SUR LES INTÉGRALES RÉGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

PAR

HELGE von KOCH
à STOCKHOLM.

§ 1.

1. Dans la première partie du mémoire *Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires* (ce journal, t. 16) nous nous sommes occupé de la résolution d'un système infini d'équations linéaires

$$(1) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{ik} x_k = 0 \qquad (i=-\infty\,..+\infty)$$

dont le déterminant $[A_{ik}]_{i,k=-\infty\,..+\infty}$ est de la forme normale (c'est-à-dire tel que le produit des éléments diagonaux converge absolument et que la somme des éléments non-diagonaux converge absolument).

Pour le but du présent mémoire, il est nécessaire de généraliser cette étude au cas où le nombre des équations du système (1) est, pour ainsi dire, plus grand que celui des inconnues: nous voulons parler de systèmes de la forme (1) où le déterminant des A_{ik} n'est plus de la forme normale mais le devient dès que l'on y supprime un certain nombre des lignes. Pour plus de généralité, nous ne supposerons pas que les seconds membres des équations proposées soient nuls; nous les supposerons seulement égaux à des constantes dont les valeurs absolues sont inférieures à une quantité donnée.

Avant d'aborder ce problème, rappelons une propriété des déterminants de la forme normale (mém. cité, n° 20) qui nous servira pour point de départ.

Soit

$$D = [A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

un déterminant de la forme normale; désignons par

$$\begin{pmatrix} \iota_1 & .. & \iota_\nu \\ \varkappa_1 & .. & \varkappa_\nu \end{pmatrix}$$

celui des mineurs de D d'ordre ν qui s'obtient en remplaçant chacun des éléments $A_{\iota_1\varkappa_1}, .., A_{\iota_\nu\varkappa_\nu}$ par l'unité et tout autre élément des lignes $\iota_1, .., \iota_\nu$ (ou des colonnes $\varkappa_1, .., \varkappa_\nu$) par zéro (nous conviendrons d'attribuer la valeur zéro à ce symbole toutes les fois que deux ι ou que deux $\varkappa$ seront égaux).

Posons $A_{ik} = a_{ik}$ $(i \gtrless k)$, $A_{ii} = 1 + a_{ii}$; par hypothèse la série $\sum_i \sum_k |a_{ik}|$ est convergente, ce qui entraîne la convergence du produit

$$\Pi_i(1 + \Sigma_k |a_{ik}|).$$

Désignons par $(i_1 .. i_r)$ ce que devient ce produit si l'on y supprime les facteurs correspondant à $i = i_1, .., i_r$; on a alors

$$\left| \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ i_1 & .. & i_r \end{pmatrix} - 1 \right| \leqq (i_1 .. i_r) - 1 \tag{2}$$

et, en particulier (m désignant un entier positif quelconque),

$$\left| \begin{pmatrix} -m & .. & +m \\ -m & .. & +m \end{pmatrix} - 1 \right| \leqq (-m .. +m) - 1. \tag{2'}$$

De là on conclut l'existence d'un entier m' tel que les mineurs

$$\begin{pmatrix} -m & .. & +m \\ -m & .. & +m \end{pmatrix} \qquad (m = m', m' + 1, .., \infty)$$

sont tous différents de zéro; pour trouver m', il suffit de se donner une quantité positive $\delta < 1$ et de déterminer m' en façon que

$$(-m .. +m) - 1 < \delta \quad \text{dès que} \quad m \geqq m'.$$

Or, désignant par $S_{-m..+m}$ ce que devient la série

$$\Sigma_i \Sigma_k |a_{ik}| \tag{3}$$

si l'on y supprime les termes correspondant aux indices $i = -m, .., +m$, on a (pour des m suffisamment grands):

$$(2'') \qquad (-m..+m) - 1 \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} (S_{-m..+m})^{\nu} = \frac{S_{-m..+m}}{1 - S_{-m..+m}}.$$

Il suffit donc de choisir m' de manière que

$$S_{-m'..+m'} < \frac{\delta}{1+\delta},$$

ce qui est possible puisqu'on suppose la série (3) convergente; si nous nous bornons, et c'est ce que nous ferons toujours dans ce qui va suivre, au cas où la série (3) est telle que le nombre m' s'obtient au moyen d'une suite (finie) d'opérations arithmétiques (c'est évidemment ce qui aura lieu dans les cas usuels), le résultat auquel nous sommes parvenu s'exprime ainsi:

Un déterminant de la forme normale étant donné, on peut, par une suite d'opérations arithmétiques, trouver un mineur d'ordre fini qui n'est pas nul.

2. Considérons maintenant un système linéaire

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{ik} x_k = A_i, && (i=-\infty..+\infty) \\ &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_{ik} x_k = B_i && (i=1,2,..,q) \end{aligned}$$

où les équations peuvent être partagées en deux groupes, (A) et (B); dans le système (A), le déterminant des éléments est de la forme normale et les A_i sont, en valeur absolue, moindres qu'une quantité donnée; quant au système (B), qui n'embrasse qu'un nombre fini q d'équations, nous supposerons seulement que les coefficients B_{ik} soient, en valeur absolue, moindres qu'une quantité donnée.[1]

Proposons-nous de trouver toutes les valeurs des x_k qui satisfont

---

[1] Cf. mém. cité, n° 9.

aux équations (4) et qui restent inférieures en valeur absolue à un nombre fini (qui peut ne pas être connu d'avance) X:

$$(4') \qquad |x_k| < X. \qquad {\scriptstyle (k=-\infty..+\infty)}$$

Nous verrons que ce problème se ramène toujours à la résolution d'un certain système fini d'équations linéaires entre un nombre fini d'inconnus.

Pour abréger, désignons la série $\sum_k A_{ik}x_k$ par u_i et la série $\sum_k B_{ik}x_k$ par v_i de sorte que le système (4) prenne la forme

$$u_i = A_i, \qquad {\scriptstyle (i=-\infty..+\infty)}$$

$$v_i = B_i. \qquad {\scriptstyle (i=1,2,..,q)}$$

Soit D le déterminant des A_{ik}; choisissons un mineur quelconque de D:

$$\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$$

et formons la série double

$$S = \sum_i \sum_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & i \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix} A_{i\lambda} x_\lambda;$$

cette série étant absolument convergente (mém. cité, n° 20) quand les x_k satisfont aux conditions (4'), on aura

$$S = \sum_i \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & i \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix} A_i$$

$$= \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix} x_k - \sum_{\nu=1}^{r} \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & .. & k_r \end{pmatrix} x_{k_\nu};$$

d'où:

$$(5) \quad \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}_k + \sum_{\nu=1}^{r} \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & .. & k_r \end{pmatrix} x_{k_\nu},$$

$\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}_k$ désignant ce que devient le déterminant $\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$ si l'on y remplace les éléments A_{ik} de la colonne k par les A_i.

