# SUR LES FONCTIONS CONVEXES ET LES INÉGALITÉS ENTRE LES VALEURS MOYENNES[1]

PAR

J. L. W. V. JENSEN
à COPENHAGUE.

1. *Des fonctions convexes et concaves. Définition. Exemples.*

Dans sa célèbre Analyse algébrique (note II, pp. 457—59) CAUCHY démontre que »la moyenne géométrique entre plusieurs nombres est toujours inférieure à leur moyenne algébrique». La méthode employée par CAUCHY est extrêmement élégante, et elle à passé sans changement dans tous les traités d'analyse algébrique. Elle consiste, comme on sait, en ceci, que, de l'inégalité

$$\sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a + b),$$

où $a$ et $b$ sont des nombres positifs, on est conduit à l'inégalité analogue pour quatre nombres, savoir

$$\sqrt[4]{abcd} < \frac{1}{4}(a + b + c + d),$$

et aux suivantes, pour $8, 16, \ldots, 2^m$ nombres, après quoi ce nombre, par un artifice, est réduit à un nombre arbitraire inférieur, $n$. Cette méthode simple a été mon point de départ dans les recherches suivantes, qui conduisent, par une voie en réalité très simple et élémentaire, à des résultats généraux et non sans importance.

---

[1] Conférence faite à la Société mathématique danoise le 17 janvier 1905.

J'introduirai la définition suivante. Lorsqu'une fonction $\varphi(x)$, réelle, finie et uniforme, de la variable réelle $x$, satisfait dans un certain intervalle à l'inégalité

$$\varphi(x) + \varphi(y) \geqq 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{1}$$

on dit que $\varphi(x)$ est une fonction convexe dans cet intervalle.

Si au contraire $\varphi(x)$ satisfait à l'inégalité

$$\varphi(x) + \varphi(y) \leqq 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{2}$$

on dit que $\varphi(x)$ est une fonction concave.

On suppose en outre que ces inégalités ne se réduisent pas *constamment*, dans l'intervalle donné, à l'égalité

$$\varphi(x) + \varphi(y) = 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right); \tag{3}$$

dans ce cas la fonction $\varphi(x)$ est dite »linéaire» dans l'intervalle donné.

Cette expression a été adoptée parceque l'égalité (3) est satisfaite par $\varphi(x) = a + bx$.

Il ressort de ces définitions que les fonctions »linéaires» forment une transition de la classe des fonctions convexes à celle des fonctions concaves, et qu'elles doivent être considérées comme des cas limites communs aux deux classes.

Des définitions données il résulte immédiatement que $-\varphi(x)$ est concave, lorsque $\varphi(x)$ est convexe, et inversement. Il serait par suite suffisant dans ce qui suit de considérer seulement les fonctions convexes, puisque l'on passe si aisément d'une classe à l'autre. Comme toutefois il peut y avoir avantage à considérer les deux classes de fonctions, les fonctions concaves seront aussi mentionnées de temps en temps; mais on devra se souvenir, même lorsque ce ne sera pas toujours rappelé, qu'à toute proposition relative aux fonctions convexes correspond une proposition analogue pour les fonctions concaves.

Comme l'objet principal de cette recherche est de présenter une série d'inégalités d'un caractère général, comprenant comme cas particuliers presque toutes les inégalités jusqu'ici connues, nous allons développer d'abord les théorèmes nécessaires propres à ce but, avant d'entreprendre l'étude plus approfondie des fonctions convexes elles-mêmes.

Il sera d'abord nécessaire d'énoncer quelques propositions qui résultent immédiatement des définitions, et de donner quelques exemples des classes de fonctions définies.

Une somme de fonctions convexes ou »linéaires» est convexe, lorsque l'une au moins des fonctions est convexe. Si $\varphi(x)$ est convexe, et $c$ une constante positive, $c\varphi(x)$ est convexe. Ces propositions sont également vraies pour les fonctions concaves. Exemples:

1°. $x^2$ est une fonction convexe dans tout intervalle. Donc $a+bx+cx^2$ est convexe ou concave suivant que $c$ est positif ou négatif.

2°. $|x|$ est »linéaire» dans tout intervalle qui ne comprend pas le zéro, mais convexe dans le cas contraire. Donc $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu |x-x_\nu|$, où les $c$ sont des constantes positives, est convexe ou »linéaire» dans tout intervalle, convexe si l'intervalle comprend une ou plusieurs des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, »linéaire», si cela n'a pas lieu.

