldots & A_{r,r-1} & a_{r,r} \end{vmatrix}$$

et faisons croître m au delà de toute limite. Si D est la valeur du déterminant donné, on aura

$$\text{(a)} \qquad D = \nabla_1 + \nabla_2 + \ldots + \nabla_m + \ldots$$

La série du second membre est convergente, puisque Δ_{2m+1} et Δ_{2m} ont la même limite D (n° 3); elle est aussi *absolument* convergente, ce qu'on voit en la comparant à la série à termes positifs

$$\text{(a')} \qquad \overline{P} = \overline{\Pi}_1 + (\overline{\Pi}_2 - \overline{\Pi}_1) + \ldots + (\overline{\Pi}_m - \overline{\Pi}_{m-1}) + \ldots,$$

où

$$\overline{\Pi}_{2r+1} = \prod_{i=-r}^{+r}(1 + \sum_{k=-r}^{+r}|a_{ik}|); \qquad \overline{\Pi}_{2r} = \prod_{i=-r+1}^{+r}(1 + \sum_{k=-r+1}^{+r}|a_{ik}|)$$

et en remarquant que

(a'') $$|\Delta_m - \Delta_{m-1}| \leqq \overline{\Pi}_m - \overline{\Pi}_{m-1}.$$

b) Chaque expression $\overline{\Pi}_m - \overline{\Pi}_{m-1}$ peut s'écrire comme une somme de termes positifs dont aucun n'est plus petit que le terme correspondant du développement de ∇_m. Si donc on écrit, de la manière ordinaire, le déterminant ∇_m comme une somme de $\underline{|m} = M$ termes et qu'on remplace ensuite chacun de ces termes par sa valeur absolue, la série (a) restera encore convergente. En d'autres termes, si l'on a

$$\nabla_m = \sum_{k=1}^{M} \nabla_{mk},$$

la série double

(b) $$D = \Sigma_m \Sigma_k \nabla_{mk}$$

est absolument convergente.

c) On peut conclure de là que le déterminant D peut se mettre sous la forme

(c) $$D = \Sigma \pm \ldots A_{-m,-m} \ldots A_{0,0} \ldots A_{m,m} \ldots,$$

les termes indiqués par le signe Σ s'obtenant en permutant de toutes les manières possibles les premiers (ou seconds) indices du terme principal:

$$\ldots A_{-m,-m} \ldots A_{0,0} \ldots A_{m,m} \ldots$$

et en attribuant à chaque terme ainsi obtenu le signe $+$ ou le signe $-$ suivant la parité ou l'imparité du nombre des transpositions nécessaires pour passer du terme principal au terme considéré.

En effet, chaque terme du développement (c) n'est qu'une combinaison de certains termes du développement (b); ce dernier étant absolument convergent, l'expression du second membre de (c) aura une valeur déterminée et absolument indépendante de l'ordre des termes. Et comme, de plus, chaque terme du développement (b) se présente aussi dans le développement (c), l'égalité (c) se trouve démontrée.

d) Chaque terme du développement (c) contient comme facteur un élément et un seul d'une ligne ou d'une colonne quelconque. Par conséquent, le déterminant D peut s'écrire comme une expression linéaire et homogène des éléments d'une ligne ou d'une colonne quelconque. Si, par exemple, nous voulons le développer suivant les éléments de la ligne numérotée i, le coefficient de A_{ik} s'obtiendra en annullant, dans le déterminant D, tous les éléments de cette ligne excepté A_{ik}, qui doit être remplacé par l'unité. Désignons par

$$\operatorname{adj} A_{ik} = \frac{\partial D}{\partial A_{ik}} = \binom{i}{k} = \alpha_{ik}$$

le déterminant ainsi obtenu, de sorte qu'on ait

$$D = \sum_k A_{ik} \alpha_{ik}. \tag{d}$$

Les déterminants α_{ik}, auxquels nous donnerons le nom de *mineurs* ou *sous-déterminants du premier ordre,* satisfont d'ailleurs aux relations suivantes

$$0 = \sum_k A_{jk} \alpha_{ik}, \qquad (j \gtrless i) \tag{d'}$$

qui découlent immédiatement du théorème (6). Des considérations analogues conduiraient aux égalités

$$D = \sum_i A_{ik} \alpha_{ik},$$
$$0 = \sum_i A_{il} \alpha_{ik}. \qquad (l \gtrless k)$$

Il est clair que le mineur α_{ik} peut, outre de la manière déjà indiquée, s'obtenir aussi en supprimant dans D la ligne i et la colonne k, et en attribuant au déterminant résultant le signe $(-1)^{i-k}$. En effet, on n'a qu'à se rappeler que les deux modes de génération conduisent à des résultats identiques dans le cas des déterminants finis et à raisonner ensuite comme dans le n° 3.

e) Le déterminant D étant linéaire par rapport aux éléments de chacune de deux lignes quelconques i et m, si l'on veut le développer suivant ces éléments, le coefficient de $A_{ik} A_{mn}$ s'obtiendra en remplaçant les éléments A_{ik}, A_{mn} par l'unité et les autres éléments des lignes i et m

par zéro. Le déterminant ainsi obtenu s'appellera un *mineur du deuxième ordre* et sera désigné par l'une ou l'autre des notations

$$\operatorname{adj}\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{in} \\ A_{mk} & A_{mn} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 A}{\partial A_{ik}\partial A_{mn}} = \begin{pmatrix} i & m \\ k & n \end{pmatrix};$$

il est facile de voir qu'on a

$$\frac{\partial^2 D}{\partial A_{in}\partial A_{mk}} = -\frac{\partial^2 D}{\partial A_{ik}\partial A_{mn}} = \begin{pmatrix} i & m \\ n & k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} i & m \\ k & n \end{pmatrix},$$

d'où l'on conclut que

$$\text{(e)} \qquad D = \sum_{k}\sum_{n}{}_{k<n} \begin{vmatrix} A_{ik} & A_{in} \\ A_{mk} & A_{mn} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} i & m \\ k & n \end{pmatrix}.$$

f) Plus généralement, si l'on désigne par

$$\operatorname{adj}\begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & .. & A_{i_1k_r} \\ . & .. & . \\ A_{i_rk_1} & .. & A_{i_rk_r} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$$

le déterminant obtenu en remplaçant dans D chacun des éléments $A_{i_1k_1} .. A_{i_rk_r}$ par l'unité et tout autre élément des lignes $i_1 .. i_r$ ou des colonnes $k_1 .. k_r$ par zéro, on aura

$$\text{(f)} \qquad D = \sum_{k_1}\sum_{k_2} .. \sum_{k_r}{}_{k_1<k_2<..<k_r} \begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & .. & A_{i_1k_r} \\ . & .. & . \\ A_{i_rk_1} & .. & A_{i_rk_r} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}.$$

Le déterminant

$$\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$$

sera nommé un *mineur* ou *sous-déterminant de l'ordre* r; on peut l'obtenir, comme il est facile de le voir, en supprimant dans D les lignes $i_1 .. i_r$ et les colonnes $k_1 .. k_r$ et en attribuant au résultat le signe

$$(-1)^{(i_1-k_1)+..+(i_r-k_r)}.$$

En résumé, un déterminant D de la forme normale peut être développé suivant les déterminants formés par les éléments appartenant à une combinaison quelconque de lignes ou de colonnes. On voit facilement qu'il ne faut pas nécessairement que le nombre de ces lignes ou de ces colonnes soit fini. Le théorème de LAPLACE sur le développement des déterminants ordinaires peut donc être généralisé de manière à embrasser complètement le cas des déterminants infinis de la forme normale.

g) Il est clair que le déterminant D peut être développé suivant les éléments d'une ligne et d'une colonne quelconque. Prenons, par exemple, la ligne o et la colonne o. Le coefficient de A_{00} est α_{00} et celui de $A_{i0}A_{0k}$ est

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\text{(g)} \qquad D = A_{00}\alpha_{00} - \sum_{i,k} A_{i0}A_{0k}\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & k \end{pmatrix}. \qquad {\scriptstyle (i,k=\pm 1,\ldots \pm\infty)}$$

h) Enfin, on peut développer le déterminant D de manière à mettre en évidence les dimensions de ses termes successives par rapport aux quantités a_{ik}. En effet, on peut démontrer d'une manière absolument analogue à celle employée pour le cas des déterminants finis, que l'égalité suivante a lieu:

$$\text{(h)} \qquad D = 1 + \sum \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{vmatrix} + \sum \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pq} & a_{pr} \\ a_{qp} & a_{qq} & a_{qr} \\ a_{rp} & a_{rq} & a_{rr} \end{vmatrix} + \cdots,$$

les indices $p, q, r, \ldots$ parcourant tous les nombres entiers positifs et négatifs qui satisfont aux conditions

$$p < q < r < \cdots$$

8. De cette dernière formule ou de la formule (c) on peut tirer une conséquence importante. On voit en effet que la valeur de D n'est pas altérée par des déplacements quelconques entre les lignes et entre

les colonnes, pourvu toutefois que ces changements soient tels que les éléments diagonaux et les éléments non-diagonaux restent respectivement diagonaux et non-diagonaux.

Pour cette raison nous dirons que les déterminants de la forme normale sont *absolument* convergents.

9. Étant donné un déterminant D de la forme normale, si l'on remplace les éléments d'une ligne quelconque par des quantités μ_k dont les valeurs absolues n'excèdent pas un nombre positif donné, le nouveau déterminant D' jouira des mêmes propriétés que l'ancien et pourra, en particulier, être développé suivant les quantités μ_k.

Remplaçons, par exemple, les éléments de la ligne o par des quantités μ_k vérifiant l'inégalité

$$|\mu_k| < \mu,$$

et soient Δ'_m et ∇'_m ce que deviennent respectivement les déterminants Δ_m et ∇_m du n° 7. Soient de plus $\overline{P}'$ et $\overline{\Pi}'_m$ les produits obtenus en supprimant dans $\overline{P}$ et $\overline{\Pi}_m$ le facteur correspondant à la ligne o. Dans la série convergente

$$\overline{P} = \mu\overline{\Pi}'_1 + \sum_{m=2}^{\infty}\mu(\overline{\Pi}'_m - \overline{\Pi}'_{m-1}),$$

chaque terme $\mu(\overline{\Pi}'_m - \overline{\Pi}'_{m-1})$ est une somme de termes positifs dont aucun n'est plus petit que la valeur absolue du terme correspondant dans le développement du déterminant

$$\nabla'_m = \Delta'_m - \Delta'_{m-1} = \sum_{k=1}^{M}\nabla'_{mk},$$

d'où l'on conclut que la série double du second membre de l'égalité

$$D' = \sum_m\sum_k\nabla'_{mk}$$

converge absolument. On voit par là que la ligne o dans le déterminant D' joue le même rôle que toutes les autres lignes et que, par conséquent, les théorèmes des numéros précédents subsistent sans aucune altération pour les déterminants de la forme D'.

Un raisonnement analogue s'applique au cas où l'on remplace les éléments d'un nombre quelconque de lignes ou de colonnes par des quantités inférieures en valeur absolue à un nombre positif donné.

10. Dans un déterminant D de la forme normale, remplaçons les éléments d'une certaine ligne, par exemple la ligne o, par des séries finies ou infinies μ_k,

$$\mu_k = \sum_\lambda \mu_{k\lambda},$$

telles qu'on ait

$$\sum_\lambda |\mu_{k\lambda}| < \mu, \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

μ désignant un nombre positif donné. Le nouveau déterminant s'écrira ainsi:

$$\sum_k \alpha_{0k}\mu_k = \sum_{k,\lambda} \alpha_{0k}\mu_{k\lambda} = \sum_\lambda (\sum_k \alpha_{0k}\mu_{k\lambda}),$$

c'est-à-dire comme une somme d'un nombre fini ou infini de déterminants infinis.

11. Soit D un déterminant de la forme normale; soient c_λ une suite de quantités dont les valeurs absolues restent inférieures à un nombre donné. Si l'on suppose $c_0 = 0$ et qu'on remplace les éléments A_{0k} de la ligne o par les quantités

$$A'_{0k} = A_{0k} + \sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k},$$

le nouveau déterminant D' pourra être mis sous la forme

$$D' = \sum \alpha_{0k} A'_{0k} = D + \sum_\lambda c_\lambda . \sum_k \alpha_{0k} A_{\lambda k} = D$$

et ne différera pas, par conséquent, de D.

12. Soient deux déterminants de la forme normale:

$$A = [A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}, \qquad B = [B_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty};$$

si l'on définit des quantités C_{ik} par la formule

$$C_{ik} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij} B_{kj},$$

le déterminant infini

$$C = [C_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

sera de la forme normale et l'on aura:

$$AB = C.$$

Posons, en effet,

$$A_{ik} = a_{ik}, \qquad B_{ik} = b_{ik}; \qquad (i \gtrless k)$$
$$A_{ii} = 1 + a_{ii}, \qquad B_{ii} = 1 + b_{ii};$$

par hypothèse, les séries

$$S_a = \sum_i \sum_k |a_{ik}|; \qquad S_b = \sum_i \sum_k |b_{ik}|$$

sont convergentes. Or, en posant

$$C_{ik} = c_{ik} \ (i \gtrless k), \qquad C_{ii} = 1 + c_{ii}$$

on a

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ki} + \sum_j a_{ij} b_{kj},$$
$$c_{ii} = a_{ii} + b_{ii} + \sum_j a_{ij} b_{ij}$$

ce qui, en vertu de la convergence des séries S_a, S_b et

$$S_{ab} = \sum_{i,k,j,} |a_{ij} b_{kj}|,$$

suffit pour démontrer la convergence de la série $\sum |c_{ik}|$. Par conséquent, le déterminant C est de la forme normale.

Pour mettre en évidence l'exactitude de l'égalite $AB = C$, il suffirait d'adopter un mode de démonstration analogue à celui employé dans la théorie ordinaire; mais il paraît plus simple de procéder de la manière suivante.

Posons

$$\mu_{ik} = \sum_{j=-m}^{+m} A_{ij} B_{kj}, \qquad \nu_{ik} = C_{ik} - \mu_{ik};$$

$$A_m = [A_{ik}], \quad B_m = [B_{ik}], \quad C_m^m = [\mu_{ik}], \quad C_m = [C_{ik}] \quad (i,k=-m..+m)$$

$$A = A_m + \alpha_m, \qquad B = B_m + \beta_m, \qquad C = C_m + \gamma_m;$$

le déterminant C_m peut être exprimé de la manière suivante comme une somme de $2m + 2$ déterminants:

$$C_m = (\mu_{0,-m} \cdot\cdot \mu_{0,m}) + (\mu_{0,-m} \cdot\cdot \mu_{0,m-1}\nu_{0m}) + (\mu_{0,-m} \cdot\cdot \mu_{0,m-2}\nu_{0,m-1}C_{0m}) + \cdot\cdot$$
$$\cdot\cdot + (\mu_{0,-m}\nu_{0,-m+1}C_{0,-m+2} \cdot\cdot C_{0m}) + (\nu_{0,-m}C_{0,-m+1} \cdot\cdot C_{0m}),$$

les lignes numérotées o des déterminants respectifs étant seules représentées. Or, dans chacun de ces déterminants, tous les mineurs correspondant aux éléments ν_{ik} sont, pour des valeurs quelconques de l'entier m, inférieurs en valeur absolue au produit

$$\overline{P} = \prod_{i=-\infty}^{+\infty}(1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_{ik}|).$$

Par conséquent, en remarquant que

$$C_m^m = (\mu_{0,-m} \cdot\cdot \mu_{0,m}),$$

on aura

$$|C_m - C_m^m| < \overline{P}\sum_{k=-m}^{+m}\sum_{r=-m}^{+m}|\nu_{kr}|;$$

mais, en choisissant m suffisamment grand, le second membre de cette inégalité deviendra aussi petit qu'on veut; c'est ce qui arrive, en effet, pour le second membre de l'inégalité

$$\sum_{k=-m}^{+m}\sum_{r=-m}^{+m}|\nu_{kr}| \leqq \sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{-m}^{+m}{}_{i,k}\{|a_{ij}b_{kj}| + |a_{i,-j}b_{k,-j}|\}.$$

Donc, en se donnant une quantité positive quelconque δ, on peut déterminer l'entier m' de telle manière que, pour $m > m'$, les valeurs absolues

$$|A - A_m|, \qquad |B - B_m|, \qquad |C - C_m|, \qquad |C_m - C_m^m|$$

soient toutes plus petites que δ. Soit Q une quantité positive suffisamment grande; on aura

$$|AB - A_mB_m| = |A_m\beta_m + \alpha_mB_m + \alpha_m\beta_m| < \delta Q + \delta^2,$$
$$C - C_m^m| < 2\delta,$$

ce qui, d'après le théorème de multiplication des déterminants finis:

$$A_m B_m = C_m^m,$$

conduit à écrire

$$|AB - C| < \delta(Q + \delta + 2)$$

ou enfin

$$AB = C.$$

13. Soit $D = [A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$ un déterminant infini de la forme normale; si l'on désigne par α_{ik} ses mineurs du premier ordre, on a

$$(\alpha) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{i_1k_1} & .. & \alpha_{i_1k_r} \\ . & .. & . \\ \alpha_{i_rk_1} & .. & \alpha_{i_rk_r} \end{vmatrix} = D^{r-1}\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix},$$

$i_1 .. i_r$; $k_1 .. k_r$ désignant des entiers quelconques.

En partant du théorème de multiplication démontré dans le numéro précédent, la démonstration de ce théorème devient identique à celle de la théorie ordinaire[1] et pourra être omise. En revanche, nous allons établir quelques autres formules qui se rattachent à celle-là et dont nous aurons besoin dans la suite.

Rappelons d'abord que, $\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$ désignant toujours le mineur obtenu en remplaçant dans D les éléments $A_{i_1k_1} .. A_{i_rk_r}$ par l'unité et les autres éléments des lignes $i_1 .. i_r$ ou des colonnes $k_1 .. k_r$ par zéro, ce déterminant sera nul si deux i ou deux k sont égaux et changera de signe si deux i ou deux k se changent l'un dans l'autre.

Cela posé, formons la série double:

$$S = \sum_m \sum_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & m \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ \lambda \end{pmatrix} A_{m\lambda};$$

cette série est absolument convergente, car les quantités

$$\sum_\lambda \left| \begin{pmatrix} i \\ \lambda \end{pmatrix} A_{m\lambda} \right| \qquad (m = -\infty .. +\infty)$$

[1] Voir p. ex. BALTZER, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, 5[te] Aufl., p. 63.

sont toutes plus petites en valeur absolue qu'un certain nombre positif, et la série

$$\sum_m \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & m \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix}$$

converge absolument puisqu'elle n'est autre chose que le développement du déterminant obtenu en remplaçant dans le déterminant $\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$ chaque élément de la colonne k par l'unité.

