ÜBER EINE NEUE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNCTIONEN ZWEIER VARIABLEN

VON

K. HENSEL
in BERLIN.

§ 1. *Einleitung. Ziel der Untersuchung.*

Die Theorie der algebraischen Functionen von zwei Variablen, oder die Lehre von den algebraischen Oberflächen und Raumcurven ist seit ihrer Begründung durch CLEBSCH und NÖTHER bisher wesentlich nach der mehr geometrischen Richtung ausgebildet worden, welche bei der Untersuchung der ebenen algebraischen Curven zu so schönen Erfolgen geführt hatte. Dagegen ist sie bis jetzt noch nicht mit den Methoden der reinen Analysis behandelt worden, wie dies für die algebraischen Functionen einer Veränderlichen zuerst durch CAUCHY und PUISEUX, später in weiterem Umfange durch RIEMANN und WEIERSTRASS geschehen ist.

Ich möchte in dieser Abhandlung die Grundlagen einer Theorie auseinandersetzen, welche wohl als directe Verallgemeinerung der Weierstrass'schen Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen auf Functionen von zwei und beliebig vielen Variablen angesehen werden kann. Mein Ziel ist, zu zeigen, dass und wie der gesammte Wertvorrath einer n-wertigen algebraischen Function von zwei Variabeln stetig, d. h. in n Zweigen ausgebreitet werden kann, und in welcher Weise diese n Zweige unter einander zusammenhängen.

Ich zeige zunächst, worin der wesentliche Unterschied zwischen den algebraischen Functionen von einer und von zwei Variablen besteht, und in welcher Form die soeben characterisirte Aufgabe in jener höheren Theorie ausgesprochen werden muss.

In der Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln ist die Erkenntniss der analytischen Eigenschaften der Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(y, x) = 0$ dann vollkommen gegeben, wenn man die Verzweigung der zugehörigen n-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche d. h. diejenigen Stellen $x = a$ der unabhängigen Variabeln kennt, bei deren Umkreisung zwei oder mehrere unter den n conjugirten Zweigen $y_1, y_2, \dots, y_n$ von y in einander übergehen. Die Bestimmung jener n Zweige für eine reguläre oder eine singuläre Stelle $x = \alpha$, die Aufsuchung der Verzweigungspunkte und das Studium der Zusammenhanges jener Zweige in der Umgebung derselben bildet die Fundamentalaufgabe jener Theorie. Sie kann mit den Methoden der Functionentheorie vollständig gelöst werden, da diese die Entwicklung einer solchen Function für jede Stelle $x = \alpha$ nach ganzen, oder, für die Verzweigungspunkte, nach gebrochenen Potenzen von $x - \alpha$ finden lassen, und da die Veränderung einer solchen Potenzreihe beim Umlauf um die Stelle $x = \alpha$ aus ihrer Form unmittelbar hervorgeht.

Das analytische Verhalten der Functionen von zwei Variablen ist nun ein wesentlich anderes, und erfordert zu seiner Erkenntniss eine vollständig andere Untersuchungsmethode. Ich zeige zunächst, worin der Unterschied jener beiden Theorieen besteht:

Es sei

$$(1) \qquad f(z, xy) = A_n(xy)z^n + A_{n-1}(xy)z^{n-1} + \dots + A_0(xy) = 0$$

eine irreductible Gleichung n^{ten} Grades in z mit ganzen rationalen Functionen von x und y als Coefficienten. Fixirt man nun in der xy-Ebene einen im Endlichen liegenden Punkt $\mathfrak{P}_0$ ($x = \alpha_1^{(0)}$, $y = \beta_1^{(0)}$) so, dass die n zugehörigen Werthe $\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \dots, \gamma_n^{(0)}$ von z, also die n Wurzeln der Zahlengleichung $f(z, \alpha_1^{(0)}\beta_1^{(0)})$ alle endlich und von einander verschieden sind, so kann man für jeden Nachbarpunkt $\mathfrak{P}$ ($x = \alpha$, $y = \beta$) die zugehörigen Werthe $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ von z stets so bezeichnen, dass sie mit den Anfangswerthen $\gamma_i^{(0)}$ nach der Stetigkeit zusammenhängen, dass also allgemein γ_i in $\gamma_i^{(0)}$ übergeht, wenn $\mathfrak{P}$ auf dem kürzesten Wege zu $\mathfrak{P}_0$ hingeführt wird. Lässt man nun den Punkt $\mathfrak{P}$ continuirlich weiter und weiter auf der ganzen xy-Ebene fortrücken, so kann man den gesammten Werthvorrath der n-werthigen Function z in n stetig zusammenhängende Reihen ausbreiten, ohne jemals über die Numerirung der n Wurzeln in

Zweifel zu gerathen; nur muss man, genau, wie bei den Functionen einer Variabeln die *critischen Punkte*, nämlich alle diejenigen Stellen $\mathfrak{P}$ ausschalten, für welche eine der n Wurzeln $\bar{\gamma}$ unendlich gross ist, oder wo zwei unter ihnen einander gleich werden.

Während nun jene critischen Punkte bei den algebraischen Curven nur in endlicher Anzahl auftreten, bilden sie hier ein System algebraischer Curven. In der That wird ja für alle die und nur die im Endlichen liegenden Punkte $\mathfrak{P}$ eine der n Wurzeln unendlich gross, für welche der Coefficient von z^n in (1) gleich Null wird, und die Gleichungsdiscriminante $D(x, y)$ von (1) verschwindet für alle diejenigen endlichen Punkte (α, β) denen mindestens zwei gleiche Wurzeln γ entsprechen. Durch die Gleichungen:

$$(2) \qquad A_n(x, y) = 0, \qquad D(x, y) = 0$$

sind also alle critischen Punkte im Endlichen vollständig definirt; zu ihnen können noch die beiden unendlich fernen Geraden:

$$(2') \qquad \frac{1}{x} = 0, \qquad \frac{1}{y} = 0$$

hinzutreten, deren sämmtliche Punkte im Unendlichen liegen; die critischen Punkte treten hier also nicht vereinzelt auf, sondern es existirt eine endliche Anzahl irreductibler Curven, deren sämmtliche Punkte für die Functionen z critisch sind; man findet ihre Gleichungen, indem man die irreductiblen Factoren von $A_n(x, y)$ und von $D(x, y)$ einzeln gleich Null setzt.

Während also die algebraischen Functionen einer Variabeln in der Umgebung eines *einzelnen* regulären oder critischen Punktes darzustellen sind, bietet sich hier die allgemeinere Aufgabe,

> die algebraische Function z soll in der Umgebung desjenigen Zweiges l_0 einer regulären oder einer critischen Curve P betrachtet werden, welcher durch einen beliebig gegebenen Punkt $\mathfrak{P}_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ hindurchgeht.

Es sei also P die gegebene irreductible Curve in deren Umgebung die Function z untersucht werden soll,

$$P(y, x) = y^\mu + p_{\mu-1}(x)y^{\mu-1} + \dots + p_0(x) = 0$$

sei ihre Gleichung, und es werde der Punkt $\mathfrak{P}_0$ der Einfachheit wegen vorläufig im Endlichen angenommenen. Dann kann der durch $\mathfrak{P}_0$ hindurchgehende Zweig l_0 von (P) in der Umgebung von $\mathfrak{P}_0$ stets durch eine Gleichung

$$y = y_0(x \mid \alpha_0) = \beta_0 + \beta_1(x-\alpha_0)^{\frac{1}{a}} + \beta_2(x-\alpha_0)^{\frac{2}{a}} + \dots$$

dargestellt werden, wo y_0 eine bestimmte algebraische Potenzreihe bedeutet, die nach ganzen Potenzen von $(x-\alpha_0)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet, wenn, was wir im Folgenden stets voraussetzen wollen, der Punkt $\mathfrak{P}_0$ ein Verzweigungspunkt von einer beliebigen $(a-1)^{\text{ten}}$ Ordnung der Curve P ist. [1] Dann kann die hier sich darbietende Fundamentalaufgabe so ausgesprochen werden: Die Wurzeln $z_1, z_2, \dots, z_n$ der Gleichung (1) sollen in einer endlichen Umgebung des Zweiges l_0 durch Reihen dargestellt werden, welche hier gleichmässig convergiren.

Diese Aufgabe kann nun so umgeformt werden, dass sie der entsprechenden für Functionen einer Variablen ganz analog ist; führt man nämlich statt x und y die neuen Variablen ξ und η durch die Gleichungen

$$\xi = (x-\alpha_0)^{\frac{1}{a}}, \qquad \eta = y - y_0(x \mid \alpha_0)$$

ein, so geht die Gleichung für z über in:

$$\bar{f}(z\,;\eta) = \bar{A}_n(\eta)z^n + \bar{A}_{n-1}(\eta)z^{n-1} + \dots + \bar{A}_0(\eta) = 0,$$

wo die Grössen $\bar{A}_i(\eta)$ jetzt ebenfalls ganze rationale Functionen von η

---

[1] Liegt der Zweig im Unendlichen, und ist etwa $\alpha_0 = \infty$ so ist in der Reihe $y_0(x \mid \alpha_0)$ und in der Gleichung (1) an Stelle von $x - \alpha_0$ die neue Variable $x' = \frac{1}{x}$ einzuführen, ist $\beta_0 = \infty$ ist also

$$y = \frac{\beta_{-h}}{(x-\alpha_0)^{\frac{h}{a}}} + \frac{\beta_{-(h-1)}}{(x-\alpha_0)^{\frac{h-1}{a}}} + \dots$$

die Darstellung der Zweiges l_0 so ist für y die Variable

$$y' = \frac{1}{y} = \beta'_h(x-\alpha_0)^{\frac{h}{a}} + \beta'_{h+1}(x-\alpha_0)^{\frac{h-1}{a}} + \dots$$

einzuführen, die Resultate bleiben also wörtlich bestehen.

sind; aber ihre Coefficienten sind nicht mehr ganze *rationale* Functionen von ξ sondern algebraische Potenzreihen, welche nach ganzen Potenzen von ξ fortschreiten und in einer endlichen Umgebung der Stelle $\xi = 0$ gleichmässig convergiren.

Für einen jeden speciellen *constanten* Werth ξ_0 von ξ innerhalb des gemeinsamen Convergenzbereiches aller jener Reihen kann also die n-wertige Function nach den Sätzen von PUISEUX in n Reihen entwickelt werden, welche nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen von

$$\eta = (y - y_0)$$

mit constanten Coefficienten fortschreitet, und die n Wurzeln unserer Gleichung in einer endlichen Umgebung jener Stelle darstellen; lässt man aber ξ andere und andere constante Werthe $\xi_0, \xi_0', \ldots$ annehmen, so könnte man jedesmal vollständig andere Potenzreihen für z erhalten, welche nur innerhalb des gemeinsamen Convergenzbereiches mit einander coincidirten.

Ich werde aber in dieser Arbeit zeigen, dass die n Wurzeln $z_1, \ldots z_n$ in der Umgebung der Stelle $(\xi = 0,\ \eta = 0)$ oder von $(x = \alpha, y = y_0(x\,|\,\alpha))$ sämmtlich in Reihen von der Form entwickelt werden können:

$$e_0(\xi) + e_1(\xi)\eta^{\frac{1}{b}} + e_2(\xi)\eta^{\frac{2}{b}} + \cdots, \tag{3}$$

welche nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen von $\eta = (y - y_0)$ fortschreiten; ihre Coefficienten sind algebraische Potenzreihen von $\xi = (x - \alpha_0)^{\frac{1}{a}}$; diese Reihen convergiren als Functionen von ξ *und* von η betrachtet innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle $(\xi = \eta = 0)$ und stellen für jedes Werthsystem $(\xi = \xi_0, \eta = \eta_0)$ innerhalb desselben die n Gleichungswurzeln dar.

Dieses Resultat kann nicht durch die Methoden hergeleitet werden, durch welche CAUCHY und PUISEUX dieses Problem für Functionen einer Veränderlichen in so allgemeiner Weise gelöst haben, noch weniger kann man mit ihnen den analytischen Character der Coefficienten $e_i(\xi)$ für den ganzen Bereich der Variablen ξ oder x erkennen.

Ich benutze vielmehr zur Lösung dieser Aufgabe ein neues rein arithmetisches Verfahren, welches successive die einzelnen Coefficienten

$e_i(\xi)$ eines Zweiges zu bestimmen lehrt, und aus dem dann die Convergenz jener Reihe (3) und der analytische Character ihrer Coefficienten leicht erschlossen werden kann. Ich bemerke dabei, dass dieses Verfahren auch für die Untersuchung der algebraischen Functionen von beliebig vielen Veränderlichen benutzt werden kann, wie ich in einer späteren Abhandlung zeigen werde.

Die hier auseinandergesetzten Methoden und Resultate bildeten den ersten Theil einer Vorlesung, die ich im Wintersemester 1898—99, an der Berliner Universität gehalten habe; bei der Redaction jener Vorlesung für den Druck hat mich einer meiner Zuhörer Herr F. Hartogs in dankenswerthester Weise unterstützt.

Zuerst soll die hier für die *algebraischen* Function gestellte Aufgabe zunächst für die rationalen Functionen zweier Variablen gelöst werden, da sich in diesem einfachsten Falle besonders deutlich zeigen lässt, wie man durch die Natur des behandelten Problemes gerade auf die hier gewählte Fragestellung geführt wird, und da die hier gefundenen Resultate bei der Lösung des allgemeinen Problemes benutzt werden.

§ 2. *Die rationalen Functionen von zwei Variabeln; ihre Zerlegung in Linearfactoren.*

Wir betrachten zunächst die Gesammtheit aller rationalen Functionen von x und y und untersuchen sie in der Umgebung einer beliebigen Stelle $x = \alpha$ der Variabeln x, welche im Endlichen liegen oder aber auch die unendlich ferne Stelle sein kann. Eine jede solche Function kann in der Form dargestellt werden:

$$(1) \qquad f(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)} = \frac{\bar{a}_0(x) + \bar{a}_1(x)y + \ldots + \bar{a}_m(x)y^m}{\bar{b}_0(x) + \bar{b}_1(x)y + \ldots + \bar{b}_n(x)y^n},$$

wo alle Coefficienten $\bar{a}_i(x)$ und $\bar{b}_k(x)$ als ganze Functionen von x vorausgesetzt werden können welche nicht alle eine und dieselbe ganze Function von x als gemeinsamen Theiler enthalten. In der Umgebung der endlichen Stelle $x = \alpha$ können dann alle nach positiven ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfactors $x - \alpha$ entwickelt werden, welche in einer endlichen Umgebung jener Stelle gleichmässig convergiren, und dasselbe ist für $\alpha = \infty$ der Fall, wenn man, was in der Folge stets geschehen soll, $x - \alpha$ dann durch $\frac{1}{x}$ ersetzt. Denkt man sich alle Coefficienten in dieser Weise entwickelt, und die niedrigste allen gemeinsame Potenz im Zähler und Nenner herausgezogen, so kann jede solche Function folgendermassen geschrieben werden:

$$(2) \qquad f(x, y) = (x - \alpha)^r \cdot \frac{a_0(x \mid \alpha) + a_1(x \mid \alpha) y + \ldots + a_m(x \mid \alpha) y^m}{b_0(x \mid \alpha) + b_1(x \mid \alpha) y + \ldots + b_n(x \mid \alpha) y^n},$$

wo jetzt die Coefficienten $a_i(x \mid \alpha)$, $b_k(x \mid \alpha)$, wie stets im Folgenden, Potenzreihen von $x - \alpha$ bedeuten sollen, welche in einer endlichen Umgebung der Stelle $x = \alpha$ gleichmässig convergieren; dieselben enthalten hier keine negativen Potenzen von $x - \alpha$, und für $x = \alpha$ verschwinden weder alle Coefficienten im Zähler noch auch diejenigen im Nenner.

Nur für eine endliche Anzahl von Stellen $x = \alpha$ tritt in (2) eine positive oder negative Potenz des zugehörigen Linearfactors vor jenen Bruch, im Allgemeinen ist $r = 0$; hierzu muss nämlich für ein endliches α der zugehörige Linearfactor in dem Ausdrucke (1) von $f(x, y)$ in allen Coefficienten des Zählers oder in allen Coefficienten der Nenners als Theiler enthalten sein. Ist dagegen $\alpha = \infty$ und ist der Zähler und der Nenner von $f(x, y)$ in (1) in Bezug auf x bzw. vom μ^{ten} und vom ν^{ten} Grade, so ergiebt sich ohne Weiteres, dass alsdann in der Darstellung (2) in der Umgebung jener Stelle die Potenz $\left(\frac{1}{x}\right)^{\nu-\mu}$ des bezüglichen Linearfactors vor dem Bruche auftritt.

Nunmehr kann man in jener Darstellung (2) auf der rechten Seite Zähler und Nenner in ihre Linearfactoren zerlegen, und man erhält so die folgende Darstellung:

$$(3) \qquad f(x, y) = (x - \alpha)^r \cdot \frac{(y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_m) a_m(x \mid \alpha)}{(y - y_1')(y - y_2') \ldots (y - y_n') b_n(x \mid \alpha)}.$$

Hier sind $y_1 \ldots y_m$; $y_1' \ldots y_n'$ die Zweige, welche der Zähler $g(x, y)$ und der Nenner $h(x, y)$ in der Umgebung der Stelle $(x = \alpha)$ besitzen, sie sind also ebenfalls Potenzreihen, welche nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen des Linearfactors $(x - \alpha)$ fortschreiten, und welche alle innerhalb einer endlichen Umgebung jener Stelle gleichmässig convergiren;

falls eine oder mehrere jener Reihen mit einer negativen Potenz von $x - \alpha$ beginnen, also für $x = \alpha$ unendlich gross werden, so ist jener endliche Convergenzbereich oder jene Umgebung der Stelle $x = \alpha$ nach innen durch einen beliebig klein zu wählenden Kreis begrenzt, und in dieser Weise soll die Umgebung einer Stelle, falls dies nötig sein sollte, stets begrenzt vorausgesetzt werden. Auch hier können und wollen wir den Bruch $f(x,y) = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ als in seiner reducirten Form, d. h. so gegeben voraussetzen, dass Zähler und Nenner als Function von y keinen gemeinsamen Theiler besitzen; alsdann sind die Linearfactoren $y - y_i$ im Zähler von den Factoren $y - y'_k$ im Nenner verschieden; dagegen kann natürlich einer der Linearfactoren im Zähler oder im Nenner noch mehrfach auftreten. Um dieses Vorkommen mehrfacher Linearfactoren im Zähler oder im Nenner von $f(x,y)$ einheitlich characterisiren zu können sagen wir genau wie bei den rationalen Functionen einer Variablen, $f(y,x)$ besitzt in Bezug auf einen Linearfactor $y - y_0$ die positive oder negative Ordnungszahl $\pm\sigma$ wenn derselbe σ Male im Zähler oder im Nenner jener Function vorkommt, und diese Function hat die Ordnungszahl Null, wenn $y - y_0$ weder im Zähler noch im Nenner auftritt.

Zu diesen Linearfactoren $y - y_i$ und $y - y'_k$ kann endlich als letzter noch der Factor $y - \infty$ oder $\frac{1}{y}$ treten, welcher für jede beliebige Stelle $x = \alpha$ dann und nur dann verschwindet wenn $\frac{1}{y} = 0$ also $y = \infty$ ist. Bringt man die zu untersuchende Function $f(x,y)$ in (1) auf die Form:

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{y}\right)^{n-m} \cdot \frac{\bar{a}_m(x) + \bar{a}_{m-1}(x)\frac{1}{y} + \ldots + \bar{a}_0(x)\left(\frac{1}{y}\right)^m}{\bar{b}_n(x) + \bar{b}_{n-1}(x)\frac{1}{y} + \ldots + \bar{b}_0(x)\left(\frac{1}{y}\right)^n},$$

so erkennt man, da sich im Zähler und Nenner für $y = \infty$ alle Glieder mit Ausnahme der ersten auf Null reduciren, dass $f(x,y)$ in Bezug auf den Linearfactor $\frac{1}{y}$ die Ordnungszahl $(n - m)$ besitzt, dass also die Ordnungszahl von $f(x,y)$ in Bezug auf den Linearfacter $\frac{1}{y}$ stets gleich dem negativ genommenen Grade $(m - n)$ jener rationalen Function für y ist.

Beachtet man endlich, dass die Summe der Ordnungszahlen für alle gleichen oder verschiedenen Linearfactoren im Zähler bzw. im Nenner gleich m bzw. gleich $(-n)$ ferner für den Linearfactor $\frac{1}{y}$ gleich $(n-m)$, und endlich für jeden anderen Linearfactor $y-y_0$ gleich Null ist, so ergiebt sich auch für die rationalen Functionen von zwei Variabeln der wichtige Satz:

> Die Summe der Ordnungszahlen einer beliebigen rationalen Function $f(y, x)$ für alle Linearfactoren $y-y_0$ in der Umgebung einer beliebigen Stelle $x = \alpha$ ist stets gleich Null, d. h. eine jede solche Function besitzt ebensoviele Nullcurven wie Polcurven.

Besitzt also eine Function $f(y, x)$ überhaupt keinen Linearfactor $y-y_0$ in negativer Ordnung, so muss sie nothwendig von y unabhängig, also eine rationale Function von x allein sein, denn sie enthält nach dem obigen Satze auch keinen Linearfactor in positiver Ordnung.

Geometrisch stellen die Gleichungen:

$$y - y_i = 0, \qquad y - y'_k = 0 \qquad \binom{i=1,2,\ldots,m}{k=1,2,\ldots,n}$$

die einzelnen Zweige der Zählercurve $g(y, x) = 0$ und der Nennercurve $h(y, x) = 0$ von der Function $f(y, x)$ in der Umgebung der Stelle $x = \alpha$ dar; sie können und sollen daher, wie dies oben bereits geschehen ist, auch mitunter als Nullcurven oder Polcurven bezeichnet werden. Zu ihnen kann dann noch die unendlich ferne Gerade $\frac{1}{y} = 0$ und ausserdem an einer endlichen Anzahl von Stellen $x = \alpha$ die zugehörige Gerade $x - \alpha = 0$, als ein- oder mehrfache Nullcurve oder Polcurve hinzutreten.

§ 3. *Die Entwickelung der rationalen Functionen in Potenzreihen.*

In der Theorie der analytischen Functionen einer Variablen wird gezeigt, dass man jede rationale Function $f(x)$ in einer endlichen Umgebung einer beliebigen Stelle $(x = \alpha)$ in eine nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfactors fortschreitende gleichmässig convergente Potenzreihe entwickeln kann, welche höchstens mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen desselben beginnt.

In gleicher Weise wollen wir jetzt zeigen, dass und wie man eine rationale Function $f(x, y)$ von zwei Variabeln in endlicher Umgebung eines beliebigen Curvenzweiges l_0 $(y = y_0 = \mathfrak{P}(x \,|\, \alpha))$ ebenfalls in eine nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfactors $(y - y_0)$ fortschreitende Potenzreihe entwickeln kann, welche ebenfalls höchstens mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen von $y - y_0$ beginnt und innerhalb einer endlichen Umgebung jenes Curvenzweiges gleichmässig convergirt.

Es sei also:

$$(1) \qquad y = y_0 = \mathfrak{P}(x \,|\, \alpha)$$

ein Zweig l_0 einer beliebigen algebraischen Curve $P(y, x) = 0$, oder, was dasselbe ist, ein Element einer beliebigen algebraischen Function in der Umgebung einer beliebigen Stelle $(x = \alpha)$ und es werde wieder, um gleich den allgemeinsten Fall zu betrachten, angenommen, dass jene Potenzreihe nach ganzen Potenzen von $(x - \alpha)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet, d. h. dass jener Curvenzweig an der Stelle $x = \alpha$ einen a-blättrigen Verzweigungspunkt besitzt. Denkt man sich dann jenes Element y_0 durch analytische Fortsetzung nach allen Seiten ausgebreitet so erhält man die ganze zugehörige algebraische Function, welche wir als μ-wertig voraussetzen wollen. Ihre Werthe sind dann eindeutig und im Allgemeinen stetig auf einer ganz bestimmten μ-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche ausgebreitet, welche im Folgenden stets durch $R(y_0)$ bezeichnet und als gegeben vorausgesetzt werden soll. — Sind $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(\mu-1)}$ die μ zu dem Element y_0 conjugirten Potenzreihen, so genügt die algebraische Function y_0 der irreductiblen Gleichung μ^{ten} Grades:

$$P(y, x) = (y - y_0)(y - y'_0) \ldots (y - y_0^{(\mu-1)}) = y^\mu + p_1(x) y^{\mu-1} + \ldots + p_\mu(x) = 0$$

mit rationalen Functionen von x als Coefficienten.

Es sei $\mathfrak{p}_0$ der zu dem Functionenelemente y_0 gehörige Punkt der Riemann'schen Kugelfläche; dann convergirt jene Reihe gleichmässig innerhalb eines Kreises oder, falls y_0 für $x = \alpha$ unendlich wird, innerhalb eines jenen Mittelpunkt ausschliessenden Kreisringes, dessen äusserer Begrenzungskreis durch den nächsten Pol von y_0 oder durch den nächsten Verzweigungspunkt der Kugelfläche $R(y_0)$ hindurchgeht. Dieser stets endliche Convergenzbereich der Reihe y_0 werde durch A_0 bezeichnet.