3°. L'inégalité

$$pa^{p-1}(a-b) > a^p - b^p > pb^{p-1}(a-b),$$

qui a lieu pour $a > b > 0$, et pour toute valeur de $p$ supérieure à $1$, est bien connue.[1] Si $x$ et $y$ sont positifs, et $x > y$, on déduit de cette inégalité

$$x^p - \left(\frac{x+y}{2}\right)^p > p\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p-1}\frac{x-y}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^p - y^p$$

ou

$$(\alpha) \qquad x^p + y^p > 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^p.$$

Donc $x^p$, pour des valeurs de $x$ positives et une valeur de $p$ supérieure à $1$, est une fonction convexe. De la dernière inégalité il résulte, en changeant $x$ et $y$ en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$,

$$x^{-p} + y^{-p} > 2\left(\frac{x+y}{2xy}\right)^p \geqq 2\left(\frac{2}{x+y}\right)^p = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^{-p}.$$

[1] On peut facilement la déduire de l'identité

$$\frac{1-a^n}{1-a} = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$$

par une méthode tout à fait élémentaire.

Donc $x^p$, lorsque $p > 1$, est une fonction convexe pour les valeurs positives de $x$. Si au contraire on met dans ($\alpha$) $x^{\frac{1}{p}}$ et $y^{\frac{1}{p}}$ à la place de $x$ et de $y$, on obtient

$$(\beta) \qquad 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\frac{1}{p}} > x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}.$$

$x^p$ est donc une fonction concave, pour $x$ positif, lorsque $0 < p < 1$. De ($\beta$) il résulte

$$\frac{2}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\frac{1}{p}}} < \frac{4}{x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}} \leqq \frac{x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}}{(xy)^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} + \frac{1}{y^{\frac{1}{p}}},$$

qui est encore vraie pour $p = 1$. Ainsi $x^{-p}$ est aussi convexe lorsque $0 < p \leqq 1$.

En résumé, pour les valeurs positives de $x$, on voit que $x^p$ est convexe lorsque $p$ est plus grand que $1$, ou négatif, et concave lorsque $0 < p < 1$. Si $p = 1$, la fonction est »linéaire», comme on l'a vu plus haut.

4°. $|\sqrt{a + bx^2}|$ est convexe pour $a > 0$, $b > 0$, concave pour $ab < 0$, tant que le binôme sous le signe radical reste positif.

5°. $e^{cx}$ est une fonction convexe dans tout intervalle, tandis que $\log x$ est concave dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

6°. Le calcul différentiel nous fournit un moyen général de décider si des fonctions qui peuvent être différentiées sont convexes ou concaves. Si en effet $f(x)$ est réelle et uniforme dans un certain intervalle, et possède une deuxième dérivée déterminée, finie et continue, on aura, en vertu du théorème de Rolle

$$f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 f''(x'),$$

$x'$ étant un nombre intermédiaire entre $x$ et $y$. Donc $f(x)$ sera convexe tant que $f''(x)$ sera positive, concave tant que $f''(x)$ sera négative. La signification géométrique de ce fait est évidente. En effet, si une fonction convexe $\varphi(x)$ est *susceptible* d'une représentation géométrique en coordonnées rectangulaires l'équation $y = \varphi(x)$ définit une courbe, tournant sa convexité vers les $y$ négatifs.

*Remarque.* Les trois inégalités suivantes

$$\psi(x)\psi(y) \geqq \left[\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2, \quad \psi(x) \text{ positif};$$

$$\psi(x)+\psi(y) \geqq 2\psi(\sqrt{xy}), \quad x \text{ et } y \text{ positifs};$$

$$\psi(x)\psi(y) \geqq [\psi(\sqrt{xy})]^2, \quad x \text{ et } y \text{ positifs}, \ \psi(x) \text{ positif};$$

peuvent être ramenées à (1) par des substitutions simples, savoir, respectivement:

$$\log\psi(x) = \varphi(x),$$

$$\psi(e^x) = \varphi(x),$$

$$\log\psi(e^x) = \varphi(x).$$

2. *Généralisation de l'inégalité* (1).

Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction convexe quelconque dans un intervalle donné, et que $x_1, x_2, x_3, \ldots$ soient tous situés dans cet intervalle ou à ses limites. De (1) il suit que

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+(x_3)+\varphi(x_4) \geqq 2\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+2\varphi\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)$$

$$\geqq 4\varphi\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)$$

et généralement, $m$ étant un entier positif

$$\sum_{\nu=1}^{2^m}\varphi(x_\nu) \geqq 2^m\varphi\left(2^{-m}\sum_{\nu=1}^{2^m}x_\nu\right),$$

comme on le voit facilement par l'induction complète. Si alors $n$ est un entier positif, et si l'on choisit $m$ tel que $2^m > n$, on peut poser

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{2^m} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Et on trouve alors

$$\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(x_\nu)+(2^m-n)\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\right) \geqq 2^m\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\right),$$

ou

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\right) \leqq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(x_\nu), \tag{4}$$

laquelle est une généralisation de l'inégalité (1), qui sert à définir les fonctions convexes.