On a donc le droit d'écrire

$$\begin{aligned} S &= \sum_m \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & m \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix} \sum_\lambda \begin{pmatrix} i \\ \lambda \end{pmatrix} A_{m\lambda} \\ &= \sum_\lambda \begin{pmatrix} i \\ \lambda \end{pmatrix} \sum_m \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & m \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix} A_{m\lambda}; \end{aligned}$$

mais

$$(\beta) \qquad \sum_\lambda \begin{pmatrix} i \\ \lambda \end{pmatrix} A_{m\lambda} = \begin{cases} D, & \text{si } m = i \\ 0, & \text{si } m \gtrless i \end{cases}$$

et

$$(\gamma) \qquad \sum_m \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & m \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix} A_{m\lambda}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}, & \text{si } \lambda = k; \\ -\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & .. & k_r \end{pmatrix}, & \text{si } \lambda = k_\nu; \qquad (\nu = 1..r) \\ 0, & \text{si } \lambda \lessgtr k, k_1, \ldots, k_r. \end{cases}$$

On a donc d'une part

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & i \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix} . D,$$

d'autre part

$$S = \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix} - \sum_{\nu=1}^{r} \begin{pmatrix} i \\ k_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & .. & k_r \end{pmatrix},$$

ce qui entraîne l'identité suivante:

$$(\delta)\quad \binom{i}{k}\binom{i_1\,\ldots\,i_r}{k_1\,\ldots\,k_r} = \sum_{\nu=1}^{r}\binom{i}{k_\nu}\binom{i_1\,\ldots\,i_{\nu-1}\;i_\nu\;i_{\nu+1}\,\ldots\,i_r}{k_1\,\ldots\,k_{\nu-1}\;k\;k_{\nu+1}\,\ldots\,k_r} + \binom{i_1\,\ldots\,i_r\;i}{k_1\,\ldots\,k_r\;k}D.$$

En particulier, si i est égal à l'un des indices $i_1\ldots i_r$, par exemple $i = i_1$, le déterminant $\binom{i_1\,\ldots\,i_r\;i}{k_1\,\ldots\,k_r\;k}$ s'évanouit et l'on a:

$$(\delta')\quad \binom{i_1}{k}\binom{i_1\,\ldots\,i_r}{k_1\,\ldots\,k_r} = \binom{i_1}{k_1}\binom{i_1\;i_2\,\ldots\,i_r}{k\;k_2\,\ldots\,k_r} + \ldots + \binom{i_1}{k_r}\binom{i_1\,\ldots\,i_{r-1}\;i_r}{k_1\,\ldots\,k_{r-1}\;k}.$$

De plus, en remarquant que les colonnes peuvent être regardées comme des lignes et *vice-versâ*, on obtient l'identité

$$(\varepsilon)\quad \binom{i}{k}\binom{i_1\,\ldots\,i_r}{k_1\,\ldots\,k_r} = \sum_{\nu=1}^{r}\binom{i_\nu}{k}\binom{i_1\,\ldots\,i_{\nu-1}\;i\;i_{\nu+1}\,\ldots\,i_r}{k_1\,\ldots\,k_{\nu-1}\;k_\nu\;k_{\nu+1}\,\ldots\,k_r} + \binom{i_1\,\ldots\,i_r\;i}{k_1\,\ldots\,k_r\;k}D$$

qui, pour $k = k_1$, prend la forme

$$(\varepsilon')\quad \binom{i}{k_1}\binom{i_1\,\ldots\,i_r}{k_1\,\ldots\,k_r} = \binom{i_1}{k_1}\binom{i\;i_2\,\ldots\,i_r}{k_1\;k_2\,\ldots\,k_r} + \ldots + \binom{i_r}{k_1}\binom{i_1\,\ldots\,i_{r-1}\;i}{k_1\,\ldots\,k_{r-1}\;k_r}.$$

14. Jusqu'ici nous n'avons étudié les propriétés des déterminants infinis que sous la supposition que ces déterminants fussent de la forme normale. Il est facile de voir qu'on peut ramener à ce cas une classe plus générale de déterminants infinis. Supposons, en effet, que les quantités A_{ik} satisfassent aux conditions suivantes: 1° le produit $\prod_i A_{ii}$ converge absolument; 2° il existe une suite de quantités x_k $(k = -\infty\ldots+\infty)$ telle que la série double

$$\sum_i \sum_k' A_{ik}\frac{x_i}{x_k} \qquad (i \gtrless k)$$

converge absolument. Je dis que le déterminant infini

$$D = [A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

converge et jouit des mêmes propriétés qu'un déterminant de la forme normale.

En effet, posons

$$\overline{A}_{ik} = A_{ik}\frac{x_i}{x_k}$$

et formons le déterminant infini

$$\overline{D} = [\overline{A}_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty};$$

ce déterminant étant de la forme normale, on peut lui appliquer la formule (b) (n° 7); désignons par $\overline{\nabla}_m$ et $\overline{\nabla}_{mk}$ ce que deviennent ∇_m et ∇_{mk} en remplaçant les A_{ik} par les $\overline{A}_{ik}$; on aura

$$\begin{aligned}\overline{D} &= \overline{\nabla}_1 + \overline{\nabla}_2 + .. + \overline{\nabla}_m + .. \\ &= \Sigma_m \Sigma_k \overline{\nabla}_{mk};\end{aligned}$$

or on voit aisément que

$$\overline{\nabla}_m = \nabla_m, \qquad \overline{\nabla}_{mk} = \nabla_{mk},$$

m et k désignant des entiers quelconques. Par conséquent, le déterminant D converge, a la même valeur que $\overline{D}$ et peut, de plus, être représenté par la formule suivante:

$$\begin{aligned}D &= \nabla_1 + \nabla_2 + .. + \nabla_m + .. \\ &= \Sigma_m \Sigma_k \nabla_{mk}.\end{aligned}$$

En prenant cette formule pour point de départ, on voit, tout à fait comme dans le cas des déterminants de la forme normale, que les théorèmes du n° 7 ainsi que ceux des n$^{\text{os}}$ 8, 12 et 13 s'appliquent aussi au cas du déterminant D. Au contraire, le théorème du n° 9 subit la légère modification que voici.

Remplaçons dans le déterminant $\overline{D}$ les éléments de la ligne i:

$$\overline{A}_{ik} \qquad\qquad (k=-\infty..+\infty)$$

par des quantités

$$\overline{\mu}_k = \mu_k\frac{x_i}{x_k} \qquad\qquad (k=-\infty..+\infty)$$

dont les valeurs absolues sont inférieures à un nombre donné, et soit $\bar{D}'$ le nouveau déterminant; on pourra écrire

$$\bar{D}' = \sum_k \bar{\mu}_k \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{A}_{ik}};$$

or, en vertu des remarques du nº 9, et d'après ce qui vient d'être démontré, il est clair que la valeur de $\bar{D}'$ ne change pas si l'on multiplie les éléments de chaque ligne i par $\frac{1}{x_i}$ et ceux de chaque colonne k par x_k; en d'autres termes, si l'on désigne par D' le déterminant obtenu en remplaçant dans D les éléments de la ligne i par les quantites μ_k, on aura

$$D' = \bar{D}' = \sum_k \mu_k \frac{\partial D}{\partial A_{ik}}.$$

Le théorème suivant se trouve donc démontré.

Soit un déterminant dont les éléments A_{ik} satisfont aux conditions énoncées plus haut; si l'on remplace les éléments d'une ligne i quelconque:

$$A_{ik} \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

par des quantités

$$\mu_k \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

telles que les valeurs absolues des quantités

$$\bar{\mu}_k = \mu_k \frac{x_i}{x_k} \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

n'excèdent pas toute limite, le nouveau déterminant convergera et pourra être développé suivant les quantités μ_k de la manière ordinaire.

Par exemple, s'il existe une quantité x telle que la série

$$\sum_i \sum_k' A_{ik} x^{i-k} \qquad (i \gtreqless k)$$

converge absolument, on peut prendre

$$x_k = x^k \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

et, en remplaçant dans le déterminant D les éléments A_{ik} de la ligne i par les quantités $\mu_k = x^k$, on voit que le nouveau déterminant s'exprime comme une série ordonnée suivant les puissances de x, dont les coefficients sont les mineurs du premier ordre appartenant à ladite ligne.

15. Avant de terminer ce paragraphe, il convient de dire quelques mots sur les déterminants infinis dont les éléments sont des fonctions analytiques d'une variable indépendante ρ.

Soit

$$D(\rho) = [A_{ik}(\rho)]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

un déterminant infini où les $A_{ik}(\rho)$ sont de telles fonctions, et posons, comme plus haut,

$$D_m(\rho) = [A_{ik}(\rho)]_{i,k=-m..+m};$$

soit T un certain continuum dans le plan représentatif de la variable ρ en dedans et sur la limite duquel les fonctions A_{ik} sont finies et continues. Nous dirons que le déterminant D est *uniformément convergent* dans le domaine T si, après avoir fixé arbitrairement la quantité positive δ, on peut trouver un entier positif n' tel que l'on ait

$$|D_{n+p}(\rho) - D_n(\rho)| < \delta$$

dès que $n > n'$, pour des valeurs quelconques de l'entier positif p et pour toute valeur de ρ en dedans ou sur la limite de T.

Cela posé, si le déterminant D converge uniformément dans T, il représente dans ce domaine une branche uniforme d'une certaine fonction analytique.

En effet, la série du second membre de l'égalité

$$D = D_1 + (D_2 - D_1) + .. + (D_m - D_{m-1}) + .$$

converge uniformément en dedans de T.

Supposons maintenant que les fonctions $A_{ik}(\rho)$ satisfassent à la condition suivante: si l'on pose $A_{ik}(\rho) = a_{ik}(\rho)$, $A_{ii}(\rho) = 1 + a_{ii}(\rho)$, la série double

$$\Sigma_i \Sigma_k |a_{ik}(\rho)|$$

converge uniformément dans T.[1] Il est clair d'abord que le déterminant D sera de la forme normale pour chaque point ρ de T. De plus, il est facile de voir qu'il convergera uniformément en dedans de ce domaine. En effet, le développement ((a), n° 7) est uniformément convergent puisque l'inégalité (a″) a lieu pour toute valeur de ρ appartenant à T et que le développement (a′) de $\bar{P}$ converge uniformément en dedans de ce domaine.

Mais le développement (a) n'est pas le seul dont la convergence est uniforme; cette propriété appartient à tous les autres développements du n° 7. Considérons d'abord la formule (d). Puisque tous les mineurs du déterminant $D(\rho)$ sont plus petits en valeur absolue qu'un certain nombre positif et que la série

$$\Sigma_k |A_{ik}(\rho)|$$

converge uniformément dans l'intérieur de T, il en sera de même de la série

$$\Sigma_k |A_{ik}(\rho)\alpha_{ik}(\rho)|$$

et par suite de

$$\Sigma_k A_{ik}(\rho)\alpha_{ik}(\rho) = D(\rho).$$

La même chose se démontre d'une manière analogue pour les développements (e), (f) et (g), et il ne reste qu'à examiner la formule (h). Écrivons cette formule ainsi qu'il suit:

$$\text{(h)} \qquad D = 1 + S'' + S''' + \ldots + S^{(m)} + \ldots$$

---

[1] Une série double $\sum\limits_0^{+\infty}{}_\mu \sum\limits_0^{+\infty}{}_\nu \varphi_{\mu\nu}$ où les $\varphi_{\mu\nu}$ sont des fonctions finies et continues d'un nombre quelconque de variables, laquelle converge pour chaque point d'un certain domaine T, sera dite *uniformément* convergente dans ce domaine, si à chaque quantité positive δ correspondent deux entiers m', n', tels que l'on ait

$$\left| \sum_m^\infty{}_\mu \sum_n^\infty{}_\nu \varphi_{\mu\nu} \right| < \delta$$

dès que $m > m'$, $n > n'$ et pour chaque point en dedans ou sur la limite de T. De même, pour le cas des séries d'ordre de multiplicité 3, 4, etc. nous adopterons des définitions analogues.

où

$$S'' = \sum_{p,q} \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{vmatrix}, \qquad S''' = \sum_{p,q,r} \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pq} & a_{pr} \\ a_{qp} & a_{qq} & a_{qr} \\ a_{rp} & a_{rq} & a_{rr} \end{vmatrix}, \ldots;$$

posons, pour un moment,

$$u_i = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_{ik}| \qquad (i=-\infty..+\infty)$$

et développons le produit $\bar{P} = \Pi_i(1 + u_i)$ de la manière suivante:

$$(\mathrm{h}) \qquad \bar{P} = 1 + \Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''' + \ldots + \Sigma^{(m)} + \ldots$$

où

$$\Sigma' = \Sigma_p u_p, \qquad \Sigma'' = \sum_{p,q} u_p u_q, \qquad \Sigma''' = \sum_{p,q,r} u_p u_q u_r, \ldots;$$

il est clair d'abord que

$$|S''| \leqq \Sigma'', \qquad |S'''| \leqq \Sigma''', \quad \ldots \quad |S^{(m)}| \leqq \Sigma^{(m)}, \ldots$$

et que, par conséquent, il suffit pour notre but de démontrer que la série (h) converge uniformément. Si, à cet effet, nous écrivons $\bar{P}$ sous la forme

$$(\bar{\mathrm{h}}) \qquad \bar{P} = p_1 + (p_2 - p_1) + \ldots + (p_m - p_{m-1}) + \ldots$$

où

$$p_{2r+1} = \prod_{i=-r}^{+r}(1 + u_i), \qquad p_{2r} = \prod_{i=-r+1}^{+r}(1 + u_i),$$

nous savons que la série $\Sigma_m(p_m - p_{m-1})$ converge uniformément en dedans de T. Donc, à chaque quantité positive δ correspond un entier n' tel que l'on ait

$$\sum_{m=n}^{\infty}(p_m - p_{m-1}) < \delta$$

dès que $n > n'$ et pour toute valeur de ρ en dedans de T. Or l'expression $p_m - p_{m-1}$ se compose de termes positifs formés en multipliant certaines des quantités u_i, le degré de ces termes par rapport aux u_i étant au plus égal à m. Donc tous les termes de l'expression

$$\sum_{m=n}^{\infty}\Sigma^{(m)},$$

c'est-à-dire tous les termes de $\overline{P}$ dont le degré par rapport aux u_i excède $n - 1$, se trouvent aussi dans la somme

$$\sum_{m=n}^{\infty}(p_m - p_{m-1}),$$

d'où l'on voit que

$$\sum_{m=n}^{\infty}\Sigma^{(m)} < \delta;$$

donc la série ($\overline{\text{h}}$) et *a fortiori* la série (h) convergent uniformément à l'intérieur de T.

Mais il y a plus: toutes les séries $S^{(m)}$ qui composent la série (h) convergent aussi uniformément en dedans de T. Pour le voir, démontrons d'abord que chaque série $\Sigma^{(m)}$ converge uniformément. La série

$$\Sigma^{(m)} = \Sigma_{\mu_1}\Sigma_{\mu_2}\,.\,.\,\Sigma_{\mu_m}u_{\mu_1}u_{\mu_2}\,.\,.\,u_{\mu_m}$$
$$\mu_1 < \mu_2 < \,.\,.\, < \mu_m$$

s'obtient en remplaçant certains termes de

$$\Sigma_{\mu_1}\Sigma_{\mu_2}\,.\,.\,\Sigma_{\mu_m}u_{\mu_1}u_{\mu_2}\,.\,.\,u_{\mu_m}$$

par zéro; cette dernière série qui n'est autre chose que le produit

$$\Sigma_{\mu_1}u_{\mu_1}\,.\,\Sigma_{\mu_2}u_{\mu_2}\,.\,.\,\Sigma_{\mu_m}u_{\mu_m},$$

est évidemment uniformément convergente puisque la série $\Sigma_i u_i$ converge uniformément; il en est donc de même de $\Sigma^{(m)}$. Or on a

$$\text{valeur absolue de}\begin{vmatrix} a_{\mu_1\mu_1} & .\,. & a_{\mu_1\mu_m} \\ . & .\,.\,. & . \\ a_{\mu_m\mu_1} & .\,. & a_{\mu_m\mu_m}\end{vmatrix} \leqq u_{\mu_1}u_{\mu_2}\,.\,.\,u_{\mu_m};$$

donc la série $S^{(m)}$ est uniformément convergente en dedans de T.

16. Supposons, comme dans le numéro précédent, que les fonctions A_{ik} soient telles que la série double $\sum_i \sum_k |a_{ik}(\rho)|$ converge uniformément en dedans de T. Soient μ_k une suite de constantes ou de fonctions qui sont toutes, pour chaque point ρ de T, inférieures en valeur absolue à un nombre donné. Si l'on remplace dans D les éléments A_{ik} d'une ligne i quelconque par ces quantités μ_k, on sait d'après le n° 9 que le déterminant nouveau converge dans ce domaine et peut être représenté par la série

$$\sum_k \mu_k \alpha_{ik};$$

démontrons que cette série converge *uniformément* en dedans de T. Puisque le mineur α_{ik} s'obtient en remplaçant dans D l'élément A_{ik} par l'unité et les autres éléments de la colonne k par zéro, il est clair que dans ce déterminant l'élément diagonal de la ligne k est nul et que, par conséquent, on a, d'après le n° 5,

$$|\alpha_{ik}| \leqq \overline{P} \, . \sum_\lambda |a_{k\lambda}|$$

pour tout point ρ du domaine T. Or la série $\sum_k \sum_\lambda |a_{k\lambda}|$ étant uniformément convergente dans ce domaine, il en sera de même de $\sum_k |\alpha_{ik}|$; donc la série $\sum_k \mu_k \alpha_{ik}$ est *a fortiori* uniformément convergente en dedans de T.

17. Supposons maintenant qu'il existe une suite de quantités x_k qui rendent la série double

$$\sum_i \sum_k \left| a_{ik}(\rho) \frac{x_i}{x_k} \right|$$

uniformément convergente en dedans de T. Dans ce cas, le déterminant

$$D = [A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

appartient à la classe étudiée dans le n° 14; tous les développements en série dont il a été question dans le n° 7 sont donc valables à l'intérieur de T et il est facile de voir, d'après les n^{os} 14 et 15, que ces développements convergent uniformément en dedans de ce domaine.

18. Si l'on remplace dans D les éléments d'une ligne i quelconque par des quantités μ_k telles que les valeurs absolues $\left|\mu_k \frac{x_i}{x_k}\right|$ $(k = -\infty .. +\infty)$

sont toutes plus petites qu'un nombre donné, on sait (n° 14) que le déterminant ainsi obtenu est représenté par la série $\sum \mu_k \alpha_{ik}$ et que cette série converge pour chaque point ρ de T. Comme dans le n° 16, on démontre aisément que cette série converge *uniformément* en dedans de T.

19. Revenons au cas où la série $\sum_i \sum_k |a_{ik}|$ converge uniformément dans T et proposons-nous de former la *dérivée* du déterminant D. Il est clair d'abord que la série double

$$S = \sum_i \sum_k \alpha_{ik} \frac{dA_{ik}}{d\rho}$$

est absolument et uniformément convergente à l'intérieur de T; en effet, puisque ces propriétés appartiennent à $\sum_i \sum_k a_{ik}$, elles appartiendront aussi à $\sum_i \sum_k \frac{da_{ik}}{d\rho}$; et les α_{ik} sont, pour toutes valeurs de ρ en dedans ou sur la limite de T, inférieurs en valeur absolue à un certain nombre positif.

Ceci posé, je dis qu'à l'intérieur de T la série S représente la dérivée de D. En effet, en conservant les mêmes notations qu'auparavant, on peut exprimer D par la série

$$D = D_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (D_m - D_{m-1}),$$

qui converge uniformément dans T; il suit de là qu'on peut écrire

$$\frac{dD}{d\rho} = \frac{dD_0}{d\rho} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{dD_m}{d\rho} - \frac{dD_{m-1}}{d\rho} \right)$$

et que la série du second membre de cette égalité converge uniformément. Donc, en choisissant arbitrairement une quantité positive δ, on peut déterminer n' de telle manière que

$$\left| \frac{dD}{d\rho} - \frac{dD_n}{d\rho} \right| < \delta,$$

dès que $n > n'$ et pour toutes valeurs de ρ en dedans ou sur la limite de T.

