

UNE MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE ÉLÉMENTAIRE POUR L'ÉTUDE
DE CERTAINES QUESTIONS DE LA THÉORIE
DES COURBES PLANES¹

PAR

HELGE VON KOCH

STOCKHOLM.

Jusqu'à l'époque où WEIERSTRASS inventa une fonction continue ne possédant, pour aucune valeur de la variable, une dérivée déterminée,² c'était une opinion bien répandue dans le monde scientifique que toute courbe continue possède une tangente déterminée (du moins en exceptant certains points singuliers); et l'on sait que, de temps en temps, plusieurs géomètres éminents ont essayé de consolider cette opinion, fondée sans doute sur la représentation graphique des courbes, par des raisonnements logiques.³

Bien que l'exemple dû à WEIERSTRASS ait pour toujours corrigé cette erreur, cet exemple ne satisfait pas l'esprit au point de vue géométrique;

¹ Une partie du présent travail est la reproduction d'un article paru dans *Arkiv för matematik, astronomi och fysik* (utg. af K. Sv. Vet.-Akademien, Stockholm), Bd. 1, p. 681.

² Voir *Journ. f. Math.*, t. 79 (1875).

³ Parmi ces tentatives nous citerons celles d'AMPÈRE (J. éc. pol. cah. 13) de BERTRAND (Traité de C. diff. et intégr.; t. 1) et de GILBERT (Brux. mém. 8°, t. 23 (1872)). — On trouve des notices historiques et bibliographiques dans l'ouvrage de M. E. PASCAL: *Esercisi e note crit. di calcole infinitesimale* p. 85—128. Milano 1895. — Voir aussi *Encyklopädie der Math. Wiss.* II. A. 2, p. 63 et l'ouvrage de M. DINI (traduction LÜROTH-SCHEPP): *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse*, p. 88 suiv., p. 205—229.

car la fonction dont il s'agit est définie par une expression analytique qui cache la nature géométrique de la courbe correspondante de sorte qu'on ne voit pas, en se plaçant à ce point de vue, pourquoi la courbe n'a pas de tangente; on dirait plutôt que l'apparence est ici en *contradiction* avec la réalité du fait, établi par WEIERSTRASS d'une manière purement analytique.¹

C'est pourquoi je me suis demandé — et je crois que cette question est d'importance surtout au point de vue de l'enseignement des principes fondamentaux de l'analyse et de la géométrie — si l'on pouvait trouver une courbe sans tangente où l'apparence géométrique fût *en accord* avec le fait dont il s'agit. La courbe que j'ai trouvée et qui fait l'objet principal de l'étude suivante est définie par une construction géométrique, suffisamment simple, je crois, pour que tout le monde puisse pressentir, déjà par «l'intuition naïve»,² l'impossibilité d'une tangente déterminée.

Cette construction n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une méthode qui peut servir dans l'étude de plusieurs questions concernant les courbes planes. On en trouvera des indications dans les deux derniers paragraphes.

Introduction.

Nous commençons par rappeler quelques notions dont nous aurons besoin dans la suite.

Un ensemble de points C dans un plan s'appelle un arc de *courbe* si on peut lui faire correspondre un segment rectiligne AB de telle manière qu'à tous les points de AB correspondent des points déterminés constituant l'ensemble C .

¹ Parmi les nombreux exemples analogues qui ont été publiés après celui de WEIERSTRASS, il n'y a aucun, à ma connaissance, auquel ne s'applique la même remarque. Un essai de C. WIENER (Journ. f. Math., t. 90, p. 221; Cf. WEIERSTRASS, *Funktionenlehre*, p. 100) d'élucider géométriquement la courbe définie par la fonction de WEIERSTRASS ne suffit pas, semble-t-il, pour lever la difficulté dont il s'agit.

² J'emprunte cette expression à une conférence de M. Klein sur le caractère mathématique de l'intuition de l'espace (1893).

Considérons un tel ensemble et désignons par $K(X)$ le point de C qui correspond au point X du segment AB . Soit X' un point quelconque de AB , $K(X')$ le point correspondant de C ; on dit que la courbe est *continue* au point $K(X)$ si le point $K(X')$ s'approche indéfiniment du point $K(X)$ quand X' tend vers X d'une manière quelconque; si cette condition est vérifiée pour tout point de l'arc considéré, on appelle celui-ci un arc de *courbe continue* ou un *arc continu*.¹

Soit C un tel arc, $K(X)$ un point de C correspondant au point X de AB ; s'il y a sur AB un point X' distinct de X (et distinct de B si X coïncide avec A , distinct de A si X coïncide avec B) tel que le point correspondant $K(X')$ coïncide avec $K(X)$, ce point s'appelle un point *multiple* de la courbe; dans le cas contraire, $K(X)$ s'appelle un point *simple*. Si tous les points de l'arc C sont simples, celui-ci s'appelle un arc continu *simple* ou encore, d'après la terminologie de M. HILBERT, une *courbe de M. JORDAN*. Enfin, un tel arc s'appelle *fermé* ou *ouvert* selon que les points $K(A)$ et $K(B)$ coïncident ou non.

Considérons un tel arc ouvert C . Soient X_1, X_2 deux points du segment AB et désignons par x_1, x_2 leurs distances respectives du point A . On dit que le point $K(X_1)$ de C *précède* ou *succède* le point $K(X_2)$ selon que $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$. Si l'on prend sur AB trois points X_1, X_2, X_3 , on dit que le point $K(X_2)$ de la courbe est *intermédiaire* aux points $K(X_1), K(X_3)$ ou que ce point est situé *entre* les deux autres, si le point X_2 est situé entre les points X_1, X_3 . Les points $K(A), K(B)$ de la courbe qui correspondent aux extrémités du segment AB s'appellent les *extrémités* de l'arc considéré. Si l'on fait parcourir à X le segment AB dans le sens convenu comme positif, on dit que le point correspondant K parcourt l'arc de courbe C dans le sens positif.

Si l'on joint deux points K, K' de la courbe par une droite, celle-ci s'appelle une *sécante* de la courbe et la partie de cette sécante comprise entre K et K' s'appelle une *corde* de la courbe.

Fixons le point K et faisons tendre K' d'une manière quelconque vers K ; si la sécante KK' tend alors vers une direction limite T bien déterminée,

¹ Analytiquement, la dernière condition revient à supposer les coordonnées cartésiennes u, v d'un point de la courbe exprimables en fonctions continues par rapport à un paramètre.

on dit que la courbe a en K une tangente et la droite T s'appelle la *tangente* de C au point K ;¹ dans le cas contraire on dit que la courbe n'a pas au point K une tangente déterminée ou, d'une manière plus brève, que la courbe est *sans tangente* en K .

Supposons que la courbe considérée ait au point K une tangente déterminée T . Soient L et M deux points voisins sur la courbe tels que K se trouve *entre* L et M . Alors la sécante LM tend nécessairement vers T comme position limite quand L et M tendent vers K tout en restant sur la courbe à des côtés opposés par rapport à K .²

Rappelons enfin la définition de la *longueur* d'un arc de courbe KK' . Intercalons sur cet arc, entre K et K' , un certain nombre de points K_1, K_2, \dots, K_n et considérons la ligne polygonale formée par les cordes $KK_1, K_1K_2, \dots, K_nK'$. Faisons augmenter indéfiniment le nombre de ces points intermédiaires de telle manière que la longueur de chacune de ces cordes tende vers zéro. Si la longueur de la ligne polygonale ainsi définie tend vers une valeur finie et déterminée L , on dit que l'arc de courbe KK' est *rectifiable* et a pour *longueur* L .