Il est clair qu'une inégalité semblable s'applique aux fonctions concaves: il suffit de renverser le signe d'inégalité. Pour les fonctions »linéaires» l'inégalité devient simplement une égalité.

Supposons maintenant que $\varphi(x)$ est une fonction *continue* et convexe dans un certain intervalle. Nous savons qu'il existe de telles fonctions par les exemples précédents. Soit encore $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$, où tous les $n_\mu$ sont des entiers positifs. Il résulte de (4), en choisissant les $x$ d'une manière convenable,

$$\varphi\left(\frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_mx_m)\right) \leqq \frac{1}{n}\left(n_1\varphi(x_1) + n_2\varphi(x_2) + \ldots + n_m\varphi(x_m)\right).$$

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des nombres positifs quelconques dont la somme est $a$, et faisons croître les $n$ indéfiniment, mais de telle sorte que

$$\lim\frac{n_1}{n} = \frac{a_1}{a}, \qquad \lim\frac{n_2}{n} = \frac{a_2}{a}, \quad \ldots, \quad \lim\frac{n_{m-1}}{n} = \frac{a_{m-1}}{a},$$

d'où il résultera

$$\lim\frac{n_m}{n} = 1 - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1}}{a} = \frac{a_m}{a},$$

et par suite, $\varphi(x)$ étant continue par hypothèse,

$$\varphi\left(\frac{\sum\limits_{\mu=1}^{m} a_\mu x_\mu}{a}\right) \leqq \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{m} a_\mu \varphi(x_\mu)}{a},$$

ce qui démontre le théorème suivant:

*Lorsque $\varphi(x)$ est une fonction continue et convexe dans un intervalle donné, on aura l'inégalité*

$$5) \qquad \varphi\left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right) \leqq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(x_\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu},$$

*où $x_1, x_2, \ldots$ représentent des nombres tous situés dans l'intervalle, et où $a_1, a_2, \ldots$ sont des nombres positifs, mais d'ailleurs quelconques.*

Pour les fonctions concaves, le signe d'inégalité doit être renversée.

Cette proposition est d'une telle généralité, que peut-être toutes les inégalités connues entre les valeurs moyennes y sont comprises comme cas très particuliers.

3. *Applications de la formule* (5).

Dans ce qui suit, les nombres représentés par $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seront supposés positifs. Posons dans la formule (5) $\varphi(x) = x^p$, $p > 1$, $x > 0$, donc $\varphi(x)$ est convexe, comme on l'a vu. On aura

$$\left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right)^p \leqq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^p}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu},$$

ou

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu\right)^p \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{p-1} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^p, \tag{6}$$

où tous les $x$ sont positifs. L'inégalité (6) se réduit à une simple identité pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Elle reste aussi valable pour $p < 0$, tandis qu'elle doit être renversée pour $0 < p < 1$. Pour $a_1 = a_2 = \ldots = 1$ on retrouve un résultat donné auparavant par M. H. Simon.[1]

En y faisant $p = 2$, et en remplaçant $a_\nu$ par $a_\nu^2$, $x_\nu$ par $\frac{b_\nu}{a_\nu}$, on trouve

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2, \tag{7}$$

formule due à Cauchy (*loc. cit.*, p. 455), qui en donne d'ailleurs une démonstration toute différente.

Posons dans (7) $a_\nu^{\frac{1}{2}} x_\nu^{\frac{1}{2}}$ pour $a_\nu$, $a_\nu^{\frac{1}{2}} x_\nu^{-\frac{1}{2}}$ pour $b_\nu$, nous avons

$$\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{x_\nu}} \leqq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu},$$

[1] *Über einige Ungleichungen*, Zeitschrift für Math. u. Physik, t. 33, p. 57, 1888.

d'où suit que la moyenne harmonique entre plusieurs nombres positifs est plus petite que leur moyenne algébrique.

Il est facile de généraliser la formule (7).

Remplaçons dans (6) $x_\nu$ par $\left(\frac{b_\nu}{a_\nu}\right)^{\frac{1}{p}}$ et extrayons la racine $p^{\text{ième}}$ des deux membres, nous aurons

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{1-\frac{1}{p}} b_\nu^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{\frac{1}{p}},$$

qui peut être écrite sous la forme symétrique

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{x_1} b_\nu^{x_2} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{x_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{x_2},$$

$x_1$, $x_2$ étant des constantes positives avec la somme $1$.