D'un autre côté, en désignant par $\alpha_{ik}^{(n)}$ les mineurs du premier ordre du déterminant D_n, on a

$$\frac{dD_n}{d\rho} = \sum_{i=-n}^{+n} \sum_{k=-n}^{+n} \alpha_{ik}^{(n)} \frac{dA_{ik}}{d\rho}.$$

Posons

$$S_n = \sum_{i=-n}^{+n} \sum_{k=-n}^{+n} \alpha_{ik} \frac{dA_{ik}}{d\rho}, \qquad S = S_n + E_n;$$

puisque S converge uniformément, on peut déterminer n'' de sorte que l'inégalité $n > n''$ entraîne celle-ci:

$$|S - S_n| < \delta$$

pour toute valeur ρ de T.

Or on a

$$\frac{dD_n}{d\rho} - S_n = \sum_{i=-n}^{+n} \sum_{k=-n}^{+n} (\alpha_{ik}^{(n)} - \alpha_{ik}) \frac{dA_{ik}}{d\rho}$$

et l'on peut trouver une quantité μ telle que les inégalités

$$|\alpha_{ik} - \alpha_{ik}^{(n)}| \leqq \mu(\bar{P} - \bar{P}_n)$$

aient lieu partout à l'intérieur de T. Donc il existe un entier n''' tel qu'on ait

$$\left| \frac{dD_n}{d\rho} - S_n \right| < \delta$$

pour $n > n'''$ et dès que ρ se trouve en dedans ou sur la limite de T. Par suite on a

$$\left| \frac{dD}{d\rho} - S \right| < 3\delta$$

ou enfin, pour tout le domaine T,

$$\frac{dD}{d\rho} = \sum_i \sum_k \alpha_{ik} \frac{dA_{ik}}{d\rho};$$

en introduisant une notation employée plus haut, cette égalité prend la forme

$$\frac{dD}{d\rho} = \sum_i \sum_k \frac{\partial D}{\partial A_{ik}} \frac{dA_{ik}}{d\rho},$$

généralisation d'une formule bien connue de la théorie des déterminants finis.

§ 2. *Sur la résolution des systèmes infinis d'équations linéaires.*

20. Posons

$$u_i = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{ik} x_k \qquad {\scriptstyle (i=-\infty..+\infty)}$$

et supposons que le déterminant

$$D = [A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

soit de la forme normale. Proposons-nous de trouver toutes les valeurs des inconnus x_k ($k = -\infty .. + \infty$) qui satisfont aux égalités

$$(1) \qquad u_i = 0 \qquad {\scriptstyle (i=-\infty..+\infty)}$$

et qui ont, de plus, la propriété de ne pas dépasser en valeur absolue chaque nombre fini:

$$(1') \qquad |x_k| \leqq X. \qquad {\scriptstyle (k=-\infty..+\infty)}$$

Supposons d'abord $D \neq 0$. Pour toutes les valeurs des x_k qui satisfont à (1'), on a

$$(2) \qquad \sum_k |A_{ik}|\,|x_k| < U, \qquad {\scriptstyle (i=-\infty..+\infty)}$$

U désignant un nombre positif fini. Donc la série

$$S = \sum_i \sum_\lambda \binom{i}{k} A_{i\lambda} x_\lambda$$

converge absolument et l'on peut écrire

$$S = \sum_i \binom{i}{k} u_i = \sum_\lambda x_\lambda . \sum_i \binom{i}{k} A_{i\lambda},$$

d'où:

$$(3) \qquad x_k . D = \sum_i \binom{i}{k} u_i = 0,$$

c'est-à-dire

$$x_k = 0; \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

en d'autres termes, le système (1, 1') n'a aucune solution. Donc:

Pour que le système (1, 1') *ait une solution, il faut que le déterminant* D *soit égal à zéro.*

Supposons $D = 0$. Avant d'examiner ce cas de plus près, il faut établir quelques propositions préliminaires.

Formons le mineur $\begin{pmatrix} -m & .. & +m \\ -m & .. & +m \end{pmatrix}$ et désignons par $(-m\,..+m)$ le produit obtenu en supprimant dans le produit

$$\bar{P} = \Pi_i(1 + \Sigma |a_{ik}|)$$

les facteurs qui correspondent à $i = -m\,..+m$. Dans le développement du déterminant $\begin{pmatrix} -m & .. & +m \\ -m & .. & +m \end{pmatrix}$ de même que du produit $(-m\,..+m)$ se trouve le terme $+1$, et aucun terme du développement de celui-là n'est plus grand en valeur absolue que le terme correspondant du développement de celui-ci. Donc on a:

$$(4) \qquad \left| \begin{pmatrix} -m & .. & +m \\ -m & .. & +m \end{pmatrix} - 1 \right| \leqq (-m\,..+m) - 1.$$

Choisissons arbitrairement une quantité positive δ plus petite que l'unité; il existe un entier positif m' tel que, pour $m \geqq m'$, le second membre de (4) est plus petit que δ. Pour de telles valeurs de m on aura par conséquent

$$(5) \qquad 1 - \delta < \left| \begin{pmatrix} -m & .. & +m \\ -m & .. & +m \end{pmatrix} \right| < 1 + \delta;$$

donc le mineur $\begin{pmatrix} -m' & .. & +m' \\ -m' & .. & +m' \end{pmatrix}$ est certainement différent de zéro et il existe dans la suite

$$\begin{pmatrix} -m & .. & +m \\ -m & .. & +m \end{pmatrix} \qquad (m=0,1,2,..)$$

un *premier* mineur qui n'est pas nul.

Il est donc possible de déterminer les indices $i_1 \,..\, i_r;\ k_1 \,..\, k_r$ en façon que le mineur $\begin{pmatrix} i_1 \,..\, i_r \\ k_1 \,..\, k_r \end{pmatrix}$ ne soit pas nul; de plus, si $r > 1$, nous supposerons que ces indices soient choisis de manière que les mineurs $\begin{pmatrix} \iota_1 \,..\, \iota_\nu \\ \varkappa_1 \,..\, \varkappa_\nu \end{pmatrix}$ d'ordre inférieur à r et formés en prenant pour $\iota_1 \,..\, \iota_\nu$ et $\varkappa_1 \,..\, \varkappa_\nu$ respectivement toutes les combinaisons possibles des nombres $i_1 \,..\, i_r$ et $k_1 \,..\, k_r$, soient tous égaux à zéro.

Cela posé, si $r > 1$, *tous* les mineurs de D d'ordre 1 sont nuls. En effet, puisque D est nul, l'identité ((δ), n° 13) prend la forme

$$\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \,..\, i_r \\ k_1 \,..\, k_r \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{r} \begin{pmatrix} i \\ k_\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \,..\, i_{\nu-1}\ i_\nu\ i_{\nu+1} \,..\, i_r \\ k_1 \,..\, k_{\nu-1}\ k\ k_{\nu+1} \,..\, k_r \end{pmatrix}$$

d'où l'on voit que les mineurs suivants:

$$\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} = 0 \qquad (i = i_1 \,..\, i_r;\ k = -\infty \,..+ \infty)$$

et, par suite, le second membre de l'égalité ((ε), n° 13):

$$\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \,..\, i_r \\ k_1 \,..\, k_r \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{r} \begin{pmatrix} i_\nu \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \,..\, i_{\nu-1}\ i\ i_{\nu+1} \,..\, i_r \\ k_1 \,..\, k_{\nu-1}\ k_\nu\ k_{\nu+1} \,..\, k_r \end{pmatrix}$$

s'évanouissent pour $i, k = -\infty \,..+ \infty$; donc on a

$$\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} = 0. \qquad (i, k = -\infty \,..+ \infty)$$

Des raisonnements analogues suffisent pour démontrer qu'aussi les mineurs d'ordre $2, 3, \,..\, r-1$ sont *tous* nuls.

Appliquons ces résultats aux problème que nous avons en vue et considérons le cas général où l'ordre r du mineur $\begin{pmatrix} i_1 \,..\, i_r \\ k_1 \,..\, k_r \end{pmatrix}$ est quelconque. D'abord on voit facilement que les équations

$$u_{i_1} = 0, \qquad u_{i_2} = 0, \quad .. \quad u_{i_r} = 0$$

sont superflues, c'est-à-dire qu'elles sont une conséquence des autres équations $u_i = 0$ du système considéré. Soit en effet i_ν l'un des indices $i_1 \,.\,.\, i_r$; puisque la série double

$$\sum_m \sum_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & .\,. & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & .\,. & i_r \\ k_1 & .\,. & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & .\,. & k_r \end{pmatrix} A_{m\lambda} x_\lambda$$

est absolument convergente, on a:

$$\sum_m \begin{pmatrix} i_1 & .\,. & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & .\,. & i_r \\ k_1 & .\,. & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & .\,. & k_r \end{pmatrix} u_m = \sum_\lambda x_\lambda \cdot \sum_m \begin{pmatrix} i_1 & .\,. & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & .\,. & i_r \\ k_1 & .\,. & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & .\,. & k_r \end{pmatrix} A_{m\lambda};$$

or la série

$$\sum_m \begin{pmatrix} i_1 & .\,. & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & .\,. & i_r \\ k_1 & .\,. & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & .\,. & k_r \end{pmatrix} A_{m\lambda}$$

est identiquement nulle si $\lambda \gtrless k_1, k_2, \,.\,.\, k_r$; elle est nulle aussi si λ est égal à l'un des nombres $k_1, k_2, \,.\,.\, k_r$ puisqu'elle représente, dans ce cas, un certain mineur d'ordre $r - 1$. Donc:

$$\sum_m \begin{pmatrix} i_1 & .\,. & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & .\,. & i_r \\ k_1 & .\,. & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & .\,. & k_r \end{pmatrix} u_m = 0;$$

dans cette égalité le coefficient de u_{i_ν} n'est pas nul, mais les coefficients des quantités $u_{i_1} \,.\,.\, u_{i_{\nu-1}} u_{i_{\nu+1}} \,.\,.\, u_{i_r}$ sont tous nuls. Donc chaque égalité $u_{i_\nu} = 0$ $(\nu = 1, 2, \,.\,.\, r)$ sera satisfaite si les inconnus remplissent celles des équations $u_i = 0$ où l'indice $i \gtrless i_1, i_2, \,.\,.\, i_r$.

La série double

$$S = \sum_m \sum_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & .\,. & i_r & m \\ k_1 & .\,. & k_r & k \end{pmatrix} A_{m\lambda} x_\lambda$$

est absolument convergente et, si les inconnus x_k satisfont aux équations $u_i = 0$, on a $S = 0$; de là et en vertu des identités ((γ), n° 13) on conclut que les relations suivantes doivent avoir lieu entre les inconnus:

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} i_1 & .\,. & i_r \\ k_1 & .\,. & k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & .\,. & i_r \\ k & k_2 & .\,. & k_r \end{pmatrix} x_{k_1} + \,.\,. + \begin{pmatrix} i_1 & .\,. & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & .\,. & k_{r-1} & k \end{pmatrix} x_{k_r}. \quad {\scriptstyle (k=-\infty \,.\,.\, +\infty)}$$

Ces relations qui sont nécessaires sont d'ailleurs suffisantes puisque toutes les séries

$$\sum_k \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ k & k_2 & \ldots & k_r \end{pmatrix} A_{mk}, \quad \ldots \quad \sum_k \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} & k \end{pmatrix} A_{mk} \qquad (m=-\infty \ldots +\infty)$$

sont nulles. Donc:

Soit D un déterminant infini de la forme normale; après un certain rang m' qu'on peut toujours déterminer, tous les mineurs dans la suite

$$\begin{pmatrix} -m & \ldots & +m \\ -m & \ldots & +m \end{pmatrix} \qquad (m=0,1,2,\ldots)$$

sont différents de zéro et l'on peut, par conséquent, toujours trouver un mineur d'ordre fini qui n'est pas nul; si D est nul, si $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$ est différent de zéro et si, de plus, les indices $i_1 \ldots i_r$; $k_1 \ldots k_r$ sont tels que les mineurs $\begin{pmatrix} \iota_1 & \ldots & \iota_\nu \\ \varkappa_1 & \ldots & \varkappa_\nu \end{pmatrix}$ d'ordre $\nu = 1, 2, \ldots r-1$, formés en prenant pour $\iota_1 \ldots \iota_\nu$ et $\varkappa_1 \ldots \varkappa_\nu$ respectivement toutes les combinaisons possibles des nombres $i_1 \ldots i_r$ et $k_1 \ldots k_r$, sont égaux à zéro, tous les mineurs d'ordre $1, 2, \ldots r-1$ sont nuls.

Soit (1) *un système infini d'équations linéaires dont le déterminant D est de la forme normale et a la valeur nulle, et déterminons les nombres $r, i_1 \ldots i_r, k_1 \ldots k_r$ de ladite manière; si l'on assujettit les inconnus à la condition de ne pas dépasser en valeur absolue toute limite finie, les équations $u_{i_1} = 0, u_{i_2} = 0, \ldots u_{i_r} = 0$ seront superflues, les inconnus $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots x_{k_r}$ resteront indéterminés et les autres x_k se présenteront nécessairement par la formule* (6) *comme des fonctions linéaires homogènes de $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots x_{k_r}$.*

Pour le cas d'un système infini d'équations linéaires non-homogènes:

$$u_i = c_i \qquad (i=-\infty \ldots +\infty)$$

où les quantités c_i sont plus petites en valeur absolue qu'un nombre donné, on pourrait, par des considérations analogues, facilement établir un théorème correspondant.

II.

§ 3. *Sur les intégrales des équations différentielles linéaires.*

21. Considérons une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n

$$(1) \qquad P(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x)y = 0$$

où les coefficients $P_2(x), P_3(x), \ldots P_n(x)$ sont des fonctions holomorphes à l'intérieur d'un certain anneau circulaire dont le centre coincide avec l'origine du plan des x et dont les rayons R et R' satisfont aux inégalités

$$(2) \qquad R < 1 < R'.$$

Représentons les fonctions $P_r(x)$ à l'intérieur de l'anneau (RR') par des séries de LAURENT:

$$(3) \qquad P_r(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \alpha_{r\lambda} x^\lambda; \qquad {\scriptstyle (r=2,3,\ldots n)}$$

nous avons vu, dans la note citée plus haut, que, pour qu'une série de la forme

$$y = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_\lambda x^{\rho+\lambda}$$

représente une intégrale de l'équation (1), il faut que ρ et g_λ satisfassent aux équations en nombre infini:

$$(4) \qquad G_m(\rho) \equiv \varphi(\rho + m)g_m + \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' A_{m\lambda} g_\lambda = 0 \qquad {\scriptstyle (\lambda \gtrless m;\, m=-\infty..+\infty)}$$

où

$$\varphi(\rho) = \rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+1) + \rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+3)\alpha_{2,-2} + \ldots + \alpha_{n,-n}$$

$$A_{m\lambda} = (\rho+\lambda)(\rho+\lambda-1)\ldots(\rho+\lambda-n+3)\alpha_{2,m-\lambda-2} + \ldots + \alpha_{n,m-\lambda-n};$$

et, en étudiant les propriétés du déterminant infini

$$\Omega(\rho) = [\psi_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty} \tag{5}$$

où

$$\psi_{ik}(\rho) = \frac{A_{ik}}{\varphi(\rho+i)}, \qquad \psi_{ii}(\rho) = 1,$$

nous sommes parvenus à former un système fondamental d'intégrales de l'équation considérée. Toutefois, comme nous l'avons déjà fait remarquer, cette solution ne s'est présentée que sous certaines restrictions. Pour nous affranchir complètement de ces restrictions, qui provenaient principalement de ce que les exposants des intégrales peuvent être, dans certains cas, des points singuliers pour la fonction $\Omega(\rho)$, il convient d'introduire un nouveau déterminant $D(\rho)$ qui se comporte régulièrement pour toute valeur finie de la variable ρ.

Désignons par $\rho_1, \rho_2, .. \rho_n$ les racines de l'équation

$$\varphi(\rho) = 0 \tag{6}$$

de sorte qu'on ait

$$\varphi(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) \, .. \, (\rho - \rho_n);$$

posons

$$h_0(\rho) = 1; \qquad h_m(\rho) = \frac{1}{m^n} e^{-\frac{\rho-\rho_1}{m}} . e^{-\frac{\rho-\rho_2}{m}} .. e^{-\frac{\rho-\rho_n}{m}}$$

et multiplions les équations $G_m(\rho) = 0$ par les facteurs respectifs $h_m(\rho)$; le système nouveau:

$$h_m(\rho) \, G_m(\rho) = 0, \qquad (m=-\infty..+\infty) \tag{7}$$

qui est évidemment équivalent à l'ancien puisque les $h_m(\rho)$ ne deviennent ni nuls ni infinis en dedans d'un domaine fini quelconque, prend, en posant

$$h_m(\rho) A_{m\lambda} = \chi_{m\lambda}(\rho), \qquad h_m(\rho)\varphi(\rho+m) = \chi_{mm}(\rho),$$

la forme

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \chi_{m\lambda}(\rho) g_\lambda = 0. \qquad (m=-\infty..+\infty) \tag{7'}$$

Le déterminant de ce système infini:

$$D(\rho) = [\chi_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty} \tag{8}$$

est de la forme normale à l'intérieur de tout domaine fini; en effet, si l'on pose

$$h'_m(\rho) = m^n h_m(\rho)$$

de sorte que

$$\chi_{m\lambda} = \frac{A_{m\lambda}}{m^n} h'_m(\rho), \qquad \chi_{0\lambda} = A_{0\lambda}$$

et qu'on assujettisse la variable $\rho = u + iv$ à la condition de rester en dedans d'un domaine fini T, il existe un nombre positif h plus grand que les valeurs que prennent les fonctions $|h'_m(\rho)|$ en dedans de ce domaine; on peut donc écrire

$$|\chi_{m\lambda}| < h \left|\frac{A_{m\lambda}}{m^n}\right|; \qquad (m \gtrless 0)$$

or, en se servant du même mode de démonstration que précédemment (Sur une application des déterminants infinis etc. p. 56) il est facile d'établir que la série double

$$\sum_m \sum\nolimits'_\lambda \left|\frac{A_{m\lambda}}{m^n}\right| \qquad (m \gtrless 0\,;\ \lambda \gtrless m)$$

converge et converge *uniformément* en dedans de T; la même chose ayant lieu pour la série $\sum_\lambda |A_{0\lambda}|$, il en sera de même de

$$\sum_m \sum\nolimits'_\lambda |\chi_{m\lambda}|. \qquad (\lambda \gtrless m)$$

De plus, puisqu'on a

$$\chi_{mm}(\rho) = \left(1 + \frac{\rho - \rho_1}{m}\right) e^{-\frac{\rho-\rho_1}{m}} \cdot\cdot \left(1 + \frac{\rho - \rho_n}{m}\right) e^{-\frac{\rho-\rho_n}{m}},$$

il est clair que la série

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\chi_{mm}(\rho) - 1|$$

converge uniformément à l'intérieur de T. Donc le déterminant $D(\rho)$ est de la forme normale, converge uniformément en dedans de tout domaine fini et représente, par conséquent, une fonction *entière* de ρ (voir § 1, n° 15).