Dans le cas contraire on dit que l'arc n'est pas rectifiable. On prouve dans ce cas que la longueur de la ligne polygonale tend vers l'infini, et l'on convient de dire que la longueur de l'arc est infinie.

I.

Définition de la courbe P et de la fonction $f(x)$. — Continuité. — Non-existence de la tangente.

1. Joignons par une droite deux points A et B d'un plan (fig. 1). Partageons le segment AB en trois parties égales AC, CE, EB , et con-

¹ Nous considérons la direction de K vers K' comme la direction positive de la sécante KK' si K' succède K sur la courbe, ce qui détermine la direction positive de la tangente T .

² Ce théorème simple, que nous n'avons pas rencontré ailleurs, est d'une grande utilité dans la suite. La démonstration est immédiate. En effet, si K est précédé par L et succédé par M , LK et KM coïncident, à la limite, avec la direction positive de T , donc l'angle formé par ces directions tend vers zéro; or, cet angle étant supérieur à l'angle KLM , ce dernier tend aussi vers zéro, ce qui prouve que LM coïncide, à la limite, avec la direction positive de T .

struisons sur CE comme base un triangle équilatéral CDE . Nous aurons une ligne brisée $ACDEB$ formée par 4 segments égaux. Pour fixer le côté vers lequel doit être tourné le triangle, nous conviendrons de regarder une direction (par exemple celle de A vers B) comme positive et de considérer comme positif le côté laissé à gauche quand on parcourt le segment dans le sens positif. Pour abrégier, nous désignons par \mathcal{Q} cette opération au moyen de laquelle on passe d'un segment rectiligne AB à la ligne polygonale $ACDEB$ déviant de AB vers le côté positif.

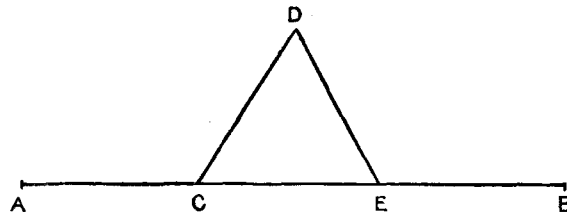


Fig. 1.

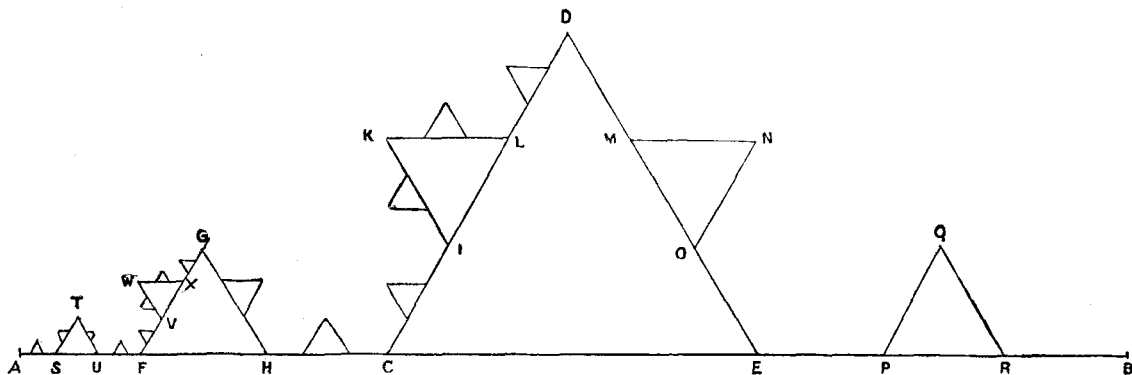


Fig. 2.

2. Partons maintenant d'une ligne droite déterminée AB , le sens de A vers B étant considéré comme positif (fig. 2). Par l'opération \mathcal{Q} , AB est remplacée par la ligne brisée $ACDEB$, les segments AC, CD, DE, EB étant égaux entre eux et leur sens positif étant respectivement celui de A vers C , de C vers D , de D vers E , de E vers B .

Effectuons l'opération \mathcal{Q} sur chacun de ces segments; la ligne $ACDEB$ sera remplacée par la ligne brisée $AFGHCIKLDMNOEPQRB$ composée de 16 segments égaux AF, FG etc.

Sur chacun de ces derniers segments nous effectuons encore l'opération \mathcal{Q} ; nous aurons une ligne brisée $ASTUF\dots$ composée par $4^3 = 64$ segments égaux entre eux AS, ST etc.

Effectuant l'opération \mathcal{Q} sur chacun de ces nouveaux segments et continuant ainsi indéfiniment, nous obtenons une suite indéfinie de lignes polygonales que nous désignerons par

$$(1) \quad P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$$

et qui se composent respectivement de

$$1, 4, 4^2, \dots, 4^{n-1}, \dots$$

côtés. P_1 désigne la droite primitive AB , P_2 la ligne $ACDEB$ et ainsi de suite.

Nous allons voir que, quand n croît indéfiniment, P_n tend vers une courbe continue P qui ne possède, en aucun point, de tangente déterminée.

3. Nous nommerons *sommets* de P_1 les deux points A et B , *sommets* de P_2 les $4 + 1$ points A, C, D, E, B , *sommets* de P_3 les $4^2 + 1$ points A, F, G, \dots, B et ainsi de suite. On voit que P_n aura $4^{n-1} + 1$ sommets, que tous les $4^{n-2} + 1$ sommets de P_{n-1} sont aussi des sommets de P_n et que, par suite, le nombre de sommets nouveaux introduits par le passage de P_{n-1} à P_n est égal à $3 \cdot 4^{n-2}$.

Désignons par S l'ensemble des sommets de toutes les lignes (1). De la construction résulte que si l'on considère un côté quelconque KL d'une ligne quelconque P_n il y aura, dans chaque voisinage de K , une infinité de points S situés sur KL ; désignant par IK le côté de P_n qui précède KL il y a par la même raison, dans chaque voisinage de K , une infinité de points S situés sur IK . Les côtés IK et KL formant entre eux un angle IKL égal, selon les cas, à 60° ou à 120° , on peut donc affirmer que la droite joignant deux sommets quelconque K et K' ne peut pas tendre vers une position limite déterminée quand le point K' (tout en restant sommet) tend vers K d'une manière quelconque. (Si $K = A$ ou $K = B$ il faut modifier légèrement le raisonnement qui précède).

Désignons par S' l'ensemble des points limites¹ des points S .

Chaque point de la courbe que nous allons définir sera ou un sommet ou un point limite des sommets; autrement dit, notre courbe sera composée par un ensemble de points P compris tout entier dans l'ensemble S' .²

4. Pour définir P , nous allons faire correspondre à chaque point X du segment AB un point déterminé $K(X)$ de P et nous introduirons en même temps une fonction continue $f(x)$ qui joue un rôle fondamental pour l'étude de la courbe.

Désignons par x la distance de A au point X . Si ce point appartient à S' nous prendrons

$$K(X) = X$$

et

$$f(x) = 0.$$

Dans le cas contraire nous menons de X une perpendiculaire XX_1 à AX (dirigée vers le côté positif de AB).

En prolongeant suffisamment cette perpendiculaire, on rencontre nécessairement le contour d'une ou de plusieurs des lignes P_a . Soit P_a la première ligne rencontrée et X_1 le point de rencontre.

Si X_1 est un point de S' nous prenons

$$K(X) = X_1$$

et nous désignons par $f(x)$ la longueur XX_1 .