Élevons les deux membres de l'inégalité ci-dessus à la puissance $x'^{\text{ième}}$ où $x'$ est positif et $< 1$, et multiplions par $\left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{1-x'}$, nous trouvons

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{x_1} b_\nu^{x_2}\right)^{x'} \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{1-x'} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{x_1 x'} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{x_2 x'} \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{1-x'},$$

ce qui démontre l'inègalité suivante

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{x_1} b_\nu^{x_2} c_\nu^{x_3} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{x_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{x_2} \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{x_3},$$

$x_1$, $x_2$, $x_3$ étant des constantes positives avec la somme $1$. En continuant de cette manière on démontre par l'induction complète

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 1}^{x_1} a_{\nu 2}^{x_2} \ldots a_{\nu k}^{x_k} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 1}\right)^{x_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 2}\right)^{x_2} \ldots \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu k}\right)^{x_k}, \tag{8}$$

où les $x$ sont des constantes positives avec la somme $1$.

Dans la formule (7), mettons $a_\nu^{\frac{1}{2}} b_\nu^{\frac{x}{2}}$ à la place de $a_\nu$, et $a_\nu^{\frac{1}{2}} b_\nu^{\frac{y}{2}}$ à la place de $b_\nu$, $x$ et $y$ étant des nombres réels quelconques, et posons, pour simplifier l'écriture, $S(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu^x$. On a:

$$\left(S\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2 \leqq S(x) S(y),$$

et $\log S(x)$ est par suite une fonction convexe de $x$ dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. La relation fondamentale (5) donne alors:

$$\log S\left(\frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu x_\mu}{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu}\right) \leqq \frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \log S(x_\mu)}{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu}$$

ou

$$\left(S\left(\frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu x_\mu}{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu}\right)\right)^{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu} \leqq \prod_{\mu=1}^{m} (S(x_\mu))^{a_\mu}. \tag{9}$$

Pour $m = 2$, on a

$$\left(S\left(\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a_1 + a_2}\right)\right)^{a_1+a_2} \leqq (S(x_1))^{a_1}(S(x_2))^{a_2}$$

En y faisant $x_2 = x_0$, et $a_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, $a_2 = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}$, et supposant $x_1 > x > x_0$, on trouve

$$S(x) \leqq (S(x_1))^{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}} (S(x_0))^{\frac{x_1-x}{x_1-x_0}},$$

ou bien

$$(S(x))^{x_1-x_0} \leqq (S(x_1))^{x-x_0}(S(x_0))^{x_1-x}.$$

D'où il suit

$$\left(\frac{S(x)}{S(x_0)}\right)^{\frac{1}{x-x_0}} \leqq \left(\frac{S(x_1)}{S(x_0)}\right)^{\frac{1}{x_1-x_0}}, \tag{10}$$

ou encore

$$\left(\frac{S(x)}{S(x_1)}\right)^{\frac{1}{x-x_1}} \geqq \left(\frac{S(x_0)}{S(x_1)}\right)^{\frac{1}{x_0-x_1}}. \tag{10'}$$

De (10) il résulte que la fonction $\left(\frac{S(x)}{S(x_0)}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}$ n'est jamais décroissante lorsque $x$ croît, $x_0$ restant invariable. Si dans (10') on permute $x_1$ et $x_0$, il faut supposer $x_0 > x > x_1$, et l'on en conclut que $\left(\frac{S(x)}{S(x_0)}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}$ n'est jamais croissante lorsque $x$ décroît. Ce qui démontre la proposition suivante:

Les nombres $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ étant positifs, $x$ étant une variable réelle quelconque, et $x_0$ une constante réelle quelconque, la fonction

$$\Phi(x) = \left(\frac{\sum_1^n a_\nu b_\nu^x}{\sum_1^n a_\nu b_\nu^{x_0}}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}$$

est monotone et ne décroît jamais lorsque l'on fait croître $x$, tant dans l'intervalle $(-\infty, x_0)$, que dans l'intervalle $(x_0, +\infty)$. On a d'ailleurs $\Phi(x_0 - \varepsilon) < \Phi(x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon$ étant positif.

La dernière partie de la proposition résulte de ce que

$$(S(x_0))^2 \leqq S(x_0 + \varepsilon) S(x_0 - \varepsilon)$$

comme on l'a vu plus haut.

Cette proposition comprend comme cas particuliers quelques propositions de Schlömilch[1] dont voici l'énoncé:

Soit $n$ nombres positifs $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$, et $S_p = \alpha^p + \beta^p + \ldots + \lambda^p$, on aura

$$\frac{S_1}{n} < \sqrt{\frac{S_2}{n}} < \sqrt[3]{\frac{S_3}{n}} < \ldots$$

et

$$\frac{S_1}{n} > \left(\frac{S_{\frac{1}{2}}}{n}\right)^2 > \left(\frac{S_{\frac{1}{3}}}{n}\right)^3 > \ldots.$$

Du reste Bienaymé[2] a énoncé sans démonstration une proposition qui est très voisine de notre proposition ci-dessus. Plus tard M. H. Simon[3] a publié une démonstration d'un cas spécial.