Pour trouver la relation qui lie les déterminants $D(\rho)$ et $\Omega(\rho)$, formons le produit

$$\Omega(\rho) \cdot \prod_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_{mm}(\rho);$$

puisque le second facteur est un produit absolument convergent, le résultat de la multiplication s'obtiendra en multipliant — pour chaque indice m — les éléments de la ligne m par le facteur $\chi_{mm}(\rho)$. On aura donc

$$\Omega(\rho) \prod_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_{mm}(\rho) = [\chi_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty} = D(\rho) \tag{9}$$

ou, en posant

$$\prod_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_{mm}(\rho) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(\rho-\rho_\nu)\pi}{\pi} = \Pi(\rho), \tag{10}$$

$$D(\rho) = \Pi(\rho)\Omega(\rho). \tag{11}$$

Dans la note citée, nous avons dit, sans insister sur la démonstration, que la fonction $\Omega(\rho)$ est périodique et de période 1; il est facile maintenant d'en donner la preuve rigoureuse. En effet, puisqu'on a

$$\psi_{i,k}(\rho + 1) = \psi_{i+1,k+1}(\rho),$$

si l'on remplace dans l'égalité

$$\Omega(\rho) = [\psi_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

ρ par $\rho + 1$, on aura

$$\Omega(\rho + 1) = [\psi_{i+1,k+1}(\rho)]_{i,k=-\infty..+\infty};$$

dans cette égalité, le second membre est le déterminant obtenu en choisissant l'élément $\psi_{11}(\rho)$ pour origine dans la table des éléments $\psi_{ik}(\rho)$; ce déterminant ayant la même valeur que celui qu'on obtient en choisissant $\psi_{00}(\rho)$ pour origine (voir § 1, n° 3), on aura

$$\Omega(\rho + 1) = \Omega(\rho). \tag{12}$$

Donc, la fonction $\Omega(\rho)$ étant périodique de période 1, on voit par la formule (11) que l'on a

$$(13) \qquad D(\rho + 1) = (-1)^n D(\rho), \qquad D(\rho + 2) = D(\rho)$$

et que, par conséquent, $D(\rho)$ est périodique et de période 1 ou de période 2 suivant la parité ou l'imparité de l'entier n.

Puisqu'on a

$$(14) \qquad \lim_{v=\pm\infty} \Omega(\rho) = 1$$

il faut, en comptant un pôle ou un zéro autant de fois qu'indique son ordre de multiplicité, que le nombre des pôles incongruents[1] de $\Omega(\rho)$ soit égal au nombre des zéros incongruents; donc le nombre des zéros incongruents de $D(\rho)$ est égal à n. En désignant un système de zéros incongruents de cette fonction par $\rho', \rho'', \ldots \rho^{(n)}$, on pourra écrire

$$D(\rho) = C \cdot \prod^{n} \frac{\sin(\rho - \rho^{(\nu)})\pi}{\pi};$$

pour déterminer la constante C, remarquons que les égalités (10), (11), (14) nous donnent

$$Ce^{\pm \pi i (\Sigma\rho^{(\nu)} - \Sigma\rho_\nu)} = 1,$$

ce qui montre que la différence $\Sigma\rho^{(\nu)} - \Sigma\rho_\nu$ est nécessairement un nombre entier; en choisissant le système $\rho', \rho'', \ldots \rho^{(n)}$ de manière à donner à cet entier la valeur nulle, C prend la valeur 1 et l'on a

$$(15) \qquad D(\rho) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(\rho - \rho^{(\nu)})\pi}{\pi}.$$

---

[1] Dans ce qui suit, nous dirons que deux quantités complexes quelconques A et B sont *incongruentes* si leur différence n'est ni nulle ni égale à un nombre entier; dans le cas contraire, A et B seront dites *congruentes*.

De plus, puisque le coefficient de ρ^{n-1} dans $\varphi(\rho)$ est égal à $-\frac{1}{2}n(n-1)$, la valeur de $\Sigma\rho_\nu$ et par suite aussi de $\Sigma\rho^{(\nu)}$, est un nombre entier:

(16) $$\Sigma\rho^{(\nu)} = \Sigma\rho_\nu = \frac{1}{2}n(n-1).$$

22. Soit maintenant x un point quelconque à l'intérieur de l'anneau circulaire (RR') et posons

$$\bar{\chi}_{m\lambda} = \chi_{m\lambda}x^{m-\lambda};$$

il est facile de voir que la série $\Sigma_m\Sigma'_\lambda|\bar{\chi}_{m\lambda}|$ convergera uniformément par rapport à ρ en dedans de tout domaine fini (cf. loc. cit. p. 61) et que, par suite, les théorèmes des n^os 17, 18 sont applicables au cas qui nous occupe. En particulier, nous pouvons dire que:

si, dans le déterminant $D(\rho)$ ou dans un de ses mineurs, on remplace les éléments d'une ligne quelconque par les puissances x^k, le déterminant ainsi obtenu pourra s'écrire comme une série ordonnée selon ces puissances; et cette série, convergeant par rapport à x en dedans de (RR'), convergera par rapport à ρ absolument et uniformément à l'intérieur de tout domaine fini.

23. Désignons par

$$\binom{i}{k},\quad \binom{i_1\ i_2}{k_1\ k_2},\ \ldots$$

les mineurs d'ordre 1, 2, .. du déterminant $D(\rho)$ de sorte que, d'une manière générale,

$$\binom{i_1\ \ldots\ i_\nu}{k_1\ \ldots\ k_\nu}$$

représente le mineur d'ordre ν qui s'obtient en remplaçant dans $D(\rho)$ chacun des éléments $\chi_{i_1k_1}\ldots\chi_{i_\nu k_\nu}$ par l'unité et les autres éléments des lignes $i_1\ldots i_\nu$ ou des colonnes $k_1\ldots k_\nu$ par zéro.

Soit ρ' un zéro quelconque de $D(\rho)$; d'après ce que nous avons vu (§ 2), il existe toujours un mineur qui ne s'annulle pas pour $\rho = \rho'$. Supposons donc que, pour $\rho = \rho'$, le mineur

$$\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$$

soit différent de zéro. Formons les mineurs suivants:

$$\begin{pmatrix} \iota_1 & .. & \iota_\nu \\ \varkappa_1 & .. & \varkappa_\nu \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, .. r \\ \iota_1, \iota_2, .. \iota_\nu = i_1, i_2, .. i_r \\ \varkappa_1, \varkappa_2, .. \varkappa_\nu = k_1, k_2, .. k_r \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire tous ceux des mineurs d'ordre $1, 2, .. r$ dont les indices ι et $\varkappa$ sont des nombres dans les suites respectives $i_1 .. i_r$ et $k_1 .. k_r$. Pour abréger le language, désignons par M l'ensemble de ces mineurs, par $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, .. les ensembles de ceux des mineurs M dont l'ordre est respectivement égal à $1, 2, 3 ...$ Nous supposerons que les indices $i_1 .. i_r, k_1 .. k_r$ soient choisis de manière que $\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$ soit le seul des mineurs M qui ne s'annulle pas pour $\rho = \rho'$.

Si $r = 1$, c'est-à-dire s'il existe un mineur du premier ordre qui ne s'annulle pas, on n'aura pas besoin d'aller plus loin; mais supposons $r > 1$. Soit $(\rho - \rho')^{\mu}$ la plus haute puissance de $\rho - \rho'$ qui divise[1] $D(\rho)$; soient

$$(\rho - \rho')^{\mu_1}, \ (\rho - \rho')^{\mu_2}, \ .. \ (\rho - \rho')^{\mu_{r-1}}$$

les plus hautes puissances de $\rho - \rho'$ qui divisent respectivement tous les mineurs $M^{(1)}$, tous les mineurs $M^{(2)}$, .. tous les mineurs $M^{(r-1)}$.

On a nécessairement $\mu > \mu_1$; en effet, si l'on avait $\mu \leqq \mu_1$, on pourrait conclure de l'identité ((ε), n° 13) que les mineurs suivants

$$\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \qquad (i = -\infty .. +\infty; \ k = k_1 .. k_r)$$

---

[1] Soient $G(\rho)$, $H(\rho)$ deux fonctions entières; nous dirons que $G(\rho)$ est *divisible* par $H(\rho)$ ou que $H(\rho)$ *divise* $G(\rho)$ si le quotient $G(\rho) : H(\rho)$ est une fonction entière.

et par suite, en vertu de l'identité ((δ), n° 13), que *tous* les mineurs du premier ordre seraient divisibles par $(\rho - \rho')^{\mu}$; ce qui est impossible, puisque $(\rho - \rho')^{\mu-1}$ est la plus haute puissance de $\rho - \rho'$ qui divise le premier membre de l'égalité

$$\frac{dD}{d\rho} = \sum_i \sum_k \binom{i}{k} \frac{d\chi_{ik}}{d\rho}.$$

Par le raisonnement précédent on voit d'ailleurs que *tous* les mineurs du premier ordre sont divisibles par la puissance $(\rho - \rho')^{\mu_1}$ au moins.

On a $\mu_1 > \mu_2$. En effet, il existe parmi les mineurs $M^{(1)}$ au moins un qui est divisible par la puissance $(\rho - \rho')^{\mu_1}$ au plus; soit $\binom{i_1}{k_1}$ ce mineur. Si l'on avait $\mu_1 \leqq \mu_2$, en appliquant au déterminant $\binom{i_1}{k_1}$ et à ses mineurs les relations du n° 13, on verrait que les mineurs suivants

$$\begin{pmatrix} i_1 & i \\ k_1 & k \end{pmatrix}, \qquad \binom{i=-\infty..+\infty}{k=-\infty..+\infty}$$

c'est-à-dire *tous* les mineurs de $\binom{i_1}{k_1}$ du premier ordre, seraient divisibles par $(\rho - \rho')^{\mu_1}$, ce qui n'est pas possible.

On voit en même temps que *tous* les mineurs de D du deuxième ordre sont divisibles par $(\rho - \rho')^{\mu_2}$ au moins.

De plus, parmi les mineurs suivants:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i \\ k_1 & k \end{pmatrix} \qquad \binom{i=i_1..i_r}{k=k_1..i_r}$$

il existe au moins un qui n'est pas divisible par une puissance de $\rho - \rho'$ plus élevée que la $\mu_2$ième. En effet, soit $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \varkappa & \lambda \end{pmatrix}$ celui des mineurs $M^{(2)}$ pour lequel l'ordre de multiplicité de la racine ρ' est précisément égal à μ_2; supposons que μ_2' et μ_2'' soient les exposants des plus hautes puissances de $\rho - \rho'$ qui divisent respectivement les mineurs $\binom{\alpha\ \beta}{\varkappa\ k_1}$ et $\binom{\alpha\ \beta}{k_1\ \lambda}$. Soit d'abord $\mu_2' \leqq \mu_2''$; dans les identités

$$\binom{\alpha}{k_1}\binom{\alpha\ \beta}{\varkappa\ \lambda} = \binom{\alpha}{\varkappa}\binom{\alpha\ \beta}{k_1\ \lambda} + \binom{\alpha}{\lambda}\binom{\alpha\ \beta}{\varkappa\ k_1}$$

$$\binom{\beta}{k_1}\binom{\alpha\ \beta}{\varkappa\ \lambda} = \binom{\beta}{\varkappa}\binom{\alpha\ \beta}{k_1\ \lambda} + \binom{\beta}{\lambda}\binom{\alpha\ \beta}{\varkappa\ k_1},$$

$\binom{\alpha}{\varkappa}$, $\binom{\alpha}{\lambda}$, $\binom{\beta}{\varkappa}$, $\binom{\beta}{\lambda}$ sont divisibles par $(\rho - \rho')^{\mu_1}$ au moins et $\binom{\alpha\ \beta}{k_1\ \lambda}$, $\binom{\alpha\ \beta}{\varkappa\ k_1}$ par $(\rho - \rho')^{\mu_2'}$ au moins, mais $\binom{\alpha\ \beta}{\varkappa\ \lambda}$ par $(\rho - \rho')^{\mu_2}$ au plus; donc $\binom{\alpha}{k_1}$ et $\binom{\beta}{k_1}$ sont divisibles par $\rho - \rho'$ au moins $\mu_1 + \mu_2' - \mu_2$ fois. Or le premier membre de l'identité

$$\binom{i_1}{k_1}\binom{\alpha\ \beta}{\varkappa\ k_1} = \binom{\alpha}{k_1}\binom{i_1\ \beta}{\varkappa\ k_1} + \binom{\beta}{k_1}\binom{\alpha\ i_1}{\varkappa\ k_1}$$

étant, au plus, divisible $\mu_1 + \mu_2'$ fois par $\rho - \rho'$, on en conclut qu'il n'est pas possible que les mineurs

$$\binom{i_1\ \beta}{\varkappa\ k_1} = -\binom{i_1\ \beta}{k_1\ \varkappa} \quad \text{et} \quad \binom{\alpha\ i_1}{\varkappa\ k_1} = \binom{i_1\ \alpha}{k_1\ \varkappa}$$

soient tous deux divisibles par une puissance plus élevée que $(\rho - \rho')^{\mu_2}$. Si l'on suppose en second lieu $\mu_2' \geqq \mu_2''$, on voit par un raisonnement analogue, qu'au moins un des mineurs

$$\binom{i_1\ \beta}{k_1\ \lambda} \quad \text{et} \quad \binom{i_1\ \alpha}{k_1\ \lambda}$$

est, au plus, divisible par $(\rho - \rho')^{\mu_2}$. Donc notre assertion se trouve toujours justifiée.

Supposons, en vertu de ce résultat, que les indices $i_1 \,.\,.\, i_r$ et $k_1 \,.\,.\, k_r$ soient rangés dans un ordre tel que le mineur $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ soit divisible par $\rho - \rho'$ précisément μ_2 fois. D'une manière parfaitement analogue à la précédente, on pourra démontrer que $\mu_2 > \mu_3$ et qu'il existe parmi les mineurs suivants:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i \\ k_1 & k_2 & k \end{pmatrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix} i = i_1 \,.\,.\, i_r \\ k = k_1 \,.\,.\, k_r \end{pmatrix}$$

au moins un pour lequel ρ' est une racine d'ordre de multiplicité précisément égal à μ_3. On supposera que $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$ soit ce mineur et l'on continuera ainsi de proche en proche jusqu'à ce qu'on arrive au mineur

$$\begin{pmatrix} i_1 & .\,. & i_{r-1} \\ k_1 & .\,. & k_{r-1} \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir qu'on a $\mu \geqq r$; en effet, tous les mineurs d'ordre $r - 1$ prenant, pour $\rho = \rho'$, la valeur nulle, tous les mineurs d'ordre $r - 2$ s'annulleront d'ordre 2 au moins, tous ceux d'ordre $r - 3$ s'annulleront d'ordre 3 au moins, ..., tous ceux d'ordre 1 s'annulleront d'ordre $r - 1$ au moins; donc ρ' est pour $D(\rho)$ une racine multiple d'ordre r au moins, c'est-à-dire on a $\mu \geqq r$.

De plus, puisque le second membre de l'identité

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i_2 \\ k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ k_2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} D(\rho)$$

ne s'annulle que d'ordre $\mu + \mu_2$, tandis que le premier devient nul d'ordre $2\mu_1$ au moins, on a nécessairement $2\mu_1 \leqq \mu + \mu_2$ ou, ce qui revient au même,

$$\mu - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2;$$

et de même, puisque le second membre de

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i_1 & i_3 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_3 \\ k_1 & k_3 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$$

ne s'annulle que d'ordre $\mu_1 + \mu_3$ et que le premier devient nul d'ordre $2\mu_2$ au moins, on doit avoir $2\mu_2 \leqq \mu_1 + \mu_3$ ou

$$\mu_1 - \mu_2 \geqq \mu_2 - \mu_3,$$

et ainsi de suite.

Donc, nous sommes parvenus au théorème suivant:

Soit ρ' une racine multiple d'ordre μ de $D(\rho)$, il existe toujours un mineur d'ordre μ qui ne devient pas nul; soit

$$\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$$

un mineur d'ordre r ($r \leqq \mu$) qui ne s'évanouit pas pour $\rho = \rho'$ et supposons que les indices $i_1 \, .. \, i_r$, $k_1 \, .. \, k_r$ soient choisis de telle manière que tous les autres mineurs M s'annullent pour $\rho = \rho'$; soient

$$\mu_1, \mu_2, \, .. \, \mu_{r-1}$$

les exposants des plus hautes puissances de $\rho - \rho'$ qui divisent tous les mineurs $M^{(1)}$, tous les mineurs $M^{(2)}$, .. tous les mineurs $M^{(r-1)}$: $\mu_1, \mu_2, \, .. \, \mu_{r-1}$ seront les exposants des plus hautes puissances de $\rho - \rho'$ qui divisent t o u s *les mineurs du premier ordre,* t o u s *les mineurs du deuxième ordre, ..* t o u s *les mineurs d'ordre $r - 1$; on aura*

$$\mu > \mu_1 > \, .. > \mu_{r-1}$$

$$\mu - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2 \geqq \, .. \geqq \mu_{r-1}$$

et l'on pourra, de plus, toujours ranger les indices $i_1 \,..\, i_r$ *et* $k_1 \,..\, k_r$ *dans un ordre tel que* ρ' *soit pour les mineurs respectifs:*

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & i_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} \end{pmatrix}$$

une racine d'ordre de multiplicité $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{r-1}$.

Nous donnerons désormais aux déterminants

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$$

le nom de *mineurs caractéristiques* et aux nombres $\mu, \mu_1, \ldots \mu_{r-1}$ le nom de *nombres caractéristiques* correspondant à la racine ρ'.

Il résulte de cette définition et des théorèmes précédents que les nombres caractéristiques correspondant à une racine quelconque sont entièrement déterminés, quand bien même on pourrait trouver plusieurs systèmes de déterminants caractéristiques.

Pour trouver actuellement le mineur caractéristique $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$, il suffit d'examiner un certain nombre fini de mineurs. En effet, après avoir déterminé, par la méthode donnée dans le § 2, un entier m' tel que le mineur $\begin{pmatrix} -m' & \ldots & +m' \\ -m' & \ldots & +m' \end{pmatrix}$ ne s'annulle pas pour $\rho = \rho'$, les nombres $i_1 \,..\, i_r$, $k_1 \,..\, k_r$ se trouveront dans la suite $-m' \,..\, +m'$ et l'on n'aura qu'à envisager ceux des mineurs d'ordre $1, 2, \ldots 2m' + 1$ qui se définissent par des nombres dans cette suite.

24. Les théorèmes précédents nous donnent le moyen d'obtenir dans le cas général les intégrales de l'équation différentielle (1).

Pour que la série

$$y = \Sigma_\lambda g_\lambda x^{\rho'+\lambda}$$

représente à l'intérieur de l'anneau circulaire (RR') une intégrale de (1), il ne faut pas seulement que les g_λ satisfassent aux équations

$$\Sigma_\lambda \chi_{m\lambda}(\rho')g_\lambda = 0, \qquad (m=-\infty..+\infty) \tag{17}$$

mais aussi, puisque par hypothèse le point 1 est situé à l'intérieur de (RR'), que les valeurs absolues des g_λ ne dépassent pas toute limite finie; en d'autres termes, on doit avoir

$$|g_\lambda| < G, \qquad (\lambda=-\infty..+\infty) \tag{17'}$$

G désignant un nombre positif fini.

Or nous avons vu que le déterminant $D(\rho')$ du système (17) est de la forme normale pour toute valeur finie de ρ'; pour trouver les valeurs des g_λ nous pouvons, par conséquent, avoir recours aux théorèmes du § 2.