Or nous pouvons toujours, par la méthode précédente, trouver un mineur de D d'ordre fini qui n'est pas nul; si nous désignons par $\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix}$ ce mineur, toutes les inconnues x_k s'exprimeront, en vertu des équations (5), en fonction linéaire par rapport à r d'entre elles: $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$. Pour trouver les équations auxquelles doivent satisfaire $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$, il suffit de substituer aux x_k, dans les équations $u_i = A_i$ et $v_i = B_i$, les valeurs fournies par la formule (5); nous aurons

$$(6)\quad \begin{aligned} &\sum_k \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_r \end{pmatrix}_k A_{ik} + \sum_{\nu=1}^{r} x_{k_\nu} \sum_k \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & \dots & k_r \end{pmatrix} A_{ik} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_r \end{pmatrix} A_i, \qquad (i=-\infty \dots +\infty) \\ &\sum_k \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_k \end{pmatrix}_k B_{ik} + \sum_{\nu=1}^{r} x_{k_\nu} \sum_k \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & \dots & k_r \end{pmatrix} B_{ik} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_r \end{pmatrix} B_i. \qquad (i=1,2,\dots,q) \end{aligned}$$

En vertu des formules suivantes, que l'on obtient sans difficulté:

$$\sum_k \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_r \end{pmatrix}_k A_{ik} = \begin{cases} \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_r \end{pmatrix} A_i & (i \gtrless i_1, \dots, i_r) \\ \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_r \end{pmatrix} A_{i_\mu} - S_\mu & (i = i_\mu) \end{cases}$$

$$\sum_k \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & \dots & k_r \end{pmatrix} A_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \gtrless i_1, \dots, i_r) \\ S_{\nu\nu} & (i = i_\nu) \\ S_{\mu\nu} & (i = i_\mu) \end{cases}$$

le système (6) se réduit à un système fini de $r + q$ équations:

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
S_{11}x_{k_1} + \cdots + S_{r1}x_{k_r} &= S_1,\\
\cdot\quad \cdot\cdot\quad \cdot\quad &\cdot\\
S_{r1}x_{k_1} + \cdots + S_{rr}x_{k_r} &= S_r,\\
T_{11}x_{k_1} + \cdots + T_{r1}x_{k_r} &= T_1,\\
\cdot\quad \cdot\cdot\quad \cdot\quad &\cdot\\
T_{q1}x_{k_1} + \cdots + T_{qr}x_{k_r} &= T_q,
\end{aligned}
$$

dans ces formules, $S_{\mu\nu}$ (pris avec le signe $(-1)^{\mu-\nu}$) représente ce que devient le symbole $\begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r \end{pmatrix}$ quand on y supprime l'indice i_μ et l'indice k_ν, et S_μ représente ce que devient le déterminant $S_{\mu\mu}$ quand on y remplace la colonne R_μ par la colonne formée par les seconds membres des équations (4); $T_{\mu\nu}$ désigne ce que devient $S_{1\nu}$ quand on y remplace la ligne i_1 par la ligne des $B_{\mu k}$ et T_μ désigne ce que devient $T_{\mu 1}$ quand on y remplace la colonne k_1 par la colonne formée par les seconds membres des équations (4).

On peut donc, par une suite finie d'opérations arithmétiques, réduire un système infini tel que (4), *où les inconnues sont assujetties aux conditions* (4'), *à un système fini d'équations entre un nombre fini d'inconnues.*

3. Appliquons d'abord ce résultat au cas où les équations données sont homogènes ($A_i = B_j = 0$):

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
u_i &= 0, & (i=-\infty\,..+\infty)\\
v_i &= 0, & (i=1,2,..,q)
\end{aligned}
$$

les inconnues x_k étant toujours assujetties à la condition

$$
(8')\qquad |x_k| < X. \qquad (k=-\infty\,..+\infty)
$$

Dans ce cas, le système transformé (7) sera aussi homogène, car les S_i et les T_i sont tous nuls. Convenons de donner le nom de *solution* du système (8) à tout système de valeurs des x_k qui vérifient les équations (8) et les conditions (8'), et de dire que ν solutions $x'_k, x''_k, \ldots, x^{(\nu)}_k$ sont linéairement indépendantes s'il n'existe pas de constantes $c', c'', \ldots, c^{(\nu)}$

telles que la somme $c'x'_k + c''x''_k + \ldots + c^{(\nu)}x_k^{(\nu)}$ soit nulle pour chaque valeur de l'indice k.

Il est clair d'abord que le système (8) ne peut avoir plus de r solutions linéairement indépendantes; car tous les x_k sont, en vertu des équations (5), parfaitement déterminés quand on connaît $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$.

Pour trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un nombre donné ν de solutions linéairement indépendantes, il suffit de considérer certains des déterminants de la matrice (A, B) des éléments A_{ik} et B_{ik}. Par la matrice des éléments A_{ik} et B_{ik} nous entendons l'ensemble de ces éléments, rangés en lignes et en colonnes (le premier indice se rapportant aux lignes, le second aux colonnes). Par $(A)_i$ nous désignons la ligne constituée par les éléments A_{ik} $(k = -\infty \ldots +\infty)$ et par $(B)_i$ celle constituée par les éléments B_{ik} $(k = -\infty \ldots +\infty)$; par la colonne k nous entendons celle où le second indice des éléments est k.

Désignons, en effet, par M_0 l'ensemble de déterminants que l'on peut former avec la matrice (A, B) en y supprimant q quelconques des lignes

$$(B)_1, (B)_2, \ldots, (B)_q, (A)_{i_1}, (A)_{i_2}, \ldots, (A)_{i_r}; \tag{9}$$

par M_1 l'ensemble de déterminants que l'on peut former avec (A, B) en y supprimant $q + 1$ quelconques des lignes (9) et 1 quelconque des colonnes

$$k_1, k_2, \ldots, k_r; \tag{10}$$

et, d'une manière générale, par M_ν l'ensemble de déterminants que l'on peut former avec (A, B) en y supprimant $q + \nu$ quelconques des lignes (9) et ν quelconques des colonnes (10). (Il est clair que le déterminant D défini plus haut appartient à l'ensemble M_0 et que l'ensemble M_r est composé d'un seul déterminant: $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$).

Je dis que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (8) ait ν solutions linéairement indépendantes, s'expriment en égalant à zéro tous les déterminants M d'indice $\nu - 1$.

Ces conditions sont nécessaires; car si l'un quelconque des M_μ $(\mu = \nu - 1)$, par exemple $\begin{pmatrix} \iota_1 & \ldots & \iota_\mu \\ x_1 & \ldots & x_\mu \end{pmatrix}$, était différent de zéro, toutes les inconnues s'exprimeraient en fonction de $x_{\varkappa_1}, x_{\varkappa_2}, \ldots, x_{\varkappa_\mu}$ et le nombre des solutions linéairement indépendantes serait au plus égal à μ.

Ces conditions sont aussi suffisantes; car désignons par μ le plus petit entier tel qu'il y ait, parmi les déterminants M_μ, au moins un, par exemple $\begin{pmatrix} \iota_1 & \ldots & \iota_\mu \\ \varkappa_1 & \ldots & \varkappa_\mu \end{pmatrix}$, différent de zéro. D'après ce que nous avons vu, toutes les inconnues s'exprimeront en fonction de $x_{\varkappa_1}, x_{\varkappa_2}, \ldots, x_{\varkappa_\mu}$, et ces dernières quantités ont à vérifier $\mu + q$ équations linéaires et homogènes où les coefficients ne sont autres que des déterminants appartenant à l'ensemble $M_{\mu-1}$. Ces déterminants étant tous nuls, il est clair que le nombre des solutions linéairement indépendantes est égal à μ; et ce nombre μ ne peut pas être inférieur à ν pourvu que tous les $M_{\nu-1}$ soient nuls.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système donné (8) admette un nombre donné de solutions linéairement indépendantes, s'expriment donc par un nombre fini de relations entre les A et les B et l'on peut toujours trouver ces relations par un nombre fini d'opérations arithmétiques.

Supposons que, par un moyen quelconque, on ait trouvé, parmi les déterminants M_ν, au moins un, soit $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{pmatrix}$, différent de zéro, et que tous les déterminants $M_{\nu-1}$ soient nuls. D'après les formules précédentes, la solution générale du système (8) sera la suivante:

$$(11)\qquad \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_\nu \\ k & k_1 & \ldots & k_\nu \end{pmatrix} x_{k_1} + \ldots + \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & k \end{pmatrix} x_{k_\nu}, \qquad (k = -\infty \ldots +\infty)$$

$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_\nu}$ désignant des constantes arbitraires.

4. L'étude du système non-homogène

$$(12)\qquad \begin{aligned} u_i &= A_i, & (i = -\infty \ldots +\infty) \\ v_i &= B_i, & (i = 1, 2, \ldots, q) \end{aligned}$$

se ramène aisément à celle du système homogène étudié au numéro précédent.