[1] *Über Mittelgrössen verschiedener Ordnungen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. 3, p. 301, 1858.

[2] Société philomatique de Paris, Extraits des procès-verbaux des séances pendant l'année 1840, p. 67, Paris 1841.

[3] A l'endroit cité.

SCHLÖMILCH détermine aussi les valeurs limites

$$\lim_{p=\infty}\left(\frac{S_p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \lim_{p=\infty}\left(\frac{S_{\frac{1}{p}}}{n}\right)^{p}.$$

On trouve facilement pour notre fonction, que

$$\lim_{x=0}\left(\frac{S(x)}{S(0)}\right)^{\frac{1}{x}} = (b_1^{a_1} b_2^{a_2} \dots b_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1+a_2+\dots+a_n}},$$

et

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{S(x)}{S(0)}\right)^{\frac{1}{x}} = b,$$

où $b$ est le plus grand des nombres $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Pour faire une autre application de la formule fondamentale (5), posons $\varphi(x) = \log x$, $\varphi(x)$ est concave et on aura parsuite

$$\log\frac{\sum_1^n a_\nu b_\nu}{\sum_1^n a_\nu} \geqq \frac{\sum_1^n a_\nu \log b_\nu}{\sum_1^n a_\nu},$$

ou

$$(11) \qquad \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \geqq (b_1^{a_1} b_2^{a_2} \dots b_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1+a_2+\dots+a_n}},$$

ce qui est une forme généralisée, due à M. L. J. ROGERS[1], de la proposition classique sur la moyenne géométrique.

On trouve une autre inégalité d'un caractère semblable en remarquant que $x \log x$ est convexe pour $x$ positive. La voici

$$(12) \qquad \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leqq (b_1^{a_1} b_2^{a_2} \dots b_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1 b_1+a_2 b_2+\dots+a_n b_n}}.$$

Le cas spécial où $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ a aussi été donné par M. ROGERS.

Ces exemples doivent suffire pour montrer combien la formule (5) est féconde.

[1] Messenger of Mathematics, t. 17, 1888.

Il est évident que l'on peut, dans les formules précédentes, lorsque $\Sigma a_\nu$, $\Sigma a_\nu x_\nu$, etc., sont des séries convergentes, faire croître $n$ indéfiniment, et l'on obtient ainsi une suite d'inégalités entre certaines séries infinies.

On peut employer autrement la formule (11) dans la théorie des séries. *Soit* $\Sigma b_{\nu 1}, \Sigma b_{\nu 2}, \ldots, \Sigma b_{\nu n}$ *des séries convergentes à termes positifs, et soit* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *des constantes positives dont la somme est* 1, *la série*

$$\sum_{(\nu)} b_{\nu 1}^{a_1} b_{\nu 2}^{a_2} \ldots b_{\nu n}^{a_n}$$

*sera aussi convergente.*

La démonstration de cette proposition peut être déduite immédiatement de (11) en y faisant les $b$ dépendants d'un indice nouveau $\nu$, posant $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, et faisant la somme dans les deux membres pour $\nu = 1, 2, \ldots$.

4. *Applications sur le calcul intégral.* Il y a encore d'autres cas où l'on peut faire croître $n$ indéfiniment. En se rappelant la définition d'une intégrale définie comme limite des valeurs d'une somme, ce qui précède nous donne toute une suite d'inégalités intéressantes entre des intégrales.

Supposons que $a(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions intégrables dans l'intervalle $(0, 1)$, et que $a(x)$ est constamment positive. L'inégalité (5) donne

$$\varphi\left(\frac{\sum_1^n a\left(\frac{\nu}{n}\right) f\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{1}{n}}{\sum_1^n a\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{1}{n}}\right) \leqq \frac{\sum_1^n a\left(\frac{\nu}{n}\right) \varphi\left(f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right) \frac{1}{n}}{\sum_1^n a\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{1}{n}},$$

où $\varphi(x)$ *est supposée continue et convexe* dans l'intervalle $(g_0, g_1)$, $g_0$ et $g_1$ étant les limites inférieure et supérieure de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $(0, 1)$. Or on sait que le produit de deux fonctions intégrables est une fonction intégrable, et qu'une fonction intégrable, par substitution dans une fonction continue, donne une fonction intégrable. On trouve alors, en faisant croître $n$ indéfiniment

$$(5') \qquad \varphi\left(\frac{\int_0^1 a(x) f(x)\, dx}{\int_0^1 a(x)\, dx}\right) \leqq \frac{\int_0^1 a(x) \varphi(f(x))\, dx}{\int_0^1 a(x)\, dx}$$

Il va sans dire qu'on peut remplacer les intégrales $\int\limits_0^1$ dans cette formule par des intégrales correspondantes $\int\limits_a^b$.