Um nun eine beliebige rationale Function $f(y, x)$ in der angegebenen Weise in eine Potenzreihe zu entwickeln führen wir zunächst an Stelle von x die neue unabhängige Variable ξ durch die Gleichung:

$$(x-\alpha)^{\frac{1}{a}} = \xi, \qquad x = \alpha + \xi^a$$

ein, wodurch die Reihe y_0 in eine nach ganzen Potenzen von ξ fortschreitende und in der Umgebung von $\xi = 0$ convergirende Potenzreihe übergeht. Entwickelt man dann in der rationalen Function $f(x, y)$ Zähler und Nenner für sich nach dem Taylor'schen Satze nach Potenzen von $y - y_0$ so ergiebt sich:

$$(2) \qquad f(y, x) = \frac{g(y, x)}{h(y, x)} = \frac{g(y_0) + g'(y_0)(y-y_0) + \frac{g''(y_0)}{\underline{|2}}(y-y_0)^2 + \dots}{h(y_0) + h'(y_0)(y-y_0) + \frac{h''(y_0)}{\underline{|2}}(y-y_0)^2 + \dots},$$

wo alle Ableitungen im Zähler und Nenner Potenzreihen in ξ sind, welche ebenfalls innerhalb A_0 convergiren. Lässt man jetzt diejenigen Reihen im Zähler und Nenner fort, welche gleich Null sind, und setzt die entsprechende Potenz von $y - y_0$ vor den Bruch, so kann derselbe so geschrieben werden:

$$(3) \qquad f(y, x) = (y-y_0)^\sigma \cdot \frac{g_0(\xi) + g_1(\xi)(y-y_0) + \dots + g_r(\xi)(y-y_0)^r}{h_0(\xi) + h_1(\xi)(y-y_0) + \dots + h_s(\xi)(y-y_0)^s}.$$

Wir dividiren endlich noch Zähler und Nenner durch $h_0(\xi)$ und schreiben den Ausdruck dann in der folgenden Form:

$$(4) \qquad f(y, x) = (y-y_0)^\sigma \cdot \frac{\bar{g}_0(\xi) + \bar{g}_1(\xi)(y-y_0) + \dots + \bar{g}_r(\xi)(y-y_0)^r}{1 - (\bar{h}_1(\xi)(y-y_0) + \dots + \bar{h}_s(\xi)(y-y_0)^s)};$$

auch hier sind die Quotienten:

$$\bar{g}_i(\xi) = \frac{g_i(\xi)}{h_0(\xi)}, \qquad \bar{h}_k(\xi) = -\frac{h_k(\xi)}{h_0(\xi)} \qquad \binom{i=0,1,2,\dots,r}{k=1,2,\dots,s}$$

Potenzreihen von ξ, welche höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von ξ enthalten, und deren Convergenzkreis entweder mit dem vorigen übereinstimmt, oder durch die nächste Nullstelle von $h_0(\xi)$ hindurchgeht. Es möge der stets endliche gemeinsame Convergenzradius jener Reihen durch ρ_0 bezeichnet werden.

Um nun die in jenen Reihen eventuell auftretenden negativen Potenzen von ξ zu beseitigen führen wir an Stelle von y die neue Variable η durch die Gleichung ein:

$$\frac{y-y_0}{\xi^d}=\eta \tag{5}$$

und wählen die ganze Zahl $d=\delta a$ als das kleinste Multiplum von a so, dass sich in (4) nach Substitution von $\eta\xi^d=\eta(x-\alpha)^\delta$ für $y-y_0$ alle negativen Potenzen von ξ, natürlich mit Ausnahme derer von $\bar{g}_0(\xi)$, fortheben; beseitigen wir auch diese endlich dadurch, dass wir jene Potenz von ξ vor den Bruch schreiben, so kann $f(x,y)$ so dargestellt werden:

$$f(x,y)=\xi^\rho\eta^\sigma\cdot\frac{\varphi(\xi\eta)}{1-\eta\cdot\psi(\xi\eta)}$$

wo $\varphi(\xi\eta)$ und $\psi(\xi\eta)$ Potenzreihen von ξ und η sind, welche keine negativen Potenzen von ξ und η enthalten, und die für $|\xi|<\rho_0$ und für ein beliebig grosses η convergiren, da sie ja für η nur von endlichem Grade sind.

Beschränkt man nun ξ und η zunächst so, dass:

$$|\xi|<\rho_0,\qquad |\eta\cdot\psi(\xi\eta)|<1 \tag{5'}$$

ist, so kann man den Nenner entwickeln und erhält:

$$f(x,y)=\xi^\rho\eta^\sigma\varphi(\xi\eta)(1+\eta\psi+\eta^2\psi^2+\ldots)=\xi^\rho\eta^\sigma\cdot p(\xi\eta),$$

und da bei den soeben gemachten Beschränkungen sowohl $\varphi(\xi\eta)$ als auch die Reihe $\Sigma(\eta\psi)^i$ gleichmässig convergirt, so gilt dasselbe von ihrem Producte; dasselbe kann also in eine Potenzreihe $p(\xi\eta)$ von ξ und η geordnet werden, welche innerhalb desselben Bereiches gleichmässig convergirt.

Dieser Convergenzbereich für ξ und η ist niemals unendlich klein. In der That ist ja die Bedingung $|\eta\psi(\xi\eta)|<1$ sicher a fortiori erfüllt, wenn man die Reihe

$$\psi(\xi\eta)=\Sigma\psi_{ik}\xi^i\eta^k$$

durch eine andere Reihe $\bar{\psi}(\xi\eta)$ ersetzt, in welcher alle Coefficienten ψ_{ik} durch ihre absoluten Beträge ersetzt, und diese dann noch beliebig vergrössert sind; betrachtet man nun alle die Werthsysteme $\xi\eta$, für welche $|\eta\bar{\psi}(\xi\eta)|<1$ ist, so ist für diese die obige Bedingung (5') ebenfalls erfüllt.

Convergirt nun eine Reihe $\psi(\xi\eta)$ für $|\xi| = \rho$ und $|\eta| = \sigma$ und ist γ der grösste Werth den $|\psi(\xi\eta)|$ für jene Werthsysteme annehmen kann, so ist bekanntlich allgemein:

$$|\psi_{ik}| \leqq \frac{\gamma}{\rho^i \sigma^k},$$

also ist für alle Werthe $|\xi| < \rho$ und $|\eta| < \sigma$

$$|\eta\psi(\xi\eta)| \leqq |\eta| \sum \gamma \cdot \left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^i \left(\frac{|\eta|}{\sigma}\right)^k = \frac{\gamma|\eta|}{\left(1 - \frac{|\xi|}{\rho}\right)\left(1 - \frac{|\eta|}{\sigma}\right)},$$

und jener Ausdruck ist sicher kleiner als 1 wenn:

$$\gamma|\eta| < 1 - \frac{|\xi|}{\rho} - \frac{|\eta|}{\sigma} \quad \text{also} \quad |\eta| < \frac{1 - \frac{|\xi|}{\rho}}{\gamma + \frac{1}{\sigma}}$$

angenommen wird; und da hier der Bereich σ für $|\eta|$ beliebig gross also $\frac{1}{\sigma}$ sicher gleich 1 und ρ beliebig nahe an ρ_0 angenommen werden kann, so ergiebt sich für ξ und η die folgende Beziehung:

$$|\xi| < \rho < \rho_0, \qquad |\eta| < \frac{1 - \frac{|\xi|}{\rho}}{\gamma + 1},$$

wenn γ jetzt den Maximalwerth von $|\psi(\xi\eta)|$ für $|\xi| = \rho < \rho_0$ und $|\eta| = 1$ bedeutet, und für jeden Werth von ξ ergiebt sich so ein ganz bestimmter endlicher Werth für η.

Ordnet man die so sich ergebende Potenzreihe nunmehr nach Potenzen von η allein und multiplicirt man in jener Reihe jedes Glied mit der positiven oder negativen Potenz ξ^ρ, so ergiebt sich die folgende Darstellung für $f(x, y)$

$$f(x, y) = f_\sigma(\xi)\eta^\sigma + f_{\sigma+1}(\xi)\eta^{\sigma+1} + \cdots, \tag{6}$$

wo die Coefficienten Potenzreihen sind, die nach ganzen Potenzen von ξ fortschreiten, in einer endlichen Umgebung von $\xi = 0$ gleichmässig convergiren und höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von ξ

enthalten, wie weit man auch in jener Reihe fortgehen mag. Ferner ist der Exponent σ der Anfangsgliedes jener Reihe offenbar gleich der Ordnungszahl, welche die rationale Function $f(x, y)$ in Bezug auf den Linearfactor $y - y_0$ besitzt und ihrer Entstehungsweise nach sind die Potenzreihen $f_\sigma(\xi), \ldots$ als rationale Functionen von $g^{(i)}(y_0)$ und $h^{(k)}(y_0)$ ebenfalls rationale Functionen von y_0 und x, also algebraische Functionen, welche auf der zu y_0 zugehörigen Riemann'schen Fläche eindeutig sind. Wörtlich dasselbe Resultat erhält man, wenn man für den Curvenzweig $y = y_0$ in der Umgebung von $x = \alpha$ einen der speciellen Zweige:

$$y = \infty, \quad \text{oder} \quad x = \alpha, \quad \text{oder} \quad x = \infty$$

in der Umgebung der Stellen:

$$x = \alpha, \quad \text{oder} \quad y = \beta \quad \text{oder} \quad y = \beta$$

wählt. Man hat dann in jener Entwicklung nur jedesmal zu setzen:

$$\xi = x - \alpha, \qquad \eta = \frac{\frac{1}{y}}{(x-\alpha)^d}; \quad \text{oder} \quad \xi = y - \beta, \qquad \eta = \frac{x-\alpha}{(y-\beta)^d};$$

oder endlich:

$$\xi = y - \beta, \qquad \eta = \frac{\frac{1}{x}}{(y-\beta)^d},$$

und alsdann gilt jedesmal genau die oben angegebene Entwickelung (6).

Um nun jenes Resultat allgemein aussprechen zu können bezeichnen wir den Linearfactor $y - y_0$, welcher für alle und nur die Punkte der Curvenzweiges y_0 in der Umgebung der Stelle $x = \alpha$ verschwindet, als den zu jenem Zweige gehörigen Linearfactor; und allgemeiner bezeichnen wir ebenso auch den vorher eingeführten Linearfactor:

$$\eta = \frac{y - y_0}{\xi^d} = \frac{y - y_0}{(x-\alpha)^\delta},$$

welcher für alle Punkte mit Annahme von $(x = \alpha)$ selbst die gleiche Eigenschaft hat. Dann kann jenes Resultat folgendermassen ausgesprochen werden:

Eine rationale Function $f(x, y)$ kann in der Umgebung eines beliebigen Curvenzweiges $y = y_0$ stets auf eine und nur eine Weise in eine Potenzreihe entwickelt werden, welche nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfactors η fortschreitet und höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen desselben enthält. Alle Coefficienten in jener Entwickelung sind mit y_0 gleich verzweigte algebraische Potenzreihen, deren Ordnungszahlen, falls sie negativ sind, jedenfalls alle unter eine endlichen Grenze bleiben.

Dieser Satz ist die directe Verallgemeinerung des bekannten Theoremes für die rationalen Functionen von einer Variablen.

Der Convergenzbereich der Reihen $f_\sigma(\xi), f_{\sigma+1}(\xi), \ldots$ geht auf der Kugelfläche $R(y_0)$ durch den nächsten critischen Punkt von y_0 oder durch die nächste Nullstelle der algebraischen Function $h_0(\xi)$ hindurch, welche ja auch auf $R(y_0)$ eindeutig ist. Schliesst man alle jene singulären Punkte, welche nur in endlicher Anzahl auftreten, zunächst aus, und bezeichnet alle übrigen Punkte von $R(y_0)$ als die regulären Stellen, ihre Gesammtheit als den regulären Bereich, so besteht für jede reguläre Stelle eine Entwickelung:

$$(7) \qquad f(x, y) = f_\sigma(x \mid \alpha)(y - y_0)^\sigma + f_{\sigma+1}(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\sigma+1} + \ldots$$

wo y_0 sowol als alle Coefficienten $f_k(x \mid \alpha)$ nach *ganzen* Potenzen von $x - \alpha$ fortschreiten, und garkeine negativen Potenzen enthalten. Geht man von einer solchen regulären Stelle auf $R(y_0)$ aus, so kann sie mit Umgehung aller singulären Punkte zu jedem anderen regulären Punkte jener Fläche übergeführt werden; für die singulären Punkte und ihre Umgebung gelten dann die entsprechenden Entwickelungen (6), nur dass für die Verzweigungspunkte an die Stelle von $x - \alpha$ die Potenz $(x - \alpha)^{\frac{1}{a}}$, und für die Nullstellen von $h_0(\xi)$ an die Stelle von $y - y_0$ der allgemeinere Linearfactor $\frac{y - y_0}{\xi^d}$ treten kann.

Der Exponent σ von $(y - y_0)$ mit welchem die Entwickelung (7) beginnt, ist, wie oben erwähnt, gleich der Ordnungszahl von $f(y, x)$ in Bezug auf jenen Linearfactor. Bei der Fortsetzung der Reihe (7) über die ganze Riemann'sche Fläche $R(y_0)$ oder längs der ganzen Curve P bleibt aber offenbar die Ordnungszahl σ stets die gleiche; jene Function f besitzt also die Ordnungszahl σ nicht bloss für den einen Zweig $(y = y_0)$ der irreductiblen Curve P sondern in Bezug auf die ganze Curve; dies erkennt man hier auch direct, denn eine Function f besitzt dann und nur dann in Bezug auf den Linearfactor $(y - y_0)$ die Ordnungszahl σ, wenn sie die Potenz $P(y, x)^\sigma$ der zugehörigen irreductiblen Function $P(y, x)$ als Factor enthält.

§ 4. *Die algebraischen Functionen von 2 Variablen. Ihre Entwickelung in der Umgebung eines regulären Curvenzweiges.*

Wir wollen die Resultate der letzten Abschnitte benutzen, um die n Wurzeln oder Zweige $z_1, z_2, \ldots, z_n$ einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades mit ganzen rationalen Coefficienten:

$$(1) \quad f(z, xy) = A_n(x, y)z^n + A_{n-1}(x, y)z^{n-1} + \ldots + A_1(x, y)z + A_0(x, y) = 0$$

ebenfalls in der Umgebung eines beliebigen Curvenzweiges

$$(2) \qquad y = y_0 = \mathfrak{P}_0(x \mid \alpha), \qquad |x - \alpha| < \delta$$

in Reihen zu entwickeln, welche nach Potenzen des zugehörigen Linearfactors $y - y_0$ fortschreiten. Geometrisch heisst das, wir wollen die Oberfläche (1) in der Umgebung derjenigen n Raumcurven betrachten, in denen die zu der ebenen Curve (2) gehörige Cylinderfläche die n Blätter jener Oberfläche durchsetzt. Wir setzen der Einfachheit wegen zunächst wieder voraus, dass der betrachtete Punkt $\mathfrak{P}$ im Endlichen liegt, dass also erstens α einen endlichen Werth besitzt und dass zweitens die Reihe y_0 die Form hat

$$y_0 = \beta_0 + \beta_1(x - \alpha)^{\frac{1}{a}} + \beta_2(x - \alpha)^{\frac{2}{a}} + \ldots$$

also nicht mit negativen Potenzen von x anfängt. Wäre dies nämlich nicht der Fall, wäre etwa:

$$y_0 = (x - \alpha)^{-\frac{h}{a}}\left(\beta_0 + \beta_1(x - \alpha)^{\frac{1}{a}} + \ldots\right),$$

so brauchte man nur wie im § 1 $y' = \frac{1}{y}$ an Stelle von y einzuführen, um diesen allgemeineren Fall auf den hier behandelten zu reduciren.

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken können und wollen wir ferner voraussetzen, dass in der definirenden Gleichung (1) für z $A_n(x, y) = 1$

und alle übrigen Coefficienten *ganze* Functionen von x und y sind, dass also jene Gleichung die Form hat:

$$(3) \qquad f(z, y) = z^n + a_{n-1}(x, y)z^{n-1} + \ldots + a_1(x, y)z + a_0(x, y) = 0,$$

wo alle $a_i(x, y)$ ebenfalls ganze Functionen von x und y sind; denn sollte das nicht der Fall sein, so braucht man in (1) bekanntlich nur $z = \frac{\bar{z}}{A_n(xy)}$ zu setzen; dann genügt $\bar{z}$ einer Gleichung von der Form (3). Besitzt die Gleichung für z die Form (3) so entsprechen jedem Punkt $x = \alpha$, $y = \beta$ im Endlichen genau n gleiche oder verschiedene aber stets endliche bestimmte Werthe $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ von z, welche die Wurzeln der Gleichung:

$$\gamma^n + a_{n-1}(\alpha, \beta)\gamma^{n-1} + \ldots + a_0(\alpha, \beta) = 0$$

sind. Die durch die Gleichung (3) definirte algebraische Function besitzt also den Character einer *ganzen* rationalen Function, und soll daher eine *ganze* algebraische Function von (x, y) genannt werden.

Wir setzen ferner voraus, dass jene Function $f(z, y)$ mit ihrer nach z genommenen Ableitung $f'_z(z, y)$ keinen gemeinsamen Theiler hat, dass sie also für unbestimmte (x, y) keine gleichen Wurzeln besitzt. Auch hierin liegt keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn einen solchen Theiler könnte man ja durch das Euclidische Verfahren bestimmen und vorher durch Division entfernen. Haben dann $f(z)$ und $f'(z)$ keinen gemeinsamen Theiler, so kann man ebenfalls durch das Euclidische Verfahren zwei *ganze* Functionen von z, y und x $g(z)$ und $g_1(z)$ so bestimmen, dass:

$$(4) \qquad f(z)g(z) + f'(z)g_1(z) = D(x, y)$$

ist, wo $D(x, y)$ eine durch jenes Verfahren sich ergebende *ganze* Function von x und y, die sogenannte *Discriminante* von $f(z)$ ist, welche also in der (xy)-Ebene eine bestimmte Curve, die s. g. *Discriminantencurve* darstellt.

Soll nun für alle Stellen in der Umgebung des beliebig angenommenen Curvenzweiges $y = y_0$ eine Reihe

$$z = e_0(x|\alpha) + e_1(x|\alpha)(y - y_0) + \ldots$$

gleichmässig convergiren, und die Gleichung $f(z, y) = 0$ befriedigen, so muss zunächst für $y = y_0$, d. h. für alle Punkte *auf* jenem Zweige $z = e_0(x|\alpha)$

sein, d. h. die Reihe $e_0(x|\alpha)$ muss die Gleichung $f(e_0, y_0) = 0$ in der Umgebung der Stelle $x = \alpha$ befriedigen, welche man aus (3) erhält, wenn man y durch die Potenzreihe $y_0 = \mathfrak{P}_0(x|\alpha)$ ersetzt. Die so sich ergebende Gleichung:

$$(5) \qquad f(e_0, y_0) = e_0^n + a_{n-1}(y_0, x)e_0^{n-1} + \dots + a_0(y_0, x) = 0$$

besitzt dann als Coefficienten ganze rationale Functionen von y_0 und x, dieselben sind also sämmtlich algebraische Potenzreihen von $x-\alpha$, welche mit y_0 gleich verzweigt sind, keine negativen Potenzen von $x-\alpha$ enthalten und denselben Convergenzbereich wie y_0 selbst besitzen. Jene Gleichung besitzt demnach genau n und nur n gleiche oder verschiedene Wurzeln:

$$(5') \qquad e_0^{(1)}(x|\alpha), \; e_0^{(2)}(x|\alpha), \dots, e_0^{(n)}(x|\alpha)$$

welche ebenfalls algebraische Potenzreihen sind, die innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle α gleichmässig convergiren und keine negativen Potenzen von $x-\alpha$ enthalten.

Lässt man den Punkt $x = \alpha$ alle mögliche Umläufe machen, durch die y_0 in sich selbst übergeführt wird, so vertauschen sich die n Potenzreihen $e_0^{(i)}(x|\alpha)$ unter einander. Sind

$$e_0^{(1)}(x|\alpha), \dots, e_0^{(\nu)}(x|\alpha)$$

alle und nur diejenigen unter den n Wurzeln (6), in welche $e_0^{(1)}(x|\alpha)$ durch jene Umläufe übergeführt werden kann, so genügen diese für sich einer und zwar einer irreductiblen Gleichung ν^{ten} Grades

$$f_1(e_0, y_0) = 0$$

deren Coefficienten rational von y_0 abhängen, und welche ein Factor der ganzen Gleichung n^{ten} Grades $f(e_0, y_0) = 0$ in (5) ist. In gleicher Weise können auch die übrigen $n-\nu$ Wurzeln in Gruppen zusammengehöriger Wurzeln geordnet werden, die den einzelnen irreductiblen Factoren von $f(e_0, y_0)$ entsprechen.

Unter jenen Wurzeln $e_0^{(h)}(x|\alpha)$ können gleiche vorkommen; dieser Fall kann aber nur dann eintreten, wenn der Zweig $y = y_0$ der Discriminantencurve angehört. Ist nämlich etwa $e_0^{(1)}(x|\alpha)$ eine mehrfache Wurzel von

$f(e_0, y_0) = 0$, so ist sie auch eine Wurzel der Gleichung $f'(e_0, y_0) = 0$; ersetzt man also in der Identität (4) y und z bzw. durch y_0 und $e_0^{(1)}(x|\alpha)$, so verschwindet ihre linke, also auch ihre rechte Seite, d. h. es muss $D(x, y_0) = 0$ sein, w. z. b. w.

Wir bezeichnen nun speciell eine jener n so bestimmten Reihen (5′) durch $e_0(x|\alpha)$ und setzen zunächst voraus dass sie keine mehrfache Wurzel von $f(e_0, y_0) = 0$, dass also sicher:

$$f'(e_0, y_0) \neq 0 \tag{6}$$

ist. Wir zeigen dann, dass zu diesem Anfangsgliede eine und nur eine eindeutig bestimmte Reihe

$$z_0 = e_0 + e_1(y - y_0) + e_2(y - y_0)^2 + \cdots$$

gehört, deren sämmtliche Coefficienten mit e_0 gleich verzweigte algebraische Potenzreihen sind, welche in der Umgebung jenes Zweiges gleichmässig convergirt und die ursprüngliche Gleichung $f(z, y) = 0$ befriedigt.

Zu diesem Zwecke setze ich:

$$z = e_0 + \zeta, \qquad y = y_0 + \eta$$

so dass die zu lösende Aufgabe jetzt die ist, in der Reihe:

$$\zeta_0 = z_0 - e_0 = e_1(x|\alpha)\eta + e_2(x|\alpha)\eta^2 + \cdots \tag{6′}$$

die Coefficienten $e_1, e_2, \ldots$ zu finden. Nun ist also:

$$\begin{aligned} f(z, y) = f(e_0 + \zeta, y_0 + \eta) &= f(e_0, y_0) + \zeta f_{10}(e_0, y_0) + \eta f_{01}(e_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{\underline{|2}}\left(f_{20}(e_0, y_0)\zeta^2 + 2f_{11}(e_0, y_0)\zeta\eta + f_{02}(e_0, y_0)\eta^2\right) + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

wo allgemein

$$\left(\frac{\partial^{i+k} f(z, y)}{\partial z^i \partial y^k}\right)_{z=e_0, y=y_0} = f_{ik}(e_0, y_0)$$

gesetzt ist. Aus dieser Gleichung ergiebt sich, wenn man beachtet, dass $f(e_0, y_0) = 0$, $f_{10}(e_0, y_0) \neq 0$ ist, folgende Darstellung für ξ

$$\zeta = \left(-\frac{f_{01}}{f_{10}}\right)\eta - \left(2\frac{f_{02}}{f_{10}}\right)\eta^2 - \left(\frac{f_{11}}{f_{10}}\right)\eta\zeta - \left(2\frac{f_{20}}{f_{10}}\right)\zeta^2 - \cdots \tag{8}$$

Die Coefficienten auf der rechten Seite dieser Gleichung sind ebenfalls algebraische Potenzreihen von $x-\alpha$, welche mit $e_0(x|\alpha)$ gleichverzweigt sind, da alle jene Quotienten rationale Functionen von e_0, y_0, und x sind; ihr gemeinsames Convergenzbereich ist ebenfalls endlich, denn es stimmt entweder mit dem von e_0 überein, oder es geht hin zu der nächsten Nullstelle von $f_{10}(e_0, y_0)$; aber in dieser Gleichung (8) können einige Coefficienten mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen von $x-\alpha$ beginnen. Da $e_0(x|\alpha)$ und $y_0(x|\alpha)$ keine negativen Potenzen enthalten, so gilt das Gleiche von allen Coefficienten $f_{ik}(e_0, y_0)$. Nur dann können also in (8) negative Potenzen von $x-\alpha$ auftreten, wenn der gemeinsame Nenner $\frac{df}{dz} = f_{10}(e_0, y_0)$ von positiver Ordnung ist. Ist dies der Fall, und setzt man in der Gleichung (4) des vorigen Abschnittes $x=\alpha$, $y=y_0$, $z=e_0$, so verschwindet ihre linke, also auch ihre rechte Seite, man erhält also für eine solche Stelle die Gleichung $D(\alpha, y_0) = 0$, aus der sich ergiebt, dass in der Gleichung (8) in den Coefficienten nur dann negative Potenzen von $x-\alpha$ auftreten können, wenn der Punkt $\mathfrak{P}$ ein Schnittpunkt der Curve P mit der Discriminantencurve ist. Um diese negativen Potenzen, falls sie auftreten sollten, von vorn herein zu beseitigen, führen wir an Stelle von η und ζ neue Variable η_1 und ζ_1 durch die Gleichungen:

$$\eta = (x-\alpha)^\sigma \eta_1, \qquad \zeta = (x-\alpha)^\tau \zeta_1 \tag{9}$$

ein, und wählen die ganzen Zahlen τ und σ so, dass sie möglichst klein sind, und dass sich in der aus (8) folgenden Gleichung für ξ_1 und η_1

$$\zeta_1 = \left(-\frac{f_{01}}{f_{10}}\right)(x-\alpha)^{\sigma-\tau}\eta_1 - \left(2\frac{f_{02}}{f_{10}}\right)(x-\alpha)^{2\sigma-\tau}\eta_1^2 - \left(\frac{f_{11}}{f_{10}}\right)(x-\alpha)^\sigma \eta_1\zeta_1$$
$$- \left(2\frac{f_{20}}{f_{10}}\right)(x-\alpha)^\tau \zeta_1^2 - \cdots \tag{10}$$

alle negativen Potenzen von $x-\alpha$ fortheben. Dieser Bedingung kann, da die Entwickelung in (8) abbricht, offenbar stets genügt werden. Alsdann kann die jetzt zu lösende Aufgabe bei einfacherer Bezeichnung der Entwickelungscoefficienten in (10) und (6') folgendermassen ausgesprochen werden:

Es soll die Gleichung

$$\zeta_1 = g_{10}(x|\alpha)\eta_1 + \sum_{i+k=2,3,\ldots} g_{ik}(x|\alpha)\eta_1^i\zeta_1^k \tag{11}$$

in welcher die Coefficienten $g_{10}(x|\alpha), g_{20}(x|\alpha), \ldots$ *ganze* Potenzreihen von $x - \alpha$ sind, durch eine Reihe:

$$(11') \qquad \zeta_1 = \varepsilon_1(x|\alpha)\eta_1 + \varepsilon_2(x|\alpha)\eta_1^2 + \cdots$$

befriedigt werden.