Dans le cas contraire, X_1 appartient à un des segments rectilignes qui composent P_a , terminé par deux sommets consécutifs — soit S_1 et S_2 — de P_a . Menons alors de X_1 une perpendiculaire X_1X_2 à S_1S_2 (dirigée vers le côté positif de S_1S_2). Soit P_β la première des lignes (1) qu'on rencontre — soit en X_2 — en prolongeant suffisamment la perpendiculaire dont il s'agit.

¹ D'après la terminologie de M. G. CANTOR, S' est la première dérivée de S . D'après ce qui a été dit plus haut il résulte que tout point de S appartient à S' . Dire qu'un point K appartient à S' revient donc à dire que c'est ou un sommet ou un point limite des sommets.

² Réciproquement tout point de S' appartient à P , c'est-à-dire on a $P = S'$, ce qui résulte facilement des résultats que nous allons établir.

Si X_2 est un point de S' nous ferons

$$K(X) = X_2$$

et nous désignerons par $f(x)$ la somme des longueurs XX_1 et X_1X_2 .

Si X_2 n'est pas un point de S' nous désignons par T_1, T_2 les extrémités du segment de P_β sur lequel se trouve X_2 ; ces extrémités seront certains sommets consécutifs de P_β . Nous élevons de X_2 une perpendiculaire X_2X_3 sur T_1T_2 vers le côté positif et désignons par X_3 le premier point de rencontre avec une des lignes P_n .

Continuant ainsi de proche en proche deux cas pourront se présenter. Ou bien on rencontrera, après avoir élevé un certain nombre de perpendiculaires:

$$XX_1, X_1X_2, \dots, X_{k-1}X_k$$

dont on désignera respectivement par $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ les longueurs, un point X_k appartenant à S' , et alors on prendra $K(X) = X_k$ et désignera par $f(x)$ la somme de ces perpendiculaires; ou bien on ne rencontrera jamais un point de S' . Dans le dernier cas, on aura une suite indéfinie de perpendiculaires

$$(2) \quad XX_1, X_1X_2, X_2X_3, \dots$$

dont on désignera les longueurs respectives par $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ et dont la somme sera, ainsi que nous démontrerons, égale à un nombre fini.

En effet, prenant la distance AB comme unité de longueur, le segment CE est égal à $\frac{1}{3}$ et la perpendiculaire abaissée du point D (fig. 2) sur CE est égal à $\frac{1}{6}\sqrt{3}$. CDE étant le plus grand triangle de la figure, on a évidemment

$$f_1(x) = XX_1 \leq \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

pour toute valeur de x de l'intervalle considéré

$$(3) \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Les triangles FGH, IKL etc. construits sur les côtés de $P_2 = ACDEB$

ayant leurs côtés égaux à $\frac{1}{9}$, ceux construits sur les côtés de P_2 ayant leurs côtés égaux à $\frac{1}{27}$ et ainsi de suite on obtient de même

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= X_1 X_2 \leq \frac{1}{2} \frac{1}{9} \sqrt{3}, \\
 f_3(x) &= X_2 X_3 \leq \frac{1}{2} \frac{1}{27} \sqrt{3}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 f_k(x) &= X_{k-1} X_k \leq \frac{1}{2} \frac{1}{3^k} \sqrt{3}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

pour tout l'intervalle (3).

La somme des longueurs (2) ne peut donc pas être supérieure au nombre

$$\frac{1}{2} \sqrt{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) = \frac{1}{4} \sqrt{3}$$

et est, par suite, convergente. La somme de cette série dont l'existence est ainsi démontrée sera désignée par $f(x)$; en suivant indéfiniment la ligne brisée $XX_1 X_2 X_3 \dots$ on approchera donc indéfiniment d'un point déterminé qui, nous le convenons, sera le point $K(X)$ correspondant à X et dont la distance de X , mesurée le long de la ligne brisée $XX_1 X_2 X_3 \dots$, sera égale à $f(x)$. On voit immédiatement que $K(X)$ fait partie de l'ensemble S' .

Si nous convenons, dans le cas où la suite des perpendiculaires (2) ne contient que k termes, de mettre

$$f_{k+1}(x) = 0, \quad f_{k+2}(x) = 0, \quad \dots$$

nous avons donc une fonction $f(x)$ définie, pour toute valeur de x de l'intervalle $0 - 1$, par la formule

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

Tous les points $K(X)$ ainsi obtenus constituent, par définition, notre ensemble P . A chaque point X sur AB correspond un point bien déterminé $K(X)$ de P dont la position est définie moyennant la fonction $f(x)$.

Il nous faut commencer par prouver que cet ensemble constitue une *courbe continue*, dans le sens ordinaire de ce mot.

5. De deux points K_1 et K_2 de P correspondant à des valeurs x_1 et x_2 de x , nous voyons que K_1 précède K_2 si $x_1 < x_2$, que K_1 succède K_2 dans le cas contraire.¹ De trois points K_1, K_2, K_3 correspondants aux valeurs x_1, x_2, x_3 où

$$x_1 < x_2 < x_3$$

K_2 est intermédiaire aux points K_1, K_3 .

Ainsi, par exemple, entre les deux points A et B de notre P nous avons trois points intermédiaires C, D, E appartenant à la ligne P_2 , 15 points intermédiaires F, G, H etc. appartenant à P_3 et ainsi de suite.

De même entre deux sommets consécutifs S_1 et S_2 de la ligne P_a , qui sont, par définition, des points de P , il y a trois points intermédiaires (appartenant à P_{a+1}), 15 points intermédiaires (appartenant à P_{a+2}) et ainsi de suite.

Nous avons défini un point quelconque K de P en menant successivement certaines perpendiculaires

$$(2) \quad XX_1, X_1X_2, \dots$$

rencontrant respectivement P_a en X_1 , P_b en X_2 , et ainsi de suite, X_1 étant situé entre deux sommets S_1, S_2 de P_a et de même X_2 entre deux sommets T_1, T_2 de P_b etc. Le point K est donc, d'après notre définition, un point intermédiaire à S_1 et S_2 , intermédiaire à T_1 et T_2 et ainsi de suite. Dans le cas où la suite (2) se prolonge indéfiniment nous aurons donc une suite infinie de segments

$$S_1S_2, T_1T_2, \dots$$

décroissant indéfiniment et embrassant tous le point K qui se trouve ainsi intercalé entre des points dont la distance diminue indéfiniment.

6. Il nous faut prouver que la fonction $f(x)$ qui est une fonction bien déterminée de x dans l'intervalle

$$(3) \quad 0 \leq x \leq 1$$

est aussi continue dans cet intervalle. Pour cela nous montrerons d'abord que chacune des fonctions

$$f_1(x), f_2(x), \dots$$

¹ Cf. les définitions adoptées au début.

est continue dans l'intervalle dont il s'agit et ensuite que la somme de ces fonctions y converge uniformément.

Par définition, $f_1(x)$ est la distance d'un point d'une certaine ligne continue C_1 (composée par une infinité de segments rectilignes) à la droite AB et cette fonction est donc nécessairement continue. Aux points extrêmes A, B cette fonction s'annule.

$f_2(x)$ est la distance d'un point d'une certaine ligne continue C_2 (semblable à C_1) à un certain côté S_1S_2 de la ligne polygonale P_a ; en considérant $f_2(x)$ comme fonction de l'arc mesuré le long de S_1S_2 on voit que c'est une fonction continue de cet arc et, par conséquent, de la variable x dans l'intervalle correspondant. Or, $f_2(x)$ étant égal à zéro pour les valeurs de x correspondant aux extrémités S_1, S_2 et la même circonstance se présentant pour les côtés voisins de P_a , on voit que $f_2(x)$ est continue dans tout l'intervalle (3).