Par analogie avec les formules précédentes, je citerai les exemples suivants d'application de la formule (5')

$$\left(\int\limits_0^1 a(x)f(x)dx\right)^p \leqq \left(\int\limits_0^1 a(x)dx\right)^{p-1} \int\limits_0^1 a(x)(f(x))^p dx, \quad f(x) \text{ positif, } p > 1;$$

$$\left(\int\limits_0^1 a(x)b(x)dx\right)^2 \leqq \int\limits_0^1 (a(x))^2 dx \int\limits_0^1 (b(x))^2 dx, \quad b(x) \text{ intégrable et positif;}$$

$$\int\limits_0^1 (a_1(x))^{x_1}(a_2(x))^{x_2}\dots(a_k(x))^{x_k}dx$$
$$\leqq \left(\int\limits_0^1 (a_1(x)dx)\right)^{x_1}\left(\int\limits_0^1 (a_2(x)dx)\right)^{x_2}\dots\left(\int\limits_0^1 (a_k(x)dx)\right)^{x_k},$$

les $a(x)$ étant positives et intégrables, et $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 1$;

$$\frac{\int\limits_0^1 a(x)b(x)dx}{\int\limits_0^1 a(x)dx} \geqq e^{\frac{\int_0^1 a(x)\log b(x)dx}{\int_0^1 a(x)dx}};$$

$$\text{—„—} \leqq e^{\frac{\int_0^1 a(x)\log b(x)dx}{\int_0^1 a(x)b(x)dx}}$$

De ces formules la deuxième et la quatrième sont des généralisations de formules connues. En posant dans la dernière $a(x) = 1$ on retrouve une formule de SCHLÖMILCH qui est particulièrement intéressante parcequ'elle conduit à un résultat important dans la recherche des zéros d'une série de TAYLOR, comme je le montrerai ailleurs.

5. *Etude plus approfondie des fonctions convexes.*

Après avoir montré l'utilité de la notion de »fonction convexe», nous reviendrons à l'étude de ces fonctions en général. Dans le § 2, nous avons montré que la formule (4) a lieu pour toute fonction convexe

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqq \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)}{n}.$$

Si l'on y fait, $n$ étant $> m$,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = x + n\delta, \qquad x_{m+1} = \ldots = x_n = x,$$

on trouve

$$\varphi(x + m\delta) \leqq \frac{m}{n} \varphi(x + n\delta) + \frac{n-m}{n} \varphi(x)$$

ou

$$(\alpha) \qquad \frac{\varphi(x + n\delta) - \varphi(x)}{n} \geqq \frac{\varphi(x + m\delta) - \varphi(x)}{m}.$$

Mettant $-\delta$ à la place de $\delta$, et supposant $x + n\delta$ et $x - n\delta$ compris dans l'intervalle donné, on trouve

$$(\beta) \qquad \frac{\varphi(x) - \varphi(x - m\delta)}{m} \geqq \frac{\varphi(x) - \varphi(x - n\delta)}{n}.$$

Comme on a, par suite de la définition,

$$\varphi(x + m\delta) - \varphi(x) \geqq \varphi(x) - \varphi(x - m\delta),$$

les inégalités $(\alpha)$ et $(\beta)$ peuvent s'écrire

$$(\gamma) \quad \frac{\varphi(x + n\delta) - \varphi(x)}{n} \geqq \frac{\varphi(x + m\delta) - \varphi(x)}{m} \geqq \frac{\varphi(x) - \varphi(x - m\delta)}{m} \geqq \frac{\varphi(x) - \varphi(x - n\delta)}{n}.$$

Supposons alors que $\varphi(x)$ a une limite supérieure *finie* $g$ dans l'intervalle donné, on aura, en prenant $m = 1$

$$\frac{g - \varphi(x)}{n} \geqq \varphi(x + \delta) - \varphi(x) \geqq \varphi(x) - \varphi(x - \delta) \geqq \frac{\varphi(x) - g}{n},$$

d'où il résulte, si l'on fait décroître $\delta$ jusqu'à 0, en même temps que $n$ croît indéfiniment, mais assez lentement pour que $x \pm n\delta$ ne sorte pas de l'intervalle,

$$\lim_{|\delta| = 0} (\varphi(x + \delta) - \varphi(x)) = 0.$$

Ainsi est démontrée la proposition suivante:

*Une fonction convexe, qui a une limite supérieure finie dans un certain intervalle, est continue dans cet intervalle.*[1]

La formule (5) s'applique donc à toute fonction semblable. On pourrait en déduire ce qui suit, mais il est plus simple de partir de la formule ($\gamma$).