Déterminons d'abord un déterminant non nul $\begin{pmatrix} i_1 & . & . & i_r \\ k_1 & . & . & k_r \end{pmatrix}$ et formons les ensembles de déterminants désignés par $M_1, M_2, \ldots, M_r$.

Puis, formons des déterminants nouveaux en bordant la matrice de chacun des déterminants M_0 par l'une quelconque des lignes

$$(13) \qquad (B)_1, (B)_2, \ldots, (B)_q, (A)_{i_1}, (A)_{i_2}, \ldots, (A)_{i_r}$$

et par la colonne formée par les seconds membres des équations (12); désignons par M'_0 l'ensemble des déterminants ainsi obtenus. De la même manière, bordons la matrice de chacun des déterminants M_1 par l'une quelconque des dites lignes et par la dite colonne; et désignons par M'_1 l'ensemble ainsi obtenu; etc.

Nous obtiendrons les ensembles suivants de déterminants:

$$M'_0, M'_1, \ldots, M'_r.$$

Supposons que tous les déterminants des ensembles M_μ dont l'indice μ est inférieur à un certain indice ν soient nuls, mais que, parmi les M_ν, il y ait un au moins (soit $\begin{pmatrix} i_1 & . & . & i_\nu \\ k_1 & . & . & k_\nu \end{pmatrix}$) qui ne soit pas nul.

Je dis que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (12) ait au moins une solution, s'expriment en égalant à zéro tous les déterminants appartenant à l'ensemble M'_ν; et que, si ces conditions sont vérifiées, la solution générale du système (12) contient ν constantes arbitraires.

En effet, les conditions sont nécessaires puisqu'on peut, en admettant l'existence d'une solution du système proposé, par des formules telles que (7), exprimer chacun des déterminants M'_ν en fonction linéaire et homogène par rapport aux $M_{\nu-1}$, qui sont tous nuls, d'après l'hypothèse.

Ces conditions sont aussi suffisantes; car, d'après ce qui précède, toutes les inconnues x_k s'expriment en fonctions linéaires par rapport aux $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_\nu}$; et ces dernières n'ont à vérifier que $\nu + q$ équations linéaires où les coefficients des premiers membres sont les déterminants appartenant à l'ensemble $M_{\nu-1}$ et les seconds membres des déterminants appartenant à l'ensemble M'_ν.

Donc, si les conditions dont il s'agit sont vérifiées, on voit d'après la formule (5), que la solution générale du système (12) est la suivante

$$(14)\quad \begin{pmatrix} i_1 \,.\,. \, i_\nu \\ k_1 \,.\,. \, k_\nu \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 \,.\,. \, i_\nu \\ k_1 \,.\,. \, k_\nu \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \,.\,. \, i_\nu \\ k & k_2 \,.\,. \, k_\nu \end{pmatrix} x_{k_1} + \,.\,. + \begin{pmatrix} i_1 \,.\,. \, i_{\nu-1} & i_\nu \\ k_1 \,.\,. \, k_{\nu-1} & k \end{pmatrix} x_{k_\nu}, \qquad (k=-\infty\,.\,.+\infty)$$

$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_\nu}$ désignant des constantes arbitraires.

§ 2.

5. Avant d'aborder le problème que nous avons en vue, rappelons succinctement les principaux résultats obtenu dans le mémoire cité plus haut.

Soit

$$(15)\qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + P_3 \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \,.\,. + P_n y = 0$$

une équation linéaire, privée du terme contenant $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, et ayant pour coefficients des fonctions analytiques de x, développables en séries de Laurent à l'intérieur d'un anneau circulaire entourant un point donné, par exemple $x = 0$:

$$(16)\qquad P_r(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \alpha_{r\lambda} x^\lambda. \qquad (r=2,3,\ldots,n)$$

Formons les fonctions

$$(17)\quad \varphi(\rho) = \rho(\rho-1)\,.\,.(\rho-n+1) + \rho(\rho-1)\,.\,.(\rho-n+3)\alpha_{2,-2} + \,.\,. + \alpha_{n,-n}$$
$$= (\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\,.\,.(\rho-\rho_n),$$

$$(18)\quad A_{m\lambda} = (\rho+\lambda)(\rho+\lambda-1)\,.\,.(\rho+\lambda-n+3)\alpha_{2,m-\lambda-2} + \,.\,. + \alpha_{n,m-\lambda-n},$$

$$(19)\quad h_0(\rho) = 1, \qquad h_m(\rho) = \frac{1}{m^n} e^{-\frac{\rho-\rho_1}{m}} e^{-\frac{\rho-\rho_2}{m}} \,.\,. \, e^{-\frac{\rho-\rho_n}{m}} \equiv \frac{1}{m^n} e^{-\frac{n\rho}{m} + \frac{n(n-1)}{2m}}$$

et posons

$$(20)\qquad h_m(\rho) A_{m\lambda} = \chi_{m\lambda}(\rho), \qquad h_m(\rho)\varphi(\rho+m) = \chi_{mm}(\rho).$$

Si, dans l'expression différentielle $P(y)$, nous posons

$$y = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_\lambda x^{\rho+\lambda}, \tag{21}$$

$P(y)$ prend la forme

$$P(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_m(\rho) x^{\rho+m-n} \tag{22}$$

où

$$G_m(\rho) = \varphi(\rho + m) g_m + \sum_\lambda' A_{m\lambda} g_\lambda, \qquad (\lambda \gtrless m) \tag{23}$$

et les équations linéaires auxquelles doivent satisfaire les g_λ pour que la fonction (21) représente une intégrale de l'équation (15), s'écrivent sous la forme

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \chi_{m\lambda} g_\lambda = 0. \qquad (m=-\infty..+\infty) \tag{24}$$

Le déterminant

$$D(\rho) = [\chi_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

des éléments χ_{ik} est de la forme normale[1] pour toute valeur finie de ρ et représente une fonction analytique et entière de ρ qui jouit des propriétés suivantes:

1° $D(\rho)$ vérifie l'égalité

$$D(\rho + 1) = (-1)^n D(\rho)$$

et représente, par suite, une fonction périodique de ρ (de période 1 ou 2).

2° $D(\rho)$ a n zéros incongruents (chacun d'eux étant compté avec son ordre de multiplicité) et peut être représenté sous la forme

$$D(\rho) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(\rho - \rho^{(\nu)})\pi}{\pi},$$

[1] Nous supposons que le point $x = 1$ se trouve à l'intérieur du domaine de convergence des séries (16). Mais, dans le cas contraire, on est ramené immédiatement à ce cas en remplaçant, dans $D(\rho)$, chaque élément χ_{ik} par $\chi_{ik} x_0^{i-k}$ où x_0 désigne un point du domaine de convergence.

$\rho', \rho'', \ldots, \rho^{(n)}$ désignant des constantes dont la somme est égale au nombre entier: $\frac{n(n-1)}{2}$.

3° Si on développe $D(\rho)$ en série suivant les puissances croissantes de ρ, les coefficients sont des séries absolument convergentes procédant selon les puissances et les produits des paramètres $\alpha_{r\lambda}$; les coefficients de ces séries sont des polynômes entiers en π dont les coefficients sont des nombres rationnels.

Soient $\rho', \rho'', \ldots, \rho^{(p)}$ un système de zéros incongruents de $D(\rho)$, $s', s'', \ldots s^{(p)}$ leurs ordres de multiplicité. On peut former n intégrales linéairement indépendantes qui se partagent entre p groupes appartenant respectivement aux zéros $\rho', \rho'', \ldots, \rho^{(p)}$ et contenant respectivement s', $s'', \ldots, s^{(p)}$ intégrales.