Diese Aufgabe kann nun, auch wenn man nicht voraussetzt, dass, wie es hier der Fall ist, die Reihe der Coefficienten $g_{ik}(x|\alpha)$ abbricht, stets auf eine und auch nur auf eine Weise gelöst werden wenn nur die Reihe $\Sigma g_{ik}(x|\alpha)\eta_1^i\zeta_1^k$ in einer endlichen Umgebung der Stelle $\eta_1 = 0$, $\zeta_1 = 0$, $x = \alpha$ gleichmässig convergirt. Setzt man nämlich in (11) für ζ_1 die Reihe (11') ein, und ordnet dann die rechte Seite der so sich ergebenden Gleichung

$$(11'') \qquad (\varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_1^2 + \ldots) = g_{10}\eta_1 + \Sigma g_{ik}\eta_1^i(\varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_1^2 + \ldots)^k$$

nach steigenden Potenzen von η_1 so ist dieselbe innerhalb ihres Convergenzbereiches nur dann erfüllt, wenn die noch unbekannten Coefficienten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ so gewählt werden, dass die Coefficienten auf beiden Seiten von (11'') gleich sind. So erhalten wir eine Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= g_{10}, \\
\varepsilon_2 &= g_{20} + g_{11}\varepsilon_1 + g_{02}\varepsilon_1^2, \\
\varepsilon_3 &= g_{30} + g_{21}\varepsilon_1 + g_{12}\varepsilon_1^2 + g_{03}\varepsilon_1^3 + g_{11}\varepsilon_2 + 2g_{02}\varepsilon_1\varepsilon_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

und man erkennt leicht, dass sich allgemein aus der Vergleichung der Coefficienten von η_1^k auf beiden Seiten für ε_k eine Gleichung ergiebt:

$$\varepsilon_k = G_k(g_{10}, g_{hi}; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}) \qquad (h+i=2,3,\ldots)$$

in welcher die rechte Seite eine Summe einer endlichen Anzahl von Producten von den Coefficienten g_{hi} und den vorhergehenden Coefficienten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}$ ist. Setzt man also den Werth von ε_1 in die zweite, die so gefundenen Werthe von ε_1 und ε_2 in die dritte Gleichung ein und fährt so fort, so erhält man für jeden Coefficienten ε_k einen Ausdruck von der Form:

$$(12) \qquad \varepsilon_k = H_k(g_{10}, g_{hi}) \qquad (h+i=2,3,\ldots)$$

welcher ebenfalls aus einer endlichen Anzahl der Coefficienten g_{10}, g_{hi} allein durch die Operationen der Addition und der Multiplication gebildet ist.

Aus der Form der so gefundenen Ausdrücke für $\varepsilon_1(x|\alpha), \varepsilon_2(x|\alpha), \ldots$ folgt zunächst, dass *alle* jene Coefficienten algebraische mit g_{10} und den Reihen g_{ik}, also auch mit $e_0(x|\alpha)$ gleichverzweigte Functionen sind, deren Entwickelungen in der Umgebung der Stelle $(x=\alpha)$ keine negativen Potenzen von $(x-\alpha)$ enthalten, und welche innerhalb des oben angegebenen Convergenzbereiches der Reihen $g(x|\alpha)$ ebenfalls gleichmässig convergiren.

Wir zeigen jetzt weiter, dass die so gefundene Reihe für

$$\zeta_1 = \varepsilon_1(x|\alpha)\eta_1 + \ldots$$

als Function von x und von η_1 betrachtet innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle $(x=\alpha, \eta_1 = 0)$ gleichmässig convergirt, und dass die aus ihr sich ergebende Reihe für z_0 die Gleichung $f(z,y)=0$ nicht nur formal befriedigt, sondern eine Wurzel derselben in einer endlichen Umgebung des Curvenzweiges $(y = y_0, |x-\alpha| < \delta)$ wirklich darstellt.

Zum Beweise der Convergenz führen nun die folgenden ganz allgemeinen Betrachtungen: Denkt man sich in einer Potenzreihe von einer oder von mehreren Variablen, etwa in der Reihe:

$$p(\xi\eta) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}\xi^i\eta^k$$

alle Coefficienten p_{ik} durch ihre absoluten Beträge ersetzt und diese noch beliebig vergrössert, so erhält man eine neue Reihe mit lauter positiven Coefficienten:

$$\bar{p}(\xi\eta) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_{ik}\xi^i\eta^k$$

für welche allgemein $\bar{p}_{ik} \geqq |p_{ik}|$ ist. Jede solche Reihe $\bar{p}(\xi\eta)$ soll *grösser* als die Potenzreihe $p(\xi\eta)$ heissen, und diese Beziehung soll durch die Bezeichnung

$$\bar{p}(\xi\eta) \ll p(\xi\eta)$$

characterisirt werden. Ist z. B.

$$p(\xi) = p_0 + p_1\xi + p_2\xi^2 + \ldots$$

eine Potenzreihe von einer Variablen, deren Convergenzradius ρ_0 ist, ist ferner $\rho < \rho_0$ und P gleich oder grösser als der grösste Werth, den $|p(\xi)|$ auf der Peripherie des mit dem Radius ρ um den Nullpunkt beschriebenen Kreises annimmt, so ist bekanntlich allgemein:

$$|p_k| \leqq \frac{P}{\rho^k};$$

es ist also nach unserer Bezeichnung:

$$p(\xi) \ll P\left(1 + \frac{\xi}{\rho} + \frac{\xi^2}{\rho^2} + \ldots\right);$$

also für alle Werthe $|\xi| < \rho$ ist:

$$p(\xi) \ll \frac{P}{1 - \frac{\xi}{\rho}}.$$

Ist nun für irgend eine Reihe $p(\xi\eta) \ll \bar{p}(\xi\eta)$, so folgt aus bekannten Sätzen der Functionentheorie, dass der Convergenzbereich von $p(\xi\eta)$ gleich oder grösser ist als der von $\bar{p}(\xi\eta)$; convergirt also die grössere Reihe in einer endlichen Umgebung der Stelle $(\xi = 0\,,\, \eta = 0)$, so ist sicher das Gleiche für $p(\xi\eta)$ der Fall.

Ist ferner für zwei Potenzreihen $p(\xi\eta)$ und $q(\xi\eta)$

$$p(\xi\eta) \ll \bar{p}(\xi\eta)\,,\; q(\xi\eta) \ll \bar{q}(\xi\eta),$$

so ergiebt sich durch eine einfache Coefficientenvergleichung:

$$p(\xi\eta) + q(\xi\eta) \ll \bar{p}(\xi\eta) + \bar{q}(\xi\eta),$$
$$p(\xi\eta) \cdot q(\xi\eta) \ll \bar{p}(\xi\eta) \cdot \bar{q}(\xi\eta)$$

und das Gleiche gilt für die Summe und das Product von mehr als zwei Potenzreihen.

Diese Sätze wende ich jetzt auf die vorher gefundene Reihe

$$\zeta_1 = \varepsilon_1(x\,|\,\alpha)\eta_1 + \ldots$$

an, deren Coefficienten $\varepsilon_k(x\,|\,\alpha)$ convergente Reihen sind, welche nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x-\alpha$ fortschreiten; wir nehmen allgemein an, sie schreite nach ganzen Potenzen von:

$$\xi = (x-\alpha)^{\frac{1}{a}}$$

fort.

Um nun die Convergenz jener Reihe:

$$\zeta_1(\xi\eta_1) = \varepsilon_1(\xi)\eta_1 + \varepsilon_2(\xi)\eta_1^2 + \cdots$$

nachzuweisen, ersetzen wir alle Coefficienten $\varepsilon_k(\xi)$ durch geeignet gewählte grössere Potenzreihen $\bar{\varepsilon}_k(\xi)$ und brauchen dann nur zu zeigen, dass die so sich ergebende grössere Potenzreihe:

$$\bar{\zeta}_1(\xi\eta_1) = \bar{\varepsilon}_1(\xi)\eta_1 + \bar{\varepsilon}_2(\xi)\eta_1^2 + \cdots$$

in einer endlichen Umgebung der Stelle ($\xi = 0$, $\eta_1 = 0$) convergirt. Da nun in den Bestimmungsgleichungen:

$$\varepsilon_k(\xi) = H_k(g_{10}(\xi), g_{hi}(\xi))$$

die rechten Seiten aus den Reihen $g(\xi)$ allein durch Addition und Multiplication gebildet sind, so werden alle jene Reihen vergrössert, wenn jede Reihe $g(\xi)$ durch eine grössere ersetzt wird.

Es sei nun ρ_0 der Radius des gemeinsamen Convergenzkreises aller Reihen $g_{ik}(\xi)$; beschreibt man dann mit einem Radius $\rho < \rho_0$ einen Kreis um den Punkt $\xi = 0$ und ist G eine positive Zahl die grösser als der grösste Werth ist, den alle jene Reihen absolut genommen auf diesem Kreise annehmen, so ist nach der obigen Bemerkung für alle Reihen $g_{10}(\xi)$, $g_{hi}(\xi)$

$$g(\xi) \ll \mathfrak{G}(\xi) = \frac{G}{1-\frac{\xi}{\rho}}.$$

Ersetzt man daher in der Bestimmungsgleichung (11) alle Reihen $g_{10}(\xi)$, $g_{hi}(\xi)$ durch die eine grössere Reihe $\mathfrak{G}(\xi)$, so ergiebt sich eine Reihe $\bar{\zeta}_1(\xi\eta_1)$ welche sicher grösser ist als die zu untersuchende; ist demnach der Convergenzbereich von $\bar{\zeta}_1$ endlich, so gilt dasselbe von ζ_1. Die neue Reihe ist aber durch die Gleichung:

$$\bar{\zeta}_1 = \mathfrak{G}(\xi)\left(\eta_1 + \sum_{i+k=2}^{\infty} \eta_1^i \bar{\zeta}_1^k\right)$$

definirt, und diese kann für alle $|\bar{\zeta}_1| < 1$, $|\eta_1| < 1$ in der einfacheren Form geschrieben werden:

$$\bar{\zeta}_1 = \mathfrak{G}(\xi)\left(\frac{1}{(1-\eta_1)(1-\bar{\zeta}_1)} - (1+\bar{\zeta}_1)\right)$$

d. h. $\bar{\zeta}_1$ ist durch die quadratische Gleichung definirt:

$$A\bar{\zeta}_1^2 - \bar{\zeta}_1 + B = 0$$

wenn zur Abkürzung

$$A = 1 + \mathfrak{G}(\xi), \qquad B = \frac{\mathfrak{G}(\xi)\eta_1}{1-\eta_1}$$

gesetzt wird. Aus ihr ergiebt sich:

$$\bar{\zeta}_1 = \frac{1-\sqrt{1-4AB}}{2A},$$

wo das negative Vorzeichen der Wurzel zu wählen ist, da sich $\bar{\zeta}_1$ für $\eta_1 = 0$ oder für $B = 0$ auf Null reduciren soll, und diese Wurzel kann unter der Bedingung

$$(3) \qquad |4AB| < 1$$

nach dem binomischen Satze in die Reihe:

$$\bar{\zeta}_1 = B + AB^2 + 2A^2B^3 + 5A^3B^4 + \ldots$$

entwickelt werden, welche alsdann für alle der Bedingung (13) genügenden Werthsysteme ξ, η_1 gleichmässig convergirt.

Aus dieser Bedingung (13)

$$|4AB| = \left|4(1+\mathfrak{G}(\xi))\mathfrak{G}(\xi)\frac{\eta_1}{1-\eta_1}\right| < 1$$

ergiebt sich aber unmittelbar die einfachere:

$$|\eta_1| < \frac{1}{(1+2\mathfrak{G}(\xi))^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{2G}{1-\frac{|\xi|}{\rho}}\right)^2}.$$

Wie nahe also auch ρ dem gemeinsamen Convergenzradius ρ_0 aller Reihen

$g(\xi)$, und wie nahe dann auch $|\xi|$ an ρ gewählt werde, immer ergiebt sich für $|\eta_1|$ ein endlicher Convergenzbereich, und man erhält so das Resultat, dass die Reihe $\bar{\zeta}_1(\xi, \eta_1)$ also a fortiori die kleinere Reihe $\zeta_1(\xi, \eta_1)$ stets in einer endlichen Umgebung der Stelle $\xi = 0$, $\eta_1 = 0$ convergirt, wenn man nur ξ innerhalb des Convergenzbereiches der Reihen $g(\xi)$ beliebig annimmt.

Substituirt man jetzt die so gefundene convergente Potenzreihe für ζ_1 in (G), ersetzt wieder ξ durch $(x-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, η_1 durch $\frac{\eta}{(x-\alpha)^\sigma}$ und ζ_1 durch $\frac{\zeta}{(x-\alpha)^\tau}$ so erhält man jetzt aus (6') als eine Lösung der Gleichung $f(z, y) = 0$ die folgende Reihe:

$$z_0 = e_0(x|\alpha) + e_1(x|\alpha)(y-y_0) + e_2(x|\alpha)(y-y_0)^2 + \dots$$

wo $e_0(x|\alpha)$ die vorher gewählte einfache Wurzel von $f(e_0, y_0) = 0$ bedeutet und allgemein:

$$e_k(x|\alpha) = \frac{\varepsilon_i(x|\alpha)}{(x-\alpha)^{i\sigma-\tau}}$$

ist. Diese Reihen convergiren ebenfalls innerhalb des vorher bestimmten Convergenzbereiches gleichmässig, nämlich innerhalb eines Kreises, welcher entweder mit dem Convergenzbereiche des Anfangsgliedes $e_0(x|\alpha)$ identisch ist, oder dessen Peripherie durch die nächste Nullstelle von $f'(e_0, y_0)$ hindurchgeht. Selbstverständlich ist von diesem Bereiche noch die Stelle $x = \alpha$ selbst auszuschliessen, wenn einige von jenen Reihen $e_k(x|\alpha)$ mit negativen Potenzen von $x - \alpha$ beginnen. Da diese Reihe z_0 durch die Substitutionen:

$$\frac{z_0 - e_0(x|\alpha)}{(x-\alpha)^\tau} = \zeta_1, \qquad \frac{y-y_0}{(x-\alpha)^\sigma} = \eta_1 \qquad (x-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \xi$$

in die vorher behandelte Reihe $\zeta_1(\xi, \eta_1)$ übergeht, so folgt, dass auch diese Reihe z_0 als Function von x und y betrachtet stets innerhalb einer endlichen Umgebung des Curvenzweiges $y = y_0$ gleichmässig convergirt, wenn man x innerhalb des vorher angegebenen Convergenzbereiches der Coefficienten $e_k(x|\alpha)$ beliebig annimmt.

Endlich beweise ich noch, dass die so bestimmte convergente Reihe z_0 die Gleichung $f(z, y) = 0$ in einer endlichen Umgebung des Curvenzweiges $(y = y_0)$ mit jeder vorgegebenen Genauigkeit befriedigt, hier also wirklich eine Wurzel jener Gleichung darstellt. Die Function $f(z, y, x)$ ist aber als ganze Function jener drei Variablen in einer beliebig grossen endlichen Umgebung jeder endlichen Stelle convergent; ersetzt man also jene drei Variablen durch die Ausdrücke:

$$x = \alpha + \xi^a,$$
$$y = y_0 + \xi^{a\sigma}\eta_1,$$
$$z = e_0(\xi) + \xi^{a\tau}\zeta_1,$$

wo ζ_1 die vorher gefundene Reihe

$$\zeta_1 = \varepsilon_1(\xi)\eta_1 + \varepsilon_2(\xi)\eta_1^2 + \dots$$

bedeutet und beachtet man dabei dass jene drei Reihen in endlicher Umgebung der Stelle $(\xi = 0, \eta_1 = 0)$, eventuell mit Ausschluss der Nullstelle selbst, gleichmässig convergiren, so convergirt in derselben Umgebung auch die so sich ergebende Potenzreihe von ξ und η_1

$$f(e_0(\xi) + \xi^{a\tau}\zeta_1 \,;\, y_0 + \xi^{a\sigma}\eta_1 \,;\, \alpha + \xi^a)$$

und kann also nach steigenden Potenzen von η_1 geordnet werden, und da hierbei wegen der Gleichungen für die $\varepsilon_k(\xi)$ alle Coefficienten identisch Null werden, so folgt, dass in der That die so bestimmte Reihe z_0 eine Wurzel der vorgelegten Gleichung in der Umgebung der Stelle $(y = y_0, x = \alpha)$ darstellt.

§ 6. *Die Entwickelung der algebraischen Functionen in der Umgebung eines singulären Curvenzweiges.*

Durch die Untersuchungen des letzten Abschnittes ist bewiesen, dass die n Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Coefficienten

$$(1) \qquad f(z, xy) = z^n + a_{n-1}(xy)z^{n-1} + \dots + a_1(xy)z + a_0(xy) = 0$$

in der Umgebung eines Curvenzweiges ($y = y_0$, $|x - \alpha| < \delta$) in gleichmässig convergente Reihen

$$(1') \qquad e_0(x|\alpha) + e_1(x|\alpha)(y - y_0) + e_2(x|\alpha)(y - y_0)^2 + \dots$$

entwickelt werden können, falls jener Curvenzweig regulär ist, d. h. nicht der Discriminantencurve angehört.

Wir wollen jetzt erstens die Voraussetzung fallen lassen, dass der Coefficient $A_n(xy) = 1$, dass also z eine *ganze* algebraische Function von x und y ist, und dann auch die weitere, dass der Curvenzweig ($y = y_0$) ein regulärer ist. Alsdann ändert sich der Character der Potenzreihen (1') für die Wurzeln, wie jetzt gezeigt werden soll, einmal in der Weise, dass dieselben auch mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen von $y - y_0$ beginnen können, wie dies vorher auch für die rationalen Functionen $f(y, x)$ in der Umgebung einer ihrer Polcurven bewiesen wurde. Zweitens aber können in der Umgebung einer singulären Curve einige von den Reihen für die n Wurzeln nicht mehr nach ganzen sondern nach gebrochenen Potenzen des Linearfactors $y - y_0$ fortschreiten, ähnlich wie dies für die algebraischen Functionen von einer Variablen in der Umgebung eines Verzweigungspunktes der Fall ist. Gerade diese singulären Curven sind für die ganze Theorie von fundamentaler Bedeutung, denn sie spielen hier in der That dieselbe Rolle, wie die Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche in der Theorie der algebraischen Functionen *einer* Variablen.

Um jetzt das vorgelegte Problem gleich in seiner allgemeinsten Form zu umfassen und zu lösen, stellen wir uns die folgende Aufgabe:

Es sei z als algebraische Function von x und y durch eine beliebige Gleichung:

$$(1) \qquad f(z, xy) = A_0(xy) + A_1(xy)z + \dots + A_n(xy)z^n = 0$$

mit rationalen Coefficienten definirt; es sollen ihre n Wurzeln in der Umgebung eines beliebigen Curvenzweiges

$$y = y_0, \qquad |x - \alpha| < \delta$$

durch convergente Reihen:

$$z_0 = e_0(x|\alpha)(y - y_0)^{\varepsilon_0} + e_1(x|\alpha)(y - y_0)^{\varepsilon_1} + \dots$$

dargestellt werden, welche nach steigenden Potenzen des zugehörigen Linearfactors fortschreiten, für welche also $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots$ ist.

Zur Abkürzung setzen wir wieder

$$(2) \qquad (x-\alpha)^{\frac{1}{a}} = \xi, \qquad y - y_0 = \eta$$

wenn die Potenzreihe y_0 nach ganzen Potenzen von $(x-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet; alsdann entspricht der Umgebung des Curvenzweiges $(y=y_0,\ x=\alpha)$ die Umgebung der Stelle $(\xi=0,\ \eta=0)$. Wir denken uns dann die $(n+1)$ Gleichungscoefficienten $A_i(x, y)$ nach ganzen Potenzen von η in der Umgebung von $(\xi=0,\ \eta=0)$ entwickelt; dann mögen sich die folgenden Reihen ergeben:

$$(3) \qquad \begin{aligned} A_0(x, y) &= a_0(\xi)\eta^{\rho_0} + b_0(\xi)\eta^{\rho_0+1} + \dots, \\ A_1(x, y) &= a_1(\xi)\eta^{\rho_1} + b_1(\xi)\eta^{\rho_1+1} + \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n(x, y) &= a_n(\xi)\eta^{\rho} + b_n(\xi)\eta^{\rho_n+1} + \dots, \end{aligned}$$

wo also die ganzen Zahlen $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n$, die positiv, negativ oder Null sein können die Ordnungszahlen der Gleichungscoefficienten für den Linearfactor $\eta = y - y_0$ sind, und die $a_i(\xi), b_i(\xi), \dots$ algebraische Potenzreihen nach ganzen Potenzen von ξ bedeuten.

Substituirt man diese Reihen für die Coefficienten, so erhält man eine Reihe $f(z, \xi\eta)$ nach ganzen Potenzen von z, ξ und η, welche, da sie in Bezug auf z nur von endlichem Grade ist, in endlicher Umgebung der Stelle $(z=0,\ \xi=0,\ \eta=0)$ gleichmässig convergirt. Setzt man nun für z eine nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von η fortschreitende Reihe

$$(4) \qquad z_0 = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + \dots,$$

und convergirt diese ebenfalls gleichmässig in der Umgebung der Stelle $(\xi=\eta=0)$ so wird

$$f(z_0, \xi, \eta) = B_0(\xi)\eta^{\gamma_0} + B_1(\xi)\eta^{\gamma_1} + \dots$$

eine ebenfalls nach Potenzen von η fortschreitende Reihe; diese wird dann und nur dann identisch Null, wenn alle Coefficienten $B_0(\xi), B_1(\xi), \ldots$ identisch verschwinden; offenbar sind diese ganze Functionen der Coefficienten $e_0(\xi), e_1(\xi), \ldots$ von z_0, während die Exponenten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ aus den Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ linear zusammengesetzt sind. Die Aufgabe, die Reihe z_0 als Wurzel der Gleichung $f(z, \xi\eta) = 0$ zu bestimmen, reducirt sich also darauf,

> es sollen die unbekannten Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ und die unbekannten Coefficienten $e_0(\xi), e_1(\xi), e_2(\xi), \ldots$ der Reihe z_0 in (4) so bestimmt werden, dass sich in der Entwickelung der Reihe:
>
> $$f(z_0, \xi\eta) = B_0(\xi)\eta^{\gamma_0} + B_1(\xi)\eta^{\gamma_1} + \ldots$$
>
> **alle Coefficienten $B_0(\xi), B_1(\xi), \ldots$ auf Null reducieren.**

Wir suchen nun zunächst z_0 so zu bestimmen, dass das Anfangsglied $B_0(\xi)\eta^{\gamma_0}$ jener Entwickelung verschwindet, und wir zeigen, dass durch diese Forderung nur das Anfangsglied $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0}$ und zwar genau n-deutig bestimmt wird, entsprechend den Anfangsgliedern der Potenzreihen, in welche die n Gleichungswurzeln in der Umgebung der Stelle $(\xi = \eta = 0)$ entwickelt werden können.