La même démonstration s'applique aux autres fonctions $f_3(x), f_4(x), \dots$

Toutes les fonctions $f_1(x), f_2(x), \dots$ sont donc continues dans l'intervalle (3).

Maintenant, comme ces fonctions satisfont aux inégalités (4) dans cet intervalle, on voit que leur somme $\Sigma f_i(x)$ y converge uniformément. Donc, d'après un théorème classique, la fonction $f(x)$ représentée par cette série est une fonction continue dans cet intervalle.

7. Désignons maintenant par $K(x)$ le point de P correspondant à la valeur x de l'intervalle $0 \dots 1$. Pour voir que P est un arc de courbe continue au point K , il nous faut montrer que

$$\lim K(x') = K(x)$$

pour

$$\lim x' = x$$

c'est-à-dire que la distance entre les points $K(x')$ et $K(x)$ diminue indéfiniment avec $|x' - x|$.

Prenons d'abord le cas où $K(x)$ est un point appartenant à une des lignes P , ou, ce qui revient au même, que ce point soit défini par un nombre fini de perpendiculaires

$$XX_1, X_1X_2, \dots, X_{k-1}X_k$$

rencontrant respectivement les lignes polygonales

$$P_{a_1}, P_{a_2}, \dots, P_{a_k}$$

aux points X_1, X_2, \dots, X_k des côtés respectifs

$$(5) \quad S_1 S'_1, S_2 S'_2, \dots, S_k S'_k,$$

le point X_i étant sur P_{a_i} entre les sommets S_i et S'_i . Soient

$$X'X'_1, X'_1 X'_2, \dots$$

la suite (finie ou infinie) de perpendiculaires définissant le point $K(x')$, x' étant une valeur voisine de x . Il résulte de la construction adoptée que si l'on choisit $|x' - x|$ suffisamment petit on peut faire en sorte que les points

$$X'_1, X'_2, \dots, X'_k$$

appartiennent respectivement aux côtés (5) et que la distance entre X'_k et X_k soit inférieure à une quantité δ donnée d'avance.

Or, on passe du point X'_k au point $K(x')$ par une suite de perpendiculaires

$$X'_k X'_{k+1}, X'_{k+1} X'_{k+2}, \dots$$

de longueurs respectives

$$f_{k+1}(x'), f_{k+2}(x'), \dots$$

Comme

$$f_{k+1}(x) = 0, \quad f_{k+2}(x) = 0, \quad \dots$$

on a, à cause de la continuité de la somme $\sum f_v(x)$,

$$\lim_{x'=x} (f_{k+1}(x') + f_{k+2}(x') + \dots) = 0.$$

La distance absolue entre les points X'_k et $K(x')$ ne pouvant être supérieure à la longueur de la ligne brisée

$$X'_k X'_{k+1} X'_{k+2} \dots$$

c'est-à-dire à

$$f_{k+1}(x') + f_{k+2}(x') + \dots$$

on voit donc que cette distance tend vers zéro avec $|x' - x|$. Comme il en est de même de la distance entre X'_k et $X_k = K(x)$, il est donc prouvé que la distance entre $K(x)$ et $K(x')$ diminue indéfiniment avec $|x' - x|$.

Considérons en second lieu le cas où le point donné $K(x)$ est défini par un nombre illimité de perpendiculaires

$$XX_1, X_1X_2, \dots$$

rencontrant respectivement les lignes

$$P_{a_1}, P_{a_2}, \dots$$

aux points

$$X_1, X_2, \dots$$

des côtés

$$S_1S'_1, S_2S'_2, \dots$$

et conservons d'ailleurs les notations du cas précédent.

Soit ε une quantité donnée; choisissons k suffisamment grand pour que la somme

$$f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + \dots$$

soit moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$, pour tout l'intervalle (3). On voit alors que la distance des points X_k et $K(x)$ et de même que la distance entre X'_k et $K(x')$ est moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$. Choisissons enfin $|x' - x|$ suffisamment petit pour que la distance entre X_k et X'_k soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$, ce qui est toujours possible d'après ce qui précède. Il est alors évident que la distance entre $K(x)$ et $K(x')$ est moindre que ε ou, en d'autres termes, que cette distance peut être rendue aussi petite qu'on le veut en faisant $|x' - x|$ suffisamment petit.

Donc l'ensemble P constitue un arc de courbe continue en chaque point.

Dans ce qui va suivre, nous conservons la lettre P pour désigner la courbe ainsi définie.

8. En joignant les points A, D et D, B (fig. 2) par des droites, on obtient un triangle ADB circonscrit à la courbe P , en entendant par

là que tout point de P se trouve à l'intérieur ou sur le contour de ce triangle. En effet la construction adoptée montre d'abord que chaque *sommet* se trouve à l'intérieur ou sur le contour de ce triangle (ainsi, par exemple T, W, G, K se trouvent sur la droite AD) et il en est donc de même de l'ensemble S' des points limites des sommets.

Par la même raison, le triangle AGC est circonscrit à la partie de la courbe P comprise entre A et C (fig. 2), le triangle CKD est circonscrit à la partie comprise entre C et D et ainsi de suite.

Par conséquent la partie de P comprise entre C et E se trouve à l'intérieur ou sur la limite du pentagone $CKDNE$ (où l'on remarque que les côtés CK et EN sont perpendiculaires à AB).

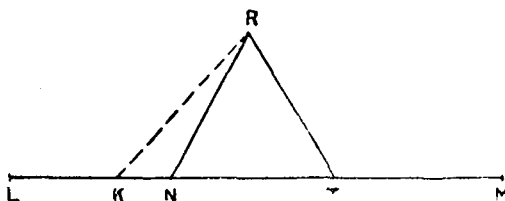


Fig. 3.

De la même manière on voit que, si LM (fig. 3) est un côté quelconque d'une ligne brisée P_a , tout point de P intermédiaire à L et M se trouve à l'intérieur ou sur le contour d'un triangle LRM où chacun des angles L et M est égal à 30° ; et les points N et T divisant LM en trois segments égaux, la partie de P compris entre N et T se trouve nécessairement compris dans un pentagone construit sur NT comme base et semblable à celui dont il était question tout à l'heure.

Pour abrégé nous appellerons CE *segment lacunaire* de AB (fig. 2), FH *segment lacunaire* de AC etc.; d'une manière générale, LM (fig. 3) étant un côté de P_a , le segment NT sera désigné comme *segment lacunaire* de ce côté. Adoptant cette terminologie, on voit que sur AB (fig. 2) il y a 1 segment lacunaire CE de longueur $\frac{1}{3}$ (AB étant supposé = 1), 2 segments FH et PR de longueur $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, 4 segments lacunaires de longueur $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ et ainsi de suite. La somme de tous ces segments est donc égale à

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2^{v-1}}{3^v} + \dots = 1$$

c'est-à-dire égale à la longueur de AB .

Par la méthode adoptée pour définir la courbe P , on a été amené à construire sur chaque segment lacunaire comme base un triangle équilatéral; et l'opération \mathcal{Q} définie au n° 1 consiste précisément à remplacer un segment lacunaire (par exemple FH) par une ligne brisée (FGH) composée par les deux autres côtés du triangle en question.

Convenant de désigner par Λ l'opération qui consiste à effectuer l'opération \mathcal{Q} sur tous les segments lacunaires de AB simultanément, on voit que, par cette opération, la droite AB se trouve remplacée par une certaine courbe continue C_1 composée par des segments rectilignes formant entre eux des angles égaux à 60° . C'est la courbe dont il a été question au n° 6; son équation en coordonnées rectangulaires (A étant l'origine et AB l'axe des x) peut s'écrire

$$y = f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant la fonction définie au n° 4.