Pour que le système (17, 17') ait une solution, il faut que la valeur du déterminant

$$[\chi_{ik}(\rho')]_{i,k=-\infty..+\infty} = D(\rho')$$

soit nulle.

Premier cas: ρ' est une racine *simple* de $D(\rho)$. Parmi les mineurs du premier ordre, il existe au moins un qui n'est pas nul pour $\rho = \rho'$; si $\binom{i_1}{k_1}$ est ce mineur et qu'on pose

$$\binom{i_1}{k_1} g_\lambda(\rho) = \binom{i_1}{\lambda} g_{k_1}(\rho),$$

les quantités $g_\lambda(\rho')$ représenteront la solution du système (17), l'inconnu $g_{k_1}(\rho')$ restera indéterminé; et la série $\Sigma_\lambda g_\lambda(\rho')x^{\rho'+\lambda}$, convergeant en dedans de (RR') (n° 22) et n'étant point identiquement nulle, représentera une intégrale de l'équation (1).

Second cas: ρ' est une racine multiple d'ordre μ $(\mu > 1)$ de $D(\rho)$. Soient

$$\binom{i_1}{k_1}, \binom{i_1\ i_2}{k_1\ k_2}, \ldots \binom{i_1\ ..\ i_r}{k_1\ ..\ k_r}$$

un système de mineurs caractéristiques et

$$\mu\,,\,\mu_1\,,\,\mu_2\,,\,\ldots\,\mu_{r-1}$$

les nombres caractéristiques correspondant à la racine ρ'. En introduisant, pour abréger, les notations suivantes

$$\mu-\mu_1=\nu_1,\qquad \mu_1-\mu_2=\nu_2,\quad\ldots\quad \mu_{r-1}=\nu_r,$$

on a:

$$\mu\geqq r;\qquad \mu>\mu_1>\ldots>\mu_{r-1};\qquad \nu_1\geqq\nu_2\geqq\ldots\geqq\nu_r.$$

La solution du système (17) est donnée par les relations

$$\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r\end{pmatrix}_1 g_\lambda = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ \lambda & k_2 & \ldots & k_r\end{pmatrix}_1 g_{k_1} + \ldots + \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} & \lambda\end{pmatrix}_1 g_{k_r}, \atop {\scriptstyle (\lambda=-\infty\,..+\infty)}$$

le signe 1 indiquant les valeurs que prennent les mineurs pour $\rho=\rho'$, et $g_{k_1}, g_{k_2}, \ldots g_{k_r}$ désignant des constantes arbitraires. La série $\sum_\lambda g_\lambda x^{\rho'+\lambda}$ ainsi obtenue converge à l'intérieur de (RR'); en effet, cette série est une somme de déterminants infinis qui s'obtiennent en remplaçant dans certains mineurs les éléments de certaines lignes par les puissances de x.

Donc, cette série représente une intégrale de (1) et, puisqu'elle contient r constantes arbitraires, il existe r intégrales linéairement indépendantes de (1) de la forme

$$x^{\rho'}\left|\mathfrak{P}(x)+\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right|,$$

l'expression entre les crochets désignant une série procédant selon les puissances entières positives et négatives de x et convergeant en dedans de (RR'). Donc, dans le cas particulier où $r=\mu$, le nombre des intégrales ainsi obtenues est égal à l'ordre de multiplicité de la racine ρ'.

Considérons le cas général: $r\leqq\mu$. Posons

$$g_{1\lambda}(\rho)=c_{11}\begin{pmatrix} i_1\\ \lambda\end{pmatrix},$$

$$y_1(x\,,\rho)=\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{1\lambda}(\rho)x^{\rho+\lambda},$$

c_{11} désignant une constante arbitraire; en remplaçant y par $y_1(x, \rho)$ dans l'expression $P(y)$, on trouve

$$P(y_1(x, \rho)) = \sum_m G_m(\rho) x^{\rho+m-n}$$

où

$$G_m(\rho) = \varphi(\rho + m) g_{1m}(\rho) + \sum_\lambda' A_{m\lambda} g_{1\lambda}(\rho)$$
$$= \frac{1}{h_m(\rho)} \sum_\lambda \chi_{m\lambda}(\rho) g_{1\lambda}(\rho);$$

en remarquant qu'on a

$$\sum \binom{i_1}{\lambda} \chi_{m\lambda} = \begin{cases} D(\rho), & \text{si } m = i_1 \\ 0 \quad , & \text{si } m \gtrless i_1 \end{cases}$$

cette égalité prend la forme

$$P(y_1(x, \rho)) = c_{11} \frac{D(\rho)}{h_{i_1}(\rho)} x^{\rho+i_1-n};$$

puisque les fonctions $h_m(\rho)$ n'ont pas de zéros, on voit que ρ' est une racine multiple d'ordre μ du second membre. On en conclut que les fonctions

$$P(y_1(x, \rho)), \ \frac{\partial}{\partial\rho} P(y_1(x, \rho)), \ \ldots \ \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial\rho^{\mu-1}} P(y_1(x, \rho))$$

ou, ce qui revient au même,

$$P(y_1), \ P\left(\frac{\partial y_1}{\partial\rho}\right), \ \ldots \ P\left(\frac{\partial^{\mu-1} y_1}{\partial\rho^{\mu-1}}\right)$$

s'évanouissent pour $\rho = \rho'$; en d'autres termes, si l'on pose

$$\frac{\partial^\nu y_1(x, \rho)}{\partial\rho^\nu} = y_1^{(\nu)}(x, \rho),$$

les fonctions $y_1(x, \rho')$, $y_1'(x, \rho')$, .. $y_1^{(\mu-1)}(x, \rho')$ satisferont à l'équation (1).

Si $\mu_1 = 0$, on aura $g_{1k_1}(\rho') \neq 0$ et les μ intégrales que nous avons obtenues ne seront pas identiquement nulles. Si $\mu_1 > 0$, les fonctions $y_1(x, \rho')$, $y_1'(x, \rho')$, .. $y_1^{(\mu_1-1)}(x, \rho')$ seront identiquement égales à zéro mais $y_1^{(\mu_1)}(x, \rho)$ ne s'évanouira pas identiquement pour $\rho = \rho'$.

La série $y_1(x, \rho)$ étant par rapport à ρ uniformément convergente en dedans de tout domaine fini (n° 22), on obtiendra ses dérivées successives en la différentiant terme par terme; et les séries ainsi obtenues convergeront aussi uniformément en dedans de tout domaine fini. Donc, en effectuant les différentiations, on trouve que les séries

$$
(\mathrm{I}') \quad \left\{
\begin{aligned}
y_{1.1} &= \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{1\lambda}^{(\mu_1)}(\rho')\, x^{\rho'+\lambda} \\
y_{1.2} &= \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[g_{1\lambda}^{(\mu_1+1)}(\rho') + \frac{\mu_1+1}{\underline{|1}}\, g_{1\lambda}^{(\mu_1)}(\rho') \log x \right] x^{\rho'+\lambda} \\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
y_{1.\nu_1} &= \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[g_{1\lambda}^{(\mu-1)}(\rho') + \frac{\mu-1}{\underline{|1}}\, g_{1\lambda}^{(\mu-2)}(\rho') \log x + \ldots \right. \\
&\qquad \left. \ldots + \frac{(\mu-1)\ldots(\mu_1+1)}{\underline{|\nu_1-1}}\, g_{1\lambda}^{(\mu_1)}(\rho') (\log x)^{\nu_1-1} \right] x^{\rho'+\lambda}
\end{aligned}
\right.
$$

représentent à l'intérieur de (RR') certaines intégrales de l'équation (1). $y_{1.1}$ n'est pas identiquement nulle et, dans chaque intégrale $y_{1.\nu}$ $(1 < \nu \leqq \nu_1)$, la plus haute puissance de $\log x$, $(\log x)^{\nu-1}$, se trouve multipliée par $y_{1.1}$ et par un nombre entier qui n'est pas nul; donc ces integrales $y_{1.1}, y_{1.2}$, .. $y_{1.\nu_1}$ sont linéairement indépendantes.

Soient c_{21}, c_{22} deux constantes arbitraires et posons

$$
g_{2\lambda}(\rho) = c_{21} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ \lambda & k_2 \end{pmatrix} + c_{22} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & \lambda \end{pmatrix},
$$

$$
y_2(x, \rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{2\lambda}(\rho)\, x^{\rho+\lambda};
$$

puisqu'on a identiquement

$$\sum_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ \lambda & k_2 \end{pmatrix} \chi_{m\lambda} = \begin{cases} + \begin{pmatrix} i_2 \\ k_2 \end{pmatrix}, & \text{si } m = i_1 \\ - \begin{pmatrix} i_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, & \text{si } m = i_2 \\ \text{o} \quad, & \text{si } m \gtrless i_1 , i_2 \end{cases}$$

$$\sum_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & \lambda \end{pmatrix} \chi_{m\lambda} = \begin{cases} - \begin{pmatrix} i_2 \\ k_1 \end{pmatrix}, & \text{si } m = i_1 \\ + \begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, & \text{si } m = i_2 \\ \text{o} \quad, & \text{si } m \gtrless i_1 , i_2 \end{cases}$$

on obtiendra, en posant

$$G_{i_1}(\rho) = + c_{21} \begin{pmatrix} i_2 \\ k_2 \end{pmatrix} - c_{22} \begin{pmatrix} i_2 \\ k_1 \end{pmatrix},$$

$$G_{i_2}(\rho) = - c_{21} \begin{pmatrix} i_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + c_{22} \begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix},$$

l'identité suivante:

$$P(y_2(x , \rho)) = \frac{G_{i_1}(\rho)}{h_{i_1}(\rho)} x^{\rho + i_1 - n} + \frac{G_{i_2}(\rho)}{h_{i_2}(\rho)} x^{\rho + i_2 - n}.$$

En remarquant que le second membre de cette égalité s'annulle d'ordre μ_1 au moins pour $\rho = \rho'$, tandis que $y_2(x , \rho)$ ne s'annulle que d'ordre μ_2, et en raisonnant comme tout à l'heure, on voit que les séries

$$(\text{I}'') \quad \begin{cases} y_{2.1} = \sum\limits_{\lambda = -\infty}^{+\infty} g_{2\lambda}^{(\mu_1)}(\rho')\, x^{\rho' + \lambda} \\ y_{2.2} = \sum\limits_{\lambda = -\infty}^{+\infty} \left[g_{2\lambda}^{(\mu_2 + 1)}(\rho') + \dfrac{\mu_2 + 1}{\underline{|1}} g_{2\lambda}^{(\mu_2)}(\rho') \log x \right] x^{\rho' + \lambda} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{2.\nu_2} = \sum\limits_{\lambda = -\infty}^{+\infty} \left[g_{2\lambda}^{(\mu_1 - 1)}(\rho') + \dfrac{\mu_1 - 1}{\underline{|1}} g_{2\lambda}^{(\mu_1 - 2)}(\rho') \log x + \dots \right. \\ \qquad \left. \dots + \dfrac{(\mu_1 - 1) \dots (\mu_2 + 1)}{\underline{|\nu_2 - 1}} g_{1\lambda}^{(\mu_2)}(\rho') (\log x)^{\nu_2 - 1} \right] x^{\rho' + \lambda} \end{cases}$$

représentent ν_2 intégrales linéairement indépendantes.

Jusqu'ici nous avons obtenu ν_1 intégrales: $y_{1.1}, y_{1.2}, \ldots y_{1.\nu_1}$ et ν_2 intégrales: $y_{2.1}, y_{2.2}, \ldots y_{2.\nu_2}$; en procédant de la même manière, nous obtiendrons successivement $\nu_3, \nu_4, \ldots$ intégrales. Enfin, soient $c_{r1}, c_{r2}, \ldots c_{rr}$ r constantes arbitraires et posons

$$g_{r\lambda}(\rho) = c_{r1}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ \lambda & k_2 & \ldots & k_r \end{pmatrix} + \ldots + c_{rr}\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} & \lambda \end{pmatrix},$$

$$y_r(x, \rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{r\lambda}(\rho)\, x^{\rho+\lambda};$$

en tenant compte de ce que chaque série de la forme

$$\sum\nolimits_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{s-1} & i_s & i_{s+1} & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{s-1} & \lambda & k_{s+1} & \ldots & k_r \end{pmatrix} \chi_{m\lambda} \qquad {\scriptstyle (s=1,2,\ldots r)}$$

est identiquement nulle si $m \gtrless i_1 \ldots i_r$, mais égal à un certain mineur d'ordre $r - 1$ si m est égal à l'un des indices $i_1 \ldots i_r$, on obtient

$$P(y_r(x, \rho)) = \frac{G_{i_1}(\rho)}{h_{i_1}(\rho)} x^{\rho+i_1-n} + \ldots + \frac{G_{i_r}(\rho)}{h_{i_r}(\rho)} x^{\rho+i_r-n},$$

où $G_{i_1}(\rho), G_{i_2}(\rho), \ldots G_{i_r}(\rho)$ désignent des fonctions linéaires à coefficients constants de certains mineurs d'ordre $r - 1$; et puisque, pour tous ces mineurs, ρ' est une racine multiple d'ordre μ_{r-1} au moins, tandis que $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$ ne s'annulle pas, on arrive, en raisonnant comme plus haut, au résultat que les séries

$$(\mathrm{I}^{(r)}) \qquad \begin{cases} y_{r.1} = \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{r\lambda}(\rho')\, x^{\rho'+\lambda} \\ y_{r.2} = \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} [g'_{r\lambda}(\rho') + g_{r\lambda}(\rho') \log x]\, x^{\rho'+\lambda} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{r.\nu_r} = \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Big[g_{r\lambda}^{(\mu_{r-1}-1)}(\rho') + \frac{\mu_{r-1} - 1}{\underline{|1}} g_{r\lambda}^{(\mu_{r-1}-2)}(\rho') \log x + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + g_{r\lambda}(\rho')(\log x)^{\mu_{r-1}-1} \Big] x^{\rho'+\lambda} \end{cases}$$

représentent ν_r intégrales linéairement indépendantes.

En résumé, nous avons obtenu $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = \mu$ intégrales partagées entre r sous-groupes:

$$y_{k.1}\,,\; y_{k.2}\,,\; \ldots\; y_{k.\nu_k} \qquad\qquad (k=1,2,\ldots r)$$

et telles que les ν_k intégrales du $k^{\text{ième}}$ sous-groupe sont linéairement indépendantes. Pour que *toutes* les μ intégrales soient linéairement indépendantes, il suffit de fixer les valeurs des constantes arbitraires comme il suit:

$$c_{kk} \neq 0; \qquad c_{k1} = c_{k2} = \ldots = c_{kk-1} = 0. \qquad\qquad (k=1,2,\ldots r)$$

En effet, dans ces conditions, on voit d'abord que les intégrales

$$y_{1.1}\,,\; y_{2.1}\,,\; \ldots\; y_{r.1}$$

sont linéairement indépendantes; car, si l'on avait une relation linéaire homogène à coefficients constants:

$$K_1 y_{1.1} + K_2 y_{2.1} + \ldots + K_r y_{r.1} = 0,$$

les égalités suivantes devraient, entre autres, avoir lieu:

$$(18) \qquad \begin{aligned} K_1[y_{1.1}]_{k_1} + K_2[y_{2.1}]_{k_1} + \ldots + K_r[y_{r.1}]_{k_1} &= 0, \\ K_1[y_{1.1}]_{k_2} + K_2[y_{2.1}]_{k_2} + \ldots + K_r[y_{r.1}]_{k_2} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_1[y_{1.1}]_{k_r} + K_2[y_{2.1}]_{k_r} + \ldots + K_r[y_{r.1}]_{k_r} &= 0, \end{aligned}$$

$[y_{\nu.1}]_{k_s}$ désignant le coefficient de $x^{\rho'+k_s}$ dans la série $y_{\nu.1}$; et puisqu'on a

$$[y_{\nu.1}]_{k_s} \begin{cases} = 0 & \text{pour} \quad s < \nu, \\ \neq 0 & \text{pour} \quad s = \nu, \end{cases}$$

de sorte que le déterminant du système (18) est différent de zéro, ce système ne saurait être satisfait que pour

$$K_1 = K_2 = .. = K_r = 0.$$

De plus, dans chacune des μ intégrales que nous avons obtenues, le coefficient de la plus haute puissance de $\log x$ est égal à l'une des intégrales $y_{1.1}, y_{2.1}, .. y_{r.1}$ multipliée par un facteur constant; donc toute fonction linéaire homogène des μ intégrales $y_{k.s}$:

$$u = \sum_{k,s} K_{k.s} y_{k.s}$$

peut s'écrire comme une fonction entière rationnelle de $\log x$ dans laquelle le coefficient de la plus haute puissance de $\log x$ est linéaire et homogène par rapport aux fonctions $y_{1.1}, y_{2.1}, .. y_{r.1}$; or on sait qu'une fonction u de cette nature ne saurait être identiquement nulle à moins que tous ses coefficients ne soient identiquement nuls. Donc, le coefficient de la plus haute puissance de $\log x$ devant être identiquement nul, il faut donner à certaines des constantes $K_{k.s}$ la valeur nulle; dans la forme nouvelle que prend la fonction u, le coefficient de la plus haute puissance de $\log x$ devient, comme il est facile de le voir, linéaire et homogène par rapport aux fonctions $y_{1.1}, y_{2.1}, .. y_{r.1}$, ce qui nous oblige à remplacer de nouveau certaines constantes $K_{k.s}$ par zéro, etc.

Donc, à la racine multiple d'ordre μ correspondent μ intégrales linéairement indépendantes: $y_{1.1} .. y_{r.\nu_r}$; la même chose ayant lieu pour chaque racine de $D(\rho)$ et le nombre des zéros incongruents (en tenant compte de leur ordre de multiplicité) étant égal à n, on voit qu'on obtient par cette méthode n intégrales linéairement indépendantes, ou, en d'autres termes, un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle proposée.

Comme nous avons vu, les intégrales correspondant à une racine multiple ρ' se partagent entre un certain nombre de sous-groupes. Voyons maintenant comment se comportent les intégrales d'un de ces sous-groupes lorsque la variable indépendante décrit à l'intérieur du domaine (RR') un chemin fermé quelconque. Désignons par $\bar{y}$ la valeur qu'aquiert une fonction y de x après que x a décrit complètement et une seule fois un chemin L, qui est contenu tout entier en dedans du domaine (RR') et qui ne se coupe pas soi-même. Pour abréger, désignons par $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\nu$ les intégrales appartenant à un sous-groupe de ν éléments; par les formules (I) on voit immédiatement qu'on aura:

$$
(19) \qquad \begin{aligned}
\bar{\eta}_1 &= \omega' \eta_1 \\
\bar{\eta}_2 &= \omega'(\gamma_{21}\eta_1 + \eta_2) \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\bar{\eta}_\nu &= \omega'(\gamma_{\nu 1}\eta_1 + \dots + \gamma_{\nu\,\nu-1}\eta_{\nu-1} + \eta_\nu),
\end{aligned}
$$

où $\omega' = e^{2\pi i \rho'}$ et où les coefficients $\gamma_{\alpha\beta}$ sont certains multiples de la quantité $2\pi i$ ou de ses puissances, lesquels seraient faciles à déterminer; en d'autres termes, les intégrales $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\nu$ subiront une substitution linéaire de la forme:

$$
(20) \qquad \begin{pmatrix}
\omega' \\
\omega'\gamma_{21}, \omega' \\
\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
\omega'\gamma_{\nu 1}, \omega'\gamma_{\nu 2}, \dots \omega'
\end{pmatrix}.
$$

En résumé, les résultats suivants se trouvent établis:

Soit (1) *une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions qui, à l'intérieur de l'anneau circulaire* (RR'), *peuvent être représentées par des séries convergentes procédant selon les puissances entières, positives et négatives, de* x*; soient* (3) *ces séries et formons le déterminant infini* $D(\rho)$*; soient* $\rho', \rho'', \dots \rho^{(p)}$ p *racines incongruentes de* $D(\rho)$ *d'ordre de multiplicité* $s', s'', \dots s^{(p)}$, *et soit* $s' + s'' + \dots + s^{(p)} = n$*; il existe* n *intégrales linéairement indépendantes de l'équation* (1) *qui, à l'intérieur du domaine* (RR'), *se partagent entre* p *groupes contenant respectivement* $s', s'', \dots s^{(p)}$ *intégrales et appartenant respectivement aux racines* $\rho', \rho'', \dots \rho^{(p)}$.