Setzt man in die linke Seite der vorgelegten Gleichung:

$$f(z, xy) = \sum_{i=0}^{n} A_i(xy) z^i$$

für die Coefficienten $A_i(x, y)$ ihre Entwickelungen (3) und für z die noch unbekannte Entwickelung (4) von z_0 ein, so ergiebt sich für $f(z_0, \xi\eta)$ die Reihe:

$$f(z_0, \xi\eta) = \sum_{i=0}^{n} (a_i(\xi)\eta^{\rho_i} + b_i(\xi)\eta^{\rho_i+1} + \ldots)(e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \ldots)^i,$$

und man erkennt ohne Weiteres, dass die Summe der Anfangsglieder der $(n + 1)$ Producte $A_i z^i$ gleich:

$$(5) \quad f_0(\eta) = a_0(\xi)\eta^{\rho_0} + a_1(\xi)e_0\eta^{\rho_1+\varepsilon_0} + a_2(\xi)e_0^2\eta^{\rho_2+2\varepsilon_0} + \ldots + a_n(\xi)e_0^n\eta^{\rho_n+n\varepsilon_0}$$

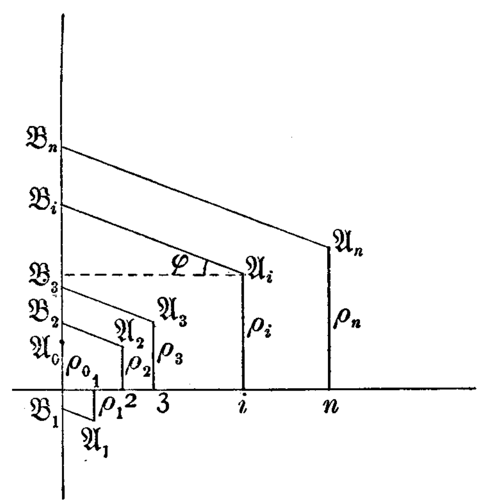
ist, und dass man für einen gegebenen Werth des Exponenten ε_0 das Anfangsglied $B_0(\xi)\eta^{\gamma_0}$ einfach findet, wenn man in $f_0(\eta)$ alle diejenigen

Glieder $a_i(\xi)e_0^i\eta^{\rho_i+i\varepsilon_0}$ zusammenfasst, für welche die Exponenten $\rho_i + i\varepsilon_0$ von η den kleinsten Werth besitzen.

Hieraus folgt zunächst, dass ε_0 nicht so gewählt werden darf, dass nur *einer* der $(n + 1)$ Exponenten:

$$\rho_0\,,\ \rho_1 + \varepsilon_0\,,\ \ldots,\ \rho_n + n\varepsilon_0$$

den kleinsten Werth besitzt, denn wäre etwa $\rho_i + i\varepsilon_0$ kleiner als alle anderen Exponenten $\rho_k + k\varepsilon_0$ so begänne die Entwickelung von $f(z_0, \xi\eta)$ mit dem einen Gliede niedrigster Ordnung $a_i(\xi)e_0^i\eta^{\rho_i+i\varepsilon_0}$ und z_0 könnte nur dann eine Gleichungswurzel sein, wenn $a_i(\xi)e_0(\xi)^i = 0$ also, da $a_i(\xi) \neq 0$



ist, wenn $e_0(\xi) = 0$ wäre. Es ist demnach ε_0 so zu wählen, dass mindestens zwei Exponenten etwa $\rho_g + g\varepsilon_0$ und $\rho_l + l\varepsilon_0$ den kleinsten Werth haben, d. h. dass die beiden Bedingungen erfüllt werden:

$$(6)\qquad \gamma_0 = \rho_g + g\varepsilon_0 = \rho_l + l\varepsilon,$$

$$\rho_k + k\varepsilon_0 \geqq \gamma_0. \qquad (k=0,1,2,\ldots,n)$$

Um nun alle Werthe von ε_0 zu finden, welche diesen beiden Bedingungen (6) genügen, wenden wir die folgende geometrische Repräsentation an, welche in beschränkteren Umfange bei dem s. g. Newton'schen

Parallelogramme benutzt wird. In einem rechtwinkligen Coordinatensysteme denken wir uns die $(n + 1)$ Punkte:

$$\mathfrak{A}_0 = (0 , \rho_0) , \ \mathfrak{A}_1 = (1 , \rho_1) , \ \ldots , \ \mathfrak{A}_n = (n , \rho_n)$$

so fixirt, dass allgemein für den Punkt $\mathfrak{A}_i$ die Abscisse $x_i = i$, die Ordinate $y_i = \rho_i$, d. h. gleich der Ordnungszahl des i^{ten} Coefficienten $A_i(x , y)$ in Bezug auf den Linearfactor η ist. Denkt man sich nun alle jene Punkte $\mathfrak{A}_0 , \mathfrak{A}_1 , \ldots , \mathfrak{A}_n$ durch parallele Strahlen auf die Ordinatenachse projicirt, und sind $\mathfrak{B}_0 , \mathfrak{B}_1 , \ldots , \mathfrak{B}_n$ die Projectionen jener n Punkte, so ist allgemein die Ordinate von $\mathfrak{B}_i$ gleich $\rho_i + i \operatorname{tg} \varphi$, wenn φ der Steigungswinkel der Projectionsstrahlen ist. Setzt man also

$$\varepsilon_0 = \operatorname{tg} \varphi ,$$

so dass also ε_0 die Steigung der Strahlen $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i$ bedeutet, so sind die Ordinaten der $(n + 1)$ Projectionen $\mathfrak{B}_0 \ldots \mathfrak{B}_n$ gleich

$$\rho_0 , \rho_1 + \varepsilon_0 , \rho_2 + 2\varepsilon_0 , \ldots , \rho_n + n\varepsilon_0 ;$$

sie stimmen also mit den Exponenten von η in (5) überein. Also wird man den beiden Bedingungen (6) dann und nur dann genügen, wenn die Steigung ε_0 so gewählt wird, dass von den $(n + 1)$ Punkten $\mathfrak{B}_k$ die beiden untersten, etwa $\mathfrak{B}_g$ und $\mathfrak{B}_l$ zusammenfallen. Dieser Bedingung wird offenbar genügt, wenn als Projectionsstrahl eine Sehne $\overline{\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_g}$ so gewählt wird, dass alle anderen Punkte $\mathfrak{A}_0 \ldots \mathfrak{A}_n$ oberhalb oder auf jener Sehne bzw. ihrer Verlängerung liegen, wenn jene Sehne also die Punktreihe $\mathfrak{A}_0 , \mathfrak{A}_1 , \ldots , \mathfrak{A}_n$ nach unten begrenzt.

Alle diese Begrenzungssehnen und damit alle möglichen Werthe von ε_0 findet man somit durch die folgende einfache Construction: Man verbinde den letzten Punkt $\mathfrak{A}_n$ durch eine Gerade $\overline{\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_u}$ mit demjenigen Punkte $\mathfrak{A}_u$, welche von $\mathfrak{A}_n$ aus gesehen am tiefsten liegt. Falls mehrere Punkte auf dieser Sehne liegen, wähle man für $\mathfrak{A}_u$ den äussersten von jenen Punkten. Hierauf verbinde man $\mathfrak{A}_u$ genau ebenso mit demjenigen von den früheren Punkten, $\mathfrak{A}_t$ durch die Gerade $\overline{\mathfrak{A}_u\mathfrak{A}_t}$, welcher von $\mathfrak{A}_u$ aus gesehen am tiefsten erscheint, und fahre in derselben Weise fort, bis zuletzt ein Punkt $\mathfrak{A}_s$ mit dem ersten Punkte $\mathfrak{A}_0$ durch eine Sehne $\overline{\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_0}$ verbunden wird. Auf diese Weise ergiebt sich ein nach unten convexes Polygon $\overline{\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_u\mathfrak{A}^t}\ldots\overline{\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_0}$, durch welches die Punktreihe nach unten begrenzt wird.

Es sei nun $\overline{\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_g}$ eine jener Begrenzungssehnen, $\mathfrak{A}_l=(l\,,\rho_l)$ ihr Anfangspunkt und $\mathfrak{A}_g=(g\,,\rho_g)$ ihr Endpunkt, so dass $l>g$, also in der Reihe $\mathfrak{A}_0\,,\mathfrak{A}_1\,,\ldots,\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_l$ ein späterer Punkt ist. Dann ist die Steigung ε_0 der Geraden $\overline{\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_g}$ durch die Gleichung:

$$\varepsilon_0=-\frac{\rho_l-\rho_g}{l-g}$$

gegeben, also positiv, negativ oder Null, je nachdem $\rho_g \gtreqless \rho_l$ ist. Es seien ferner der Reihe nach etwa

$$\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{A}_k\,\mathfrak{A}_i\,\mathfrak{A}_h\,\mathfrak{A}_g$$

alle diejenigen unter den $(n+1)$ Punkten, welche *auf* jener Sehne und nicht über ihr liegen. Dann ist

$$\gamma_0=\rho_l+l\varepsilon_0=\rho_k+k\varepsilon_0=\rho_i+i\varepsilon_0=\rho_h+h\varepsilon_0=\rho_g+g\varepsilon_0,$$

während für alle übrigen oberhalb $\overline{\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_g}$ liegenden Punkte $\mathfrak{A}_\lambda$

$$\rho_\lambda+\lambda\varepsilon>\gamma_0$$

ist. Dann ist das Aggregat $B_0(\xi)$ aller mit der niedrigsten Potenz η^{γ_0} von η multiplicirten Glieder in der Entwickelung $f(z_0\,,\xi\eta)$ gleich:

$$\varphi(e_0)=a_l(\xi)e_0^l+a_k(\xi)e_0^k+\ldots+a_g(\xi)e_0^g;$$

es besteht nämlich aus allen und nur den Producten $a_r(\xi)e_0^r$, für welche die zugehörigen Punkte $\mathfrak{A}_r$ auf dieser Begrenzungssehne $\overline{\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_g}$ liegen. Wählt man also für den Exponenten des Anfangsgliedes von $z_0=e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0}+\ldots$ speciell diesen Werth $-\frac{\rho_l-\rho}{l-g}$, so verschwindet das zugehörige Anfangsglied $B_0(\xi)$ dann und nur dann, wenn $e_0(\xi)$ eine der $(l-g)$ von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichung l^{ten} Grades:

$$\varphi(e)=a_l(\xi)e^l+\ldots+a_g(\xi)e^g=0,$$

oder also eine der Wurzeln der Gleichung $(l-g)^{\text{ten}}$ Grades:

$$\frac{1}{e^g}\varphi(e)=a_l(\xi)e^{l-g}+a_k(\xi)e^{k-g}+\ldots+a_g(\xi)=0$$

ist, deren Coefficienten $a_i(\xi)\ldots$ algebraische Potenzreihen von ξ sind. Diese Gleichung besitzt nun genau $(l-g)$ Wurzeln welche in irgend einer Reihenfolge durch

$$e_0^{(g+1)}(\xi)\,,\ e_0^{(g+2)}(\xi)\,,\ \ldots\,,\ e_0^{(l)}(\xi)$$

bezeichnet werden mögen; auch sie sind sämmtlich bestimmte algebraische Potenzreihen die im Allgemeinen nach ganzen Potenzen, und nur dann nach gebrochenen Potenzen von ξ fortschreiten, wenn die Stelle $\xi = 0$ gerade einem Verzweigungspunkte der der Gleichung $\varphi(e) = 0$ zugehörigen Riemann'schen Fläche entspricht.

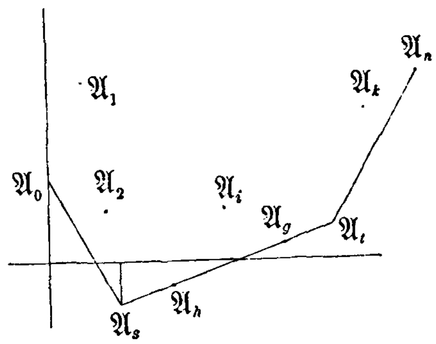


Fig. 2.

So ergiebt sich das folgende Resultat, welches der Einfachheit wegen nur für den in Fig. 2 angenommenen Fall von drei Begrenzungssehnen ausgesprochen werden mag, das aber natürlich ganz allgemein gilt:

Damit eine Potenzreihe:

$$z_0 = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + \ldots$$

eine Wurzel der Gleichung $f(z\,,\,\xi\eta)$ in der Umgebung der Stelle $(\xi = 0\,,\ \eta = 0)$ darstelle, muss zunächst der Exponent ε_0 ihres Anfangsgliedes einen der Werthe:

$$\varepsilon_0 = -\frac{\rho_0 - \rho_s}{0 - s}\,,\qquad \varepsilon_0' = -\frac{\rho_s - \rho_t}{s - t}\,,\qquad \varepsilon_0'' = -\frac{\rho_t - \rho_n}{t - n}$$

besitzen, welche der Steigung der drei Begrenzungssehnen

$$\overline{\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_0}\,,\ \overline{\mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_s}\,,\ \overline{\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_t}$$

gleich sind. Damit ferner $e_0(\xi)$ der einem jener drei Exponenten ε_0, ε_0', ε_0'' zugehörige Anfangscoefficient sei, muss ε_0 eine von Null verschiedene Wurzel von einer der drei zugehörigen Gleichungen sein

$$\begin{aligned}\varphi(e) &= a_s(\xi)e^s + \dots + a_0(\xi) = 0,\\ \varphi_1(e) &= a_t(\xi)e^t + \dots + a_s(\xi)e^s = 0,\\ \varphi_2(e) &= a_n(\xi)e^n + \dots + a_t(\xi)e^t = 0,\end{aligned}$$

deren linke Seiten aus denjenigen Producten $a_i(\xi)e^i$ gebildet sind, für welche die zugehörigen Punkte $\mathfrak{A}_i$ bzw. auf der ersten, zweiten, dritten Begrenzungssehne liegen.

Da so zu den Exponenten ε_0, ε_0', ε_0'' bzw. je s, $t-s$, $n-t$ von Null verschiedenen Coefficienten $e_0(\xi)$ gehören, so ergiebt sich die Anzahl der möglichen Anfangsglieder $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0}$ genau gleich $s+(t-s)+(n-t)=n$. Im Folgenden soll nun weiter gezeigt werden, dass in der That zu jedem dieser n Anfangsglieder eine und nur eine Gleichungswurzel gehört, d. h. dass man wirklich eine Darstellung aller n Wurzeln jener Gleichung in der Umgebung der Stelle ($\xi = 0$, $\eta = 0$) auf diese Weise erhält.

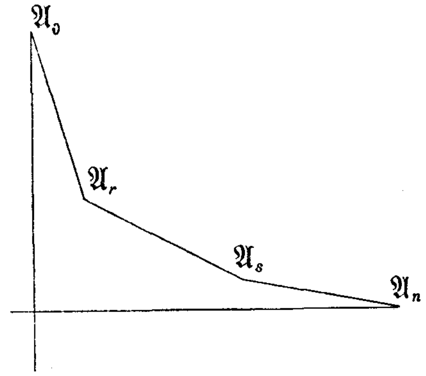


Fig. 3.

Wir ziehen aus diesem Resultate gleich eine für das Spätere wichtige Folgerung: Es sei z eine *ganze* algebraische Function, es seien also in der Gleichung:

$$f(z) = z^n + a_{n-1}(xy)z^{n-1} + \dots + a_0(xy) = 0$$

alle Coefficienten ganze Functionen von x und y. Ist dann $P(xy)$ eine beliebige irreductible ganze Function von x und y, und $y-y_0$ einer seiner Linearfactoren in y, so beginnen die Entwickelung *aller* Coefficienten $a_i(xy)$ nach Potenzen von $y-y_0$ mit nicht negativen Potenzen; es sind also in den Entwickelungen (3) alle Exponenten $\rho_i \geqq 0$ und $\rho_n = 0$ da $A_n(xy) = 1$ ist. In dem zugehörigen Diagramme besitzen also alle Begrenzungssehnen nothwendig eine positive Steigung oder die Steigung Null, und es ergiebt sich somit der Satz:

Ist z eine *ganze* algebraische Function, so kann die Gleichung $f(z, xy) = 0$ niemals durch eine Reihe $e_0(x)(y-y_0)^{\varepsilon_0} + \dots$ befriedigt werden, deren Anfangsglied von negativer Ordnung ist.

Für die Folge brauchen wir nur die Entwickelung von *einer* jener n Wurzeln zu finden; ist nämlich bewiesen, dass *jede* Gleichung mindestens *eine* solche Reihe als Wurzel besitzt, so wird sehr einfach gezeigt werden, dass jede Gleichung genau so viele solche Wurzeln hat, als ihr Grad angiebt. Wir wollen daher im Folgenden nur eine und zwar eine von denjenigen Reihen $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \dots$ aufsuchen, deren Ordnungszahl ε_0 den grössten Werth hat. Für sie ist ε_0 einfach die Steigung der *letzten* Begrenzungssehne $\overline{\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_0}$ in dem Diagramme, d. h. es ist

$$\varepsilon_0 = \frac{\rho_0 - \rho_s}{s} = Max\left(\frac{\rho_0 - \rho_1}{1}, \frac{\rho_0 - \rho_2}{2}, \dots, \frac{\rho_0 - \rho_n}{n}\right),$$

wo also s so zu wählen ist, dass jener Quotient möglichst gross ist. Für diese speciellen Wurzeln höchster Ordnung gilt daher der Satz:

Für die Reihen $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \dots$ höchster Ordnung, welche die Gleichung $f(z) = 0$ in der Umgebung der Stelle $\xi = \eta = 0$ befriedigen, ist $\varepsilon_0 = \frac{\rho_0 - \rho_s}{s}$, wo s so zu wählen ist, dass ε_0 möglichst gross ausfällt, und der Coefficient e_0 ist eine der s Wurzeln der Gleichung s^{ten} Grades:

$$\varphi_0(e_0) = a_s(\xi)e_0^s + \dots + a_k(\xi)e_0^k + a_h(\xi)e_0^h + \dots + a_0(\xi) = 0$$

wo $a_s \ldots a_k, a_h \ldots a_0$ die Anfangsglieder von denjenigen Gleichungscoefficienten $A_s \ldots A_k, A_h \ldots A_0$ sind, für welche die Quotienten

$$\frac{\rho_0 - \rho_s}{s} = \ldots = \frac{\rho_0 - \rho_k}{k} = \frac{\rho_0 - \rho_h}{h} = \ldots = \varepsilon_0$$

ebenfalls gleich ε_0 sind.

§ 7. *Berechnung einer Gleichungswurzel aus ihrem Anfangsgliede.*

Es sei nun $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0}$ das Anfangsglied einer der s Wurzeln höchster Ordnung der Gleichung $f(z) = 0$; es sollen jetzt alle folgenden Glieder jener Wurzel gefunden werden. Zu diesem Zwecke ersetzen wir z durch die neue Variable z_1, welche durch die Gleichung:

$$z = e_0\eta^{\varepsilon_0} + z_1 \tag{1}$$

mit z zusammenhängt, dann ist also:

$$z_1 = e_1\eta^{\varepsilon_1} + e_2\eta^{\varepsilon_2} + \ldots \tag{1'}$$

das Aggregat der noch unbekannten folgenden Glieder unserer Reihe. Die neue Unbekannte ist dann die Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades:

$$f_1(z_1) = f(e_0\eta^{\varepsilon_0} + z_1) = f(e_0\eta^{\varepsilon_0}) + z_1\frac{f'(e_0\eta^{\varepsilon_0})}{\underline{|1}} + z_1^2\frac{f''(e_0\eta^{\varepsilon_0})}{\underline{|2}} + \ldots + z_1^n\frac{f^{(n)}(e_0\eta^{\varepsilon_0})}{\underline{|n}} = 0,$$

d. h. z_1 genügt als Function von ξ und η betrachtet einer Gleichung:

$$f_1(z_1) = A_0'(\xi\eta) + A_1'(\xi\eta)z_1 + \ldots + A_n'(\xi\eta)z_1^n = 0, \tag{2}$$

in welcher allgemein:

$$A_k'(\xi\eta) = \frac{f^{(k)}(e_0\eta^{\varepsilon_0})}{\underline{|k}}$$

ist.

Hier ist nun wieder

$$z_1 = e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + e_2(\xi)\eta^{\varepsilon_2} + \ldots$$

so zu bestimmen, dass in der Entwickelung von

$$f_1(z_1) = f_1(e_1\eta^{\varepsilon_1} + \ldots) = B_0'(\xi)\eta^{\gamma_0'} + \ldots$$

nach Potenzen von η alle Coefficienten $B_0'(\xi), \ldots$ der Potenzen von η der Reihe nach verschwinden; hierzu muss zunächst wieder der Exponent ε_1 und der Coefficient $e_1(\xi)$ des Anfangsgliedes so bestimmt werden, dass sich das Anfangsglied $B_0'(\xi)$ auf Null reducirt, und diese Bestimmung kann offenbar wörtlich ebenso gemacht werden wie dies im vorigen Abschnitte für $e_0(\xi)$ und ε_0 angegeben wurde.

Um diese Aufgabe zu lösen, denke ich mir die neuen Gleichungscoefficienten $A_k'(\xi\eta)$ nach Potenzen von η entwickelt, und es sei:

$$(3) \qquad A_k'(\xi\eta) = a_k'(\xi)\eta^{\rho'_k} + \ldots, \qquad (k=0,1,\ldots,n)$$

so dass also allgemein A_k' die Ordnungszahl ρ_k' in Bezug auf η besitzt, und ich construire nun die Punktreihe $\mathfrak{A}_0'\mathfrak{A}_1' \ldots \mathfrak{A}_n'$ welche die Coordinaten $(0, \rho_0'), (1, \rho_1'), \ldots, (n, \rho_n')$ besitzen. Begrenzt man diese Punkte wieder von $\mathfrak{A}_n'$ ausgehend nach unten durch ein convexes Sehnenpolygon, so muss ε_1 notwendig die Steigung einer jener Begrenzungssehnen sein. Soll ferner die Ordnungszahl ε_1 von z_0 ebenfalls möglichst gross sein, so muss für ε_1 die Steigung der *letzten* Begrenzungssehne gewählt werden. Wir wollen auch hier diese weitere Bedingung einführen, da es nur auf die Bestimmung *einer* Wurzel ankommt. Nach dem am Schlusse des vorigen Abschnittes bewiesenen Satze ergiebt sich dann für den Exponent ε_1 die Bestimmung

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho_0' - \rho'_{s_1}}{s_1} = Max\left(\frac{\rho_0' - \rho_1'}{1}, \frac{\rho_0' - \rho_2'}{2}, \ldots, \frac{\rho_0' - \rho_n'}{n}\right),$$

wo s_1 also so zu wählen ist, dass jener Quotient so gross als möglich ausfällt, und der zugehörige Coefficient $e_1(\xi)$ ist eine der s_1 Wurzeln der Gleichung s_1^{ten} Grades:

$$\varphi_1(e) = a_{s_1}'(\xi)e_1^{s_1} + \ldots + a_i'(\xi)e_1^i + \ldots + a_0'(\xi) = 0,$$

wo $a_s'(\xi) \ldots a_i'(\xi) \ldots a_0'(\xi)$ die Anfangsglieder von allen und nur den Coefficienten $\ldots A_i' \ldots$ sind, für welche die zugehörigen Punkte $\mathfrak{A}_{s_1}' \ldots \mathfrak{A}_i' \ldots \mathfrak{A}_0'$ auf der letzten Begrenzungssehne dieses zweiten Diagrammes liegen.

In derselben Weise fortfahrend kann man nun beliebig viele Glieder jener Reihe berechnen. Man müsste jetzt nachdem das Glied $e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1}$ bestimmt ist, statt z_1 die neue Unbekannte z_2 durch die Gleichung:

$$z_1 = e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + z_2$$

bestimmen; dann genügt z_2 der Gleichung n^{ten} Grades:

$$f_2(z_2) = f_1(e_1\eta^{\varepsilon_1} + z_2) = A_0''(\xi\eta) + A_1''(\xi\eta)z_2 + \ldots + A_n''(\xi\eta)z_2^n = 0$$

und das Anfangsglied $e_2(\xi)\eta^{\varepsilon_2}$ von z_2 kann aus dieser Gleichung genau wie vorher angegeben wurde, berechnet werden u. s. f.

Auf diese Weise erhält man eine Reihe:

$$z_0 = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + \ldots,$$

deren Glieder durch ein wohl definirtes Verfahren beliebig weit berechnet werden können. Wir werden jetzt beweisen, dass diese Reihe nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von η fortschreitet, dass sie in einer endlichen Umgebung der Nullstelle gleichmässig convergirt, und in dieser eine Wurzel der vorgelegten Gleichung darstellt.

§ 8. *Die gefundene Reihe z_0 schreitet nach steigenden Potenzen von η fort.*

Ich zeige zunächst, dass die im vorigen Abschnitt bestimmte Reihe $z_0 = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + e_1(\xi)\eta^{\varepsilon_1} + \ldots$ in der That nach wachsenden Potenzen von η fortschreitet, dass also stets $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots$ ist. Da aber allgemein der Exponent ε_{k+1} auf genau dieselbe Art aus ε_k hervorgeht wie ε_1 aus ε_0 bestimmt wurde, so braucht nur der Beweis geführt zu werden, dass $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ ist. Hierzu führt nun die folgende principiell wichtige Überlegung, mit deren Hülfe nicht nur diese specielle, sondern auch alle anderen hier sich darbietenden Fragen über jene Reihe, ausgenommen die nach ihrer Convergenz, beantwortet werden können.

Der Gleichmässigkeit wegen werde die im vorigen Abschnitte in der Gleichung $\varepsilon_0 = \frac{\rho_0 - \rho_s}{s}$ eingeführte Zahl s im Folgenden mit s_0 bezeichnet, es sei also: $\varepsilon_0 = \frac{\rho_0 - \rho_{s_0}}{s_0}$ die Ordnung des Anfangsgliedes unserer Reihe, und

$$\varphi_0(e) = a_{s_0}(\xi)e^{s_0} + \ldots + a_0(\xi)$$

die linke Seite der Gleichung s_0^{ten} Grades, deren Wurzel der Anfangscoefficient e_0 ist. Setzt man dann in $f(z)$ $z = e\eta^{\varepsilon_0}$, wo e eine Unbestimmte bedeutet, so beginnt die Entwickelung von $f(e\eta^{\varepsilon_0})$ nach Potenzen von η mit $\varphi_0(e)\eta^{\rho_0}$, d. h. es besteht für ein variables e die Gleichung:

$$f(e\eta^{\varepsilon_0}) = \varphi_0(e)\eta^{\rho_0} + \psi_0(e, \eta)\eta^{\bar{\rho}_0} \tag{1}$$

wo $\bar{\rho}_0 > \rho_0$ ist.