Au lieu de définir la courbe P à l'aide d'une suite d'opérations \mathcal{Q} , nous pouvons maintenant l'obtenir par une succession d'opérations Λ . Après avoir remplacé, à l'aide de l'opération Λ , la droite primitive AB par la ligne C_1 , on peut effectuer sur chacun des segments rectilignes qui composent C_1 la même opération et ainsi indéfiniment. On obtient ainsi une succession illimitée de courbes

$$AB, C_1, \dots$$

et des considérations bien simples montrent qu'on arrive ainsi à une courbe limite identique à P .

En adoptant cette méthode de définir P , on peut démontrer simplement que tout point de P est un point *simple* de la courbe ou, en d'autres termes, qu'à des points distincts X, X' de AB correspondent des points distincts $K(X), K(X')$ de la courbe. Soient en effet

$$(K) \quad XX_1, X_1X_2, \dots$$

et

$$(K') \quad X'X'_1, X'_1X'_2, \dots$$

les suites de perpendiculaires définissant respectivement $K(X)$ et $K(X')$ et admettons que les points limites $K(X)$ et $K(X')$ coïncident; nous en concluons que X et X' doivent coïncider aussi.

Considérons d'abord le cas où les deux suites (K) et (K') sont illimitées.

Le point X de AB doit se trouver sur un des segments lacunaires de AB (les extrémités du segment étant exclues); car dans le cas contraire X serait un sommet ou un point limite des sommets et l'on aurait, par suite, $K(X) = X$ contrairement à l'hypothèse. Par la même raison X' doit se trouver sur un segment lacunaire. Il est clair dès lors que X et X' doivent se trouver sur le même segment lacunaire; car dans le cas contraire on pourrait affirmer, d'après ce qui précède, que $K(X)$ et $K(X')$ se trouveraient respectivement compris dans deux pentagones n'ayant aucun point en commun, ce qui serait contraire à l'hypothèse $K(X) = K(X')$.

Par définition, X_1 désigne le point où la perpendiculaire XX_1 rencontre la ligne C_1 ; X_1 est donc un point d'un certain segment rectiligne de C_1 et le même raisonnement que plus haut montre que X_1 doit appartenir à un segment lacunaire; de même X'_1 doit appartenir à un segment lacunaire et on conclut comme plus haut que X_1 et X'_1 appartiennent nécessairement au même segment lacunaire. Continuant ainsi de proche en proche on démontre que quelque grand que soit k , les points X_k et X'_k se trouvent sur le même segment lacunaire. Or le segment qui comprend X_1 et X'_1 fait, d'après la construction adoptée, un angle égal à 60° ou 120° avec le segment comprenant X et X' . Désignant par XX' la distance entre les points X et X' on a donc la relation

$$X_1 X'_1 = 2 XX';$$

le même raisonnement s'appliquant aux points X_k, X'_k on a la relation générale

$$X_k X'_k = 2 X_{k-1} X'_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots)$$

d'où

$$X_k X'_k = 2^k XX'$$

ce qui, X_k et X'_k tendant par hypothèse vers un même point $K(X) = K(X')$, exige nécessairement

$$XX' = 0$$

c'est-à-dire que les points X, X' coïncident.

Il nous reste à considérer le cas où l'une au moins des deux suites (K) , (K') consiste d'un nombre fini de termes. Supposons par exemple que la suite (K) consiste de k termes

$$XX_1, X_1X_2, \dots, X_{k-1}X_k$$

et que la suite (K') contienne un nombre de termes (fini ou infini) $\geq k$.

Par les mêmes raisons que dans le cas précédent on voit alors que X et X' se trouvent sur un même segment lacunaire, que X_1 et X'_1 se trouvent sur un même segment lacunaire, ..., que X_{k-1} et X'_{k-1} se trouvent sur un même segment lacunaire. Supposons que X et X' soient des points distincts; il en est alors de même de X_{k-1} et X'_{k-1} (car on a $X_{k-1}X'_{k-1} = 2^{k-1}XX'$) et, par conséquent, de X_k et X'_k ; or $X_k = K(X)$ étant par hypothèse un point de l'ensemble S' (c'est-à-dire un sommet ou un point limite des sommets), X'_k ne peut pas être un point de S' (car alors on aurait $X'_k = K(X')$ contrairement à l'hypothèse $K(X') = K(X)$). Par conséquent X'_k doit appartenir à un segment lacunaire. Soit NT (fig. 3) le segment lacunaire comprenant X_{k-1} et X'_{k-1} ; alors X_k est un point de S' se trouvant sur l'un ou sur l'autre des deux côtés NR et TR et X'_k appartient à un segment lacunaire — disons N_1T_1 — appartenant à l'un de ces côtés. Les points de la courbe P intermédiaires à N_1 et T_1 se trouvent, d'après ce qui précède, compris dans un certain pentagone dont le contour n'a d'autres points en commun avec les côtés NR et TR que les points du segment N_1T_1 ; X_k est donc séparé de ce contour et ne peut pas coïncider avec le point $K(X')$ (défini par la suite (K')) qui est un point de la courbe P intermédiaire à N_1 et T_1 . Le théorème est donc démontré.

Donc P est un arc continu simple.

9. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème qui fait l'objet principal de notre étude.

Théorème. *La courbe P n'admet en aucun point une tangente déterminée.*

Considérons d'abord un point K de la courbe qui est en même temps un sommet d'une ligne polygonale P_a .

Dans chaque voisinage de K il y a une infinité de sommets K' et, d'après ce qui a été dit plus haut (pag. 150), nous savons que la droite joignant K à un point K' ne peut tendre vers une limite déterminée lorsque K' s'approche de K d'une manière quelconque. Or, les points K et K' étant des points de la courbe, la droite KK' est une secante de P qui tendrait vers une position déterminée si la tangente en K existait. Donc la courbe ne peut pas avoir en K une tangente déterminée.

Considérons, en second lieu, le cas où le point K est situé sur une ligne polygonale P_α mais n'est pas un sommet. K est alors nécessairement un point limite des sommets et reste, par conséquent, commun à toutes les lignes

$$P_\alpha, P_{\alpha+1}, \dots$$

On peut donc supposer l'indice α choisi aussi grand que l'on veut. Cela remarqué, soit LM le côté de P_α sur lequel se trouve K (fig. 3) et $LNRTM$ la ligne brisée obtenue en effectuant l'opération \mathcal{Q} sur LM . Les sommets N, R, T sont donc des points de la courbe P et l'on a

$$LN = NR = RT = TM.$$

Mais de là résulte que l'angle RKN est compris entre 30° et 60° .

Or, K est situé sur la courbe P entre les points L et N (ou entre les points T et M); donc,¹ si la courbe avait en K une tangente déterminée, la sécante KR tendrait (pour $\alpha = \infty$) vers la même limite que LN (ou TM) ce qui est impossible, l'angle formé par ces droites appartenant à l'intervalle $30^\circ \dots 60^\circ$.

Considérons, comme dernier cas, un point K de P qui n'est situé sur aucune des lignes P_α . Dans ce cas, K est défini par une suite illimitée de perpendiculaires

$$XX_1, X_1X_2, X_2X_3, \dots$$

rencontrant respectivement les lignes polygonales

$$P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$$

aux points X_1, X_2, X_3, \dots des côtés

$$(6) \quad S_1S_2, T_1T_2, U_1U_2, \dots$$

¹ Voir l'introduction.