Pour représenter analytiquement les s intégrales appartenant à l'un quelconque ρ' de ces zéros, désignons par

$$s\,, s_1\,, s_2\,, \ldots, s_{r-1}$$

les nombres caractéristiques et par

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$$

un système de mineurs caractéristiques correspondant à ρ' (pour la définition, voir mém. cité, n° 23); les nombres $s, s_1, \ldots$ vérifient les conditions suivantes:

$$s \geqq r\,;\ s > s_1 > \ldots > s_{r-1}\,;\ s - s_1 \geqq s_1 - s_2 \geqq \ldots \geqq s_{r-1}$$

et le mineur $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{pmatrix}$ (où $\nu < r$) est, pour $\rho = \rho'$, nul d'ordre s_ν tandis que $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$ est différent de zéro.

Posons

$$g_1(x\,,\,\rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \binom{i_1}{\lambda} x^{\rho+\lambda},$$

$$g_2(x\,,\,\rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & \lambda \end{pmatrix} x^{\rho+\lambda},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$g_r(x\,,\,\rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_{r-1} & \lambda \end{pmatrix} x^{\rho+\lambda}.$$

Alors les intégrales en question se partagent entre r sous-groupes contenant respectivement

$$s - s_1 = \nu_1, \qquad s_1 - s_2 = \nu_2\,, \quad \ldots, \quad s_{r-1} = \nu_r$$

intégrales:

$$y_{1.1}\,, y_{1.2}\,, \ldots, y_{1.\nu_1}\,;\; y_{2.1}\,, y_{2.2}\,, \ldots, y_{2.\nu_2}\,;\; \ldots;\; y_{r.1}\,, y_{r.2}\,, \ldots, y_{r.\nu_r}$$

qui se représentent analytiquement par les formules suivantes

$$y_{1.1} = \frac{\partial^{s_1} g_1(x\,,\,\rho)}{\partial \rho^{s_1}}, \qquad y_{1.2} = \frac{\partial^{s_1+1} g_1(x\,,\,\rho)}{\partial \rho^{s_1+1}}, \quad \ldots, \quad y_{1.\nu_1} = \frac{\partial^{s-1} g_1(x\,,\,\rho)}{\partial \rho^{s-1}},$$

$$y_{2.1} = \frac{\partial^{s_2} g_2(x\,,\,\rho)}{\partial \rho^{s_2}}, \qquad y_{2.2} = \frac{\partial^{s_2+1} g_2(x\,,\,\rho)}{\partial \rho^{s_2+1}}, \quad \ldots, \quad y_{2.\nu_2} = \frac{\partial^{s_1-1} g_2(x\,,\,\rho)}{\partial \rho^{s_1-1}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y_{r.1} = g_r(x\,,\,\rho)\,, \qquad y_{r.2} = \frac{\partial g_r(x\,,\,\rho)}{\partial \rho}\,, \quad \ldots, \quad y_{r.\nu_r} = \frac{\partial^{s_{r-1}-1} g_r(x\,,\,\rho)}{\partial \rho^{s_{r-1}-1}}$$

où il faut substituer, après les différentiations, ρ' à la place de ρ.

6. Chacune des intégrales ainsi définies est de la forme

$$(25) \qquad x^\rho(F_0 + F_1 \log x + F_2 (\log x)^2 + \ldots + F_\mu (\log x)^\mu),$$

ρ désignant une racine de l'équation $D(\rho) = 0$ et les F étant des séries procédant selon les puissances positives et négatives de x, ayant pour coefficients des fonctions entières de ρ.

On dit, d'après M. THOMÉ, qu'une intégrale de la forme (25) est *régulière* (dans le voisinage de $x = 0$), si les F ne contiennent qu'un nombre fini de puissances négatives.

Considérant le cas où les coefficients P de l'équation proposée ne contiennent qu'un nombre fini de puissances négatives de x, M. THOMÉ a montré que, si m désigne le degré d'une certaine équation (l'équation déterminante), l'équation (15) ne peut avoir plus de m intégrales régulières et que l'on peut toujours former m séries de la forme (25) satisfaisant *formellement* à l'équation (15); ces séries représentent donc des intégrales régulières, pourvu qu'elles soient convergentes. Comme, dans le cas général, les séries ainsi obtenues sont divergentes, il faut, pour que l'équation proposée ait des intégrales régulières, que les paramètres satisfassent à certaines relations.

Il a été impossible de trouver ces relations, sauf dans un cas particulier, par les méthodes connues jusqu'ici. Comme nous allons le voir, on peut toujours les trouver à l'aide de la méthode indiquée au paragraphe précédent.

7. Si l'on cherche à vérifier l'équation (15) par une intégrale régulière de la forme

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_\lambda x^{\rho+\lambda} \tag{26}$$

le système d'équations (24) auquel doivent satisfaire les g_λ et ρ prend la forme

$$\sum_{\lambda=0}^{+\infty} \chi_{m\lambda} g_\lambda = 0. \qquad (m=-\infty\,..+\infty) \tag{27}$$

Ce système (27) se simplifie beaucoup dans le cas où le point singulier $x = 0$ n'est qu'un *pôle* pour les coefficients P de l'équation proposée. Dans ce cas, auquel nous nous bornerons dans ce qui va suivre, les développements (16) des P ne contiennent qu'un nombre limité de puissances négatives de x.

Soient

$$x^{-2-p_2},\ x^{-3-p_3},\ \ldots,\ x^{-n-p_n} \tag{28}$$

les puissances par lesquelles commencent respectivement les développements des fonctions

$$P_2(x)\ ,\ P_3(x)\ ,\ \ldots,\ P_n(x).$$

Considérons la suite des nombres entiers

$$p_0\ ,\ p_2\ ,\ p_3\ ,\ \ldots,\ p_n \tag{29}$$

(où l'on a posé, pour plus de symétrie, $0 = p_0$); soit p le plus grand d'entre eux, et p_σ le premier nombre de la suite (29) (parcourue de gauche à droite) qui atteint cette valeur p.

Il vient

$$\chi_{ik} = 0 \quad \text{dès que} \quad k - i > p$$

et l'on voit que le degré de la fonction $\chi_{i.i+p}$ (divisée par $h_i(\rho)$) est égal à $n - \sigma$.

Les équations (27) se réduisent donc aux suivantes

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \chi_{m\lambda} g_\lambda = 0 \qquad (m = -p, -p+1, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

ou encore:

$$\begin{aligned}
&\chi_{-p.0}g_0 = 0,\\
&\chi_{-p+1.0}g_0 + \chi_{-p+1.1}g_1 = 0,\\
&\quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot\\
&\chi_{-1.0}g_0 + \chi_{-1.1}g_1 + \cdots + \chi_{-1.p-1}g_{p-1} = 0,\\
&\chi_{0.0}g_0 + \chi_{0.1}g_1 + \cdots + \chi_{0.p-1}g_{p-1} + \chi_{0.p}g_p = 0,\\
&\chi_{1.0}g_0 + \chi_{1.1}g_1 + \cdots + \chi_{1.p-1}g_{p-1} + \chi_{1.p}g_p + \chi_{1.p+1}g_{p+1} = 0,\\
&\quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot
\end{aligned} \tag{30}$$

C'est à l'étude de ce système linéaire que se ramène le problème de trouver les intégrales régulières. Dans le cas où $p = 0$, le déterminant du système (30) est de la forme normale et se réduit d'ailleurs à son terme initial: $\prod_{\nu=0}^{\infty}\chi_{\nu\nu}$. C'est donc, au point de vue de la théorie des déterminants infinis, le cas le plus simple qu'on peut imaginer. Aussi ce n'est autre que le cas rendu célèbre par les travaux de plusieurs géomètres et notamment par les recherches classiques de M. FUCHS. Nous pouvons donc le laisser de côté ici, d'autant plus que, dans le mémoire cité plus haut (voir n° 26), nous avons vu comment se présente la théorie de ce cas au point de vue de la théorie des déterminants infinis.