Setzt man in dieser Identität

$$e = e_0 + \frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}}$$

so wird ihre linke Seite:

$$f(e_0\eta^{\varepsilon_0} + z_1) = f_1(z_1) = A'_0(\xi\eta) + A'_1(\xi\eta)z_1 + \dots + A'_n(\xi\eta)z_1^n, \tag{1'}$$

d. h. durch jene Substitution geht die linke also auch die rechte Seite von (1) in die Gleichung $f_1(z_1)$ über, deren Wurzel $z_1 = e_1\eta^{\varepsilon_1} + \dots$ ist. Diese Gleichung liefert daher auch eine directe Bestimmung der Ordnungszahlen ρ'_k, welche die Gleichungscoefficienten $A'_k(\xi\eta)$ in $f_1(z_1)$ besitzen; entwickelt man nämlich in der aus (1) und (1') folgenden Gleichung:

$$f_1(z_1) = \eta^{\rho_0}\varphi_0\left(e_0 + \frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}}\right) + \eta^{\bar{\rho}_0}\psi_0\left(e_0 + \frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}}, \eta\right)$$

die rechte Seite mit Hülfe des Taylor'schen Satzes nach Potenzen von z_1, so folgt:

$$f_1(z_1) = \eta^{\rho_0}\left(\varphi_0(e_0) + \varphi'_0(e_0)\frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}} + \frac{\varphi''_0(e_0)}{\underline{|2}}\cdot\frac{z_1^2}{\eta^{2\varepsilon_0}} + \dots\right)$$
$$+ \eta^{\bar{\rho}_0}\left(\psi_0(e_0, \eta) + \psi'_0(e_0, \eta)\frac{z_1}{\eta^{\varepsilon_0}} + \dots\right);$$

man erhält also durch Coefficientenvergleichung für die $(n + 1)$ Gleichungscoefficienten $A'_k(\xi\eta)$ die folgenden Entwickelungen nach Potenzen von η:

$$A'_k(\xi\eta) = \eta^{\rho_0 - k\varepsilon_0}\frac{\varphi_0^{(k)}(e_0)}{\underline{|k}} + \eta^{\bar{\rho}_0 - k\varepsilon_0}\frac{\psi_0^{(k)}(e_0, \eta)}{\underline{|k}}.$$

Da aber $\bar{\rho}_0 > \rho_0$ war, so folgt, dass die Ordnung ρ'_k von $A'_k(\xi\eta)$ stets und nur dann gleich $\rho_0 - k\varepsilon_0$ ist, wenn $\varphi_0^{(k)}(e_0) \neq 0$, im entgegengesetzten Falle aber sicher grösser als $\rho_0 - k\varepsilon_0$ ist. Man kann also für jeden Werth von k

$$\rho'_k = \rho_0 - k\varepsilon_0 + \delta_k \qquad (k=0,1,\dots,n) \tag{2}$$

setzen, wo δ_k nur dann verschwindet, wenn $\varphi_0^{(k)}(e_0) \neq 0$ ist, sonst aber stets einen positiven Werth hat.

Die Reihe e_0 ist nun eine der s_0 Wurzeln der Gleichung $\varphi_0(e_0) = 0$; um gleich die allgemeinste Annahme zu machen, werde vorausgesetzt, dass e_0 eine λ_0-fache Wurzel derselben, dass also:

$$\varphi_0(e_0) = (e - e_0)^{\lambda_0} \overline{\varphi}_0(e_0)$$

ist, wo jetzt $\overline{\varphi}_0(e_0) \neq 0$ ist. Alsdann verschwinden bekanntlich die λ_0 ersten Ableitungen:

$$\varphi_0(e), \varphi_0'(e), \varphi_0''(e), \ldots, \varphi_0^{(\lambda_0 - 1)}(e)$$

für $e = e_0$ während $\varphi_0^{(\lambda_0)}(e_0)$ sicher nicht verschwindet. Daraus folgt, dass in der obigen Gleichung (2) die λ_0 ersten Zahlen $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{\lambda_0 - 1}$ sicher positiv, δ_{λ_0} aber sicher gleich Null ist, dass also

$$\rho'_{\lambda_0} = \rho_0 - \lambda_0 \varepsilon_0 \tag{2'}$$

ist.

Mit Hülfe dieses Resultates kann nun leicht bewiesen werden, dass $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ ist. In der That war:

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho_0' - \rho_{s_1}'}{s_1} = Max\left(\frac{\rho_0' - \rho_1'}{1}, \frac{\rho_0' - \rho_2'}{2}, \ldots, \frac{\rho_0' - \rho_n'}{n}\right).$$

Nun ist aber allgemein wegen (2)

$$\frac{\rho_0' - \rho_k'}{k} = \frac{(\rho_0 + \delta_0) - (\rho_0 - k\varepsilon_0 + \delta_k)}{k} = \varepsilon_0 + \frac{\delta_0 - \delta_k}{k}$$

also:

$$\varepsilon_1 = Max\left(\ldots \varepsilon_0 + \frac{\delta_0 - \delta_k}{k} \ldots\right) = \varepsilon_0 + Max\left(\frac{\delta_0 - \delta_1}{1}, \frac{\delta_0 - \delta_2}{2}, \ldots\right),$$

und von jenen n Brüchen ist mindestens einer, nämlich $\frac{\delta_0 - \delta_{\lambda_0}}{\lambda_0} = \frac{\delta_0}{\lambda_0}$ positiv, also ist sicher:

$$\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_0 + \frac{\delta_0}{\lambda_0} > \varepsilon_0,$$

und hiermit ist jener Beweis vollständig erbracht, d. h. es ist erwiesen, dass jene Reihe nach steigenden Potenzen von η fortschreitet.

§ 9. *Theilung der Reihe z_0 in ihren regulären und irregulären Theil.*

Aus denselben Betrachtungen folgt aber jetzt ein weit wichtigeres Resultat für unsere Reihe z_0.

Der erste Coefficient e_0 war eine λ_0-fache Wurzel der ersten Coefficientengleichung $\varphi_0(e) = 0$ vom Grade s_0. Ganz ebenso ist die zweite Coefficientengleichung

$$\varphi_1(e) = 0$$

vom Grade s_1. Wir führen jetzt den wichtigen Nachweis, dass stets $s_1 \leqq s_0$ ist, und zwar zeigen wir gleich die Richtigkeit des folgenden sehr viel tiefer gehenden Satzes:

> Der Grad s_1 der zweiten Coefficientengleichung $\varphi_1(e) = 0$ ist höchstens gleich der Zahl λ_0 welche den Grad der Vielfachheit der Wurzel e_0 in der ersten Coefficientengleichung angiebt.

Jener Grad s_1 ist nämlich die grösste Zahl, für welche der Quotient

$$\frac{\rho_0' - \rho_k'}{k} = \varepsilon_0 + \frac{\delta_0 - \delta_k}{k}$$

möglichst gross ausfällt. Hieraus folgt aber leicht, dass s_1 nicht grösser als λ_0 sein kann. Ist nämlich $k > \lambda_0$ so ist

$$\frac{\delta_0 - \delta_k}{k} < \frac{\delta_0 - \delta_k}{\lambda_0} \leqq \frac{\delta_0}{\lambda_0} = \frac{\delta_0 - \delta_{\lambda_0}}{\lambda_0}$$

weil $k > \lambda_0$, $\delta_k \geqq 0$, und $\delta_{\lambda_0} = 0$ ist; es ist also stets

$$\frac{\rho_0' - \rho_k'}{k} < \frac{\rho_0' - \rho_{\lambda_0}'}{\lambda_0},$$

d. h. der Grad s_1 der zweiten Coefficientengleichung muss eine der Zahlen $1, 2, \ldots, \lambda_0$ sein, w. z. b. w.

Sind jetzt $\varphi_0(e) = 0$, $\varphi_1(e) = 0$, $\varphi_2(e) = 0$, ... die erste, zweite, dritte, ... Coefficientengleichung für unsere Reihe, und sind $e_0, e_1, e_2, \ldots$ bzw.

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$-fache Wurzeln jenerGlei chungen u. s. w., so kann man ihre linken Seiten folgendermassen schreiben:

$$\varphi_0(e) = (e - e_0)^{\lambda_0}\overline{\varphi}_0(e),$$
$$\varphi_1(e) = (e - e_1)^{\lambda_1}\overline{\varphi}_1(e),$$
$$\varphi_2(e) = (e - e_2)^{\lambda_2}\overline{\varphi}_2(e),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo allgemein $\overline{\varphi}_k(e)$ die Wurzel $e = e_k$ nicht mehr enthält. Sind endlich $s_0, s_1, s_2, \ldots$ die Grade jener Gleichungen, so folgt aus dem soeben bewiesenen Satze, dass:

$$s_1 \leqq \lambda_0 \leqq s_0,$$
$$s_2 \leqq \lambda_1 \leqq s_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

und es zeigt sich so, dass für eine beliebige $k + 1^{\text{te}}$ Coefficientengleichung im Allgemeinen:

$$s_{k+1} < s_k$$

ist; nur dann kann $s_{k+1} = s_k$ sein, wenn auch $\lambda_k = s_k$ ist, d. h. wenn die nächstvorhergehende Coefficientengleichung:

$$\varphi_k(e) = (e - e_k)^{s_k}$$

ist, also nur die einzige Wurzel e_k besitzt. Da somit die Grade $s_0, s_1, s_2, \ldots$ der Coefficientengleichungen, wie weit man auch gehen mag, immer abnehmen, oder gleich bleiben, so müssen von einem gewissen Gliede an alle folgenden Gleichungen von einem und demselben Grade sein. Es sei $e_\tau(\xi)^{\varepsilon_\tau}$ jenes Glied und es sei

$$s = s_\tau = s_{\tau+1} = s_{\tau+2} = \ldots$$

der gemeinsame Grad aller jener Coefficientengleichungen. Nach dem soeben bewiesenen Satze besitzt dann aber jede der folgenden Gleichungen $\varphi_k(e) = 0$ nur eine einige Wurzel d. h. es ist, wie weit man auch in der Reihe z_0 gehen mag:

$$\begin{aligned} &\varphi_\tau(e) = (e - e_\tau)^s, \\ (1) \qquad &\varphi_{\tau+1}(e) = (e - e_{\tau+1})^s, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Im folgenden Paragraphen wird bewiesen werden, dass jene Gleichungen (1) stets linear werden, d. h. dass $s = 1$ ist, falls die Gleichungsdiscriminante $D(xy)$ nicht identisch verschwindet, falls also die Gleichung $f(z, xy) = 0$ für variable x, y keine gleichen Wurzeln hat. Für die folgenden Betrachtungen können wir aber auch $s \geqq 1$ voraussetzen.

Auf das in (1) angegebene Resultat gründet sich nun eine wichtige Eintheilung der ganzen Reihe $z_0 = \sum_{i=0}^{\infty} e_i(\xi)\eta^{\varepsilon_i}$. Wir bezeichnen nämlich das Aggregat:

$$\zeta = e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \ldots + e_{\tau-1}(\xi)\eta^{\varepsilon_{\tau-1}}$$

der τ vor jenem Elemente $e_\tau(\xi)\eta^{\varepsilon_\tau}$ stehenden Glieder als den irregulären Theil von z_0, und die ganze übrigbleibende Reihe

$$\bar{z} = e_\tau(\xi)\eta^{\varepsilon_\tau} + e_{\tau+1}(\xi)\eta^{\varepsilon_{\tau+1}} + \ldots$$

als den regulären Theil von z_0. Nach dem soeben Bewiesenen besteht dann der irreguläre Theil ζ von $z_0 = \zeta + \bar{z}$ stets aus einer endlichen Anzahl von Gliedern. Um jetzt die Fundamentaleigenschaft des regulären Theiles $\bar{z}$ zu finden, bilde ich die Gleichung $\bar{f}(\bar{z}) = 0$, der $\bar{z}$ allein genügt. Dieselbe kann folgendermassen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\bar{f}(\bar{z}) = f(\zeta + \bar{z}) = f(\zeta) + \bar{z}f'(\zeta) + \ldots + \bar{z}^n \frac{f^{(n)}(\zeta)}{\underline{|n}} \\ = \bar{A}_0(\xi\eta) + \bar{A}_1(\xi\eta)\bar{z} + \ldots + \bar{A}_n(\xi\eta)\bar{z}^n = 0.\end{aligned}$$

Entwickelt man alle jene Coefficienten $\bar{A}_i(\xi\eta) = \frac{f^{(i)}(\zeta)}{\underline{|i}}$ nach Potenzen von η, so erhält man Reihen, welche im Allgemeinen nach gebrochenen Potenzen von η fortschreiten, denn ihre Exponenten setzen sich ganzzahlig aus den Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\tau-1}$ zusammen; ist also b der Generalnenner jener τ Exponenten ε_i, so schreiten die Entwickelungen aller Coefficienten $\bar{A}_i$ nach *ganzen* Potenzen von $\eta^{\frac{1}{b}}$ fort. Die Ordnungszahlen $\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_1, \ldots, \bar{\rho}_n$ dieser Gleichungscoefficienten $\bar{A}_0(\xi\eta), \ldots, \bar{A}_n(\xi\eta)$ sind also auch Brüche mit dem Nenner b, sie können also alle in der Form

$$\bar{\rho}_i = \frac{t_i}{b}$$

geschrieben werden, wo $t_0, t_1, \ldots, t_n$ ganze Zahlen bedeuten. Die Coefficienten der einzelnen Potenzen von η sind aber algebraische Potenzreihen von ξ, welche durch die irregulären Reihencoefficienten $e_0(\xi), e_1(\xi), \ldots, e_{\tau-1}(\xi)$ rational ausdrückbar, also mit ihnen gleichverzweigt sind.

Man kann nun für alle regulären Glieder unserer Reihe die beiden folgenden Sätze aussprechen:

1) Alle regulären Exponenten $\varepsilon_\tau, \varepsilon_{\tau+1}, \ldots$ sind sämmtlich Brüche mit dem Generalnenner der τ ersten Exponenten.

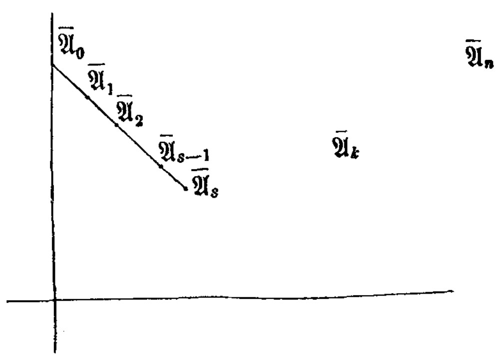
2) Alle regulären Coefficienten $e_\tau(\xi), e_{\tau+1}(\xi), \ldots$ sind sämmtlich durch die τ ersten Coefficienten rational ausdrückbar, also mit diesen gleichverzweigt.

Beide Sätze brauchen wieder nur für das erste Glied $e_\tau(\xi)\eta^{\varepsilon_\tau}$ bewiesen zu werden, da sie für alle späteren in gleicher Weise folgen. Nun ergaben sich für ε_τ und $e_\tau(\xi)$ die Bestimmungsgleichungen:

$$\varepsilon_\tau = \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_s}{s},$$

$$(2) \qquad \bar{\varphi}(e) = (e - e_\tau)^s = e^s - s e_\tau e^{s-1} + \frac{s(s-1)}{1.2} e_\tau^2 e^{s-2} - \ldots \pm e_\tau^s = 0.$$

Zunächst ist hier ε_τ die Steigung der letzten Begrenzungssehne $\overline{\mathfrak{A}}_s\overline{\mathfrak{A}}_0$ des zugehörigen Diagrammes, und in $\bar{\varphi}(e)$ treten die Anfangsglieder von allen



und nur den Gliedern $\bar{A}_0(\xi\eta), \bar{A}_1(\xi\eta), \ldots$ auf, für welche die zugehörigen Punkte $\bar{\mathfrak{A}}_0, \bar{\mathfrak{A}}_1, \ldots$ auf und nicht über $\overline{\mathfrak{A}}_s\overline{\mathfrak{A}}_0$ liegen. Nun treten aber in $\bar{\varphi}(e)$ in (1) *alle* Glieder mit von Null verschiedenen Coefficienten auf; es liegen also *alle* Punkte $\bar{\mathfrak{A}}_1, \bar{\mathfrak{A}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{A}}_{s-1}$ auf jener Begrenzungssehne, und ihre Steigung ε_τ stimmt also auch mit der Steigung von $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0}$ überein, es ergiebt sich also in diesem Falle für jene Steigung ε_τ der einfachere Ausdruck:

$$\varepsilon_\tau = \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_1}{1} = \frac{t_0 - t_1}{b}$$

d. h. auch ε_τ ist ein Bruch mit demselben Nenner b, w. z. b. w.

Zweitens sind alle Coefficienten von $\bar{\varphi}(e) = (e - e_\tau)^s = e^s - se^{s-1}e_\tau + \dots$ die Anfangsglieder der Entwickelungen der zugehörigen Coefficienten A_0, $A_1, \dots, A_s$, also durch $e_0(\xi), e_1(\xi), \dots, e_{\tau-1}(\xi)$ rational ausdrückbar. Also ist auch speciell $se_\tau(\xi)$, der Coefficient von e^{s-1}, ebenfalls rational durch $e_0(\xi) \dots e_{\tau-1}(\xi)$ ausdrückbar, also gilt das Gleiche für $e^\tau(\xi)$ selbst, und damit ist auch der zweite Theil unserer Behauptung erwiesen.

Man erhält also das wichtige Resultat, dass die durch unser Verfahren bestimmte Reihe $e_0(\xi)\eta^{\varepsilon_0} + \dots$ nach steigenden *ganzzahligen* Potenzen von $\eta^{\frac{1}{b}}$ fortschreitet, wo b eine bestimmte ganze Zahl bedeutet, welche sich aus der Natur der zu Grunde gelegten Curve $\eta = y - y_0$ von selbst ergiebt.

Ersetzen wir wieder η und ξ bzw. durch $y - y_0$ und $(x - \alpha)^{\frac{1}{a}}$ so ergiebt sich der folgende Ausdruck für unsere Reihe:

$$z_0 = e_h(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots,$$

und die Coefficienten sind algebraische Potenzreihen von $x - \alpha$ welche ebenfalls nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - \alpha$ fortschreiten.

Aus der Untersuchung des s. g. regulären Falles im § 4 ergiebt sich, dass für alle Curven, welche nicht Theile der Discriminantencurve sind, stets $b = 1$ ist, denn für alle diese Curven schritten ja die sämmtlichen n Reihen für die Wurzeln von $f(z) = 0$ nach *ganzen* Potenzen von $y - y_0$ fort. Für die Discriminantencurven können aber einige von den Wurzeln nach gebrochenen Potenzen von $y - y_0$ fortschreiten, und gerade diese Entwickelungen sind hier von besonderer Bedeutung, da sie denjenigen in der Umgebung eines Verzweigungspunktes in der Theorie der Functionen einer Variablen entsprechen.

Die Reihe $z_0 = \sum_{k=h}^{\infty} e_k(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\frac{k}{b}}$ befriedigt nun die Gleichung $f(z, xy) = 0$ *formal;* setzt man nämlich diese Reihe für z in $f(z)$ ein, und entwickelt die so gefundene Function ebenfalls nach Potenzen von $y - y_0$, so fallen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $y - y_0$ fort, d. h. die linke Seite beginnt mit einer beliebig hohen Potenz von $y - y_0$, wenn man in jener Reihe für z von vorn herein genügend viele Glieder berücksichtigt. In der That sei:

$$z_l = e_h(x\,|\,a)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + \ldots + e_l(x\,|\,a)(y - y_0)^{\frac{l}{b}}$$

das Aggregat der $(l + 1) - h$ ersten Glieder jener Reihe; dann ist, wie oben gezeigt wurde, die Ordnungszahl von $f(z_l)$ gleich $\rho_0^{(l)}$ und $\rho_0^{(l)}$ ist ebenfalls ein Bruch $\frac{t_l}{b}$ mit dem Nenner b. Bildet man nun die Ordnungszahlen $\rho_0^{(h)}, \rho_0^{(h+1)}, \rho_0^{(h+2)}, \ldots$ von $f(z_h), f(z_{h+1}), f(z_{h+2}), \ldots$ so erhält man eine Reihe von Brüchen mit dem Nenner b

$$\frac{t_h}{b}, \frac{t_{h+1}}{b}, \frac{t_{h+2}}{b}, \ldots;$$

beachtet man dabei, dass nachdem a. S. 378 N° (2) gegebenen Beweise jene Ordnungszahlen eine wachsende Reihe bilden, so folgt, dass auch von den *ganzen* Zahlen $t_h, t_{h+1}, \ldots$ jede folgende grösser ist als die vorhergehende, dass somit diese, also auch die Zahlen $\rho_0^{(l)}$, zuletzt über jedes Mass hinaus wachsen, und damit ist gezeigt, dass die gefundene Reihe in der That die vorgelegte Gleichung formal befriedigt.

§ 10. *Die n Congruenzwurzeln der Congruenz* $f(z) \equiv 0$.

Im vorigen Abschnitt ist bewiesen worden, dass für jede Gleichung $f(z, xy) = 0$ mindestens eine nach Potenzen von $(y - y_0)$ fortschreitende Reihe $z_0 = \mathfrak{P}(y\,|\,y_0)$ existirt, durch welche sie formal befriedigt wird. Wir wollen zunächst nachweisen, dass die Anzahl der Potenzreihen $\mathfrak{P}(y\,|\,y_0)$ welche die gleiche Eigenschaft besitzen stets gleich dem Grade jener Gleichung ist; erst dann können wir weiter den Beweis erbringen, dass jene n Reihen in einem endlichen Bereiche gleichmässig convergiren, und hier die n Wurzeln der Gleichung darstellen.

Zu diesem Zwecke spreche ich die Beziehung der vorher gefundenen Reihe $z_0 = \mathfrak{P}(y\,|\,y_0)$ zu der Function $f(z, xy)$ in einer mehr arithmetischen Form aus.

Wählt man statt jener ganzen Reihe, nur einen beliebigen Theil

$$z_l = e_h(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + \dots + e_l(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\frac{l}{b}}$$

und substituirt diesen in $f(z, xy)$ so wird $f(z_l, xy)$ durch eine ganz bestimmte Potenz $(y - y_0)^{m_l}$ theilbar, d. h. es ist:

$$f(z_l) = (y - y_0)^{m_l} G(y \mid y_0),$$

wo $G(y \mid y_0)$ eine *ganze* Function von $y - y_0$ bedeutet. Wir sagen daher: z_l ist eine Wurzel der Congruenz:

$$(1) \qquad f(z) \equiv 0 \pmod{(y - y_0)^{m_l}},$$

den Congruenzbegriff genau in dem in der Arithmetik gebräuchlichen Sinne aufgefasst. Lassen wir nun l grösser und grösser werden, so wächst m_l ebenfalls mehr und mehr, und kann grösser als jede noch so grosse Zahl gemacht werden. Jene Reihe z_0 kann demnach als Wurzel der Congruenz:

$$f(z) \equiv 0 \pmod{(y - y_0)^M}$$

definirt werden, wenn M eine beliebig gross anzunehmende Zahl bedeutet.

Wir wollen die in den vorigen Abschnitten gefundene Reihe

$$z_0 = \sum_{k=h}^{\infty} e_k(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\frac{k}{b}}$$

nunmehr durch z_1 bezeichnen; dann kann jenes bisher gefundene Resultat jetzt folgendermassen ausgesprochen werden:

Jede Congruenz:

$$(2) \qquad f(z) \equiv 0 \pmod{(y - y_0)^{M_1}}$$

für eine beliebig hohe Potenz von $(y - y_0)$ als Modul besitzt mindestens eine Congruenzwurzel

$$z_1 = \Sigma e_k(x \mid \alpha)(y - y_0)^{\frac{k}{b}}.$$

Der Beweis nun, dass jene Congruenz genau n Wurzeln besitzt, gründet sich auf den Hülfssatz:

Ist $z = z_1$ eine Wurzel der Congruenz (2), so ist $f(z)$ modulo $(y - y_0)^{M_1}$ durch den zugehörigen Linearfactor $z - z_1$ theilbar, d. h. es ist:

$$(2') \qquad f(z) \equiv (z - z_1) f_1(z) \mod (y - y_0)^{M_1}.$$

In der That, ist $f(z_1)$ durch $(y - y_0)^{M_1}$ theilbar, so ist:

$$(3) \qquad f(z) \equiv f(z) - f(z_1) = (z - z_1) f_1(z) \mod (y - y_0)^{M_1}$$

wo

$$f_1(z) = \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = B_{n-1}(x, y) z^{n-1} + \ldots + B_0(xy)$$

eine ganze Function $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades von z mit rationalen Functionen von x, y, y_0 als Coefficienten ist.