D'après ce qui précède K est un point de la courbe P situé *entre* les points S_1 et S_2 , *entre* les points T_1 et T_2 , *entre* les points U_1 et U_2 et ainsi de suite. La suite des points

$$S_1, T_1, U_1, \dots$$

s'approchent de K indéfiniment du même côté, c'est-à-dire ces points *précèdent* tous le point K ; et c'est du côté opposé que s'approchent les points

$$S_2, T_2, U_2, \dots$$

Donc, si la courbe avait en K une tangente déterminée, les sécantes (6) auraient cette tangente comme limite commune. Or, cela est impossible, l'angle formé par deux sécantes consécutives étant, selon les cas, égal à 60° ou 120° .

Le théorème est donc démontré pour tout point de la courbe.

II.

Questions de rectification et de quadrature. — Représentation paramétrique.

10. Désignons par L_i la longueur de la ligne polygonale P_i . Le segment AB (fig. 2) étant pris pour unité de longueur on a $L_1 = AB = 1$. Par l'opération Ω , P_1 se change en P_2 , cette dernière ligne ayant visiblement la longueur $\frac{4}{3}$. En passant de P_2 et P_3 la longueur se trouve encore une fois multipliée par $\frac{4}{3}$ et ainsi de suite. On a donc, d'une manière générale

$$L_\nu = \left(\frac{4}{3}\right)^{\nu-1}$$

d'où

$$\lim_{\nu=\infty} L_\nu = \infty.$$

Il en résulte que la longueur de l'arc de courbe P compris entre A et B est infinie. De la même manière on peut démontrer le même de l'arc compris entre deux sommets quelconques, d'où se déduit sans diffi-

culté que la longueur de l'arc compris entre deux points quelconques de la courbe est infinie.

Il est aussi facile d'évaluer l'aire comprise entre la courbe et l'une de ses cordes. Prenons par exemple la corde AB . L'aire comprise entre $AB = P_1$ et P_2 est égale à l'aire d'un triangle équilatéral de base $= \frac{1}{3}$, c'est-à-dire égale à

$$\frac{1}{36}\sqrt{3} = \frac{1}{16}\sqrt{3} \cdot \frac{4}{9};$$

l'aire comprise entre P_2 et P_3 est égal à la somme de 4 triangles (voir fig. 2) équilatéraux de base égale à $\frac{1}{9}$; cette aire est donc égale à

$$4 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \sqrt{3} = \frac{1}{16}\sqrt{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2.$$

Pour avoir l'aire Δ_ν comprise entre P_ν et $P_{\nu+1}$ rappelons que P_ν est une ligne polygonale de $4^{\nu-1}$ côtés dont chacun est égale à $\frac{1}{3^{\nu-1}}$; pour passer de P_ν à $P_{\nu+1}$ on construit sur chaque côté un petit triangle équilatéral de base $\frac{1}{3^\nu}$. On a donc

$$\Delta_\nu = 4^{\nu-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^{2\nu}} \sqrt{3} = \frac{1}{16}\sqrt{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^\nu.$$

L'aire cherchée Δ étant égale à la somme des aires $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ on trouve donc

$$\Delta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu = \frac{1}{16}\sqrt{3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^\nu$$

c'est-à-dire

$$\Delta = \frac{1}{20}\sqrt{3}.$$

11. Indiquons maintenant comment peuvent s'exprimer les coordonnées cartésiennes u, v d'un point de la courbe P en fonctions uniformes par rapport à un paramètre.

Comme axe des u nous prenons la droite AB (fig. 2), comme axe des v une droite passant par A et perpendiculaire à AB (comptée positivement

du bas en haut). Soient x la distance d'un point quelconque X de AB à l'origine A , $K(x)$ le point correspondant de la courbe (défini, comme il a été expliqué précédemment, par une certaine suite de perpendiculaires XX_1, X_1X_2, \dots), $u = u(x)$ et $v = v(x)$ les coordonnées rectangulaires de ce point K .

Nous avons posé plus haut

$$XX_1 = f_1(x), \quad X_1X_2 = f_2(x), \quad \dots$$

et

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

La droite XX_1 étant perpendiculaire à l'axe des u , sa projection sur cet axe est nulle. Quant à X_1X_2 , cette droite forme avec l'axe des u un angle qui, selon les cas, est égal à 30° ou 150° . Désignons par $\{f_2(x)\}$ la projection de X_1X_2 sur l'axe des u . Désignons, d'une manière analogue par

$$\{f_3(x)\}, \{f_4(x)\}, \dots$$

les projections de X_2X_3, X_3X_4, \dots sur l'axe des u .

Enfin, désignons par

$$\{\{f_1(x)\}\}, \{\{f_2(x)\}\}, \{\{f_3(x)\}\}, \dots$$

les projections de $XX_1, X_1X_2, X_2X_3, \dots$ sur l'axe des v . (On a évidemment $\{\{f_1(x)\}\} = f_1(x)$).

Il résulte de ces définitions que $\{f_i(x)\}$ et $\{\{f_i(x)\}\}$ sont des fonctions continues de x dans l'intervalle $0 \dots 1$ et que les modules de ces fonctions sont au plus égaux à $f_i(x)$. Comme $u(x) = x$ et $v(x)$ sont respectivement les projections sur l'axe des u et l'axe des v de la ligne brisée

$$XX_1X_2X_3 \dots$$

(les extrémités de cette ligne étant les points X et K), nous pouvons donc écrire

$$(7) \quad \begin{aligned} u &= x + \{f_2(x)\} + \{f_3(x)\} + \dots, \\ v &= f_1(x) + \{\{f_2(x)\}\} + \{\{f_3(x)\}\} + \dots \end{aligned}$$

Comme la série $\Sigma f_v(x)$ converge uniformément dans tout l'intervalle $0 \dots 1$, il en est de même, et à plus forte raison, des séries nouvelles

ainsi définies qui représentent les coordonnées u, v d'un point de notre courbe. Ces séries représentent donc des fonctions *continues* dans l'intervalle dont il s'agit.

Par les formules (7) nous avons donc les coordonnées u, v exprimées en fonctions uniformes et continues d'un paramètre x tout le long de la courbe.

Nous verrons, dans le paragraphe suivant, comment une simple transformation permet de passer de la courbe P à une courbe P' où l'on peut choisir l'abscisse u elle-même comme paramètre et exprimer l'ordonnée v en fonction uniforme et continue par rapport à u tout le long de la courbe.

III.

Transformation de P en une courbe P' où l'ordonnée est une fonction uniforme de l'abscisse.

12. Considérons dans le plan des coordonnées (x, y) un segment rectiligne AB formant un angle quelconque avec l'axe des x (fig. 5). Partageons AB en trois parties égales AC, CE, EB et construisons sur CE comme base un triangle CDE dont la médiane MD (M étant le point divisant la base CE en deux parties égales CM et ME) est parallèle à l'axe des y , dirigée vers les y positifs et égale à

$$\frac{CE}{2} \sqrt{3}.$$

On sait alors que cette médiane est égale à la médiane d'un triangle *équilatéral* construit sur la même base CE .

Nous appellerons \mathcal{Q}' l'opération par laquelle on passe ainsi d'un segment rectiligne AB à la ligne brisée $ACDEB$.