Si l'on met dans celle-ci $\frac{\delta}{n}$ à la place de $\delta$, on trouve, en supposant désormais $\delta$ *positif*

$$\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} \geqq \frac{\varphi\left(x+\frac{m}{n}\delta\right)-\varphi(x)}{\frac{m}{n}\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi\left(x-\frac{m}{n}\delta\right)}{\frac{m}{n}\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta)}{\delta},$$

ce qui devient, en faisant converger $\frac{m}{n}$ vers un nombre positif quelconque, $\alpha$, plus petit que 1

$$\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} \geqq \frac{\varphi(x+\alpha\delta)-\varphi(x)}{\alpha\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\alpha\delta)}{\alpha\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta)}{\delta}.$$

Cette formule montre que $\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta}$ ne croît jamais lorsque $\delta$ décroît, et que ce quotient reste constamment plus grand que $\frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta')}{\delta'}$, où $\delta'$ est positif mais d'ailleurs quelconque. D'où il suit que

$$\lim_{\delta=+0} \frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta')}{\delta'}$$

---

[1] Cette proposition s'applique également à une fonction concave, en y remplaçant »limite supérieure» par »limite inférieure». De ce qu'une »fonction linéaire» peut être considérée comme un cas particulier des deux classes de fonctions, il résulte:

Une »fonction linéaire» qui a dans un certain intervalle soit une limite supérieure, soit une limite inférieure, est continue.

De ce résultat on conclue aisément la proposition suivante: une »fonction linéaire» ayant ou une limite supérieure ou une limite inférieure dans un intervalle donné a toujours la forme $a + bx$ dans cet intervalle, $a$ et $b$ étant des constantes. Par là est pleinement justifiée la dénomination que nous avons introduite.

existe, et l'on voit de même que

$$\lim_{\delta=+0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta)}{\delta} \leqq \frac{\varphi(x+\delta')-\varphi(x)}{\delta'}$$

est aussi déterminée.

Ainsi est démontrée ce théorème:

*Une fonction convexe $\varphi(x)$, qui a dans un certain intervalle une limite supérieure finie, a une fonction dérivée tant à droite, $\varphi'_+(x)$, qu'à gauche $\varphi'_-(x)$; la différence $\varphi'_+(x)-\varphi'_-(x)$ est positive ou nulle.*

Aux fonctions concaves $\psi(x)$ s'applique une proposition analogue, qui résulte de ce qui précède, puisque $-\psi(x)$ est convexe.

6. *Quelques propositions de fonctions de fonctions.*

Si, dans l'intervalle $(g, g')$, $f(x)$ est une fonction convexe qui ne décroît pas lorsque $x$ croît, et si $\varphi(x)$ est convexe dans un intervalle, dans lequel trouve lieu l'inégalité $g<\varphi(x)<g'$, $f(\varphi(x))$ est aussi convexe.

En effet, de

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2},$$

il suit que

$$f\left(\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leqq f\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}\left(f(\varphi(x))+f(\varphi(x))\right),$$

ce qui démontre la proposition.

On démontre de même le schéma suivant:

| $f(x)$ | $\varphi(x)$ | $f(\varphi x)$ |
|---|---|---|
| convexe, croissante | convexe | convexe |
| concave, décroissante | convexe | concave |
| convexe, décroissante | concave | convexe |
| concave, croissante | concave | concave |

Si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions inverses on démontre de même le schéma:

| $\varphi(x)$ | $\psi(x)$ |
|---|---|
| convexe, croissante | concave, croissante |
| convexe, décroissante | convexe, décroissante |
| concave, décroissante | concave, décroissante |

7. *Sur une certaine fonction convexe.* Nous avons vu plus haut que $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu |x - x_\nu|$ est convexe dans tout intervalle qui comprend au moins un des points $x_1, x_2, \ldots$. Ceci peut servir à former une fonction convexe dont les dérivées à droite et à gauche sont différentes en tous les points d'un ensemble dénombrable réel, donné à l'avance.