Auch für die Function $f_1(z)$ kann man nun durch unsere Methode eine Reihe z_2 bestimmen, welche nach Potenzen von $y - y_0$ fortschreitet und die Gleichung $f_1(z) = 0$ formal befriedigt. Nach dem soeben bewiesenen Satze ergiebt sich so für $f_1(z)$ die folgende Congruenz:

$$f_1(z) \equiv (z - z_2) f_2(z) \mod (y - y_0)^{M_2},$$

wo $f_2(z)$ eine ganze Function $(n - 2)^{\text{ten}}$ Grades und M_2 eine beliebig grosse Zahl bedeutet, und diese Congruenz vertritt eine Gleichung:

$$f_1(z) = (z - z_2) f_2(z) + (y - y_0)^{M_2} G_2(z, y).$$

Setzt man diesen Werth von $f_1(z)$ in (3) ein, so folgt:

$$f(z) \equiv (z - z_1)(z - z_2) f_2(z) + (z - z_2)(y - y_0)^{M_2} G_2(z, y) \mod (y - y_0)^{M_1}.$$

Wählt man endlich die ganz beliebige Zahl M_2 so gross, dass das zweite Glied durch $(y - y_0)^{M_1}$ theilbar ist, so ergiebt sich die Congruenz:

$$f(z) \equiv (z - z_1)(z - z_2) f_2(z) \mod (y - y_0)^{M_1}.$$

In derselben Weise kann man weiter schliessen: man bestimmt jetzt eine Wurzel z_3 von $f_2(z) \equiv 0$ u. s. w. und gelangt so zuletzt zu der für eine beliebig hohe Potenz $(y - y_0)^M$ gültigen Congruenz:

$$(4) \qquad f(z) \equiv A(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) \mod (y - y_0)^M,$$

wo A eine Function nullten Grade in z ist, welche sich durch Coefficientenvergleichung gleich $A_n(x, y)$ bestimmt. Aus dieser Congruenz folgt zunächst, dass $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sämmtlich ebenso wie z_1 Congruenzwurzeln von $f(z) \equiv 0$ sind, denn für $z = z_i$ wird die rechte Seite, also auch die linke Seite $f(z_i)$ durch $(y - y_0)^M$ theilbar, wo M beliebig gross angenommen werden kann.

Ebenso leicht erkennt man aber, dass keine andere Reihe z_0 eine Wurzel von $f(z) \equiv 0$ sein kann. Substituirt man nämlich $z = z_0$ in (4), so müsste:

$$f(z_0) \equiv A(z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \ldots (z_0 - z_n) \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ (y - y_0)^M$$

sein; aber jenes Product von $(n + 1)$ Factoren kann nur dann durch eine *beliebig hohe* Potenz von $(y - y_0)$ theilbar sein, wenn mindestens einer seiner Factoren eine beliebig hohe Potenz dieses Linearfactors enthält und dies ist wiederum nur dann der Fall, wenn entweder $A = 0$ ist, oder wenn z_0 einer der n Reihen $z_1, \ldots, z_n$ gleich ist.

Der Einfachheit wegen denken wir uns von vorn herein den Coefficienten $A_n(xy)$ von z^n durch Division zu Eins gemacht. Denkt man sich dann in der soeben gefundenen Congruenz:

$$z^n + A_{n-1}(xy)z^{n-1} + \ldots + A_0(xy) \equiv (z - z_1) \ldots (z - z_n) \ \mathrm{mod}\ (y - y_0)^M$$

die Coefficienten der einzelnen Potenzen von z auf beiden Seiten verglichen, so ergiebt sich, dass die aus den n Potenzreihen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ gebildeten elementaren symmetrischen Functionen den Gleichungscoefficienten gleich sind, abgesehen von einer beliebig hohen Potenz von $(y - y_0)^M$. Hieraus folgt weiter dass überhaupt jede symmetrische Function der n Wurzeln einer bestimmten rationalen Function von x und y congruent ist.

Speciell nennen wir auch hier das Product $z_1 z_2 \ldots z_n$ aller n Wurzeln *die Norm von* z und bezeichnen dasselbe durch $N(z)$. Dann ergiebt sich für diese Function die bekannte Gleichung:

$$N(z) = (-1)^n A_0(xy);$$

jene Norm stimmt also abgesehen vom Vorzeichen mit dem von z freien Gliede der Gleichung $f(z) = 0$ überein.

Aus diesen Thatsachen ziehen wir zunächst die Folgerung dass jene n Congruenzwurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sicher von einander verschieden, sind, wenn die *Gleichung* $f(z) = 0$ lauter verschiedene Wurzeln besitzt. Wären nämlich zwei jener Reihen gleich, so wäre das Differenzenproduct

$$D(z_1 \dots z_n) = \prod_{i \gtrless k} (z_i - z_k)$$

identisch Null; nach dem soeben bewiesenen Satze ist aber diese symmetrische Function $D(z_1 \dots z_n)$ modulo $(y - y_0)^M$ der Discriminante $D(xy)$ der Gleichung $f(z) = 0$ congruent, und diese müsste daher ebenfalls durch jede noch so hohe Potenz $(y - y_0)^M$ von $y - y_0$ theilbar sein, was nur dann möglich ist, wenn $D(x, y) = 0$ ist, wenn also die betrachtete Gleichung gleiche Wurzeln besitzt.

Zweitens wollen wir aus diesem Satze ein bereits vorher angekündigtes wichtiges Resultat ableiten: Ist

$$z_1 = e_h(z)\eta^{\varepsilon_h} + e_{h+1}(\xi)\eta^{\varepsilon_{h+1}} + \dots$$

die Reihe für eine der n Wurzeln, so genügte jeder Coefficient $e_k(\xi)$ einer Gleichung $\varphi_k(e) = 0$; die Grade dieser Gleichungen bildeten eine abnehmenden Reihe und von einem Gliede $e_\tau \eta^{\varepsilon_\tau}$ an sind alle folgenden Gleichungen $\varphi_\tau(e) = 0$, $\varphi_{\tau+1}(e) = 0, \dots$ von gleichem Grade s und jede ist die s^{te} Potenz eines Linearfactors.

Wir zeigen jetzt dass, falls die *Gleichung* $f(z) = 0$ keine gleichen Wurzeln hat, wie wir dies schon früher voraussetzten, stets $s = 1$ ist, dass also alle regulären Coefficienten einfach durch lineare Gleichungen bestimmt werden. Ist nämlich:

$$z^{(r)} = e_h(\xi)\eta^{\varepsilon_h} + \dots + e_r(\xi)\eta^{\varepsilon_r}$$

das Aggregat der Anfangsglieder von z_1 und ist r schon so gross gewählt, dass $f(z^{(r)})$ bereits von sehr hoher Ordnung ist, dann ist

$$z = z^{(r)} + \bar{z}, \qquad \bar{z} = e_{r+1}(\xi)\eta^{r+1} + \dots$$

und $\bar{z}$ ist eine Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades

$$f(z^{(r)} + \bar{z}) = f(z^{(r)}) + f'(z^{(r)})\bar{z} + \frac{f''(z^{(r)})}{\underline{|2}}\bar{z}^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z^{(r)})}{\underline{|n}}\bar{z}^n;$$

der Exponent ε_{r+1} des folgenden Gliedes ist durch die Gleichung bestimmt:

$$\varepsilon_{r+1} = Max\left(\frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_1}{1}, \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_2}{2}, \dots, \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_n}{n}\right)$$

wenn $\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_1, \ldots, \bar{\rho}_n$ die Ordnungszahlen von $f(z^{(r)}), f'(z^{(r)}), \ldots$ bedeuten. Nun kann die Ordnungszahl $\bar{\rho}_0$ beliebig gross angenommen werden, wenn r genügend gross gewählt wird, dagegen bleibt die Ordnungszahl $\bar{\rho}_1$ von $f'(z^{(r)})$ unterhalb einer endlichen Grenze, wie gross auch r angenommen werde, denn sonst wäre ja $f'(z_1)$ selbst von beliebig hoher Ordnung, und das Gleiche wäre für das Product

$$f'(z_1)f(z_2)\ldots f'(z_n) = D(xy)$$

der Fall, d. h. es wäre die Discriminante identisch Null. Hieraus folgt in der That, dass r so gross angenommen werden kann, dass:

$$\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_1 > \left(\frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_2}{2}, \ldots, \frac{\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_n}{n}\right)\cdot$$

ist, d. h. es ist $s = 1$, w. z. b. w.

Hieraus folgt leicht, dass für die regulären Glieder jedes folgende Glied $e_{r+1}\eta^{\varepsilon_{r+1}}$ durch die Gleichung:

$$e_{r+1}\eta^{\varepsilon_{r+1}} + \ldots = -\frac{f(z^{(r)})}{f'(z^{(r)})}$$

bestimmt ist, d. h. es ist $e_{r+1}\eta^{\varepsilon_{r+1}}$ das Anfangsglied der Entwickelung der Quotienten

$$-\frac{f(z)}{f'(z)}$$

für $z = z^{(r)}$.

§ 11. *Die n Reihen $z_1, \ldots, z_n$ stellen die Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ in der Umgebung des Zweiges l_0 dar.*

Es soll jetzt bewiesen werden, dass die n Reihen $z_1, z_2, \ldots, z_n$, welche die Gleichung $f(z) = 0$ formal befriedigen, sämmtlich innerhalb einer endlichen Umgebung der betrachteten Stelle gleichmässig convergiren und dort die Gleichungswurzeln darstellen. Diesen an sich schwierigen Beweis können wir nun fast vollständig auf den bereits im § 4 geführten Beweis für den regulären Fall reduciren, weil uns die soeben durchgeführten Untersuchungen nicht nur eine sondern alle n Congruenzwurzeln von $f(z)$ ergeben haben.

Diese n Reihen schreiten sämmtlich nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $(x-\alpha)$ und $(y-y_0)$ fort. Es seien a^* und b^* bzw. die Generalnenner der Exponenten von $x-\alpha$ und $y-y_0$ in *allen* n Reihen z_i. Wir setzen dann:

$$\xi = (x-\alpha)^{\frac{1}{a^*}}, \qquad \eta = (y-y_0)^{\frac{1}{b^*}},$$

dann gehen $z_1, \ldots, z_n$ in Potenzreihen über, welche nach *ganzen* Potenzen von ξ und η fortschreiten, und welche nach Potenzen von η geordnet folgendermassen geschrieben worden können:

$$(1) \qquad z_i = e_{r_i}(\xi)\eta^{r_i} + e_{r_i+1}(\xi)\eta^{r_i+1} + \ldots.$$

Es soll dann allgemein r_i die Ordnung der Wurzel z_i genannt werden.

Wir brauchen unseren Beweis nur für irgend eine jener n Reihen zu führen; es sei die Bezeichnung von vorn herein so gewählt, dass z_1 diejenige Reihe ist, deren Convergenz bewiesen werden soll.

Wir werden zeigen, dass diese allgemeinere Aufgabe auf den Convergenzbeweis für den regulären Fall vollständig reducirt werden kann, wenn man voraussetzen darf, dass die Ordnung r_1 der zu untersuchenden Reihe positiv ist, während die Ordnungszahlen $r_2, r_3, \ldots, r_n$ sämmtlich negativ oder höchstens Null sind. Offenbar ist diese Voraussetzung im Allgemeinen nicht erfüllt, aber man kann die vorgelegte Gleichung durch eine sehr einfache Transformation so umformen dass sie die verlangte Eigenschaft erhält.

Es sei nämlich jene Voraussetzung nicht erfüllt, und

$$z_1 = e_{r_1}(\xi)\eta^{r_1} + \ldots + e_s(\xi)\eta^s + e_{s+1}(\xi)\eta^{s+1} + \ldots$$

die Entwickelung von z_1; wir betrachten dann das Aggregat:

$$z_1^{(0)} = e_{r_1}(\xi)\eta^{r_1} + \ldots + e_s(\xi)\eta^s$$

der $(s+1)-r_1$ ersten Glieder von z_1 und wählen s beliebig, jedenfalls aber so gross dass die Aggregate der entsprechenden Anfangsglieder von $z_2, z_3, \ldots, z_n$ von $z_1^{(0)}$ verschieden sind. Dieser Bedingung kann stets genügt werden, da, wie oben bewiesen wurde, die n Reihen z_i sämmtlich von einander verschieden sind. Jetzt führen wir in der ursprünglichen Gleichung $f(z, \xi\eta) = 0$ an Stelle von z die neue Variable:

$$(2) \qquad \bar{z} = \frac{z - z_1^{(0)}}{\eta^s}, \qquad z = z_1^{(0)} + \eta^s \bar{z}$$

ein; dieselbe genügt der Gleichung n^{ten} Grades:

$$\bar{f}(\bar{z}) = f(z_1^{(0)} + \eta^s \bar{z}) = f(z_1^{(0)}) + f'(z_1^{(0)})\eta^s \bar{z} + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_1^{(0)})}{\underline{|n}} \eta^{ns} \bar{z}^n$$
$$= \bar{A}_0(\xi\eta) + \bar{A}_1(\xi\eta)\bar{z} + \ldots + \bar{A}_n(\xi\eta)\bar{z}^n = 0,$$

und für ihre n Wurzeln $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ ergeben sich aus (2) unmittelbar die Ausdrücke:

$$\bar{z}_i = \frac{z_i - z_1^{(0)}}{\eta^s}.$$

Also erhält man speciell für die erste Wurzel:

$$\bar{z}_1 = \frac{z_1 - z_1^{(0)}}{\eta^s} = e_{s+1}(\xi)\eta + e_{s+2}(\xi)\eta^2 + \ldots;$$

sie ist also von positiver Ordnung und zwar ist sie abgesehen von dem Factor η^s gleich der zu untersuchenden Reihe mit Weglassung ihrer $(s + 1) - r_1$ Anfangsglieder. Von den folgenden Wurzeln ist aber keine einzige von positiver Ordnung, denn wäre dies etwa für

$$\bar{z}_2 = \frac{z_2 - z_1^{(0)}}{\eta^s}$$

der Fall so müsste ja $z_2 - z_1^{(0)}$ mindestens durch η^{s+1} theilbar sein, d. h. es wäre $z_1^{(0)}$ auch das Aggregat der Anfangsglieder von z_2, was nach der Voraussetzung nicht der Fall ist.

Ersetzt man also die ursprüngliche Gleichung $f(z) = 0$ durch die transformirte $\bar{f}(\bar{z}) = 0$, so besitzt diese die Eigenschaft, dass eine und nur eine ihrer Wurzeln $\bar{z}_1$ von positiver Ordnung ist; hat man aber bewiesen dass diese Wurzel $\bar{z}_1$ gleichmässig convergirt, so gilt dasselbe auch von der ursprünglich zu untersuchenden Reihe:

$$z_1 = z_1^{(0)} + \eta^s \bar{z}_1,$$

da sie sich von jener nur um die Summe $z_1^{(0)}$ einer endlichen Anzahl convergenter Potenzreihen von ξ unterscheidet.

Wir können und wollen daher jetzt voraussetzen, dass schon in der ursprünglichen Gleichung die zu untersuchende Wurzel z_1 die einzige von positiver Ordnung ist, dass also die n Wurzeln folgendermassen geschrieben werden können:

$$z_1 = \eta^{\rho_1} E_1(\eta), \qquad z_2 = \eta^{-\rho_2} E_2(\eta)\,, \; \ldots\,, \; z_n = \eta^{-\rho_n} E_n(\eta)$$

wo allgemein $E_i(\eta)$ eine Reihe von der Ordnung Null bedeutet, und wo $\rho_1 = r_1$ eine positive und $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n$ nicht negative ganze Zahlen bedeuten.

Es sei jetzt:

$$f(z\,,\,\xi\eta) = A_0(\xi\eta) + A_1(\xi\eta)z + \ldots + A_n(\xi\eta)z^n = 0$$

die zu untersuchende Gleichung, und zwar mögen aus ihren Coefficienten die höchsten in ihnen enthaltenen Potenzen von η und ξ bereits durch Division beseitigt sein. Dann folgt aus der soeben angenommenen Beschaffenheit der Wurzeln, dass der erste Coefficient $A_0(\xi\eta)$ durch η theilbar, der zweite $A_1(\xi\eta)$ aber sicher nicht durch η theilbar ist.

In der That ist für eine beliebig hohe Potenz von η als Modul:

$$f(z) \equiv A(z - \eta^{\rho_1}E_1)(z - \eta^{-\rho_2}E_2)\ldots(z - \eta^{-\rho_n}E_n) \pmod{\eta^M},$$

wo der Factor A dadurch bestimmt ist, dass nach Ausführung der Multiplication alle Coefficienten von nicht negativer Ordnung in η sind, und mindestens einer von ihnen die Ordnung Null hat. Setzt man $A = \eta^{\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_n}$ so wird dieser Bedingung genügt, denn es ergiebt sich dann:

$$f(z) \equiv (z - \eta^{\rho_1}E_1)(z\eta^{\rho_2} - E_2)\ldots(z\eta^{\rho} \; - E_n) \pmod{\eta^M}.$$

In dem entwickelten Product ist nun das von z freie Glied gleich $\eta^{\rho_1}E_2\ldots E_n$ also durch η theilbar, während sich der Coefficient von z für $\eta = 0$ auf $E_2\ldots E_n$ reducirt, also η sicher nicht als Factor enthält, und hiermit ist die aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen.[1]

[1] Die Richtigkeit der soeben bewiesenen Behauptung kann auch direct aus dem zugehörigen Diagramme erschlossen werden.

In der Gleichung

$$f(z) = A_0(\xi\eta) + A_1(\xi\eta)z + \ldots + A_n(\xi\eta)z^n = 0$$

sind also die Coefficienten $A_i(\xi\eta)$ ganze Functionen von η mit algebraischen Potenzreihen von ξ als Coefficienten und es beginnt $A_0(\xi\eta)$ mindestens mit der ersten, $A_1(\xi\eta)$ aber sicher mit der nullten Potenz von η; entwickelt man also die Coefficienten nach Potenzen von η, so kann diese Gleichung folgendermassen geschrieben werde:

$$a_{10}(\xi)\eta + a_{01}(\xi)z + \sum_{i+k=2,3,\ldots} a_{ik}(\xi)\eta^i z^k = 0,$$

wo die $a_{ik}(\xi)$ algebraische Potenzreihen von ξ sind, welche keine negativen Potenzen von ξ enthalten. Durch Auflösung dieser Gleichung nach z ergiebt sich endlich:

$$z = \gamma_{10}(\xi)\eta + \Sigma\gamma_{ik}(\xi)\eta^i z^k,$$

wo allgemein:

$$\gamma_{rs}(\xi) = -\frac{a_{rs}(\xi)}{a_{01}(\xi)}$$

gesetzt ist. Nur in dem Falle, dass der gemeinsame Nenner $a_{01}(\xi)$ für $\xi = 0$ verschwindet, können die Reihen γ_{rs} von negativer Ordnung werden; dieser Fall tritt also nur für eine endliche Anzahl von Stellen ξ ein. Alsdann führen wir genau wie in § 4 für η und z die neuen Variablen $\bar{\eta}$ und $\bar{z}$

$$\eta = \xi^\sigma \bar{\eta}, \qquad z = \xi^\tau \bar{z}$$

ein, und bestimmen σ und τ als die kleinsten Multipla von a^*, für welche in der so sich ergebenden Gleichung:

$$\bar{z} = \gamma_{10}\xi^{\sigma-\tau}\bar{\eta} + \Sigma\gamma_{ik}\xi^{i\sigma+k\tau-\tau}\bar{\eta}^i\bar{z}^k$$

alle Reihen auf der rechten Seite von nicht negativer Ordnung werden. Schreiben wir dann diese Gleichung kürzer

$$\bar{z} = g_{10}(x\,|\,\alpha) + \Sigma g_{ik}(x\,|\,\alpha)\bar{\eta}^i\bar{z}^k,$$

so stimmt sie vollständig mit der Gleichung (11) des § 4 überein, und es gelten somit für $\bar{z}$ bzw. für z alle Folgerungen welche wir damals aus ihr gezogen hatten. Wir zeigten dort, dass diese Gleichung stets eine und auch nur eine Lösung:

$$\bar{z} = \bar{e}_1(x \mid \alpha)\bar{\eta} + \bar{e}_2(x \mid \alpha)\bar{\eta}^2 + \dots$$

von *positiver* Ordnung besitzt, deren Coefficienten Potenzreihen von $(x - \alpha)$ und deren Ordnungen alle nicht negativ sind. Ist R der gemeinsame Convergenzbereich der Reihen $g_{ik}(x \mid \alpha)$ so convergirt die Reihe $\bar{z}$ wenn man x innerhalb jenes Bereiches beliebig annimmt, und dann $\bar{\eta}$ auf einen durch jenen Werth von x bestimmten ebenfalls endlichen Bereich beschränkt. Nur dann *kann* also jener Bereich der Reihe $\bar{z}$ unter jede noch so kleine Grenze herabsinken, wenn das Gleiche für den Convergenzbereich der Coefficienten $g_{ik}(x \mid \alpha)$ oder was dasselbe ist für die Reihen $\gamma_{ik}(\xi)$ der Fall ist.

Nun sind aber die Reihen $\gamma_{ik}(\xi) = -\dfrac{a_{ik}(\xi)}{a_{01}(\xi)}$, ihr Convergenzbereich ist also entweder gleich dem gemeinsamen Convergenzbereich der Reihen $a_{10}(\xi)$, $a_{01}(\xi)$, $a_{rs}(\xi)$, oder seine Peripherie geht durch die nächste Nullstelle des gemeinsamen Nenners $a_{01}(\xi)$ hindurch.

Hieraus folgt, dass die Reihe $\bar{z}$, also auch die Reihe z_1, stets innerhalb einer endlichen Umgebung der betrachteten Stelle gleichmässig convergirt, und dass sie auch die eine der n Wurzeln darstellt, und das Gleiche gilt also auch für die $n - 1$ anderen Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

§ 12. *Der Convergenzbereich der Reihen* $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Die im vorigen Abschnitte durchgeführten Untersuchungen haben zu dem Ergebniss geführt, dass die n Reihen $z_1, z_2, \dots, z_n$ stets innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle $\mathfrak{P}$ $(\xi = 0, \eta = 0)$ oder, was dasselbe ist, der Stelle

$$x = \alpha, \qquad y = (y_0)_0$$

gleichmässig convergiren, und hier die n Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ darstellen; hier bedeutet $(y_0)_0$ den Werth der Potenzreihe y_0 für $x = \alpha$.

Falls eine von diesen Reihen mit negativen Potenzen von $y - y_0$ beginnt, oder falls ihre Coefficienten negative Potenzen von $x - \alpha$ enthalten, so muss von jenem Bereiche eine *beliebig kleine* Umgebung des Curvenzweiges $y = y_0$ oder der Geraden $x = \alpha$ abgenommen werden, innerhalb deren jene Entwickelung nicht gültig ist, analog, wie beim Laurent'schen Satze die Entwickelung innerhalb eines den betrachteten Punkt umgebenden Kreisringes gilt, dessen innerer Radius aber beliebig klein angenommen werden kann.

Es sei

$$z_1 = e_h(x\,|\,\alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{\delta}} + \cdots$$

irgend eine jener n Wurzeln; die Coefficienten $e_k(x\,|\,\alpha)$ sind algebraische Functionen von x, welche sich durch das im § 7 auseinandergesetzte Verfahren direct bestimmen lassen; sie sind alle auf einer ganz bestimmten Riemann'schen Fläche eindeutig ausgebreitet, auf welcher auch die den Curvenzweig darstellende Reihe y_0 eindeutig ist. Aus der Natur der die Coefficienten darstellenden Gleichungen ergiebt sich ferner, dass die Reihen $e_h(x\,|\,\alpha)$, $e_{h+1}(x\,|\,\alpha), \ldots$, wieviele man auch betrachten mag, auf jener Riemann'schen Fläche nur eine endliche Anzahl von Polen besitzen, denn man überzeigt sich leicht, dass in den linearen Gleichungen welche die regulären Coefficienten definiren, der Coefficient des höchsten Gliedes, dessen Nullstellen ja die Pole jener Glieder bestimmen, immer derselbe ist (vgl. § 10 Ende).

Alle jene Coefficienten $e_k(x\,|\,\alpha)$ convergiren also gemeinsam in dem Kreise, dessen Peripherie durch den nächsten critischen Punkt hindurchgeht, d. h. entweder durch den nächsten Verzweigungspunkt der Riemann'schen Fläche, oder durch den nächsten der in endlicher Anzahl vorhandenen Pole der Reihen $e_k(x\,|\,\alpha)$.

Obwohl nun jene Reihen auch als Functionen von x und y betrachtet stets innerhalb einer endlichen Umgebung des betrachteten Punktes $\mathfrak{P} = (x = \alpha, y = (y_0)_0)$ convergiren, so kann doch der Fall eintreten, dass dieser Bereich in allen seinen Dimensionen kleiner und kleiner wird, falls jener Punkt $\mathfrak{P}$ sich einer gewissen Grenzlage nähert; tritt dieser Fall doch schon bei einer algebraischen Function einer Variablen x ein, wenn sich der Punkt einer Verzweigungsstelle der zugehörigen Riemann'schen Fläche annähert.

Bei der Untersuchung dieser Frage wollen und können wir uns auf den Fall beschränken, dass z eine *ganze* algebraische Function ist, dass also die Gleichung für z die Form hat:

$$f(z) = z^n + A_{n-1}(xy)z^{n-1} + \ldots + A_0(xy) = 0$$

und alle $A_i(xy)$ ganze Functionen von x und y sind. Ist das nicht der Fall, so kann ja

$$z = \frac{\zeta}{A_n(xy)}$$

gesetzt werden, wo ζ eine ganze algebraische Function ist, und es kann dieser Quotient nun in eine Reihe entwickelt werden.