13. Prenons maintenant sur l'axe des x un segment AB , A étant l'origine et la distance AB étant choisie pour un n^{e} de longueur (fig. 4). Effectuons sur le segment notre opération \mathcal{Q}' (ce qui revient à effectuer l'opération \mathcal{Q} définie au n° 1). AB se trouve ainsi remplacé par une ligne polygonale $ACDEB$ composée par 4 côtés et que nous désignerons

par P'_2 . Effectuant sur chacun de ces côtés la même opération \mathcal{Q}' on passe à une ligne polygonale P'_3 composée par 4^2 côtés, sur lesquels on effectue la même opération et ainsi de suite indéfiniment. Désignant, pour plus de symétrie, AB par P'_1 , on a ainsi défini une suite illimitée de lignes polygonales

$$P'_1, P'_2, P'_3, \dots$$

Je dis que ces lignes tendent indéfiniment vers une courbe continue P' dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, peut s'écrire

$$y = \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction uniforme et continue de x dans l'intervalle $0 \dots 1$.

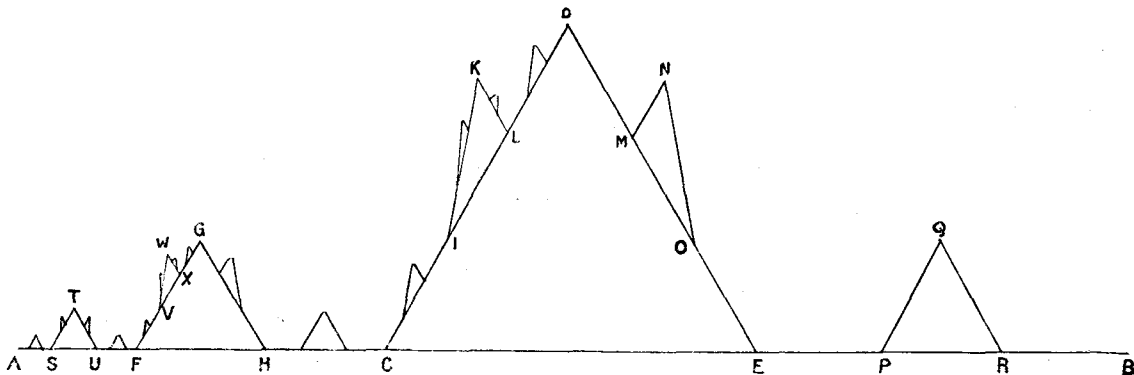


Fig. 4.

14. Désignons par S l'ensemble des sommets (c'est-à-dire les points où deux côtés d'une ligne P'_i se rencontrent) et par S' l'ensemble des points limites de S . (On voit que chaque point de S appartient à S' .)

Soit x la distance d'un point quelconque X de AB à l'origine A . Si X est un point de S' nous prenons

$$y = \varphi(x) = 0.$$

Dans le cas contraire nous élevons en X une perpendiculaire sur AB dirigée vers les y positifs. Cette perpendiculaire rencontre successivement certaines des lignes P'_i , soit

$$P'_\alpha, P'_\beta, P'_\gamma, \dots$$

aux points respectifs

$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

Posons

$$XX_1 = \varphi_1(x), \quad X_1X_2 = \varphi_2(x), \quad X_2X_3 = \varphi_3(x), \quad \dots$$

et convenons de mettre, si X_k est un point de S'

$$\varphi_{k+1}(x) = 0, \quad \varphi_{k+2}(x) = 0, \quad \dots$$

Par un raisonnement tout analogue à celui employé plus haut (n° 6) nous voyons alors que les fonctions $\varphi_v(x)$ sont uniformes et continues dans l'intervalle $0 \dots 1$ et que leur somme $\varphi(x)$ y converge uniformément. Donc si nous posons

$$(8) \quad y = \varphi(x), \quad (0 \leq x \leq 1)$$

y est une fonction uniforme et continue dans cet intervalle.

Nous voilà donc en possession d'une courbe P' où l'ordonnée s'exprime en fonction uniforme et continue (8) par rapport à l'abscisse dans tout l'intervalle considéré.

15. Je dis que la fonction $\varphi(x)$ n'admet, pour aucune valeur de x , une dérivée finie et déterminée.¹

Si K est un point de P' qui appartient en même temps à l'une des lignes P'_v , la démonstration est tout analogue à celle employée plus haut pour la courbe P .

Considérons donc le cas contraire où le point K est la limite d'une suite indéfinie de points X, X_1, X_2, \dots , sa distance y à l'axe des x étant égale à la série infinie

$$y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \dots$$

Supposons que la perpendiculaire XK rencontre successivement les lignes polygonales

$$P'_{a_1}, P'_{a_2}, \dots$$

aux points

$$X_1, X_2, \dots$$

¹ Nous laissons indéterminé, dans ce qui suit, s'il peut y avoir des valeurs x où la dérivée est déterminée mais infinie.

situés respectivement sur les côtés

$$S_1S'_1, S_2S'_2, \dots$$

de ces lignes. Tous les triangles construits successivement dans notre figure ayant leurs médianes parallèles à l'axe des y nous pouvons (voir fig. 5) distinguer le côté CD d'un tel triangle situé à gauche de la médiane du côté DE situé à droite. Pour abréger le raisonnement qui suit, nous appellerons les côtés tels que CD côtés à gauche et les côtés tels que DE côtés à droite.

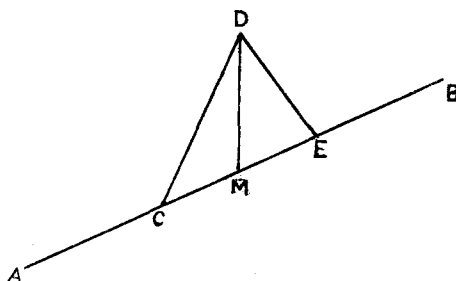


Fig. 5.

Cela convenu, remarquons tout d'abord que dans un triangle CDE de notre figure (fig. 5) construit sur un côté à gauche AB , CD est un côté à gauche formant avec AB un angle DCB moindre que 60° et que DE est un côté à droite formant avec AB un angle DEC plus grand que 60° .

Le cas opposé se présenterait si AB était un côté à droite. Donc, si dans la figure construite on considère deux côtés successifs (c'est-à-dire ayant un point commun) dont l'un est à gauche et l'autre à droite, ces deux côtés forment un angle qui reste, de quelque manière qu'on ce déplace sur la figure, supérieur à 60° .

16. Distinguons maintenant entre les trois cas suivants.

1) Si grand que l'on choisisse l'indice k , il y a dans la suite

$$(9) \quad S_kS'_k, S_{k+1}S'_{k+1}, \dots$$

une infinité de côtés à gauche et une infinité de côtés à droite. De ce que nous venons de dire de l'angle formé par deux côtés successifs résulte alors que les droites (9) ne peuvent pas tendre vers une direction limite déterminée; par suite, le point K de la courbe étant situé entre les deux

points S_v et S'_v quelque grand que soit ν , il ne peut y avoir au point K une tangente déterminée.

2) A partir d'un certain indice k tous les côtés (9) sont à gauche.

Dans ce cas il est facile de voir que la droite $S_v S'_v$ coïncide à la limite (pour $\nu = \infty$) avec une droite parallèle à l'axe des y . En effet soit AB , CD deux côtés à gauche consécutifs (voir fig. 5) et soit DE le côté à droite correspondant (d'après la construction adoptée on a alors $CM = ME$ et la médiane MD est parallèle à l'axe des y). Désignons par β l'angle DMB formé par le côté AB et la verticale et par β' l'angle formé par CD et la verticale. DM étant plus grand que CM en vertu de la construction, l'angle β' ou CDM est plus petit que l'angle DCM d'où l'on obtient

$$\beta' < \frac{1}{2}\beta$$

Considérant un côté à gauche consécutif à CD et désignant par β'' l'angle qu'il forme avec la verticale on a, par la même raison

$$\beta'' < \frac{1}{2}\beta'$$

et ainsi de suite. Par là on voit donc que les angles

$$\beta, \beta', \beta'', \dots$$

diminuent indéfiniment et tendent vers zéro.