Soit en effet $c_1, c_2, \ldots$ une suite infinie de nombres positifs, $x_1, x_2, \ldots$ une suite infinie de nombres réels et bornés, et supposons la série $\Sigma c_\nu$ convergente. Il résulte des recherches sur le principe de CANTOR concernant la condensation des singularités qui sont exposées dans DINI-LÜROTH (*Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse*, § 108*) que la fonction

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu |x - x_\nu|$$

qui est convexe comme nous avons vu plus haut a partout une dérivée unique, sauf aux points $x_1, x_2, x_3, \ldots$. En ces points la fonction a une fonction dérivée à droite et une autre à gauche, et l'on a $f'_+(x_\nu) - f'_-(x_\nu) = 2c_\nu$.

Si par exemple, pour l'ensemble $(x_\nu)$, on choisit les nombres rationnels de l'intervalle $(0, 1)$ dans un ordre déterminé, $f(x)$ sera convexe dans cet intervalle, et aura une dérivée finie en tous les points irrationnels, tandis qu'aux points rationnels les fonctions dérivées à droite et à gauche diffèrent par un nombre positif.

---

En terminant je ne puis m'empêcher d'ajouter quelques remarques.

Il me semble que la notion »fonction convexe» est à peu près aussi fondamentale que celles-ci: »fonction positive», »fonction croissante». Si je ne me trompe pas en ceci la notion devra trouver sa place dans les expositions élémentaires de la théorie des fonctions réelles.

Quant à la définition d'une fonction convexe de plusieurs variables la suivante est la plus naturelle.

La fonction réelle $\varphi(X)$ du point analytique réelle $X = (x, y, z, \ldots)$ est convexe, si dans un domaine simplement connexe et convexe on a toujours

$$\varphi\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right) \leq \frac{1}{2}\varphi(X_1) + \frac{1}{2}\varphi(X_2),$$

où

$$\frac{1}{2}(X_1 + X_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \ldots\right).$$

Il est évident qu'une telle fonction est toujours fonction convexe de chacune des variables. L'inverse n'a pas lieu comme on le voit par un exemple:

$$f(x, y) = -|xy|^{\frac{2}{3}}.$$

*Addition.* Après avoir faite la conférence ci-dessus j'ai remarqué que la formule fondamentale (5) n'était pas entièrement nouvelle comme je le croyais. Je viens de trouver, dans une mémoire de M. A. PRINGSHEIM,[1] une citation d'une note de M. O. HÖLDER[2] dans laquelle se trouve démontrée la formule en question. A la vérité les hypothèses de M. HÖLDER sont bien différentes des miennes en ce qu'il suppose que $\varphi''(x)$ existe. La formule très importante (5') n'est pas mentionnée davantage que la plupart des applications que j'ai données plus haut.

En même temps je veux démontrer une inégalité d'un autre caractère que celles données plus haut. Dans une addition[1] à sa mémoire précitée M. PRINGSHEIM donne une démonstration élégante, qu'il attribue à M. LÜROTH, de l'inégalité

$$(\alpha) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^{\varkappa} < \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{\varkappa},$$

où les $b$ sont positives et $\varkappa > 1$.

[1] *Zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen,* Sitzungsber. d. math. phys. Classe d. k. bayer. Akad. d. W., t. 32, p. 163—192. Nachtrag..., ibid. p. 295—303.

[2] *Über einen Mittelwertsatz,* Nachr. v. d. k. Gesellsch. d. W. zu Göttingen, 1889, p. 38—47.

Il est facile de généraliser cette démonstration. Soit, en effet, $x$ une variable *positive* et $f(x)$ une fonction *positive* et *croissante* avec $x$, et soit $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ des constantes également positives, nous avons $f(b_\nu) < f(b)$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $b$ étant la somme $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. En multipliant par $a_\nu$ les deux membres de l'inégalité ci-dessus, et en sommant pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$, on trouve

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f(b_\nu) < f(b) \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

ou

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f(b_\nu)}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu} < f\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right).$$

C'est l'inégalité que j'avais en vue. Pour $a_\nu = b_\nu$ et $f(x) = x^{x-1}$, $x > 1$, nous retrouvons l'inégalité $(\alpha)$. A l'aide de celle-ci il est aisé de généraliser les conditions sous lesquelles la formule (8) est valable. Posons en effet dans celle-ci $a_{\nu\mu}^{x}$ pour $a_{\nu\mu}$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 1}^{xx_1} a_{\nu 2}^{xx_2} \ldots a_{\nu k}^{xx_k} &\leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 1}^{x}\right)^{x_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 2}^{x}\right)^{x_2} \ldots \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu k}^{x}\right)^{x_k} \\ &< \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 1}\right)^{xx_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 2}\right)^{xx_2} \ldots \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu k}\right)^{xx_k}, \end{aligned}$$

ce qui fait voir que la formule (8) reste encore valable pour

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k > 1,$$

seulement le signe d'égalité est à écarter.