Supposant donc $p > 0$, nous voyons que le déterminant du système (30) n'est plus de la forme normale mais qu'il le devient dès qu'on supprime p quelconques des lignes; en effet, le déterminant du système qu'on obtient après avoir supprimé les p premières équations de (30), est de la forme normale puisque le produit des éléments diagonaux χ_{ii} converge absolument et que la somme des éléments non-diagonaux χ_{ik} converge absolument; et ce déterminant reste de la forme normale si l'on remplace l'une ou plusieurs des lignes par des lignes dont les indices appartiennent à la suite $-p, -p+1, \ldots, -1$.

Nous avons donc à envisager les déterminants obtenus en supprimant dans la matrice des éléments χ_{ik}:

$$\chi_{i.0}\,,\ \chi_{i.1}\,,\ \ldots,\ \chi_{i.i+p}, \qquad (i=-p, -p+1, \ldots, 0, 1, \ldots, +\infty) \tag{31}$$

p quelconques des lignes. Pour plus de symétrie, nous pouvons considérer tous ces déterminants comme des mineurs d'un seul déterminant Δ, à savoir celui qu'on obtient en ajoutant à la matrice (31) p colonnes, numérotées $-p, -p+1, \ldots, -1$, dans chacune desquelles tous les éléments sont nuls; nous désignerons donc désormais par le symbole

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_q \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_q \end{pmatrix} \tag{32}$$

celui des mineurs d'ordre q de Δ qu'on obtient en remplaçant dans Δ chacun des éléments $\chi_{\alpha_1\beta_1}, \chi_{\alpha_2\beta_2}, \ldots, \chi_{\alpha_q\beta_q}$ par l'unité et tout autre élément des lignes $\alpha_1 \ldots \alpha_q$ ou des colonnes $\beta_1 \ldots \beta_q$ par zéro. Il est clair que chacun des déterminants (32) où $q < p$ est nul identiquement, car ils contiennent tous au moins une colonne composée de zéros; et que, si $q \geqq p$, le déterminant (32) est nul également si tous les nombres $-p$, $-p+1, \ldots, -1$, ne sont pas compris dans la suite $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$. En particulier, le symbole

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\,, & \alpha_2 & ,\ldots, & \alpha_p \\ -p\,, & -p+1 & ,\ldots, & -1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

représente (au signe près) le déterminant de la matrice qu'on obtient en supprimant, dans la matrice (31), les lignes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; et

$$(33') \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 , & \alpha_2 & , \ldots , & \alpha_p & , \iota_1 , \iota_2 , \ldots , \iota_\nu \\ -p , & -p+1 & , \ldots , & -1 & , \varkappa_1 , \varkappa_2 , \ldots , \varkappa_\nu \end{pmatrix}$$

représente (au signe près), celui des mineurs d'ordre ν du déterminant (33) qu'on obtient en supprimant dans la matrice (31) les $p+\nu$ lignes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_\nu$ et les ν colonnes $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$. Comme toujours, nous convenons d'attribuer au symbole (32) la valeur nulle si deux quelconques des indices supérieurs ou si deux quelconques des indices inférieurs sont égaux entre eux.

D'après des résultats obtenus dans le mémoire cité, il est clair que, pour que l'équation (15) ait un nombre donné m d'intégrales régulières de la forme

$$(34) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_\lambda x^{R+\lambda}$$

où R désigne une constante donnée quelconque, il faut et il suffit que le système d'équations (30) ait, pour $\rho = R$, m solutions linéairement indépendantes. Or, d'après le paragraphe précédent, cette condition s'exprime de la manière suivante. On détermine (ce qu'on peut toujours faire par un nombre fini d'opérations arithmétiques), un entier ν et $p+2\nu$ indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_\nu, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$ de telle manière que le déterminant (33') soit, pour $\rho = R$, différent de zéro; puis on égale à zéro tous ceux des mineurs de Δ d'ordre $p+m-1$ qu'on peut définir en supprimant dans le symbole (33') $\nu-m+1$ quelconques des indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_p$ et $\nu-m+1$ quelconques des indices $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$.

Désignons par M_0 l'ensemble des mineurs qu'on peut définir en supprimant dans le symbole (33') ν quelconques des indices

$$(35) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_\nu$$

et les ν indices

$$(36) \qquad \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu;$$

par M_1 l'ensemble des mineurs qu'on peut définir en y supprimant $\nu - 1$ quelconques des indices (35) et $\nu - 1$ quelconques des indices (36); ..; par $M_{\nu-1}$ l'ensemble des mineurs qu'on peut définir en supprimant dans (33) 1 quelconque des indices (35) et 1 quelconque des indices (36).

Chacun des déterminants ainsi définis est une fonction entière de ρ dont les coefficients sont fonctions des paramètres α.

Je dis que le nombre des intégrales régulières appartenant[1] *à R est égal à l'exposant de la plus haute puissance de $\rho - R$ qui divise toutes les fonctions M_0.*

8. Démontrons d'abord que, μ désignant l'exposant de la plus haute puissance de $\rho - R$ qui divise toutes les fonctions M_0, l'équation (15) a, au moins, μ intégrales régulières.

Puisque, pour $\rho = R$, les déterminants M_0 sont tous nuls tandis que le déterminant (33') (c'est-à-dire M_ν) ne s'évanouit pas, on peut déterminer un nombre r de la suite $0, 1, 2, .., \nu$ tel que tous les déterminants M_k d'indice $k < r$ s'évanouissent pour $\rho = R$ tandis que, parmi les déterminants M_r, il y ait au moins un qui ne devient pas nul. Soit

$$(37) \qquad \begin{pmatrix} a_1\,, & a_2 & , \ldots , & a_p\,, & i_1\,, & i_2\,, \ldots , & i_r \\ -p\,, & -p+1 & , \ldots , & -1\,, & k_1\,, & k_2\,, \ldots , & k_r \end{pmatrix}$$

ce déterminant non nul. Désignons par M_0' l'ensemble de tous ceux des déterminants M_0 qu'on peut définir en supprimant dans le symbole (37) r quelconques des indices supérieurs et r quelconques des indices inférieurs; par M_1' l'ensemble de tous ceux des déterminants M_1 qu'on peut définir en supprimant dans (37) $r - 1$ quelconques des indices supérieurs et $r - 1$ quelconques des indices inférieurs; ..; par M_k' l'ensemble de tous ceux des déterminants M_k qu'on peut définir en supprimant dans (37) $r - k$ quelconques des indices supérieurs et $r - k$ quelconques des indices inférieurs.

---

[1] Selon l'usage, nous dirons qu'une intégrale de la forme

$$x^\rho(F_0 + F_1 \log x + \ldots + F_\mu (\log x)^\mu)$$

est une intégrale *appartenant à l'exposant* ρ si les séries F (dont on suppose que l'une au moins n'est pas nulle identiquement) ne contiennent que des puissances *positives* de x.

Par hypothèse, tous les M_0 et, en particulier tous les M'_0 deviennent, pour $\rho = R$, nuls d'ordre μ au moins. Mais, parmi les M'_0, il y a un au moins qui ne devient nul que d'ordre μ *au plus;* en effet, le déterminant Δ, de même que tous ses mineurs d'ordre $1, 2, \ldots, p-1$ sont nuls identiquement; donc, en se servant d'un mode de démonstration indiqué dans le mémoire cité (n° 23), on voit que, si tous ceux des mineurs d'ordre p de Δ dont nous avons désigné l'ensemble par M'_0, s'annulaient d'un ordre supérieur à μ, il en serait de même de *tous* les mineurs d'ordre p de Δ, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Désignons donc par

$$(38) \qquad \mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r-1}$$

les exposants des plus hautes puissances de $\rho - R$ qui divisent respectivement tous les déterminants M'_0, tous les déterminants M'_1, tous les déterminants $M'_2, \ldots$ tous les déterminants M'_{r-1}. On peut démontrer (voir mém. cité, n° 23) que ces nombres satisfont nécessairement aux conditions suivantes

$$(39) \qquad \mu \geqq r\,; \ \mu > \mu_1 > \ldots > \mu_{r-1}\,; \ \mu - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2 \geqq \ldots \geqq \mu_{r-1}$$

et qu'on peut supposer les indices du symbole (37) rangés en façon que $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r-1}$ désignent les exposants des plus hautes puissances de $\rho - R$ qui divisent respectivement les déterminants suivants:

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2 & , \ldots, & a_p \\ -p, & -p+1 & , \ldots, & -1 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} i_1 \\ k_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{bmatrix}$$

où, d'une manière générale, $\begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{bmatrix}$ représente, pour abréger, le déterminant

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2 & , \ldots, & a_p, & i_1, \ldots, i_\nu \\ -p, & -p+1 & , \ldots, & -1, & k_1, \ldots, k_\nu \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire celui des mineurs d'ordre ν de $\begin{pmatrix} a_1, & a_2 & , \ldots, & a_p \\ -p, & -p+1 & , \ldots, & -1 \end{pmatrix}$ qu'on obtient en remplaçant dans $\begin{pmatrix} a_1, & a_2 & , \ldots, & a_p \\ -p, & -p+1 & , \ldots, & -1 \end{pmatrix}$ chacun des éléments $\chi_{i_1k_1}, \chi_{i_2k_2}, \ldots, \chi_{i_rk_r}$ par l'unité et tout autre élément des lignes $i_1 \ldots i_r$ (ou des colonnes $k_1 \ldots k_r$) par zéro.

On voit aussi que tous les M_1 s'annulent d'ordre μ_1 au moins; car tous les mineurs de Δ d'ordre $1, 2, \ldots, p$ s'annulent d'ordre μ au moins et les mineurs M_1' s'annulent d'ordre μ_1 au moins; d'où s'ensuit que *tous* les mineurs d'ordre $p + 1$ de Δ s'annulent d'ordre μ_1 au moins. De la même manière on voit que tous les M_2 s'annulent d'ordre μ_2 au moins, .., que tous les M_{r-1} s'annulent d'ordre μ_{r-1} au moins.

Posons maintenant

$$(40)\qquad \begin{aligned} g_1(x, \rho) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \begin{bmatrix} i_1 \\ \lambda \end{bmatrix} x^{\rho+\lambda}, \\ g_2(x, \rho) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & \lambda \end{bmatrix} x^{\rho+\lambda}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_r(x, \rho) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} & \lambda \end{bmatrix} x^{\rho+\lambda} \end{aligned}$$

et portons l'une quelconque $g_\nu(x, \rho)$ de ces fonctions dans l'expression différentielle $P(y)$. En remarquant que chaque série de la forme

$$(41)\qquad \sum_\lambda \begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & \lambda \end{bmatrix} \chi_{i\lambda}$$

est nulle identiquement quand l'indice i est différent de chacun des indices

$$a_1, a_2, \ldots, a_p, i_1, i_2, \ldots, i_\nu$$

mais égale à un certain des déterminants $M'_{\nu-1}$ quand i est égal à un de ces indices, nous pourrons écrire

$$(42)\qquad \begin{aligned} P(g_\nu(x, \rho)) = \frac{G_{a_1}(\rho)}{h_{a_1}(\rho)} x^{\rho+a_1-n} + \ldots + \frac{G_{a_p}(\rho)}{h_{a_p}(\rho)} x^{\rho+a_p-n} \\ + \frac{G_{i_1}(\rho)}{h_{i_1}(\rho)} x^{\rho+i_1-n} + \ldots + \frac{G_{i_\nu}(\rho)}{h_{i_\nu}(\rho)} x^{\rho+i_\nu-n} \end{aligned}$$

$G_{a_1}(\rho), \ldots, G_{a_p}(\rho), G_{i_1}(\rho), \ldots, G_{i_\nu}(\rho)$ désignant certains des déterminants $M'_{\nu-1}$.

Tous les déterminants $\begin{bmatrix} i_1 & \cdot\,\cdot & i_{\nu-1} & i_\nu \\ k_1 & \cdot\,\cdot & k_{\nu-1} & \lambda \end{bmatrix}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, +\infty)$ s'annulent pour $\rho = R$ d'ordre μ_ν au moins mais l'un d'eux, $\begin{bmatrix} i_1 & \cdot\,\cdot & i_\nu \\ k_1 & \cdot\,\cdot & k_\nu \end{bmatrix}$, ne s'annule que de cet ordre μ_ν. On en conclut que les $\mu_\nu - 1$ premières dérivées de la fonction $g_\nu(x, \rho)$ par rapport à ρ sont identiquement nulles quand on prend $\rho = R$ mais que les dérivées suivantes ne le sont pas. Le second membre de l'égalité (42) s'annulant, pour $\rho = R$, d'ordre $\mu_{\nu-1}$ au moins, il s'ensuit que les $\mu_\nu - \mu_{\nu-1}$ fonctions

$$(43) \quad y_{\nu.1} = \frac{\partial^{\mu_\nu} g_\nu(x, \rho)}{\partial \rho^{\mu_\nu}}, \qquad y_{\nu.2} = \frac{\partial^{\mu_\nu+1} g_\nu(x, \rho)}{\partial \rho^{\mu_\nu+1}}, \ \ldots, \ y_{\nu.\mu_{\nu-1}-\mu_\nu} = \frac{\partial^{\mu_{\nu-1}-1} g_\nu(x, \rho)}{\partial \rho^{\mu_{\nu-1}-1}}$$

représentent, pour $\rho = R$, $\mu_\nu - \mu_{\nu-1}$ intégrales de l'équation différentielle (15). La série $g_\nu(x, \rho)$ étant uniformément convergente par rapport à ρ à l'intérieur d'un domaine fini quelconque (cf. mém. cité, n° 22), on a le droit de la différentier terme par terme. Effectuant les calculs, on voit que les intégrales obtenues sont de la forme

$$y_{\nu.k} = x^R \left(F_{k.0} + F_{k.1} \log x + \ldots + F_{k.k-1} (\log x)^{k-1}\right) \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,\mu_{\nu-1}-\mu_\nu)}$$

les F désignant des séries procédant selon les puissances positives de x et convergentes à l'intérieur du même domaine que les développements (16). Dans chacune de ces intégrales, le coefficient de la plus haute puissance de $\log x$ est, à un coefficient numérique près, égal à la fonction $y_{\nu.1}$ qui, nous le savons, n'est pas nulle identiquement. Donc, les intégrales (43) sont linéairement indépendantes. Prenant successivement $\nu = 1, 2, \ldots, r$, nous obtenons ainsi $\mu - \mu_1 + \mu_1 - \mu_2 + \ldots + \mu_{r-1} = \mu$ intégrales qui se partagent entre r sous-groupes comprenant respectivement $\mu - \mu_1 = \nu_1$, $\mu_1 - \mu_2 = \nu_2, \ldots, \mu_{r-1} = \nu_r$ intégrales:

$$(44) \qquad y_{1.1}, y_{1.2}, \ldots, y_{1.\nu_1}; \ y_{2.1}, y_{2.2}, \ldots, y_{2.\nu_2}; \ \ldots; \ y_{r.1}, y_{r.2}, \ldots, y_{r.\nu_r};$$

on démontre, en suivant la même marche que dans le mémoire cité (n° 24), que toutes ces intégrales sont linéairement indépendantes.

Donc, à la racine $\rho = R$ appartiennent μ intégrales régulières et linéairement indépendantes.

9. Démontrons maintenant que ces μ intégrales sont les *seules* intégrales régulières appartenant à $\rho = R$, c'est-à-dire, qu'une intégrale régulière quelconque appartenant à R s'exprime linéairement par rapport à elles.

Convenons de dire, pour abréger, qu'une intégrale régulière de la forme

$$\Phi_\mu + \Phi_{\mu-1} \log x + \ldots + \Phi_0 (\log x)^\mu \tag{45}$$

est de *genre* μ si μ est l'exposant de la plus haute puissance de $\log x$ qui y figure (ce qui implique que le coefficient Φ_0 n'est pas nul identiquement).