Or, le point K étant intermédiaire à S_v et S'_v nous savons que, s'il y avait une tangente T déterminée au point K , la sécante $S_v S'_v$ tendrait indéfiniment vers T comme position limite. Donc T serait nécessairement parallèle à l'axe des y , c'est-à-dire la dérivée de $\varphi(x)$ au point considéré serait infinie.

3) A partir d'un certain indice k tous les côtés (9) sont à droite.

Comme dans le cas précédent, on arrive à la conclusion que si $\varphi(x)$ avait une dérivée déterminée pour la valeur considérée de x , cette dérivée serait infinie.

Le théorème énoncé est donc vrai dans tous les cas.

IV.

Généralisation de la méthode.

17. Prenons sur un segment rectiligne AB deux points C, E entre A et B et désignons par a, b, c respectivement les longueurs des segments AC, CE, EB . Construisons sur CE comme base un triangle équilatéral CDE tourné vers le côté positif de AB .

Nous désignerons par $\mathcal{Q}(a, b, c)$ l'opération par laquelle on passe ainsi du segment AB à la ligne polygonale $ACDEB$ composée par 4 segments ayant pour longueurs respectives a, b, b, c et nous appellerons respectivement a, b, c le premier, le second, le troisième paramètre de \mathcal{Q} .

Désignant par L la longueur de AB et par L' celle de la transformée de AB (c'est-à-dire la ligne $ACDEB$), on a la relation

$$L' = L + b.$$

La somme $a + b + c$ étant égale à la longueur du segment AB , on voit que, ce segment étant regardé comme donné, il y a une infinité double (dépendant de deux paramètres indépendants, par exemple a et b) d'opérations \mathcal{Q} qu'on peut effectuer sur AB . Nous dirons qu'on effectue «une opération \mathcal{Q} » sur AB si on effectue l'opération $\mathcal{Q}(a, b, c)$ avec des valeurs données positives (non nulles) de a, b, c (compatibles, bien entendu, avec la relation $a + b + c = AB$).

Ces définitions adoptées, partons d'un segment rectiligne AB que nous désignons par P_1 et dont la longueur L_1 sera choisi pour unité de longueur:

$$L_1 = 1.$$

Choisissons une suite de nombres positifs

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$$

tels que

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots$$

et tels, en outre, que la somme

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots$$

ait une valeur finie ε .

Effectuons sur P_1 une opération \mathcal{Q} ayant pour second paramètre un nombre b_1 remplissant la condition

$$b_1 \leq \varepsilon_1$$

ce qui nous donne une ligne polygonale P_2 composée par 4 côtés rectilignes; effectuons sur chacun de ces côtés une opération \mathcal{Q} où le second paramètre est au plus égal à ε_2 ; nous obtenons alors une ligne polygonale P_3 composée par 4^2 côtés; sur chacun de ces derniers nous effectuons une opération \mathcal{Q} où le second paramètre est au plus égal à ε_3 et ainsi de suite indéfiniment.

Soit P_1, P_2, P_3, \dots la suite des lignes polygonales ainsi définies et conservons d'ailleurs les mêmes notations que précédemment (n° 3, 4). Ainsi nous appelons *sommet* tout point où deux côtés successifs d'une ligne P_n se rencontrent (et aussi chacun des points A et B) et nous désignons par S l'ensemble de tous les sommets, par S' l'ensemble des points limites des sommets. A tout point X de AB nous faisons correspondre un point déterminé $K(X)$ défini par une suite de perpendiculaires

$$XX_1, X_1X_2, X_2X_3, \dots$$

successivement construites comme au n° 4. Désignant par x la distance de X au point A nous posons

$$f_1(x) = XX_1, \quad f_2(x) = X_1X_2, \quad \dots$$

Dans le cas où X_k est un sommet ou un point limite des sommets nous prenons comme précédemment

$$K(X) = X_k,$$

$$f_{k+1}(x) = f_{k+2}(x) = \dots = 0.$$

Dans le cas contraire on démontre facilement que X_k tend (pour $k = \infty$) vers un point limite bien déterminé que nous désignons par $K(X)$; car la somme

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

est convergente ce qui résulte des inégalités faciles à établir:

$$f_1(x) < \varepsilon_1, \quad f_2(x) < \varepsilon_2, \quad \dots$$

et de l'hypothèse faite sur les ε_n .

De la même manière qu'au n° 6 on peut démontrer que chacune des fonctions $f_v(x)$ est continue dans l'intervalle $0 \dots 1$, que la somme $\Sigma f_v(x)$ y converge uniformément et que, par conséquent, $f(x)$ est une fonction uniforme et continue dans cet intervalle. Et on conclut de là que l'ensemble des points $K(x)$ obtenu en faisant varier x de 0 à 1 constitue un arc de courbe continue P .

Cette courbe possède des propriétés très différentes selon les différentes valeurs attribuées aux paramètres des opérations \mathcal{Q} employées et l'on conçoit qu'il y a là une méthode pour construire des courbes possédant telle ou telle propriété exigée à l'avance. Dans ce qui suit nous nous bornerons à considérer un exemple particulièrement simple.

Choisissons, dans chaque opération $\mathcal{Q}(a, b, c)$ employée pour la construction de P , le premier paramètre a égal au troisième c et déterminons le second paramètre b de la manière suivante. Choisissons une suite de nombres décroissants

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

et suffisamment petits pour que l'on puisse effectuer sur $AB = P_1$ une opération \mathcal{Q} ayant b_1 pour second paramètre, sur chacun des segments de la ligne P_2 ainsi obtenue une opération \mathcal{Q} ayant b_2 pour second paramètre et ainsi de suite. (Il suffit par exemple de supposer $b_1 \leq \frac{1}{3}$, $b_2 \leq \frac{b_1}{3}$, $b_3 \leq \frac{b_2}{3}$, ...).

Désignant la longueur de la ligne P_v par L_v , on voit alors facilement que

$$\begin{aligned} L_1 &= 1, \\ L_2 &= L_1 + b_1, \\ L_3 &= L_2 + 4b_2, \\ &\dots \dots \dots \\ L_v &= L_{v-1} + 4^{v-2}b_{v-1}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

d'où

$$L_v = 1 + b_1 + 4b_2 + \dots + 4^{v-2}b_{v-1}.$$

Donc la limite de L_ν (pour $\nu = \infty$) est finie ou infinie selon que la série

$$\sum 4^\nu b_\nu$$

converge ou diverge d'où l'on conclut que la courbe P est rectifiable dans le premier cas, non rectifiable dans le second cas.

Considérons maintenant un point K de P . Si K est un sommet on démontre, en raisonnant comme plus haut (n° 9) que la courbe P n'a pas une tangente déterminée en ce point; il en est de même si K est un point limite des sommets défini par une suite *infinie* de perpendiculaires

$$XX_1, X_1X_2, \dots$$

Dans le cas au contraire où K est un point limite des sommets, défini par une suite *finie* de perpendiculaires, le raisonnement employé au n° 9 tombe en défaut si la série $\sum 4^\nu b_\nu$ converge; il est donc douteux si l'on peut par la méthode adoptée former une courbe *rectifiable et sans tangente*, et il y a lieu de se poser la question si de telles courbes existent ou non; en tout cas, une méthode de trancher cette question nous apporterait sans doute des connaissances nouvelles sur la structure infinitésimale des courbes planes.