Soit ρ' *l'une desdites racines et* $s' = \mu$ *son ordre de multiplicité; soient*

$$\mu, \mu_1, \mu_2, \dots \mu_{r-1}$$

les nombres caractéristiques correspondant à la racine ρ' *et*

$$\binom{i_1}{k_1}, \binom{i_1 \;\; i_2}{k_1 \;\; k_2}, \dots \binom{i_1 \; \dots \; i_r}{k_1 \; \dots \; k_r}$$

un système de mineurs caractéristiques; les intégrales appartenant à la racine ρ' *se partageront entre* r *sous-groupes contenant respectivement* $\mu - \mu_1$, $\mu_1 - \mu_2, \ldots \mu_{r-1}$ *intégrales et se représenteront analytiquement par les formules* (I', I'', .. $\mathrm{I}^{(r)}$)*; ces formules font voir, de plus, que les intégrales d'un sous-groupe quelconque subissent une substitution linéaire de la forme* (20) *lorsque la variable indépendante décrit le chemin* L *à l'intérieur du domaine* (RR').

Si $\mu_1 = 0$, on doit avoir aussi $\mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_{r-1} = 0$ ou, ce qui est la même chose, $\nu_1 = \mu$, $\nu_2 = \nu_3 = \ldots = \nu_r = 0$. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, toutes les intégrales correspondant à la racine ρ' appartiendront à un seul sous-groupe. Donc:

Pour que les intégrales correspondant à la racine ρ' *forment un seul sous-groupe, il faut et il suffit qu'il existe un mineur du premier ordre qui ne s'annulle pas pour* $\rho = \rho'$ *ou, en d'autres termes, que* μ *soit le seul nombre caractéristique correspondant à cette racine.*

Parmi les intégrales appartenant à la racine ρ':

$$y_{1.1}, y_{1.2}, \ldots y_{1.\nu_1}; \quad y_{2.1}, y_{2.2}, \ldots y_{2.\nu_2}; \quad \ldots; \quad y_{r.1}, y_{r.2}, \ldots y_{r.\nu_r}$$

il n'y en a que r, savoir, $y_{1.1}, y_{2.1}, \ldots y_{r.\nu_r}$ qui ne contiennent pas de logarithmes; donc, pour que les logarithmes disparaissent de toutes les μ intégrales, il faut et il suffit que l'on ait $r = \mu$; mais puisquon a

$$\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \ldots \geqq \nu_r, \qquad \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = \mu,$$

l'égalité $r = \mu$ entraîne les relations suivantes:

$$\mu_1 = \mu - 1, \qquad \mu_2 = \mu - 2, \quad \ldots \quad \mu_{r-1} = \mu - r + 1 = 1;$$

donc:

Pour que les μ *intégrales appartenant à la racine* ρ' *ne contiennent pas de logarithmes, ou, ce qui revient au même, pour qu'il existe une intégrale de la forme*

$$y = x^{\rho'}\left[\mathfrak{P}(x) + \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

contenant μ constantes arbitraires, il faut et il suffit que les nombres caractéristiques correspondant à ρ' aient les valeurs:

$$\mu, \mu - 1, \mu - 2, \ldots 1.$$

25. Dans ce qui précède, nous avons supposé que l'équation différentielle proposée soit, par un changement convenable de variable indépendante, ramenée à une forme telle que les rayons de l'anneau circulaire (RR') remplissent les conditions

$$(21) \qquad R < 1 < R';$$

il est facile de voir que cette supposition n'est pas nécessaire. Soit, en effet,

$$(22) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + Q_2(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + Q_n(x)y = 0$$

l'équation donnée et supposons que les développements

$$Q_r(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \beta_{r\lambda} x^\lambda \qquad {\scriptstyle (r=2,3,\ldots n)}$$

soient valables à l'intérieur de l'anneau circulaire $(R_1 R_1')$, R_1 et R_1' désignant des nombres positifs quelconques; soit $R_1 < R_1'$ et posons

$$R = \sqrt{\frac{R_1}{R_1'}}, \qquad R' = \sqrt{\frac{R_1'}{R_1}}, \qquad K = \sqrt{R_1 R_1'}, \qquad \alpha_{r\lambda} = \beta_{r\lambda} K^{r+\lambda};$$

il est clair que les séries

$$P_r(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \alpha_{r\lambda} x^\lambda \qquad {\scriptstyle (r=2,3,\ldots n)}$$

convergeront en dedans de l'anneau circulaire (RR') et qu'on a $R < 1 < R'$; donc, en conservant les notations du n° 21, nous savons que la série $\sum_m \sum_\lambda' \chi_{m\lambda}$ converge absolument et uniformément à l'intérieur de tout domaine fini. Or, en désignant par $\bar\chi_{m\lambda}$ ce que devient $\chi_{m\lambda}$ en écrivant partout β au lieu de α, on aura

$$\chi_{m\lambda} = \bar\chi_{m\lambda} K^{m-\lambda}, \qquad \chi_{mm} = \bar\chi_{mm};$$

par conséquent (n° 17), le déterminant infini

$$\bar{D}(\rho) = [\bar{\chi}_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

converge absolument et uniformément à l'intérieur de tout domaine fini et l'on a

$$\bar{D}(\rho) = D(\rho).$$

De plus, d'après le n° 22 nous savons que la série $\sum_m \sum'_\lambda |\chi_{m\lambda} x^{m-\lambda}|$ converge par rapport à x en dedans du domaine (RR'); donc $\sum_m \sum'_\lambda |\bar{\chi}_{m\lambda} x^{m-\lambda}|$ converge en dedans du domaine $(R_1 R'_1)$. Donc, en remplaçant dans $\bar{D}(\rho)$ les éléments d'une ligne quelconque par les puissances de x, on obtient un déterminant qui, par rapport à x, converge en dedans de $(R_1 R'_1)$ et, par rapport à ρ, en dedans de tout domaine fini (n° 14).

De la même manière, on voit qu'aussi les autres résultats obtenus subsistent si l'on remplace partout les α par les β. Donc les théorèmes précédents subsistent pour le cas où les rayons de l'anneau circulaire considéré ne satisfont pas à la condition (21).

26. Pour appliquer ce qui précède à un exemple facile, considérons le cas particulier et bien connu où les $P_r(x)$, dans le voisinage du point $x = 0$, se présentent sous la forme

$$P_r(x) = x^{-r}\mathfrak{P}_r(x); \qquad (r=2,3,..n)$$

dans ce cas on a:

$$\alpha_{2,\lambda-2} = \alpha_{3,\lambda-3} = .. = \alpha_{n,\lambda-n} = 0, \qquad (\lambda=-1,-2,..-\infty)$$

d'où:

$$\psi_{ik}(\rho) = 0, \qquad \chi_{ik}(\rho) = 0 \quad (\text{pour } k > i),$$

$$\Omega(\rho) = [\psi_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty} = 1, \qquad D(\rho) = [\chi_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty} = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(\rho-\rho_\nu)\pi}{\pi},$$

$$\rho^{(\nu)} = \rho_\nu. \qquad (\nu=1,2,..n)$$

Il est clair d'abord qu'on aura identiquement

$$\binom{i}{k} = 0 \quad \text{pour} \quad k < i;$$

plus généralement, en désignant par $i_1, i_2, \ldots i_\nu$ et $k_1, k_2, \ldots k_\nu$ des entiers quelconques remplissant les inégalités

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_\nu,$$

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_\nu,$$

on aura identiquement

$$\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pour} \quad k_1 < i_1;$$

en effet, on parvient à cette identité en appliquant au cas considéré le théorème généralisé de LAPLACE (n° 7).

Par là, en se rappelant la forme donnée aux intégrales dans le n° 24, on retrouve le théorème de M. FUCHS: toutes les intégrales sont *régulières* dans le voisinage du point $x = 0$.

Séparons les racines de $\varphi(\rho)$ en groupes tels que chacun d'eux comprenne, et comprenne seulement, toutes celles des racines dont les différences réciproques soient ou nulles ou entières. Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\mu$ les racines de l'un de ces groupes, rangées dans un ordre tel que l'on ait

$$\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_\alpha; \quad \rho_{\alpha+1} = \rho_{\alpha+2} = \ldots = \rho_\beta; \quad \ldots; \quad \rho_{\lambda+1} = \rho_{\lambda+2} = \ldots = \rho_\mu$$

$$\rho_1 = \rho_{\alpha+1} - a = \rho_{\beta+1} - b = \ldots = \rho_{\lambda+1} - l$$

$$a < b < \ldots < l,$$

$a, b, \ldots l$ désignant certains nombres entiers et *positifs*. Il est clair que, parmi les fonctions $\varphi(\rho + m)$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, ..)$, il n'y a que les suivantes:

$$\varphi(\rho), \varphi(\rho + a), \varphi(\rho + b), .. \varphi(\rho + l)$$

qui s'annullent pour $\rho = \rho_1$. On en conclut que le mineur

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & .. & l \\ 0 & a & b & .. & l \end{pmatrix} = \frac{\Pi(\rho)}{\chi_{00}\chi_{aa}\chi_{bb} .. \chi_{ll}}$$

est, pour $\rho = \rho_1$, différent de zéro. Donc, pour trouver les mineurs caractéristiques correspondant à la racine ρ', on n'a qu'à examiner ceux des mineurs $\begin{pmatrix} \iota_1 & .. & \iota_\nu \\ x_1 & .. & x_\nu \end{pmatrix}$ dont les indices $\iota_1 .. \iota_\nu$ et $x_1 .. x_\nu$ sont des nombres dans la suite $0, a, b, .. l$. Donc, *a fortiori*, il suffit d'examiner les mineurs dont les indices ι et x sont contenus dans la suite $0, 1, 2, .. l$.

Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} \chi_{00} & \chi_{01} & .. & \chi_{0l} \\ \chi_{10} & \chi_{11} & .. & \chi_{1l} \\ . & . & .. & . \\ \chi_{l0} & \chi_{l1} & .. & \chi_{ll} \end{vmatrix}$$

et désignons, d'une manière générale, par

$$\begin{vmatrix} \iota_1 & .. & \iota_\nu \\ x_1 & .. & x_\nu \end{vmatrix}$$

le mineur de Δ d'ordre ν qui s'obtient en remplaçant dans Δ chacun des éléments $\chi_{\iota_1 x_1} .. \chi_{\iota_\nu x_\nu}$ par l'unité et tout autre élément des lignes $\iota_1 .. \iota_\nu$ ou des colonnes $x_1 .. x_\nu$ par zéro.

Dans le cas particulier dont il s'agit, on a (n° 7, (f)):

$$\begin{pmatrix} \iota_1 & .. & \iota_\nu \\ x_1 & .. & x_\nu \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \iota_1 & .. & \iota_\nu \\ x_1 & .. & x_\nu \end{vmatrix} \frac{\Pi(\rho)}{\chi_{00}\chi_{11} .. \chi_{ll}},$$

les ι et les $\varkappa$ étant des nombres quelconques dans la suite $0, 1, \ldots l$ et ν étant au plus égal à l. Donc, pour trouver les indices qui définissent les mineurs caractéristiques correspondant à ρ_1, il suffit d'envisager les mineurs du déterminant fini Δ. Supposons que le mineur $\begin{vmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{vmatrix}$ soit différent de zéro pour $\rho = \rho_1$; soit $(\rho - \rho_1)^{\mu_1}$ la plus haute puissance de $\rho - \rho_1$ qui divise tous les mineurs de Δ d'ordre 1, $(\rho - \rho_1)^{\mu_2}$ la plus haute puissance de $\rho - \rho_1$ qui divise tous les mineurs de Δ d'ordre 2, et ainsi de suite. Les nombres $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{r-1}$ seront les nombres caractéristiques correspondant à la racine ρ_1, et il sera toujours possible de ranger les indices $i_1 \ldots i_r$ et $k_1 \ldots k_r$ dans un ordre tel que

$$(\rho - \rho_1)^{\mu_1}, \ (\rho - \rho_1)^{\mu_2}, \ \ldots \ (\rho - \rho_1)^{\mu_{r-1}}$$

soient respectivement les plus hautes puissances de $\rho - \rho_1$ qui divisent les mineurs suivants

$$\begin{vmatrix} i_1 \\ k_1 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix}, \ \ldots \ \begin{vmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \ \ldots \ \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$$

forment un système de mineurs caractéristiques correspondant à la racine ρ_1. Par là la séparation des intégrales en sous-groupes se trouve entièrement effectuée.

Ajoutons quelques remarques. Les entiers $i_1 \ldots i_r$ et $k_1 \ldots k_r$ étant certains nombres dans la suite $0, 1, \ldots l$, on sait que chaque déterminant de la forme

$$\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & \ldots & i_p \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & \lambda & k_{\nu+1} & \ldots & k_p \end{pmatrix} \qquad (p \leqq r)$$

est identiquement nul si $\lambda < 0$. Ceci posé, les formules (I'), (I''), $\ldots$ $(\mathrm{I}^{(r)})$ (n° 24) mettent immédiatement en évidence qu'il existe r intégrales linéairement indépendantes qui, dans le voisinage du point $x = 0$, se présentent sous la forme

$$x^{\rho_1}(g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots);$$

je dis qu'il existe parmi ces intégrales au moins une pour laquelle on a

$$g_0 = g_1 = \ldots = g_{l-1} = 0, \qquad g_l \neq 0.$$

En effet, les indices $i_1 \ldots i_r$, $k_1 \ldots k_r$ peuvent être choisis de la manière suivante. Soit i_1 le plus petit des nombres $0, 1, \ldots l$ tel qu'il existe dans la suite

$$\begin{vmatrix} i_1 \\ k \end{vmatrix} \qquad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots l)}$$

au moins un mineur pour lequel ρ' est une racine précisément d'ordre μ_1; soit $\begin{vmatrix} i_1 \\ k_1 \end{vmatrix}$ *le premier* mineur dans cette suite qui satisfait à cette condition. Soit i_2 le plus petit des nombres $0, 1, \ldots l$ tel qu'il existe dans la suite

$$\begin{vmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k \end{vmatrix} \qquad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots l)}$$

au moins un mineur pour lequel ρ_1 est une racine précisément d'ordre μ_2; soit $\begin{vmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix}$ le premier mineur qui satisfait à cette condition, et continuons ainsi de proche en proche. Parmi les nombres $k_1, k_2, \ldots k_r$ obtenus par cette méthode, il existe un qui est égal à l; en effet, si ces nombres etaient tous plus petits que l, le mineur $\begin{vmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{vmatrix}$ ne saurait être différent de zéro pour $\rho = \rho_1$. Soit donc $k_\nu = l$ $(\nu \leqq r)$, le mineur $\begin{vmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{vmatrix}$ sera le premier dans la suite

$$\begin{vmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & k \end{vmatrix} \qquad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots l)}$$

qui, pour $\rho = \rho_1$, devient nul précisément d'ordre μ_ν; donc l'intégrale désignée par $y_{\nu.1}$ dans le n° 24 se présentera nécessairement sous la forme

$$y = x^{\rho_1+l}\{c_0 + x\mathfrak{P}(x)\}, \qquad c_0 \neq 0$$

et la proposition se trouve démontrée.

Soient

$$\alpha', \alpha'', \ldots$$

les nombres $\alpha, \beta - \alpha, \ldots$, rangés par ordre de grandeur décroissante; puisqu'il existe un mineur du premier ordre qui, pour $\rho = \rho_1$, ne s'annulle que d'ordre $\mu - \alpha'$, on doit avoir: $\mu_1 \leqq \mu - \alpha'$; et de même, puisqu'il existe un mineur du deuxième ordre ne s'annullant que d'ordre $\mu - \alpha' - \alpha''$, on a $\mu_2 \leqq \mu - \alpha' - \alpha''$, et ainsi de suite. Or, nous savons que, pour que les intégrales appartenant à la racine ρ_1 ne contiennent point de logarithmes, il faut et il suffit que l'on ait

$$r = \mu, \qquad \mu - \mu_1 = \mu_1 - \mu_2 = \ldots = \mu_{r-1} = 1;$$

donc, pour que des logarithmes n'apparaîtront pas, il faut qu'on ait $\alpha' = 1$, c'est-à-dire

$$\alpha = \beta - \alpha = \gamma - \beta = \ldots = \mu - \lambda = 1;$$

en d'autres termes, des logarithmes apparaîtront toujours dans certaines intégrales si la fonction $\varphi(\rho)$ a des racines multiples.

Enfin, voyons quelle est la condition pour que les intégrales appartenant à la racine ρ_1 forment un seul sous-groupe. Cette condition est, nous le savons : $\mu_1 = 0$; or il est clair que tous ceux des mineurs $\binom{i}{k}$ dont l'indice $k \geqq i > 0$, s'évanouissent pour $\rho = \rho_1$, puisque, dans chacun d'eux, l'élément χ_{00} entre comme facteur; et, parmi les mineurs $\binom{0}{k}$ où $0 \leqq k \leqq l$, $\binom{0}{l}$ est le seul qui *peut* être différent de zéro, puisque, dans tous les autres, l'élément χ_{ll} entre comme facteur; donc, pour que les intégrales appartenant à la racine ρ_1 forment un seul sous-groupe, il faut et il suffit que le mineur $\binom{0}{l}$, ou, ce qui revient au même, le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} \chi_{10} & \chi_{11} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_{l-1,0} & \chi_{l-1,1} & \cdot\cdot & \chi_{l-1,l-1} \\ \chi_{l0} & \chi_{l1} & \cdot\cdot & \chi_{l,l-1} \end{vmatrix}$$

soit, pour $\rho = \rho_1$, différent de zéro.[1]

§ 4. *Sur les invariants des équations différentielles linéaires.*

27. Voyons d'abord comment se rattachent les résultats précédents à la théorie ordinaire des équations différentielles linéaires. Soient y_1, $y_2, \ldots y_n$ un système fondamental d'intégrales de l'équation (1); si x décrit le chemin L, ces intégrales subiront une substition linéaire de la forme

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdot\cdot & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdot\cdot & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdot\cdot & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

et l'équation fondamentale de M. FUCHS relative à l'anneau circulaire (RR') prendra la forme

$$(23) \qquad F(\omega) \equiv \begin{vmatrix} \beta_{11} - \omega & \beta_{12} & \cdot\cdot & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} - \omega & \cdot\cdot & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdot\cdot & \beta_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

[1] Cf. FUCHS, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten,* Journal für Mathematik, t. 68; FROBENIUS, *Über die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen,* même journal, t. 76.