Parmi les intégrales (44), il y a évidemment r qui sont de genre zéro. Désignons par $r + r_1$ le nombre de celles de genre inférieur ou égal à 1, par $r + r_1 + r_2$ le nombre de celles de genre inférieur ou égal à 2 et ainsi de suite. Il est clair que r est égal au nombre de ceux des nombres

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$$

qui sont supérieurs à zéro, que r_1 est le nombre de ceux supérieurs à 1, que r_2 est le nombre de ceux supérieurs à 2, et ainsi de suite. Donc, d'après les conditions (39), r_1 est le plus grand entier vérifiant la condition

$$\mu_{r_1-1} > r - r_1 + 1, \tag{46}$$

r_2 le plus grand qui vérifie la condition

$$\mu_{r_2-1} > r - r_2 + 2 \tag{47}$$

et ainsi de suite.

Cela étant, nous allons démontrer que, parmi les intégrales régulières de l'équation (15) appartenant à l'exposant R, il y a r de genre zéro, $r + r_1$ de genre inférieur ou égal à 1, $r + r_1 + r_2$ de genre inférieur ou égal à 2, etc.; d'où se pourra conclure immédiatement le théorème énoncé plus haut.

Toute intégrale régulière de genre ν est de la forme

$$\Phi_\nu + \Phi_{\nu-1} \log x + \ldots + \Phi_0 (\log x)^\nu, \tag{48}$$

les Φ_k désignant des séries de la forme

$$\Phi_k = \sum_{\lambda=0}^{+\infty} g_{k.\lambda} x^{\rho+\lambda}. \qquad (k=0,1,..,\nu) \tag{49}$$

Si l'on convient de regarder les $g_{k.\lambda}$ comme des constantes (indépendantes de ρ), on pourra écrire

$$\Phi_k (\log x)^{\nu-k} = \frac{\partial^{\nu-k} \Phi_k}{\partial \rho^{\nu-k}}. \tag{50}$$

Donc, désignant la fonction (48) par u et portant cette fonction dans l'expression différentielle $P(y)$, nous pouvons écrire

$$P(u) = P(\Phi_\nu) + P\left(\frac{\partial \Phi_{\nu-1}}{\partial \rho}\right) + \ldots + P\left(\frac{\partial^\nu \Phi_0}{\partial \rho^\nu}\right)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$P(u) = P(\Phi_\nu) + \frac{\partial}{\partial \rho} P(\Phi_{\nu-1}) + \ldots + \frac{\partial^\nu}{\partial \rho^\nu} P(\Phi_0). \tag{51}$$

Nous avons d'ailleurs (cf. la formule (22)):

$$P(\Phi_k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{k.m} x^{\rho+m-n} \tag{52}$$

où

$$G_{k.m} = \varphi(\rho + m) g_{k.m} + \Sigma'_\lambda A_{m\lambda} g_{k.\lambda}. \tag{53}$$

Soit X un domaine quelconque situé à l'intérieur du domaine de convergence des séries (16) et P un domaine fini quelconque dans le plan représentatif de la variable ρ. Il est facile de voir que la série du second membre de (52) converge absolument et uniformément quand x et ρ appartiennent respectivement aux domaines X et P; en effet, considérons la série suivante

$$\Sigma_m |h_m G_{k.m} x^m|; \tag{54}$$

puisqu'on a

$$|h_m G_{k.m}| \leqq \Sigma_\lambda |\chi_{m\lambda}| |g_{k.\lambda}|$$

cette série convergera tant que la série double

$$\Sigma_m \Sigma_\lambda |\chi_{m\lambda} g_{k.\lambda} x^m| \tag{55}$$

convergera. Or la série

$$\Sigma_m \Sigma_\lambda |\chi_{m\lambda} x^{m-\lambda}| \qquad (m \gtrless \lambda)$$

est uniformément convergente quand x et ρ restent à l'intérieur des domaines X et P (voir ma note dans les Acta mathem., t. 15) et, pour toutes les valeurs de x dans X, les quantités

$$|g_{k.\lambda} x^\lambda| \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, +\infty)$$

sont moindres qu'une quantité finie (puisque u est une intégrale de l'équation (15)). Donc la série (55) et, a fortiori, la série (54) convergent uniformément dans le domaine considéré; donc la série

$$\Sigma_m |m(m-1)\ldots(m-n+1)h_m G_{m.k} x^m|,$$

obtenue en différentiant n fois successives la série (54) par rapport à $|x|$, converge aussi uniformément. Pour des valeurs assez grandes (positives ou négatives) de m et pour toutes les valeurs ρ dans P, la quantité

$$|m(m-1)\ldots(m-n+1)h_m|$$

reste, en vertu de la définition même de h_m (formule (19)), plus grande qu'une certaine quantité positive qui n'est pas nulle. Donc, la série (52) converge aussi absolument et uniformément dans le domaine considéré.

Par conséquent, ayant le droit de différentier terme par terme, nous aurons, en désignant par $G'_{k.m}, G''_{k.m}, \ldots$, les dérivées de la fonction $G_{k.m}$ (prises par rapport à ρ en considérant toujours les $g_{k.m}$ comme des constantes)

$$\frac{\partial^a P(\Phi_k)}{\partial\rho^a} = \Sigma\left[G^{(a)}_{k.m} + (a)_1 G^{(a-1)}_{k.m}\log x + \ldots + G_{k.m}(\log x)^a\right] x^{\rho+m-n},$$

$(a)_1, (a)_2, \ldots$ désignant les coefficients binômes:

$$(a)_k = \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{\underline{|k}}, \qquad (a)_0 = 1.$$

On en obtient:

$$P(u) = \Psi_\nu + \Psi_{\nu-1}\log x + \ldots + \Psi_0(\log x)^\nu$$

où

$$(56)\qquad \begin{aligned} \Psi_0 &= \sum G_{0.m} x^{\rho+m-n}, \\ \Psi_1 &= \sum[(\nu)_1 G'_{0.m} + G_{1.m}]x^{\rho+m-n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi_k &= \sum[(\nu)_k G^{(k)}_{0.m} + (\nu-1)_{k-1}G^{(k-1)}_{1.m} + \ldots + G_{k.m}]x^{\rho+m-n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi_\nu &= \sum[G^{(\nu)}_{0.m} + G^{(\nu-1)}_{1.m} + \ldots + G_{\nu.m}]x^{\rho+m-n}. \end{aligned}$$

Les quantités $g_{k.\lambda}$ doivent donc satisfaire à un système infini d'équation linéaires, à savoir à celui qu'on obtient en égalant à zéro tous les coefficients dans chacune des séries (56).

Ce système s'écrit ainsi

$$(57)\qquad \sum_{\alpha=0}^{k}(\nu-\alpha)_{k-\alpha}G^{(k-\alpha)}_{\alpha.m} = 0; \qquad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots,\nu;\, m=-\infty\ldots+\infty)}$$

nous allons le transformer en posant

$$G_{\alpha.m} = \xi_m H_{\alpha.m}, \qquad \xi_m = \frac{1}{h_m(\rho)}$$

d'où

$$G^{(k-\alpha)}_{\alpha.m} = \sum_{\beta=0}^{k-\alpha}(k-\alpha)_\beta H^{(k-\alpha-\beta)}_{\alpha.m}\xi^{(\beta)}$$

ce qui, en vertu de la relation

$$(\nu-\alpha)_{k-\alpha}(k-\alpha)_\beta = (\nu-k+\beta)_\beta(\nu-\alpha)_{k-\beta-\alpha},$$

donne au système (57) la forme

$$\sum_{\beta=0}^{k}(\nu-k+\beta)_\beta\xi^{(\beta)}_m\sum_{\alpha=0}^{k-\beta}(\nu-\alpha)_{k-\beta-\alpha}H^{(k-\beta-\alpha)}_{\alpha.m} = 0 \qquad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots,\nu;\, m=-\infty\ldots+\infty)}$$

ou, ce qui revient au même

$$(58)\qquad \sum_{\alpha=0}^{k}(\nu-\alpha)_{k-\alpha}H^{(k-\alpha)}_{\alpha.m} = 0. \qquad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots,\nu;\, m=-\infty\ldots+\infty)}$$

Pour $\nu = 0$, ce système devient

$$H_{0.m} = 0 \qquad (59) \qquad {\scriptstyle (m=-\infty\,..+\infty)}$$

c'est-à-dire devient identique au système (30), étudié précédemment. Ce système ayant, d'après les hypothèses faites, pour $\rho = R$ r, et seulement r, solutions linéairement indépendantes, nous voyons bien que le nombre des intégrales régulières de genre zéro appartenant à R est égal à r.