Zweitens nehmen wir an, dass der betrachtete Punkt

$$\mathfrak{P} = (x = \alpha\,, y = (y_0)_0)$$

sich im Endlichen befindet, dass also die Potenzreihe:

$$y_0 = \beta_0 + \beta_1(x - \alpha) + \ldots$$

keine negativen Glieder enthält; auch hierin liegt keine Beschränkung der Allgemeinheit; wäre nämlich etwa

$$y_0 = \frac{\beta_{-h}}{(x-\alpha)^h} + \ldots + \frac{\beta_{-1}}{x-\alpha} + \ldots = \frac{1}{(x-\alpha)^h}E(x\,|\,\alpha),$$

so braucht man nur die Variable y durch $y' = \frac{1}{y}$ zu ersetzen, denn dann wird:

$$y' = \frac{1}{y_0} = (x-\alpha)^h \frac{1}{E(x\,|\,\alpha)} = (x-\alpha)^h\left(\frac{1}{\beta_{-h}} + \ldots\right),$$

und in der transformirten Gleichung liegt der entsprechende Punkt im Endlichen.

Wir gelangten nun im vorigen Abschnitte dadurch zu der Gleichung:

$$(1) \qquad a_{10}\eta + a_{01}z + \Sigma a_{ik}\eta^i z^k = 0$$

dass wir in der ursprünglichen Gleichung:

$$z = z_1^{(0)} + \bar{z}$$

setzten, wo

$$z_1^{(0)} = e_h(\xi)\eta^h + e_{h+1}(\xi)\eta^{h+1} + \ldots + e_r(\xi)\eta^r$$

das Aggregat der $(r-h+1)$ Anfangsglieder der Reihe z_1 bedeutet, und r beliebig gross gewählt werden kann; dann genügt $\bar{z} = e_{r+1}(\xi)\eta^{r+1} + \dots$ der Gleichung:

$$(2) \qquad f(z_1^{(0)} + \bar{z}) = f(z_1^{(0)}) + f'(z_1^{(0)})\bar{z} + \dots + \frac{f^{(n)}(z_1^{(0)})}{\underline{|n}} \bar{z}^n = 0$$

und diese Gleichung erhält, wenn r genügend gross gewählt wird, die Form (1). Die Coefficienten dieser Gleichung (2) werden ganze rationale Functionen der Reihencoefficienten von $z_1^{(0)}$ oder von z_1, convergiren also ebenfalls innerhalb des Convergenzbereiches desselben. Denkt man sich also jene Coefficienten $\frac{f^{(i)}(z_1^{(0)})}{\underline{|i}}$ nach Potenzen von η entwickelt, so convergiren die Coefficienten der Potenzen von η also die Reihen $a_{10}, \dots a_{hi}$, innerhalb des Bereiches der Reihencoefficienten von z_1. Nach den am Ende des vorigen Abschnittes ausgesprochenen Sätzen wird also der Convergenzbereich der Reihe $\bar{z}$ oder was dasselbe ist, der Bereich der Reihe z_1 als Function von ξ *und* η betrachtet entweder durch den Convergenzbereich ihrer Coefficienten $e_k(x\,|\,\alpha)$ begrenzt, oder durch die nächste Nullstelle der Reihe $a_{10}(\xi)$, in der Weise, dass für einen beliebigen Werth von (ξ) innerhalb dieses Convergenzbereiches immer für η eine *endliche* Umgebung von $\eta = 0$ so abgegrenzt werden kann, dass jene Reihe z_1 convergirt.

Die Bedeutung jener nächsten Nullstelle von $a_{10}(\xi)$ kann aber leicht anders characterisirt werden. Entwickelt man den ersten Coefficienten $f'(z_1^{(0)})$ so ergiebt sich:

$$f'(z_1^{(0)}) = a_{01}(\xi)\eta^{\nu_1} + a_{11}(\xi)\eta^{\nu_1+1} + \dots$$

und diese ersten Glieder bleiben, wenn r genügend gross gewählt ist, ungeändert, wie gross auch r angenommen werde. Ersetzt man also $z_1^{(0)}$ durch die ganze Reihe z_1 selbst, so wird:

$$f'(z_1) = a_{01}(\xi)\eta^{\nu_1} + a_{11}(\xi)\eta^{\nu_1+1} + \dots,$$

also ist $a_{01}(\xi)$ das Anfangsglied der Entwickelung von $f'(z_1)$ nach Potenzen von η. Entwickelt man in gleicher Weise allgemein alle n conjugirten Werthe $f'(z_i)$ so sei:

$$f'(z_i) = a_{01}^{(i)}\eta^{\nu_i} + a_{11}^{(i)}\eta^{\nu_i+1} + \dots; \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

beachtet man dann, dass $D(x, y) = f'(z_1) \dots f'(z_n)$ ist, so folgt, wenn man jene n Gleichungen multiplicirt:

$$D(xy) = A(\xi)\eta^N + \dots,$$

wo der Coefficient $A(\xi)$ und der zugehörige Exponent N durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$A(\xi) = a_{01}^{(1)} \dots a_{01}^{(n)}, \qquad N = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n.$$

Ist nun ξ_0 ein Werth von ξ, wofür $a_{01}^{(1)}(\xi_0) = 0$ ist, so ist auch $A(\xi_0) = 0$ und umgekehrt, wenn für $\xi = \xi_0$ $A(\xi_0)$ verschwindet, so verschwindet mindestens einer der n Anfangsglieder $a_{01}^{(i)}(\xi_0)$ ebenfalls. Es ergiebt sich also das Resultat: Die Nullstellen der n conjugirten Anfangsglieder $a_{01}^{(i)}(\xi)$ sind identisch mit den Nullstellen des Anfangsgliedes in der Entwickelung der Discriminante $D(x, y)$ nach Potenzen von η oder $y - y_0$.

Es sei nun $\eta = y - y_0$ und

$$P(y, x) = (y - y_0)(y - y_0') \dots (y - y_0^{(\mu-1)})$$

diejenige irreductible Curve von der der Linearfactor $y - y_0$ einen Zweig darstellt. Wir betrachten dann den allgemeinsten Fall, dass die zu Grunde gelegte Curve ein ν-facher Factor der Discriminantencurve $D(xy) = 0$ ist. Es sei also:

$$D(xy) = P(y, x)^\nu D_1(xy).$$

Dann enthält die Gleichung $D_1(xy) = 0$ alle Curven der Discriminante ausser P. Es werde $D_1(xy)$ *die reducirte Discriminante* genannt. Entwickelt man nun jenes Product nach Potenzen von $y - y_0$ so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} D(x, y) &= (P'(y_0)(y - y_0) + \dots)^\nu (D_1(y_0, x) + \dots) \\ &= (P'(y_0)^\nu . D_1(y_0, x))(y - y_0)^\nu + \dots \end{aligned}$$

und es ergiebt sich so für das Product der n conjugirten Anfangsglieder die Gleichung:

$$a_{10}^{(1)} a_{10}^{(2)} \dots a_{10}^{(n)} = P'(y_0)^\nu D_1(y_0, x).$$

Dieses Product verschwindet demnach dann und nur dann, wenn $x = x_0$ so gewählt wird, dass entweder $P'(y_0, x_0) = 0$ wird, oder dass $D_1(y_0, x_0)$ verschwindet. Im ersteren Falle ist x_0 ein critischer Punkt (Pol oder

Verzweigungspunkt) der Curve $P=0$, also bereits unter den critischen Punkten der Coefficienten enthalten, im zweiten Falle liegt jener Punkt erstens auf $P=0$ und zweitens auf $D_1(y, x)=0$, er ist also ein Schnittpunkt mit der reducirten Discriminantencurve. Also ergiebt sich das Resultat:

> Die n Reihen $z_1, z_2, \dots, z_n$ können nur dann einen unendlich kleinen Convergenzbereich erhalten, wenn der Punkt $\mathfrak{P}$ sich unbegrenzt einem critischen Punkte der Reihencoefficienten oder einem Schnittpunkte der Curve $P=0$ mit der reducirten Discriminantencurve nähert.

§ 13. *Der analytische Character der n Gleichungswurzeln und die ihnen zugehörigen Riemann'schen Kugelflächen.*

Ich betrachte jetzt irgend eine der n Gleichungswurzeln

$$(1) \qquad z_0 = e_h(x\,|\,\alpha)(y-y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(x\,|\,\alpha)(y-y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \cdots$$

und untersuche den analytischen Character ihrer Coefficienten $e_h, e_{h+1}, \dots$. Wie soeben bewiesen wurde, sind sie alle *algebraische* Functionen von x, und zwar sind alle regulären Coefficienten $e_\tau, e_{\tau+1}, \dots$ rationale Functionen von y_0 und den irregulären Anfangscoefficienten $e_h \dots e_{\tau-1}$. Es existirt demnach eine Riemann'sche Kugelfläche niedrigster Ordnung, auf welcher alle jene Coefficienten und y_0 eindeutig ausgebreitet sind. Es sei $\mathfrak{R}_\nu$ jene Fläche und ν ihre Blätterzahl; dann soll $\mathfrak{R}_\nu$ die zu der Reihe z_0 zugehörige Kugelfläche genannt werden. Jene Reihen $y_0, e_h(x\,|\,\alpha)$, $e_{h+1}(x\,|\,\alpha), \dots$ sind dann die Entwickelungen der entsprechenden algebraischen Functionen in der Umgebung eines von denjenigen ν Punkten der Kugelfläche, welche der Stelle $x=\alpha$ zugeordnet sind; ist $\mathfrak{P}$ jener Punkt, so soll $\mathfrak{P}$ der zu z_0 zugehörige Punkt genannt werden.

Da auch die algebraische Function y_0 auf $\mathfrak{R}_i$ eindeutig ist so muss ihre Ordnungszahl μ oder der Grad von $P(y, x)$ in y ein Theiler von ν sein; es sei also:

$$\nu = \lambda\mu.$$

Die Coefficienten $e_k(x\,|\,\alpha)$ besitzen nun, wie weit man auch gehen mag, zusammen stets nur eine endliche Anzahl von Polen auf der Kugelfläche $\mathfrak{R}_\nu$, und ebenso besitzt jene Fläche $\mathfrak{R}_\nu$ nur eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten, in denen mindestens eine von jenen Reihen nach gebrochenen Potenzen des Linearfactors $x - \alpha$ fortschreitet. Man kann nun y_0 und alle Coefficienten simultan von dem zuerst betrachteten Punkte $\mathfrak{P}$ nach einem beliebigen anderen Punkte $\mathfrak{P}'$ der Kugelfläche fortsetzen; dadurch geht die ganze Reihe z_0 in (1) in eine andere:

$$(1') \qquad z_0' = e_h'(x\,|\,\alpha')(y - y_0')^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}'(x\,|\,\alpha')(y - y_0')^{\frac{h+1}{b}} + \dots$$

über, in welcher jetzt y_0', e_h', e_{h+1}', ... die jenem Endpunkte entsprechenden eindeutig bestimmten Potenzreihen sind, welche nach ganzen oder gebrochenen Potenzen des zugehörigen Linearfactors $(x - \alpha')$ fortschreiten; und jede so sich ergebende Reihe z_0' beginnt natürlich mit derselben Potenz des Linearfactors $y - y_0'$, wie die ursprüngliche z_0. Da jede der zur Fortsetzung benutzten Reihen als Function von x und y betrachtet, in einem endlichen Bereiche convergirt, abgesehen von dem beliebig kleinen Bereiche einer endlichen Anzahl von *Punkten* auf $\mathfrak{R}_\nu$, so kann jene Potenzreihe auch wirklich in der hier geschilderten Weise längs $\mathfrak{R}_\nu$ mit Vermeidung jener critischen Punkte fortgesetzt werden, und aus den bekannten Sätzen der Functionentheorie folgt, dass die so sich ergebende Endreihe z_0' eine eindeutig bestimmte unter den n Wurzeln ist, welche die Gleichung $f(z) = 0$ in der Umgebung des dort vorhandenen Zweiges $(x = \alpha', y = y_0')$ derselben Curve $P(y, x) = 0$ besitzt. Aber auch für jeden der soeben noch ausgeschlossenen critischen Punkte $\overline{\mathfrak{P}}_0$ $(x = \bar{\alpha}, y = y_0)$ der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}_\nu$ existirt eine eindeutig bestimmte Reihe

$$z_0 = e_h(x\,|\,\alpha)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(x\,|\,\alpha)(y - y)^{\frac{h+1}{b}} + \dots,$$

welche als die Fortsetzung von z_0 in jenem Punkt anzusehen ist. In der That besitzt ja die Gleichung $f(z) = 0$ in $\overline{\mathfrak{P}}$ ebenfalls genau n Wurzeln, welche ihrerseits innerhalb einer *endlichen* Umgebung von $\overline{\mathfrak{P}}$ gleichmässig convergiren, weil jener Convergenzbereich nur *beim Heranrücken* an $\overline{\mathfrak{P}}$ nicht aber *in* $\overline{\mathfrak{P}}$ selbst unendlich klein werden kann. Von diesen n so gefundenen Reihen coincidirt nun eine und nur eine in unendlich vielen Punkten der Umgebung von $\overline{\mathfrak{P}}$ mit den Fortsetzungen von z_0 und diese ist es, welche als die Fortsetzung von z_0 für $\overline{\mathfrak{P}}$ anzusehen ist. Es ergiebt sich also der Satz:

Jedem Punkte $\mathfrak{P}$ der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}_\nu$ entspricht eine eindeutig bestimmte Wurzel $z_0 = \sum e_k(x|\alpha)(y-y_0)^{\frac{k}{b}}$, der Gleichung $f(z)=0$, und alle diese können als die analytischen Fortsetzungen aus einer von ihnen auf der Fläche $\mathfrak{R}_\nu$ angesehen werden.

Zu jedem Punkte $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}_\nu$ gehört ein eindeutig bestimmtes Werthsystem $x=\alpha$, $y=y_0$ also auch eine und nur eine Wurzel z_0 der gegebenen Gleichung. Sei nun umgekehrt der Zweig l_0 also $(x=\alpha, y=y_0)$ gegeben, so entsprechen demselben auf $\mathfrak{R}_\nu$ im Allgemeinen mehrere Punkte, also auch mehrere zugehörige Reihen z_0; von den n Wurzeln $z_1 \dots z_n$ die zu l_0 gehören sind also mehrere einfache analytische Fortsetzungen aus einander längs $\mathfrak{R}_\nu$. In der That seien $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\nu$ die ν der Stelle $x=\alpha$ entsprechenden Punkte der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{R}_\nu$ und zwar mögen diese der Einfachheit wegen als regulär angenommen werden; für Verzweigungsstellen ergeben sich durch analoge Betrachtungen die gleichen Resultate. Ist dann, wie oben angenommen, $\nu = \lambda\mu$ so nimmt die algebraische Function μ^{ter} Ordnung y_0 in genau λ von diesen Punkten denselben Werth an; es sei die Bezeichnung so gewählt, dass y_0 in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\lambda$ seinen Werth nicht ändert; in jedem folgenden Punkte aber einen anderen Werth erhält. Sind dann $z_1, z_2, \dots, z_\lambda$ die λ zugehörigen Wurzeln, und ist allgemein:

$$z_i = e_h^{(i)}(x|\alpha)(y-y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}^{(i)}(x|\alpha)(y-y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots, \qquad (i=1,2,\dots,\lambda)$$

so sind diese sämmtlich von einander verschieden, da anderenfalls die Coefficienten schon auf einer Kugelfläche niedrigerer Ordnung eindeutig ausgebreitet wären, und sie befriedigen alle die vorgelegte Gleichung in der Umgebung des Zweiges l_0, gehören also zu den n Wurzeln derselben. Alle übrigen jener Kugelfläche $\mathfrak{R}_\nu$ zugehörigen Entwickelungen entsprechen aber nicht *diesem* Zweige l_0, denn damit das für einen Punkt $\mathfrak{P}$ der Fall sei, muss einmal $x=\alpha$ sein, d. h. $\mathfrak{P}$ muss mit einem der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\nu$ zusammenfallen, dann aber muss $y=y_0$ sein, und dies ist nur für $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_\lambda$ der Fall. Es ergiebt sich also der Satz:

Ist l_0 der Zweig einer Curve μ^{ter} Ordnung, und ist $\nu = \lambda\mu$ die Ordnung der zu *einer* der zugehörigen Gleichungswurzeln z_1 zugeordneten Riemann'schen Kugelflächen, so sind λ von ihnen z_1, $z_2, \ldots, z_\lambda$ analytische Fortsetzungen aus dieser einen, sind also mit dieser zugleich bestimmt.

Ausser diesem Cyclus können aber noch andere von den n Reihen mit z_1 zusammenhängen: Es sei wie vorher z_1 eine Wurzel unserer Gleichung, welche nach ganzen Potenzen von $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ fortschreitet; dann convergirt die Entwickelung:

$$z_1 = e_h(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \ldots$$

innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle $y = y_0$, wenn für x ein beliebiger Werth in einer endlichen Umgebung von $x = \alpha$ gewählt wird. Hält man nun x, also auch $y_0, e_h, e_{h+1}, \ldots$ fest, und lässt man y in einer genügend kleinen geschlossenen Curve den Punkt $y = y_0$ umlaufen, so erhält man eine zweite Entwickelung:

$$z_1' = \omega^h e_h(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + \omega^{h+1} e_{h+1}(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \ldots,$$

in welcher $\omega = e^{\frac{2\pi i}{b}}$ eine b^{te} Wurzel der Einheit bedeutet, und welche ebenfalls eine, und zwar von z_1 verschiedene Wurzel unserer Gleichung darstellt. Lässt man den Punkt genau in derselben Weise b Male den Zweig $y = y_0$ umkreisen, so erhält man zu z_1 einen Cyclus vom b Wurzeln $z_1, z_1', \ldots, z_1^{(b-1)}$, welche durch die b folgenden Reihen dargestellt sind

$$z_1^{(r)} = \omega^{hr} e_h(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + \omega^{(h+1)r} e_{h+1}(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \ldots \qquad (r = 0, 1, \ldots, b-1)$$

und erst nach dem b^{ten} Umlaufe kehrt man zu der ersten Wurzel zurück.

Alle diese Wurzeln sind von einander verschieden, und man zeigt leicht, dass zu jeder von den $(\lambda - 1)$ anderen Wurzeln $z_2, z_3, \ldots, z_\lambda$ ein gleicher Cyclus von b conjugirten Reihen gehört.

Indessen brauchen die so gefundenen λb Wurzeln:

$$\begin{array}{c} z_1, z_1', \ldots, z_1^{(b-1)}, \\ z_2, z_2', \ldots, z_2^{(b-1)}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_\lambda, z_\lambda', \ldots, z_\lambda^{(b-1)}, \end{array}$$

welche sich aus einer unter ihnen durch analytische Fortsetzung ergeben, nicht nothwendig von einander verschieden zu sein. Sollen z. B. die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$f(z) = z^2 - xy + xy^2 = 0$$

in der Umgebung der Stelle $x = 0$ auf der Geraden $y = 0$, also nach Potenzen von y entwickelt werden, so erhält man:

$$z_1 = (xy)^{\frac{1}{2}}(1 - y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{7}{2}} - \dots;$$

hier ist also $\lambda = 2$, $b = 2$ und hier geht z_2 aus z_1 dadurch hervor, dass man $x^{\frac{1}{2}}$ durch $-x^{\frac{1}{2}}$ ersetzt, während z_1' bzw. z_2' aus z_1 und z_2 durch Verwandlung von $y^{\frac{1}{2}}$ in $-y^{\frac{1}{2}}$ erhalten wird; von diesen vier Reihen sind aber offenbar nur zwei von einander verschieden.

Ersetzt man aber hier den Linearfactor y durch

$$\bar{y} = xy$$

welcher, als Function von y betrachtet, für dieselben Werthe von y verschwindet, so geht die Grundgleichung für z über in:

$$z^2 - \bar{y} + \frac{\bar{y}^2}{x} = 0$$

und die Entwickelung nach Potenzen von $\bar{y}$ liefert jetzt:

$$z_1 = \bar{y}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{x}\bar{y}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\frac{1}{x^2}\bar{y}^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}\frac{1}{x^3}\bar{y}^{\frac{7}{2}} - \dots;$$

hier ist also $\lambda = 1$, $b = 2$ und die beiden conjugirten Entwickelungen z_1 und z_1' sind in der That verschieden. Dasselbe kann nun in ganz singulären Fällen auch für Gleichungen von höherem Grade vorkommen. Es sei also

$$z_1 = e_h(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \dots$$

diejenige Wurzel, welche zu dem Punkte $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{R}$, gehört und

$$z_1, z_1', \dots, z_1^{(b-1)}$$

der durch Umkreisung von l_0 aus z_1 sich ergebende Cyclus; es sei jetzt

$$z_2 = e'_h(y-y_0)^{\frac{h}{b}} + e'_{h+1}(y-y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \cdots$$

eine zu z_1 conjugirte Reihe, welche zum Punkte $\mathfrak{P}_2$ von $\mathfrak{R}_\nu$ gehört und welche bereits in dem zu z_1 gehörigen Cyclus vorkommen möge; so dass etwa

$$(2) \qquad z_2 = z_1^{(\beta)}$$

ist. Umläuft der Punkt jetzt den Zweig l_0 ein Mal, so ergiebt sich aus dieser Gleichung die weitere

$$z'_2 = z_1^{(\beta+1)},$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens folgt, dass der zu z_2 gehörige Cyclus mit dem zu z_1 gehörigen identisch ist, dass nämlich allgemein

$$z_2^{(i)} = z_1^{(\beta+i)}$$

ist.

Ich untersuche jetzt, welcher Bedingung die Coefficienten e_k genügen müssen, damit zwei Cyclen übereinstimmen; vergleicht man in der Gleichung (2) oder also in:

$$e'_h(y-x_0)^{\frac{h}{b}} + e'_{h+1}(y-y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \cdots$$
$$= \omega^{\beta h} e_h(y-y_0)^{\frac{h}{b}} + \omega^{(\beta+1)h} e_{h+1}(y-y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \cdots$$

die Coefficienten gleich hoher Potenzen von $y-y_0$, so folgt, dass jene Gleichung dann und nur dann bestehen kann, wenn für alle Coefficienten der Reihe, wie weit man auch gehen mag, die Gleichungen bestehen:

$$(3) \qquad e'_k = \bar{\omega}^k e_k \qquad {\scriptstyle (k=h,\,h+1,\,\ldots)}$$

wenn $\bar{\omega} = \omega^\beta$ ebenfalls eine Einheitswurzel ist, deren Ordnungszahl $\bar{b}$ gleich b oder gleich einem Theiler von b ist. Hieraus folgt also zunächst:

$$(e'_k)^{\bar{b}} = e_k^{\bar{b}}.$$

Dieser Ausnahmefall kann also nur dann eintreten, wenn die $\bar{b}^{\text{ten}}$ Potenzen *aller* Coefficienten beim Übergange von $\mathfrak{P}_1$ zu $\mathfrak{P}_2$ ungeändert bleiben, also sämmtlich algebraische Functionen von niedrigerer Ordnung sind.

Man kann nun auch in diesem allgemeinsten Falle den Linearfactor $y - y_0$ so durch ein Vielfaches $e(x)(y - y_0)$ desselben ersetzen, dass nunmehr z_2 und der zugehörige Cyclus nicht mehr auftritt. Zu der Bestimmung dieses Multiplicators e in diesem Falle führt die folgende Überlegung. Es sei:

$$z_1 = e_h(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_k(y - y_0)^{\frac{k}{b}} + e_l(y - y_0)^{\frac{l}{b}} + \dots$$

die Entwickelung von z_1 nach Weglassung aller etwa identisch verschwindenden Coefficienten e; dann können die Exponentenzähler $h, k, l, \dots$ nicht alle einen und denselben Theiler mit dem Nenner b hahen, da jene Entwickelung sonst nicht nach Potenzen von $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ fortschreiten würde. Sind also $(k, l, \dots, r, b)$ ein System von Exponenten, welche mit b zusammen relativ prim zu einander sind, so kann man andere ganze Zahlen $\varkappa, \lambda, \dots, \rho, \beta$ so bestimmen, dass:

$$\varkappa k + \lambda l + \dots + \rho r + \beta b = 1$$

oder, da $\bar{b}$ ein Theiler von b ist, dass:

$$\varkappa k + \lambda l + \dots + \rho r \equiv 1 \pmod{\bar{b}}$$

ist. Setzt man nun:

$$e = e_k^{\varkappa} e_l^{\lambda} \dots e_r^{\rho}$$

und bildet den conjugirten Werth e' von e, so erhält dieser nach (3) die Form:

$$e' = \bar{\omega}^{\varkappa k + \lambda l + \dots + \rho r} e = \bar{\omega} e.$$

Führt man nun statt $(y - y_0)$ den neuen Linearfactor η durch die Gleichung:

$$\eta = e^b (y - y_0)$$

ein, welcher sich von ihm nur durch einen multiplicativen von x allein abhängigen Factor unterscheidet, so geht die Entwickelung von z_1 über in:

$$z_1 = \frac{e_h}{e^h} \eta^{\frac{h}{b}} + \frac{e_{h+1}}{e^{h+1}} \eta^{\frac{h+1}{b}} + \dots = E_h \eta^{\frac{h}{b}} + E_{h+1} \eta^{\frac{h+1}{b}} + \dots.$$

Auch hier bleiben alle Coefficienten $E_h, E_{h+1}, \dots$ auf der Kugelfläche

$\mathfrak{R}_\nu$ eindeutig ausgebreitet, jedoch ist dieser jetzt nicht mehr die Fläche niedrigster Ordnung, welche diese Eigenschaft hat; bei dem Übergange von $\mathfrak{P}_1$ nach $\mathfrak{P}_2$ bleibt nämlich jeder Coefficient $E_k = \frac{e_k}{e^k}$ ungeändert, da sich sowohl sein Zähler als sein Nenner mit $\bar{\omega}^k$ multiplicirt. In diesem Falle sind also bereits alle Coefficienten auf einer Kugelfläche $\mathfrak{R}_{\nu_1}$ niedrigerer Ordnung eindeutig ausgebreitet, und zu einer Reihe z_1 gehören weniger als λ conjugirte Reihen $z_1, z_2, \ldots, z_{\lambda_1}$. Falls auch hier noch gewisse unter den $b\lambda_1$ Reihen

$$\begin{array}{l} z_1\,,\; z_1'\,,\; \ldots,\; z_1^{(b-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{\lambda_1},\; z_{\lambda_1}',\; \ldots,\; z_{\lambda_1}^{(b-1)}, \end{array}$$

identisch ausfallen sollten, kann man die gleiche Reduction anwenden und solange fortfahren, bis alle diese zu z_1 gehörigen Reihen lauter verschiedene Wurzeln darstellen.