Cherchons la relation entre cette fonction $F(\omega)$ et le déterminant $D(\rho)$ étudié dans le paragraphe précédent. En posant

$$e^{2\pi i\rho} = \omega, \qquad e^{2\pi i\rho^{(\lambda)}} = \omega^{(\lambda)},$$

l'égalité (15) (n° 21) devient

$$D(\rho) \,.\, K \,.\, e^{n\pi i\rho} = (\omega - \omega')(\omega - \omega'') \,.\,.\, (\omega - \omega^{(n)}),$$

$$K = (2\pi i)^n e^{\frac{n(n-1)}{2}\pi i} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (2\pi i)^n.$$

Or, en choisissant pour $y_1, y_2, \ldots y_n$ le système fondamental obtenu dans le n° 24, on a, d'après les formules (19),

$$(24) \qquad F(\omega) = (\omega' - \omega)(\omega'' - \omega) \,.\,.\, (\omega^{(n)} - \omega),$$

d'où

$$(25) \qquad F(\omega) = (-1)^n K e^{n\pi i\rho} D(\rho).$$

Cette formule est la relation cherchée; elle fait voir, en particulier, que les égalités $F(e^{2\pi i\rho}) = 0$ et $D(\rho) = 0$ ont les mêmes racines, ce qu'on aurait pu prévoir.

Le déterminant de la substitution linéaire que subit un système fondamental d'intégrales en faisant parcourir à x le chemin L est, comme on sait, indépendant du choix de système fondamental; or en choisissant celui obtenu dans le n° 24, le déterminant substitutionnel devient égal au produit

$$\omega'\omega'' \,.\,.\, \omega^{(n)} = e^{2\pi i \Sigma\rho^{(\nu)}}$$

dont la valeur est 1 (voir formule 16, n° 22). Donc, si x parcourt le chemin L, n intégrales linéairement indépendantes subiront toujours une substitution linéaire dont le déterminant est égal à l'unité.

Soient $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ les intégrales appartenant à l'un des sous-groupes $\mathrm{I}', \mathrm{I}'', \ldots \mathrm{I}^{(r)}$. Il est facile de voir qu'en remplaçant chaque intégrale y_m par une certaine fonction linéaire homogène et à coefficients constants de

$y_1, y_2, \ldots y_m$, on obtient un sous-groupe d'intégrales $u_1, u_2, \ldots u_\nu$ telles qu'on ait[1]

$$\bar{u}_1 = \omega' u_1, \qquad \bar{u}_2 = \omega'(u_1 + u_2). \quad . \; . \quad \bar{u}_{\nu-1} = \omega'(u_{\nu-1} + u_\nu);$$

donc il existe un système fondamental d'intégrales pour lequel les coefficients substitutionnels β_{ik} prennent les valeurs

$$(26) \qquad \begin{aligned} &\beta_{ik} = 0, \quad \text{si } k > i; \qquad \beta_{ik} = 0, \quad \text{si } k < i - 1; \\ &\beta_{11} = \beta_{22} = \ldots = \beta_{\mu\mu} = \omega'; \ldots \\ &\beta_{21} = \beta_{32} = \ldots = \beta_{\nu_1\nu_1-1} = \omega'; \ldots \\ &\beta_{\nu_1+1\nu_1} = \beta_{\nu_2+1\nu_2} = \ldots = \beta_{\nu_r+1\nu_r} = 0; \ldots \end{aligned}$$

Ceci posé, on démontre aisément que les *diviseurs élémentaires*[2] du déterminant $F(\omega)$, relatifs au facteur $\omega' - \omega$, sont les suivants:

$$(\omega' - \omega)^{\nu_1}, \; (\omega' - \omega)^{\nu_2}, \; \ldots \; (\omega' - \omega)^{\nu_r};$$

en effet, en désignant par les symboles

$$\begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{bmatrix}$$

les mineurs d'ordre ν de $F(\omega)$ et en introduisant les valeurs (26) des constantes β_{ik}, on voit que tous les mineurs du premier ordre sont divisibles par $\omega' - \omega$ μ_1 fois au moins, mais que le mineur suivant:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \nu_1 \end{bmatrix} = (-\omega')^{\nu_1 - 1} \frac{F(\omega)}{(\omega' - \omega)^{\nu_1}}$$

est divisible par $\omega' - \omega$ *précisément* μ_1 fois; on voit de plus que tous les

---

[1] Cf. HAMBURGER, *Bemerkung über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten,* Journal für Mathematik, t. 76.

[2] WEIERSTRASS, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen,* Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868.

mineurs du deuxième ordre sont divisibles par $\omega' - \omega$ μ_2 fois au moins, mais que le suivant:

$$\begin{bmatrix} 1 & \nu_1 + 1 \\ \nu_1 & \nu_1 + \nu_2 \end{bmatrix} = (-\omega')^{\nu_1 - 1}(-\omega')^{\nu_2 - 1}\frac{F(\omega)}{(\omega' - \omega)^{\nu_1}(\omega' - \omega)^{\nu_2}}$$

est divisible *précisément* μ_2 fois; et ainsi de suite.

Or on sait que les diviseurs élémentaires du déterminant $F(\omega)$ sont absolument indépendants du choix de système fondamental d'intégrales. Donc, le système fondamental d'intégrales obtenu dans le § 3 se divise en sous-groupes de la manière prévue par la théorie ordinaire.[1]

28. Par la formule (25) on voit que l'étude de l'équation fondamentale de M. Fuchs se ramène à l'étude du déterminant infini $D(\rho)$. Dans le n° 21 nous avons vu que ce déterminant est une fonction entière de ρ si les séries $P_r(x)$ convergent à l'intérieur d'un anneau circulaire (RR') remplissant la condition (2); et dans le n° 25 nous avons étendu ce théorème au cas général où les $P_r(x)$ convergent à l'intérieur d'un anneau circulaire quelconque. Il reste à rechercher maintenant quel est le caractère de la fonction $D(\rho)$ par rapport aux paramètres $\alpha_{r\lambda}$.

Considérons d'abord le cas où la condition (2) se trouve satisfaite, et commençons par l'étude du déterminant $\Omega(\rho)$. Si toutes les racines $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ de $\varphi(\rho)$ sont incongruentes, nous avons vu (note citée p. 59) que ce déterminant peut être représenté par la formule

$$\Omega(\rho) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda \pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi$$

où les M_λ sont certaines constantes qui vérifient la relation

$$\sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda = 0.$$

[1] Outre la note de M. Hamburger, voir: Stickelberger, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen* (Akad. Antrittsschrift), Leipzig, Teubner, 1881; Casorati, *Sur la distinction des intégrales en sous-groupes,* Comptes rendus des séances de l'académie des sciences de Paris, Janvier 1881.

Considérons maintenant le cas général où $\rho_1, \rho_2, .. \rho_{n'}$ $(n' \leqq n)$ sont les racines incongruentes de $\varphi(\rho)$; soit s_λ le nombre des racines de $\varphi(\rho)$ congruentes à ρ_λ; on aura

$$s_1 + s_2 + .. + s_{n'} = n.$$

Le point $\rho = \rho_\lambda$ étant pour $\Omega(\rho)$ un pôle d'ordre de multiplicité au plus égal à s_λ, on pourra écrire, dans un certain voisinage de ce point,

$$\Omega(\rho) = \mathfrak{P}(\rho - \rho_\lambda) + \frac{M_\lambda}{\rho - \rho_\lambda} + \sum_{\nu=1}^{s_\lambda - 1} M_{\lambda\nu} \frac{d^\nu}{d\rho^\nu}\left(\frac{1}{\rho - \rho_\nu}\right);$$

donc $\Omega(\rho)$ se représente par la formule suivante:

$$(27) \quad \Omega(\rho) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{n'} \left[M_\lambda \pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi + \sum_{\nu=1}^{s_\lambda - 1} M_{\lambda\nu} \frac{d^\nu}{d\rho^\nu}(\pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi) \right]$$

où les M_λ et les $M_{\lambda\nu}$ sont certaines combinaisons de certains déterminants infinis. En particulier, on a nécessairement entre les M_λ la relation suivante:

$$(27') \qquad \sum_{\lambda=1}^{n'} M_\lambda = 0.$$

Il s'agit d'étudier le caractère de ces constantes par rapport aux paramètres de l'équation différentielle proposée.

Vu que les éléments diagonaux du déterminant $\Omega(\rho)$ sont tous égaux à l'unité, en appliquant la formule (h) (n° 7) à ce déterminant, on aura:

$$(28) \qquad \Omega(\rho) = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \Omega^{(m)} = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{p_1 .. p_m} \Omega^{(m)}_{p_1 .. p_m}$$

où:

$$(29) \qquad \Omega^{(m)} = \sum_{p_1 .. p_m} \Omega^{(m)}_{p_1 .. p_m}, \qquad \Omega^{(m)}_{p_1 .. p_m} = \begin{vmatrix} 0 & \psi_{p_1 p_2} & .. & \psi_{p_1 p_m} \\ \psi_{p_2 p_1} & 0 & .. & \psi_{p_2 p_m} \\ . & . & .. & . \\ \psi_{p_m p_1} & \psi_{p_m p_2} & .. & 0 \end{vmatrix},$$

les indices $p_1 .. p_m$ parcourant tous les entiers qui satisfont aux conditions:

$$p_1 < p_2 < .. < p_m.$$

Soit, dans le plan des ρ, B une aire finie ou infinie située entre deux droites verticales et telle qu'aucune des racines des fonctions $\varphi(\rho + m)$ ne se trouve dans son intérieur ou sur sa limite; la série $\sum_i \sum'_k \psi_{ik}$ étant uniformément convergente en dedans de B (voir: Sur une application des déterminants infinis etc. p. 57), il en sera de même de la série $\Omega^{(m)}$ (n° 15); donc cette série représente une fonction analytique uniforme de ρ, holomorphe en dedans de tout domaine tel que B. Cette fonction est de plus périodique et de période 1; en effet, en changeant ρ en $\rho + 1$, $\psi_{ik}(\rho)$ devient $\psi_{i+1,k+1}(\rho)$ de sorte que $\Omega^{(m)}_{p_1..p_m}$ devient $\Omega^{(m)}_{p_1+1..p_m+1}$, ce qui ne peut altérer la valeur de $\Omega^{(m)}$. Enfin, pour la fonction périodique $\Omega^{(m)}$, ρ_λ est un pôle d'ordre de multiplicité au plus égal à s_λ. Donc $\Omega^{(m)}$ pourra s'écrire comme une fonction linéaire des fonctions $\pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi$ et des dérivées de ces fonctions jusqu'à celle d'ordre $s_{\lambda-1}$ ($\lambda = 1, 2, .. n'$); dans cette expression, le terme constant est nul, puisque, pour des valeurs indéfiniment croissantes de la partie imaginaire de ρ, $\Omega^{(m)}$ prend la valeur nulle. Écrivons donc:

$$(30) \qquad \Omega^{(m)} = \sum_{\lambda=1}^{n'} \left[M_\lambda^{(m)} \pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi + \sum_{\nu=1}^{s_\lambda - 1} M_{\lambda\nu}^{(m)} \frac{d^\nu}{d\rho^\nu} (\pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi) \right],$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n'} M_\lambda^{(m)} = 0, \qquad M_{\lambda 0}^{(m)} = M_\lambda^{(m)}.$$

Le déterminant $\Omega^{(m)}_{p_1..p_m}$ étant de degré m par rapport aux fonctions ψ_{ik} $(i \gtrless k)$ et ces fonctions étant linéaires et homogènes par rapport aux paramètres

$$(31) \qquad \alpha_{2,i-2}, \ \alpha_{3,i-3}, \ \ldots \ \alpha_{n,i-n}, \qquad (i = \pm 1, \pm 2, ..)$$

il est clair que les $M_{\lambda\nu}^{(m)}$ peuvent être exprimés par des séries procédant selon les puissances et les produits de degré m par rapport à ces paramètres.

Ces séries sont absolument convergentes et *dans celle qui représente* $M_{\lambda\nu}^{(m)}$, *chaque coefficient peut s'exprimer comme une fonction entière rationnelle de*

$$(32) \qquad \pi, \ \rho_\lambda, \ \frac{1}{\rho_\lambda - \rho_\beta}, \ \pi \cot(\rho_\lambda - \rho_\beta)\pi \qquad (\beta = 1, .. \lambda - 1, \lambda + 1, .. n')$$

dans laquelle les coefficients sont des nombres rationnels.

Afin d'établir ce théorème, démontrons d'abord la proposition auxiliaire que voici. Soient $f_1(\rho), f_2(\rho), \ldots f_k(\rho)$ k fonctions entières rationnelles de ρ de degré $N - 2$ au plus dans lesquelles les coefficients sont des entiers; soient $F_1(\rho), F_2(\rho), \ldots F_k(\rho)$ k fonctions entières rationnelles en ρ de degré N, dans chacune desquelles le coefficient de la plus haute puissance de ρ est égal à 1, et supposons que ces dernières fonctions ne s'annullent que pour certaines valeurs de ρ congruentes aux ρ_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots n')$; soient enfin $q_1, q_2, \ldots q_k$ k entiers positifs. La série multiple

$$S = \sum_{p_1 \ldots p_k} \frac{f_1(\rho + p_1)}{F_1(\rho + p_1)} \frac{f_2(\rho + p_2)}{F_2(\rho + p_2)} \cdots \frac{f_k(\rho + p_k)}{F_k(\rho + p_k)}$$

dans laquelle les $p_1 \ldots p_k$ parcourent tous les entiers remplissant les conditions

$$p_\mu \gtrless p_\alpha - q_\mu, \; p_\alpha - q_\mu + 1, \; \ldots \; p_\alpha + q_\alpha \qquad {\scriptstyle (\alpha = 1, 2, \ldots \mu - 1;\; \mu = 1, 2, \ldots k)}$$

sera une fonction périodique de ρ représentable par une expression de la forme suivante:

$$(33) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n'} \left[K_\lambda \pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi + \sum_{\nu=1}^{s_\lambda - 1} K_{\lambda\nu} \frac{d^\nu}{d\rho^\nu} (\pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi) \right],$$

s_λ désignant l'ordre de multiplicité du pôle ρ_λ et $K_{\lambda\nu}$ une fonction entière rationnelle des quantités (32) dans laquelle les coefficients sont des nombres rationnels.

Cette proposition est évidente dans le cas où $k = 1$; en effet, S se réduit dans ce cas à une série *simple* qui converge absolument et uniformément en dedans de B et qui ne change pas de valeur en remplaçant ρ par $\rho + 1$; donc cette série représente une fonction de la forme (33); et comme, de plus, il n'y a qu'un nombre fini de termes de S qui deviennent infinis pour $\rho = \rho_\lambda$, en développant S selon les puissances entières, positives et négatives, de $\rho - \rho_\lambda$, les coefficients seront des fonctions entières rationnelles, à coefficients rationnels, de ρ_λ et de

$$\frac{1}{\rho_\lambda - \rho_\beta} \qquad {\scriptstyle (\beta = 1, \ldots \lambda - 1, \lambda + 1, \ldots n')}$$

Considérons le cas général. Évidemment on pourra écrire

$$(34)\qquad S=\sum_{p_1}\frac{f_1(\rho+p_1)}{F_1(\rho+p_1)}\cdot\sum_{p_2}\frac{f_2(\rho+p_2)}{F_2(\rho+p_2)}\cdot\cdot\sum_{p_k}\frac{f_k(\rho+p_k)}{F_k(\rho+p_k)}-H,$$

$p_1, p_2, \ldots p_k$ parcourant indépendamment l'un de l'autre tous les entiers positifs et négatifs et H désignant une expression linéaire et homogène, à coefficients entiers, de certaines séries multiples de la même forme que S mais d'ordre de multiplicité inférieur à k. Or le premier terme du second membre de (34) étant le produit de certaines expressions de la forme (33), $S+H$ sera aussi une telle expression. Donc, si la proposition est vraie pour $k=1, 2, \ldots \varkappa-1$, elle subsiste pour $k=\varkappa$; or elle est vraie pour $k=1$, donc elle est *toujours* vraie.

Arrivons à la démonstration du théorème énoncé plus haut. Rappelons d'abord (n° 7) que la série $\Omega^{(m)}$ est absolument convergente par rapport aux éléments ψ_{ik}, c'est-à-dire qu'elle reste convergente même en remplaçant, dans le développement de chacun des déterminant $\Omega^{(m)}_{p_1\ldots p_m}$, chaque terme par sa valeur absolue; on a donc le droit de ranger les termes de $\Omega^{(m)}$ dans un ordre quelconque. Écrivons ψ_{ik} sous la forme

$$(35)\quad \psi_{ik}=\frac{(\rho+i)^{n-2}}{\varphi(\rho+i)}H_2(i-k)+\frac{(\rho+i)^{n-3}}{\varphi(\rho+i)}H_3(i-k)+\cdots+\frac{1}{\varphi(\rho+i)}H_n(i-k)$$

$H_2(i-k)$, $H_3(i-k)$, .. $H_n(i-k)$ désignant certaines fonctions entières rationnelles, à coefficients entiers, de $i-k$ et de $\alpha_{2,i-k-2}, \alpha_{3,i-k-3}, \ldots \alpha_{n,i-k-n}$ (voir: Sur une application des déterminants infinis etc. p. 56). La série $\Omega^{(m)}$ pourra s'écrire comme une série absolument convergente ordonnée selon les puissances et les produits des fonctions $H_2(i-k)$, $H_3(i-k)$, .. $H_n(i-k)$; en effet, en désignant par $\bar{\psi}_{ik}$ ce que devient ψ_{ik} en remplaçant, dans l'expression du second membre de (35), chaque terme par sa valeur absolue, la série $\sum_i \sum'_k \bar{\psi}_{ik}$ sera convergente.

D'après la formule (29), $\Omega^{(m)}$ peut être regardé comme la somme d'une infinité de termes de la forme

$$\varepsilon\cdot\psi_{p_1 p_{a_1}}\psi_{p_2 p_{a_2}}\cdots\psi_{p_m p_{a_m}},$$

$p_{a_1}p_{a_2}\ldots p_{a_m}$ étant une permutation des nombres $p_1 p_2 \ldots p_m$ et ε désignant, suivant les cas, $+1$ ou -1. Donc $\Omega^{(m)}$ peut être regardé comme la somme de termes de la forme

$$\varepsilon \cdot \frac{(\rho + p_1)^{n-\beta_1}}{\varphi(\rho + p_1)} \cdot\cdot \frac{(\rho + p_m)^{n-\beta_m}}{\varphi(\rho + p_m)} \cdot H_{\beta_1}(p_1 - p_{\alpha_1}) \cdot\cdot H_{\beta_m}(p_m - p_{\alpha_m})$$

$\beta_1 \cdot\cdot \beta_m$ désignant des nombres dans la suite $2, 3, \ldots n$.