Der einzige ganz unwesentliche Unterschied ist also der, dass in diesem singulären Falle die n Wurzeln nicht nach Potenzen von $y - y_0$ sondern von $e^b(y - y_0)$ entwickelt werden, wo e^b eine algebraische Function von x allein bedeutet, welche auf der zugehörigen (neuen) Riemann'schen Fläche $\mathfrak{R}_{\nu_1}$ eindeutig ist. Im Folgenden brauchen wir also diesen Fall nicht weiter zu berücksichtigen, da er von dem regulären nicht wesentlich verschieden ist. Es möge eben in der Folge von vorn herein vorausgesetzt worden, dass in diesem Falle die Entwickelung nach Potenzen von $e^b(y - y_0)$ fortschreitet; dann sind immer die λb Reihen $z_i^{(k)}$ alle von einander verschieden.

§ 14. *Die Cyclen analytisch zusammenhängender Wurzeln und ihre Ordnungszahlen.*

Die im vorigen Abschnitte durchgeführten Untersuchungen haben ergeben, dass sich die n Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ähnlich wie bei den Functionen einer Variablen in Cyclen so anordnen lassen, dass alle Reihen eines Cyclus aus einer unter ihnen durch analytische Fortsetzung längs $\mathfrak{R}_\nu$ oder längs der Curve $P(y, x) = 0$ erhalten werden. Ist nämlich:

$$z_1 = e_h(x)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(x)(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \ldots$$

so erhält man alle λb conjugirten Reihen dadurch, dass man einmal die Coefficienten $e_k(x)$, das andere Mal das Entwickelungselement $(y-y_0)^{\frac{1}{b}}$ unabhängig von einander durch ihre conjugirten Werthe ersetzt; geometrisch entsprechen den hier betrachteten Fortsetzungswegen alle Wege und Umläufe längs der Schnittcurve P.

Es sei nun $\bar{z}_1$ irgend eine der n Wurzeln welche noch nicht in dem zu z_1 gehörigen Cyclus enthalten ist; dann gehört zu ihr ein zweiter Cyclus etwa von $\lambda'b'$ Reihen, welche alle durch Fortsetzung längs P aus $\bar{z}_1$ hervorgehen, und in gleicher Weise können alle n Wurzeln in Cyclen analytisch zusammenhängender Reihen zusammengefasst werden.

Es möge für die Folge angenommen werden, dass die n zum Zweige l_0 von P gehörigen in drei solche Cyclen von λb, $\lambda'b'$, $\lambda''b''$ zusammenhängenden Reihen zerfallen und es seien z_1, z_1', z_1'' je eine derselben, so dass alle anderen aus einer von ihnen durch Fortsetznng längs P hin hervorgehen. Dann ist zunächst

$$n = \lambda b + \lambda'b' + \lambda''b'';$$

ferner gehört zu jedem dieser drei Cyclen eine Kugelfläche auf denen die Coefficienten e von den Reihen des betreffenden Cyclus eindeutig ausgebreitet sind; diese Flächen seien durch $\mathfrak{R}_\nu$, $\mathfrak{R}_{\nu'}$, $\mathfrak{R}_{\nu''}$ bezeichnet; ist wieder μ der Grad von P so ist endlich:

$$\nu = \lambda\mu, \qquad \nu' = \lambda'\mu, \qquad \nu'' = \lambda''\mu.$$

Die geometrische Bedeutung dieses Resultats ist die folgende: Es sei L die Schnittcurve der Oberfläche $f(z, xy) = 0$ und des geraden Cylinders $P(y, x) = 0$ welcher über der ebenen Curve $P(y, x) = 0$ senkrecht errichtet ist. Die n zu dem Zweige l_0 $(x = \alpha,\ y = y_0)$ gehörigen Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$ stellen dann die z-Ordinaten der Oberfläche f in einer endlichen Umgebung jener Schnittcurve L dar, also gewissermassen innerhalb eines auf der Oberfläche sich hinziehenden Bandes von veränderlicher, aber überall bestimmter endlicher Breite, welches L umgiebt. Hängen nun von jenen n Wurzeln z_i bzw. λb, $\lambda'b'$, $\lambda''b''$ längs P analytisch zusammen, so heisst das geometrisch, dass jenes Band, die Umgebung von L, in drei getrennte Theile zerfällt, von denen jedes seinerseits in sich zusammenhängt.

Die Schnittcurve L selbst kann hierbei sehr wohl in mehr als drei getrennte Theile zerfallen; denn ist etwa:

$$z_1 = e_0(x) + e_1(x)(y - y_0)^{\frac{1}{b}} + \ldots,$$

so stellt für $y = y_0$ die Reihe

$$z_1^{(0)} = e_0(x)$$

nebst ihren Fortsetzungen geometrisch den ersten Theil der Schnittcurve L dar. Ist nun $e_0(x)$ auf $\mathfrak{R}_\nu$ von niedrigerer als der ν^{ten} Ordnung, ist also $e_0(x)$ noch auf einer Riemann'schen Fläche von niedrigerer Ordnung eindeutig, was für critische Curven $P = 0$ im Allgemeinen der Fall sein wird, so zerfällt die Curve L auf jenem ersten Bande noch weiter in getrennte Theile, welche dann erst zusammenhängen, wenn man die Schnittcurve verlässt, und ausserhalb derselben in der Umgebung fortgeht.

Es sei jetzt:

$$z_1 = e_h(x)(y - y_0)^{\frac{h}{b}} + e_{h+1}(x)(y - y_0)^{\frac{h+1}{b}} + \ldots$$

eine der λb Wurzeln des ersten Cyclus; entsprechend der Bezeichnung in der Theorie der Functionen einer Variablen sage ich dann, z_1 besitzt in Bezug auf den Zweig l_0 die Ordnungszahl h, wenn die Reihe mit der h^{ten} Potenz des Entwickelungselementes $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ beginnt. Dieselbe Ordnungszahl besitzen dann aber nicht nur die λb Wurzeln desselben Cyclus, sondern diese Ordnungszahl kommt jeder der unendlich vielen Fortsetzungen von z_1 auf der ganzen zugehörigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}_\nu$ zu, oder, was dasselbe ist, jede Fortsetzung von z_1 längs P oder längs des zu L gehörigen Bandes besitzt dieselbe Ordnungszahl h.

Man kann daher die allgemeinere Definition aufstellen:

> Die algebraische Function z besitzt auf der Kugelfläche $\mathfrak{R}_\nu$ die Ordnungszahl h, wenn ihre Entwickelungen auf dieser Kugelfläche mit der h^{ten} Potenz des zugehörigen Entwickelungselementes beginnen.

Zu jeder Curve $P = 0$ gehört eine Anzahl von Kugelflächen $\mathfrak{R}_\nu$, $\mathfrak{R}_{\nu'}$, $\mathfrak{R}_{\nu''}$ und auf jeder besitzt die algebraische Function z eine ganz bestimmte ganzzahlige Ordnungszahl, welche positiv, null oder negativ sein kann.

Durch unser Verfahren können die Ordnungszahlen von z für jede Curve P und jede zugehörige Fläche direct aus der Gleichung für z bestimmt werden.

§ 15. *Der durch z bestimmte algebraische Functionenkörper.*

Die wahre Bedeutung der bisher erlangten Resultate ergiebt sich erst dann, wenn wir von der bisher betrachteten algebraischen Function z absehen und die Gesammtheit aller durch x, y, z rational ausdrückbaren algebraischen Functionen, d. h. den durch diese Variablen constituirten algebraischen Functionenkörper $K(x, y, z)$ untersuchen.

Es sei also z durch die vorher betrachtete Gleichung $f(z, xy) = 0$ als algebraische Function von x und y definirt, und es sei jetzt:

$$\zeta = \varphi(x, y, z)$$

irgend eine rationale Function von x, y, z. Aus bekannten Sätzen der Theorie der symmetrischen Functionen ergiebt sich, dass auch ζ ebenso wie z einer Gleichung des n^{ten} Grades

$$F(\zeta, xy) = B_n(xy)\zeta^n + B_{n-1}(xy)\zeta^{n-1} + \ldots + B_0(xy) = 0$$

mit ganzen rationalen Functionen von x und y als Coefficienten genügt, welche selbst irreductibel, oder die Potenz einer irreductiblen Function ist. Geometrisch stellt jene Gleichung eine neue Oberfläche dar, deren Coordinaten rational durch die entsprechenden Coordinaten der ursprünglichen ausdrückbar sind, welche also zu der durch $f = 0$ constituirten Oberflächenklasse gehört. Man kann unser im § 4 auseinandergesetztes Verfahren nun direct zur Bestimmung der n Zweige $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ benutzen, welche ζ in der Umgebung eines Zweiges l_0 $(x = \alpha,\ y = y_0)$ einer beliebigen Curve $P = 0$ besitzt; viel einfacher ergeben sich jene Zweige aber auf folgendem Wege: Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die n Wurzeln für z in der Umgebung des Zweiges l_0; dann erhält man ihnen entsprechend n conjugirte Reihen:

$$(1) \qquad \zeta_1 = \varphi(x, y, z_1), \qquad \zeta_2 = \varphi(x, y, z_2), \ \ldots, \ \zeta_n = \varphi(x, y, z_n)$$

welche ebenfalls in endlicher Umgebung desselben Zweiges gleichmässig convergiren, und für diese die Function ζ darstellen.

Es seien nun wieder $\mathfrak{R}_\nu$, $\mathfrak{R}_{\nu'}$, $\mathfrak{R}_{\nu''}$ die zu P gehörigen Riemann'schen Kugelflächen so ergiebt sich aus den Gleichungen (1) direct, dass sich auch für eine beliebige Function ζ des Körpers $K(xyz)$ die n conjugirten Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ ebenfalls in Cyclen von λb, $\lambda' b'$, $\lambda'' b''$ Reihen anordnen, deren Coefficienten bzw. auf $\mathfrak{R}_\nu$, $\mathfrak{R}_{\nu'}$, $\mathfrak{R}_{\nu''}$ eindeutig ausgebreitet sind, und dass ferner z. B. die Reihen des ersten Cyclus nach ganzen Potenzen von $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ fortschreiten u. s. w.; hieraus ergiebt sich das wichtige Resultat, dass die Entwickelung *jeder* algebraischen Function ζ des ganzen Körpers $K(x, y, z)$ in der Umgebung einer Curve $P = 0$ nach gebrochenen Potenzen von $y - y_0$ fortschreitet wenn dasselbe für z der Fall war, dass also jene Curve $P = 0$ für alle Oberflächen $F(\zeta, xy)$ eine Verzweigungscurve ist, wenn dasselbe für die ursprüngliche $f(z, xy) = 0$ der Fall war, und dass sie für alle eine Verzweigungscurve von derselben Ordnung $b - 1$ ist. Ist aber $P = 0$ eine Verzweigungscurve von $F(\zeta, xy) = 0$, so muss, wie oben bewiesen war, $P(x, y)$ ein Theiler der Gleichungsdiscriminante $D(\zeta)$ von F sein, und man erhält so den Satz:

Alle Verzweigungscurven sind gemeinsame Curven der Discriminantencurven aller Oberflächen des Körpers $K(x, y, z)$.

Erst später wird gezeigt werden, dass diese Discriminantencurven ausser jenen keine gemeinsame Schnittcurven besitzen. Alle bis jetzt gefundenen Resultate beziehen sich also, und hierin liegt ihr Werth, nicht bloss auf die eine algebraische Grösse z, sondern auf alle Grössen ζ des zugehörigen Körpers, oder geometrisch gesprochen auf alle Oberflächen der durch $f(z, xy) = 0$ constituirten Klasse, wie dies später noch eingehend dargelegt werden wird.

Es sei nun $P = 0$ eine beliebige Curve, $\mathfrak{R}_\nu$ eine der ihr entsprechenden Riemann'schen Flächen. Dann besitzt jede Function ζ in Bezug auf $\mathfrak{R}_\nu$ eine ganz bestimmte Ordnungszahl k; es ist nämlich k der Exponent des bezüglichen Linearfactors $(y - y_0)^{\frac{1}{b}}$ mit dem die λb zu $\mathfrak{R}_\nu$ zugehörigen Entwicklungen beginnen.

Um diese Thatsachen einfach aussprechen zu können ordne ich jeder von diesen unendlich vielen Riemann'schen Flächen $\mathfrak{R}_\nu$ einen s. g. Primtheiler $\mathfrak{p}$ zu und definire die Theilbarkeit einer algebraischen Function ζ durch einen Primtheiler $\mathfrak{p}$ folgendermassen:

Eine algebraische Function ζ ist genau durch die k^{te} Potenz eines Primtheilers $\mathfrak{p}$ oder durch $\mathfrak{p}^k$ theilbar, wenn ihre Entwicklungen auf der zugehörigen Fläche $\mathfrak{R}_\nu$ von der k^{ten} Ordnung sind.

Die Primtheiler $\mathfrak{p}$ oder die Kugelflächen $\mathfrak{R}_\nu$ sind die genaue Verallgemeinerung der Weierstrass'schen »Stellen» des algebraischen Gebildes, oder der Punkte der Riemann'schen Fläche in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen; sie sind, wie später gezeigt werden wird, absolute Invarianten, d. h. unabhängig von jeder Darstellungsart der Functionen ζ.

Jeder Curve $P(y, x) = 0$ entsprechen genau so viele Primtheiler $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ als ihr Kugelflächen $R_\nu, R_{\nu'}, R_{\nu''}$ zugeordnet sind, speciell gehören auch zu den beiden unendlich fernen Geraden $\frac{1}{x} = 0$ und $\frac{1}{y} = 0$ gewisse Primtheiler $\mathfrak{p}$, welche die Verallgemeinerung der unendlich fernen Punkte in der Riemann'schen Theorie sind; dieselben sollen im Folgenden stets durch $\mathfrak{p}_{(\infty)}, \mathfrak{p}'_{(\infty)}, \ldots$ bezeichnet werden. Es liegt ferner auf der Hand, dass die hier eingeführten Primtheiler alle Eigenschaften der Primzahlen in der elementaren Zahlentheorie besitzen. Sind nämlich zwei Functionen ζ und ζ' bzw. durch $\mathfrak{p}^k$ und $\mathfrak{p}^{k'}$ genau theilbar, so ist ihr Product genau durch $\mathfrak{p}^{k+k'}$, ihr Quotient durch $\mathfrak{p}^{k-k'}$ theilbar. Eine Function ζ heisst dann durch das Product $\mathfrak{p}_1^{k_1}\mathfrak{p}_2^{k_2}$ von zwei verschiedenen Primtheilern theilbar, wenn sie sowohl durch $\mathfrak{p}_1^{k_1}$ als auch durch $\mathfrak{p}_2^{k_2}$ genau theilbar ist.

Ebenso wie jede algebraische Function von einer Variablen nur eine endliche Anzahl von Nullstellen und Polen auf der zugehörigen Riemann-schen Fläche hat, besitzt in unserer Theorie jede Function ζ nur eine endliche Anzahl von Primtheilern in einer positiven oder negativen Potenz.

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes führt die folgende Überlegung: Es sei $P(y, x)$ eine beliebige irreductible Function, $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ die zu P gehörigen Primtheiler und es möge die gegebene algebraische Function ζ genau durch das Product $\mathfrak{p}^k\mathfrak{p}'^{k'}\mathfrak{p}''^{k''}$ theilbar sein. Ist dann:

$$N(\zeta) = \zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n = B_0(xy)$$

die Norm von ζ, so enthält diese rationale Function von x und y den zugehörigen Factor $P(y, x)$ genau in der Potenz

$$P(xy)^{k\lambda+k'\lambda'+k''\lambda''}.$$

Enthält nämlich ζ die Potenz $\mathfrak{p}^k$, so beginnen alle λb zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Reihen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{\lambda b}$ genau mit $(y - y_0)^{\frac{k}{b}}$, ihr Product also mit $(y - y_0)^{k\lambda}$ und das Entsprechende gilt für die Divisoren $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$; also beginnt das Product *aller* n Reihen genau mit $(y - y_0)^{k\lambda + k'\lambda' + k''\lambda''}$ und dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Function $B_0(xy)$ dieselbe Potenz von P als Factor enthält.

Es sei jetzt ζ zunächst eine ganze algebraische Function, so dass alle ihre Gleichungscoefficienten, speciell also auch ihre Norm *ganze* Functionen von x und y sind. Eine solche Function ist dadurch characterisirt, dass sie nur die Divisoren $\mathfrak{p}_\infty \mathfrak{p}'_\infty$ in negativen Potenzen enthalten kann; in der That war ja gezeigt worden, dass für eine beliebige ganze Function $P(y, x)$ keine der zugehörigen Entwickelungen von negativer Ordnung sein kann. Dann zeigt man leicht, dass ζ nur eine endliche Anzahl von Primfactoren enthält. Soll nämlich ζ irgend einen Primfactor $\mathfrak{p}$ auch nur in der ersten Potenz enthalten, so muss $N(\zeta) = B_0(xy)$ durch $P(xy)^\lambda$ theilbar sein. Nur den irreductiblen Factoren von $B_0(xy)$ können Primtheiler von ζ entsprechen und diesen entsprechen auch wirklich Divisoren von ζ. Um sie zu finden braucht man nur die Reihen $\zeta_1 \ldots \zeta_n$ aufzusuchen welche irgend einem Zweige von P entsprechen und die Ordnungszahlen jener Reihen festzustellen. Ausserdem hat man ζ noch in Bezug auf die Geraden $\frac{1}{x} = 0$ und $\frac{1}{y} = 0$ und die zugehörigen Primfactoren $\mathfrak{p}_{(\infty)}$, $\mathfrak{p}'_{(\infty)}, \ldots, \mathfrak{p}^{(\rho)}_{(\infty)}$ zu untersuchen, was genau auf dieselbe Weise geschieht.

So erhält man einen völlig bestimmten Divisor

$$\vartheta = \mathfrak{p}_1^{k_1} \mathfrak{p}_2^{k_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{k_r}$$

dem die ganze algebraische Zahl ζ in dem Sinne äquivalent gesetzt werden kann, als derselbe alle und nur die Primtheiler enthält, welche auch in ζ auftreten, und jeden ebenso oft, wie ζ. Dasselbe gilt für jede ganze rationale Function, die ja ebenfalls eine ganze algebraische Function ist.

Ist jetzt ζ eine gebrochene algebraische Function und genügt es der Gleichung:

$$a_n(xy)\zeta^n + a_{n-1}(xy)\zeta^{n-1} + \ldots + a_0(xy) = 0$$

so ist, wie schon im Anfang von § 4 erwähnt wurde,

$$\zeta = \frac{\bar{\zeta}}{a_n(xy)},$$

wo $\bar{\zeta}$ eine ganze algebraische Function bedeutet, also äquivalent einem bestimmten Divisor $\bar{\vartheta}$ ist. Ebenso kann aber auch die ganze rationale Function $a_n(xy)$ in ihre Primdivisoren zerlegt werden, auch sie ist also einem anderen Divisor $\bar{\vartheta}_1$ äquivalent, und hieraus sowie nach den Fundamentaleigenschaften der Divisoren folgt dass

$$\zeta \sim \frac{\bar{\vartheta}}{\bar{\vartheta}_1},$$

dass also jede ganze und auch jede gebrochene Grösse des Körpers $K(x, y, z)$ einem und nur einem Divisor ϑ äquivalent ist.

Durch ihren Divisor ist eine algebraische Function bis auf eine multiplicative Constante bestimmt. Sind nämlich zwei Grössen ζ und ζ' demselben Divisor ϑ äquivalent, so ist ihr Quotient

$$\varepsilon = \frac{\zeta}{\zeta'} \sim \frac{\vartheta}{\vartheta} \sim 1$$

und ich zeige nun dass eine algebraische Grösse ε, welche äquivalent Eins ist, nothwendig eine Constante sein muss.

Ist die algebraische Function $\varepsilon \sim 1$, so gilt dasselbe von $\frac{1}{\varepsilon}$, und beide sind zunächst *ganze* algebraische Functionen, da sie keine endlichen Primtheiler in negativer Potenz enthalten. Hieraus folgt dass ε einer Gleichung von der Form genügt:

$$\varepsilon^n + g_{n-1}(xy)\varepsilon^{n-1} + \dots + g_1(xy)\varepsilon + \gamma_0 = 0 \tag{1}$$

wo γ_0 eine Constante bedeutet, und alle $g_i(xy)$ ganze Functionen von x und y, denn nur dann ist auch $\frac{1}{\varepsilon}$ durch die Gleichung:

$$\gamma_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n + g_1(xy)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} + \dots + 1 = 0$$

ebenfalls als *ganze* algebraische Function definirt. Aber auch alle Coefficienten $g_i(xy)$ müssen sowohl in Bezug auf x als auf y vom nullten Grade, d. h. sie müssen ebenfalls Constanten sein. Um dies zu zeigen, betrachte ich die n Wurzeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ in der Umgebung der unendlich fernen Geraden $\frac{1}{y} = 0$, und bestimme durch das allgemeine Verfahren ihre Ordnungszahlen. Alle diese Ordnungszahlen müssen aber Null sein, denn sonst würde ja ε mindestens einen der zu $\frac{1}{y} = 0$ gehörigen Primfactoren $\mathfrak{p}_\infty$ enthalten, also nicht äquivalent Eins sein. Dieser Bedingung wird offenbar dann und nur dann genügt, wenn die Ordnungszahl ε_0 der Wurzel höchster Ordnung gleich Null ist. Aus dem im § 4 bewiesenen Satze folgt aber, dass diese Ordnungszahl durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\varepsilon_0 = Max\left(\frac{\rho_0 - \rho_s}{s}\right),$$

wo $\rho_0, \rho_1, \ldots \rho_n$ die Ordnungszahlen der Gleichungscoefficienten $g_i(xy)$ in Bezug auf $\frac{1}{y}$ sind. Dieselben haben die Werthe:

$$\rho_0 = \rho_n = 0, \qquad \rho_i = -r_i, \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n-1)}$$

wo r_i den Grad des Coefficienten $g_i(x, y)$ in Bezug auf y bedeutet, also sicher eine nicht negative Zahl ist. Also ist

$$\varepsilon_0 = Max\left(\frac{r_s}{s}\right)$$

und dieser Maximalwerth ist dann und nur dann Null, wenn alle Coefficienten $g_i(xy)$ in Bezug auf y den Grad $r_i = 0$ haben, also y gar nicht enthalten. Genau ebenso zeigt man, dass alle Coefficienten auch von x unabhängig sind, dass sie sich also auf Constanten reduciren. Es genügt also ε einer Gleichung mit Zahlcoefficienten:

$$\varepsilon^n + \gamma_{n-1}\varepsilon^{n-1} + \cdots + \gamma_0 = 0,$$

ist also selbst eine Constante; es werde beiläufig bemerkt dass jene Gleichung lauter gleiche Wurzeln besitzen muss, weil ε dem Körper $K(x,y,z)$ angehört.

Eine jede algebraische Function von zwei Variablen ist also durch ihren Divisor $\mathfrak{d}$ in genau derselben Weise bis auf einen constanten Factor bestimmt, wie in der Riemann'schen Theorie eine Function durch ihre Nullstellen und Pole vollständig fixirt ist. Fasst man in $\mathfrak{d}$ das Product aller Primfactoren mit positiven Exponenten zu einem Zähler, die übrigen mit negativen Exponenten zu einem Nenner zusammen, so erhält man für jedes ζ eine Äquivalenz

$$\zeta \sim \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}},$$

wo $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{n}$ *ganze* Divisoren bedeuten; auf den zu $\mathfrak{z}$ gehörigen Riemannschen Flächen ist ζ von positiver, auf den zu n gehörigen von negativer Ordnung, der Zähler repräsentirt geometrisch die Nullcurven, der Nenner die Polcurven von ζ.

Auf die in dieser Arbeit gefundenen Resultate kann man nun eine vollständige arithmetisch strenge Theorie der algebraischen Functionen von zwei Variablen oder der algebraischen Flächen gründen, und diese dann auf die Theorie der algebraischen Integrale anwenden, welche in neuerer Zeit von anderen Grundlagen aus durch Herrn Picard erfolgreich behandelt worden ist; dieselbe bietet nunmehr keine wesentlich grösseren Schwierigkeiten als die entsprechende für Functionen einer Variablen; ich habe diese Untersuchungen bereits durchgeführt und werde ihre Resultate in einer späteren Arbeit veröffentlichen.