Soient $k_1, k_2, \ldots k_m$ m entiers différents de zéro qui vérifient l'égalité

$$k_1 + k_2 + \cdot\cdot + k_m = 0,$$

et posons

$$(36) \qquad p_1 - p_{\alpha_1} = k_{\gamma_1}, \qquad p_2 - p_{\alpha_2} = k_{\gamma_2}, \quad \cdot\cdot \quad p_m - p_{\alpha_m} = k_{\gamma_m},$$

$\gamma_1 \cdot\cdot \gamma_m$ désignant une permutation des nombres $1, 2, \ldots m$. Il est clair que l'expression

$$(37) \qquad H_{\beta_1}(k_{\gamma_1}) H_{\beta_2}(k_{\gamma_2}) \cdot\cdot H_{\beta_m}(k_{\gamma_m})$$

ne contient que les paramètres suivants

$$(38) \qquad \alpha_{r,k_1-r}, \alpha_{r,k_2-r}, \cdot\cdot \alpha_{r,k_m-r}; \qquad {\scriptstyle (r=2,3,\ldots n)}$$

donc l'ensemble de ceux des termes de $\Omega^{(m)}$ qui, outre les $\alpha_{2,-2}, \alpha_{3,-3}, \ldots \alpha_{n,-n}$, ne contiennent que les paramètres (38), s'écrira comme la somme d'un certain nombre fini de séries de la forme

$$\varepsilon K \sum \frac{(\rho + p_1)^{n-\beta_1}}{\varphi(\rho + p_1)} \frac{(\rho + p_2)^{n-\beta_2}}{\varphi(\rho + p_2)} \cdot\cdot \frac{(\rho + p_m)^{n-\beta_m}}{\varphi(\rho + p_m)},$$

K désignant l'expression (37) et $p_1 \cdot\cdot p_m$ parcourant toutes les valeurs remplissant les égalités (36) et la condition

$$p_1 \gtrless p_2 \gtrless \cdot\cdot \gtrless p_m;$$

donc, d'après le lemme démontré tout à l'heure, ledit ensemble de termes prendra la forme (33), dans laquelle $K_{\lambda\nu}$ désigne une fonction entière rationnelle, à coefficients rationnels, des quantités (32) et des paramètres (31). Donc la proposition se trouve démontrée.

29. D'après les formules (11) et (28) on a

$$(39)\qquad D(\rho) = \Pi(\rho) + \sum_{m=2}^{\infty} \Pi(\rho) \Omega^{(m)}.$$

Puisque

$$\Pi(\rho) = \prod_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_{mm}(\rho),$$

$$\chi_{mm}(\rho) = \left(1 + \frac{\rho - \rho_1}{m}\right) e^{-\frac{\rho-\rho_1}{m}} \cdot\cdot \left(1 + \frac{\rho - \rho_n}{m}\right) e^{-\frac{\rho-\rho_n}{m}} = \frac{\varphi(\rho + m)}{m^n} e^{-\frac{n\rho}{m} + \frac{n(n-1)}{2m}},$$

en développant $\Pi(\rho)$ suivant les puissances croissantes de ρ, il est clair que les coefficients de la série ainsi obtenue sont des fonctions entières de

$$(40)\qquad \alpha_{2,-2}\,,\ \alpha_{3,-3}\,,\ \cdot\cdot\ \alpha_{n,-n};$$

dans ces fonctions, les coefficients sont des polynômes en π, dont les coefficients sont des nombres *rationnels*.

En vertu de l'égalité $\chi_{ik} = \varphi(\rho + i)\psi_{ik}$, la fonction $\Pi(\rho)\Omega^{(m)}$ s'écrira ainsi:

$$(41)\qquad \Pi(\rho)\Omega^{(m)} = \sum_{p_1 \cdot\cdot p_m} \frac{\Pi(\rho)}{\chi_{p_1 p_1} \cdot\cdot \chi_{p_m p_m}} D^{(m)}_{p_1 \cdot p_m},$$

$D^{(m)}_{p_1 \cdot\cdot p_m}$ désignant ce que devient $\Omega^{(m)}_{p_1 \cdot\cdot p_m}$ en remplaçant les ψ par les χ. Or nous savons que la série $\sum_m \sum'_\lambda \chi_{m\lambda}$ est une fonction entière de ρ; en l'écrivant comme une série ordonnée suivant les puissances croissantes de ρ, les coefficients dans cette série auront la forme de séries absolument convergentes ordonnées suivant les paramètres $\alpha_{r\lambda}$; de plus, si l'on écrit la fonction entière:

$$\frac{\Pi(\rho)}{\chi_{p_1 p_1} \cdot\cdot \chi_{p_m p_m}}$$

comme une série Σ ordonnée suivant les puissances de ρ, les coefficients seront des fonctions entières des paramètres (40) telles que, si l'on remplace dans chacune d'elles chaque terme par sa valeur absolue, la série Σ restera encore convergente. Donc, la série du second membre de (41) s'écrira comme une série ordonnée suivant les puissances de ρ dans laquelle chaque coefficient est une série absolument convergente, ordonnée suivant les puissances des paramètres α_{ik}; par rapport à ceux des α_{ik} où $k \gtrless -i$, les termes de ces séries seront de dégré m, puisque le déterminant $D^{(m)}_{p_1..p_m}$ est de degré m par rapport aux χ_{ik} et que les χ_{ik} $(i \gtrless k)$ sont linéaires et homogènes par rapport auxdits paramètres.

Or la série $\Sigma_m \Pi(\rho)\Omega^{(m)}$ est, par rapport à ρ, uniformément convergente à l'intérieur de tout domaine fini (cf. n° 15); donc $D(\rho)$ prendra la forme d'une série entière en ρ dont les coefficients sont des séries absolument convergentes, procédant selon les puissances des paramètres $\alpha_{r\lambda}$.

Je dis que, dans ces séries, chaque coefficient s'exprime comme une fonction entière rationnelle de π où les coefficients sont des nombres *rationnels*. Il suffit évidemment de le démontrer pour le cas où les racines $\rho_1, \rho_2, .. \rho_n$ de $\varphi(\rho)$ sont incongruentes; en effet, deux ou plusieurs de ces racines ne seront congruentes que quand les paramètres (40) satisfont à certaines conditions; or, les autres paramètres $\alpha_{r\lambda}$ étant regardés comme des constantes, $D(\rho)$ sera une série entière toujours convergente par rapport à ceux-là; donc, si la proposition est vraie dans le cas général où ces paramètres ne satisfont à aucunes relations, elle sera toujours vraie.

Les racines $\rho_1, \rho_2, .. \rho_n$ étant supposées incongruentes, si l'on écrit $\Omega^{(m)}$ comme une série ordonnée selon les paramètres (31), chaque coefficient dans cette série se mettra sous la forme

$$K(\rho) = \sum_{\lambda=1}^{n} K_\lambda \pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi,$$

K_λ désignant une fonction entière rationnelle, à coefficients rationnels, des quantités

$$(42) \qquad \pi, \ \rho_\lambda, \ \frac{1}{\rho_\lambda - \rho_\beta}, \ \pi \cot(\rho_\lambda - \rho_\beta)\pi; \qquad {\scriptstyle (\beta=1,..\lambda-1,\lambda+1,..n)}$$

il est clair d'ailleurs que K_λ se change en K_μ si ρ_λ se change en ρ_μ.

La fonction $\Pi(\rho) K(\rho)$ est une fonction entière de ρ; si on la développe selon les puissances croissantes de ρ, chaque coefficient dans ce développement sera une fonction entière rationnelle en π, dont les coefficients seront des fonctions entières rationnelles, à coefficients rationnels, des quantités (42) et de plus, en les considérant comme fonctions de $\rho_1, \rho_2, .. \rho_n$, *symétriques* par rapport à ces variables. Or nous savons que $\Pi(\rho)K(\rho)$ est une fonction entière de ρ et de $\rho_1, \rho_2, .. \rho_n$; donc, en développant cette fonction selon les puissances croissantes de ρ, chaque coefficient s'écrira comme une série entière, toujours convergente et symétrique par rapport à $\rho_1, \rho_2, .. \rho_n$, dans laquelle les coefficients seront entiers et rationnels, à coefficients rationnels, par rapport au nombre π; chaque série de cette forme peut être exprimée comme une série entière toujours convergente par rapport aux paramètres (40) dans laquelle chacun des coefficients est entier et rationnel, à coefficients rationnels, par rapport à π; donc la démonstration se trouve achevée.

Pour arriver à ce résultat, nous avons supposé la condition (2) satisfaite; il est clair qu'on peut l'étendre immédiatement au cas général en se servant de la méthode employée dans le n° 25. Donc nous pouvons énoncer ce théoréme:

Si les développements (3) *des fonctions* $P_r(x)$ *convergent en dedans d'un anneau circulaire quelconque, le déterminant infini* $D(\rho)$ *peut s'écrire comme une série entière toujours convergente de* ρ; *chaque coefficient de cette série se représente par une série absolument convergente procédant selon les puissances et les produits des paramètres* $\alpha_{r\lambda}$; *dans chacune de ces séries, les coefficients sont des polynômes en* π *dont les coefficients sont des nombres rationnels.*

30. M. Poincaré a donné le nom d'*invariants* de l'équation (1), relatifs à l'anneau circulaire (RR'), aux coefficients I_μ dans le développement du déterminant $F(\omega)$ de M. Fuchs:

$$(-1)^n F(\omega) = \omega^n + I_1\omega^{n-1} + .. + I_{n-1}\omega + 1,$$

(où le terme indépendant de ω est égal à l'unité, d'après ce qui a été démontré dans le n° 27). Le problème de représenter analytiquement ces invariants a été résolu, comme on sait, dans des cas assez étendus par

MM. FUCHS[1] et HAMBURGER[2] et, dans le cas général, par MM. POINCARÉ[3] et MITTAG-LEFFLER[4]. Les expressions analytiques qui ont été employées par ces auteurs pour représenter les I_μ, contiennent certains paramètres dont les invariants eux-mêmes sont absolument indépendants; l'emploi des déterminants infinis conduit aisément à des expressions plus simples, libérées de tout élément arbitraire.

En effet, posons $F(\omega) = f(\rho)$; d'après la formule (25), on voit que les quantités $f(0), f'(0), \ldots f^{(n)}(0)$, divisées par $(2\pi i)^n$, s'expriment comme des fonctions linéaires homogènes de $D(0), D'(0), \ldots D^{(n)}(0)$ dans lesquelles les coefficients sont des expressions entières rationnelles, à coefficients rationnels, en πi. Donc, en posant $\rho = 0$ dans les formules

$$F(\omega) = f(\rho), \qquad F'(\omega) = f'(\rho)\frac{d\rho}{d\omega}, \ldots$$

$$\ldots, F^{(n)}(\omega) = f^{(n)}(\rho)\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^n + \ldots + f'(\rho)\frac{d^n\rho}{d\omega^n},$$

on obtient $F(1), F'(1), \ldots F^{(n)}(1)$ sous la même forme.

Or on a

$$(-1)^n I_{n-\mu} = \frac{F^{(\mu)}(0)}{\underline{|\mu}}$$

et les $F^{(\mu)}(0)$ peuvent s'écrire comme des fonctions linéaires homogènes, à coefficients rationnels, de $F(1), F'(1), \ldots F^{(n)}(1)$; donc:

Les invariants de l'équation (1), *relatifs à l'anneau circulaire* (RR'), *peuvent toujours s'exprimer comme des fonctions linéaires homogènes de*

---

[1] FUCHS, *Über die Darstellung der Functionen complexer Variabeln, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen,* Journal für Mathematik, t. 75.

[2] HAMBURGER, *Über ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen einer complexen Variabeln, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Punkte,* Journal für Mathematik, t. 83.

[3] POINCARÉ, *Sur les groupes des équations linéaires,* Acta mathematica, t. 4; voir aussi: VOGT, *Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre,* thèse, Paris 1889.

[4] MITTAG-LEFFLER, *Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène,* Acta mathematica, t. 15.

$D(0), D'(0), \ldots D^{(n)}(0)$; *dans chacune de ces fonctions, les coefficients sont des polynômes en* πi *dont les coefficients sont des nombres rationnels;*

et, d'après ce que nous avons démontré plus haut:

chacune des quantités $D(0), D'(0), \ldots D^{(n)}(0)$ *peut s'écrire comme une série absolument convergente ordonnée selon les paramètres* $a_{r\lambda}$ *dans laquelle les coefficients sont des polynômes en* π; *et, dans ces polynômes, les coefficients sont des nombres rationnels.*

31. Appliquons ces généralités à un exemple. Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{\alpha}{x^3} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x}\right) y = 0 \tag{43}$$

l'équation différentielle proposée; on aura identiquement

$$\begin{gathered} \psi_{ik} = 0 \quad \text{si } k > i + 1, \qquad \psi_{ik} = 0 \quad \text{si } k < i - 1 \\ \varphi(\rho) = \rho(\rho - 1) + \beta, \quad \psi_{i,i+1} = \frac{\alpha}{\varphi(\rho + i)}, \qquad \psi_{i,i-1} = \frac{\gamma}{\varphi(\rho + i)}. \end{gathered} \tag{44}$$

Premier cas: $1 - 4\beta$ n'est le carré d'aucun entier. Les deux racines ρ_1, ρ_2 de $\varphi(\rho)$ seront incongruentes:

$$\rho_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}{2}, \qquad \rho_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta}}{2};$$

donc $\Omega(\rho)$ prendra la forme

$$\Omega(\rho) = 1 + M_1 \pi \cot(\rho - \rho_1)\pi + M_2 \pi \cot(\rho - \rho_2)\pi$$

ou, en vertu de l'égalité $M_1 + M_2 = 0$,

$$\Omega(\rho) = 1 + 2M_1 \pi \frac{\sin 2\rho_1 \pi}{\cos 2\rho_1 \pi - \cos 2\rho \pi}.$$

Pour calculer M_1, faisons usage de la méthode employée dans le n° 28. D'après (29), en écrivant $\Omega(\rho)$ sous la forme

$$\Omega(\rho) = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \Omega^{(m)} = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{p_1..p_m} \Omega^{(m)}_{p_1..p_m},$$

la série $\Omega^{(m)}$ sera identiquement nulle pour toute valeur *impaire* de m; et en posant, pour abréger les formules, $F(\rho) = \varphi(\rho)\varphi(\rho + 1)$, on aura:

$$\Omega^{(2k)} = (-1)^k (\alpha\gamma)^k \sum_{p_1 < .. < p_k} \frac{1}{F(\rho + p_1) F(\rho + p_2) \ldots F(\rho + p_k)}.$$

En représentant $\Omega^{(2k)}$ par une expression de la forme suivante:

$$\Omega^{(2k)} = 2 M_1^{(2k)} \pi \frac{\sin 2\rho_1 \pi}{\cos 2\rho_1 \pi - \cos 2\rho\pi},$$

nous savons que la constante $M_1^{(2k)}$ peut être exprimée comme une fonction entière rationnelle, à coefficients rationnels, de

$$\pi\, ,\ \rho_1\, ,\ \frac{1}{\rho_1 - \rho_2}\, ,\ \pi \cot(\rho_1 - \rho_2)\pi$$

ou, ce qui revient au même, de

$$\pi\, ,\ \rho_1\, ,\ \frac{1}{2\rho_1 - 1}\, ,\ \pi \cot 2\rho_1 \pi;$$

bornerons-nous à calculer $M_1^{(2)}$ et $M_1^{(4)}$.

Parmi les fonctions $F(\rho + m)$ $(m = 0, \pm 1, ..)$, $F(\rho)$ et $F(\rho - 1)$ sont les seules qui s'annullent pour $\rho = \rho_1$; donc le résidu de la fonction $\Omega^{(2)}$, relatif au pôle ρ_1, aura la valeur:

$$M_1^{(2)} = -\alpha\gamma\left[\frac{1}{F'(\rho_1)} + \frac{1}{F'(\rho_1 - 1)}\right].$$

Pour trouver la valeur de $M_1^{(4)}$, écrivons $\Omega^{(4)}$ sous la forme

$$\Omega^{(4)} = (\alpha\gamma)^2 \left\{\frac{1}{2}\left[\sum \frac{1}{F(\rho + m)}\right]^2 - \frac{1}{2}\sum\left[\frac{1}{F(\rho + m)}\right]^2 - \sum \frac{1}{F(\rho + m) F(\rho + m - 1)}\right\};$$

pour abréger, désignons par le symbole $R(A)$ le résidu, relatif au pôle ρ_1, d'une fonction quelconque A; posons

$$G = \left[\sum \frac{1}{F(\rho+m)}\right]^2, \quad H = \sum \left[\frac{1}{F(\rho+m)}\right]^2, \quad K = \sum \frac{1}{F(\rho+m)\,F(\rho+m+1)}$$

on obtiendra aisément

$$R(H) = -\frac{F''(\rho_1)}{[F'(\rho_1)]^3} - \frac{F''(\rho_1-1)}{[F'(\rho_1-1)]^3},$$

$$R(K) = \frac{1}{F(\rho_1-2)\,F'(\rho_1-1)} + \frac{1}{F'(\rho_1)F(\rho_1+1)} -$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{F''(\rho_1-1)F'(\rho_1)+F''(\rho_1)F'(\rho_1-1)}{[F'(\rho_1-1)]^2[F'(\rho_1)]^2};$$

de plus, puisque $(\alpha\gamma)^2 G = [\Omega^{(2)}]^2$, on a:

$$(\alpha\gamma)^2 R(G) = -2\,[M_1^{(2)}]^2\,\pi\cot 2\rho_1\pi,$$

et la quantité $M_1^{(4)}$ se trouve déterminée par la formule

$$M_1^{(4)} = (\alpha\gamma)^2\left[\frac{1}{2}R(G) - \frac{1}{2}R(H) - R(K)\right].$$

Ces quantités une fois calculées, le résidu M_1 s'obtiendra par la formule

$$M_1 = M_1^{(2)} + M_1^{(4)} + \ldots + M_1^{(2k)} + \ldots$$

Second cas: $1-4\beta$ est le carré d'un entier p. Les deux racines ρ_1, ρ_2 de $\varphi(\rho)$ seront congruentes:

$$\rho_1 = \frac{1-p}{2}, \qquad \rho_2 = \frac{1+p}{2}.$$

Donc, en vertu des formules (27) et (27'), la fonction $\Omega(\rho)$ pourra s'écrire

$$\Omega(\rho) = 1 + M_{11}\frac{d}{d\rho}\left[\pi\cot\left(\rho+\frac{p}{2}\right)\pi\right] = 1 - M_{11}\left(\frac{\pi}{\sin\left(\rho+\frac{p}{2}\right)\pi}\right)^2;$$

d'après ce que nous avons vu dans le n° 28, chacune des fonctions $\Omega^{(2k)}$ prendra la forme

$$\Omega^{(2k)} = - M_{11}^{(2k)} \left(\frac{\pi}{\sin\left(\rho + \frac{p}{2}\right)\pi} \right)^2,$$

$M_{11}^{(2k)}$ désignant le produit de $(\alpha\gamma)^k$ par un polynôme en π à coefficients rationnels. Donc M_{11} se représentera par une série de la forme

$$M_{11} = R_1 \alpha\gamma + R_2 (\alpha\gamma)^2 + \ldots + R_k (\alpha\gamma)^k + \ldots$$

où les R_k sont des polynômes en π dont les coefficients sont des nombres rationnels.

Dans tous les deux cas, le déterminant $D(\rho)$ s'obtiendra par la formule

$$D(\rho) = - \frac{\sin(\rho - \rho_1)\pi}{\pi} \frac{\sin(\rho + \rho_1)\pi}{\pi} \Omega(\rho).$$

Ajoutons que les formules précédentes mettent en évidence ce fait que les invariants de l'équation (43), considérés comme fonctions des paramètres α, β, γ, ne dépendent que de β et du produit $\alpha\gamma$.

Une partie des recherches qui ont fait l'objet de ce mémoire, a été publiée auparavant dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Suède (Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1890).