Pour $\nu = 1$, le système (58) se réduit au suivant

$$H_{0.m} \qquad = 0, \qquad {\scriptstyle (m=-\infty\,..+\infty)}$$

$$H'_{0.m} + H_{1.m} = 0 \qquad {\scriptstyle (m=-\infty\,..+\infty)}$$

ou

$$(60) \qquad \sum_{\lambda=0}^{m+p} \chi_{m\lambda} g_{0.\lambda} = 0, \qquad {\scriptstyle (m=-p,\,-p+1,\,..,\,-1,\,0,\,1,\,..,\,+\infty)}$$

$$(60') \qquad \sum_{\lambda=0}^{m+p} \chi_{m\lambda} g_{1.\lambda} = -\sum_{\lambda=0}^{m+p} \chi'_{m\lambda} g_{0.\lambda}. \qquad {\scriptstyle (m=-p,\,-p+1,\,..,\,-1,\,0,\,1,\,..,\,+\infty)}$$

Par hypothèse, les déterminants $M'_0, M'_1, \ldots, M'_{r-1}$ sont tous nuls pour $\rho = R$ tandis que le déterminant

$$(61) \qquad \begin{pmatrix} a_1\ , & a_2\ , & \ldots, & a_p\ , & i_1, & i_2, & \ldots, & i_r \\ -p\ , & -p+1\ , & \ldots, & -1\ , & k_1, & k_2, & \ldots, & k_r \end{pmatrix}$$

ne s'évanouit pas. Pour plus de symétrie, désignons les indices $a_1, a_2, .., a_p$ par $i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots, i_{r+p}$ respectivement et les indices $-p, -p+1, .., -1$ par $k_{r+1}, k_{r+2}, \ldots, k_{r+p}$ respectivement, de sorte que le symbole (61) prenne la forme

$$(61') \qquad \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{r+p} \\ k_1 & .. & k_{r+p} \end{pmatrix}.$$

Le système d'équations non-homogènes (60') auxquelles doivent satisfaire les $g_{1.\lambda}$, appartient évidemment à la classe considérée au paragraphe précédent. D'après les résultats y obtenus, pour que ce système ait une solution, il faut et il suffit que chacun des déterminants qu'on obtient en bordant le déterminant (61') par l'une quelconque des lignes $i_1 \ldots i_{r+p}$ et par la colonne formée par les seconds membres:

$$-\sum_{\lambda=0}^{m+p} \chi'_{m\lambda} g_{0.\lambda} \qquad (\alpha=1,2,\ldots,r+p)$$

des équations (60'), soit égal à zéro. Donc, en désignant par $\Delta^{(\alpha.\beta)}$ ce que devient le symbole (61') quand on y remplace l'indice i_α par l'indice β, nous aurons

$$\Sigma_{\beta,\lambda} \Delta^{(\alpha.\beta)} \chi'_{\beta.\lambda} g_{0.\lambda} = 0 \qquad (\alpha=1,2,\ldots,r+p) \tag{62}$$

pour $\rho = R$. Or, les quantités $g_{0.\lambda}$ devant satisfaire au système (60), il faut que l'on ait

$$\Delta^{(\alpha.\beta)} g_{0.\lambda} = \Delta^{(\alpha.\beta)}_{1.\lambda} g_{0.k_1} + \Delta^{(\alpha.\beta)}_{2.\lambda} g_{0.k_2} + \ldots + \Delta^{(\alpha.\beta)}_{r.\lambda} g_{0.k_r},$$

$\Delta^{(\alpha.\beta)}_{\varkappa.\lambda}$ désignant ce que devient le symbole $\Delta^{(\alpha.\beta)}$ quand on y remplace l'indice k_μ par l'indice λ. Les équations (62) prennent donc la forme suivante

$$g_{0.k_1} \Sigma_{\beta,\lambda} \Delta^{(\alpha.\beta)}_{1.\lambda} \chi'_{\beta.\lambda} + \ldots + g_{0.k_r} \Sigma_{\beta,\lambda} \Delta^{(\alpha.\beta)}_{r.\lambda} \chi'_{\beta.\lambda} = 0. \qquad (\alpha=1,2,\ldots,r+p) \tag{63}$$

Pour simplifier ces expressions, remarquons que la somme

$$\Sigma_{\beta,\lambda} \Delta^{(\alpha.\beta)}_{\varkappa.\lambda} \chi'_{\beta.\lambda},$$

multipliée par $(-1)^{\alpha-\varkappa}$, représente la dérivée du déterminant qu'on peut définir en supprimant, dans le symbole (61'), l'indice i_α et l'indice $k_\varkappa$. Désignant par $S_{\alpha\beta}$ ce déterminant (multiplié par $(-1)^{\alpha-\varkappa}$) et par $S'_{\alpha\beta}$ la dérivée de $S_{\alpha\beta}$ par rapport à ρ, on peut, par conséquent, écrire les équations (63) ainsi:

$$\begin{aligned}
S'_{1.1} g_{0.k_1} + \ldots + S'_{1.r} g_{0.k_r} &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S'_{r.1} g_{0.k_1} + \ldots + S'_{r.r} g_{0.k_r} &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S'_{r+p.1} g_{0.k_1} + \ldots + S'_{r+p.r} g_{0.k_r} &= 0.
\end{aligned} \tag{64}$$

Considérons les déterminants qu'on peut former par les éléments de la matrice

$$(65)\qquad \begin{matrix} S'_{1.1} & \cdot\cdot & S'_{1.r}, \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ S'_{r+p.1} & \cdot\cdot & S'_{r+p.r}. \end{matrix}$$

Je dis que, parmi ces déterminants, tous ceux de degré supérieur à $r - r_1$ par rapport aux $S'_{\alpha.\beta}$, s'annulent pour $\rho = R_1$ et que, parmi les déterminants de degré $r - r_1$, il y a un au moins qui ne s'annule pas. En effet, on peut démontrer qu'un déterminant quelconque

$$(66)\qquad \begin{vmatrix} S_{m_1 n_1} & \cdot\cdot & S_{m_1 n_\alpha} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ S_{m_\alpha n_1} & \cdot\cdot & S_{m_\alpha n_\alpha} \end{vmatrix}$$

de degré α, formé par les lignes $m_1, \ldots, m_\alpha$ et par les colonnes $n_1, \ldots, n_\alpha$ de la matrice

$$(67)\qquad \begin{matrix} S_{1.1} & \cdot\cdot & S_{1.r}, \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ S_{r+p.1} & \cdot\cdot & S_{r+p.r} \end{matrix}$$

est (au signe près) égal à

$$\begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_{r+p} \\ k_1 & \cdot\cdot & k_{r+p} \end{pmatrix}^{\alpha-1} \cdot S_{m_1..m_\alpha;\, n_1..n_\alpha},$$

$S_{m_1..m_\alpha;\, n_1..n_\alpha}$ désignant celui des déterminants de l'ensemble $M'_{r-\alpha}$ qu'on peut définir en supprimant, dans le symbole (60'), les α indices $i_{m_1}, i_{m_2}, \ldots, i_{m_\alpha}$ et les α indices $k_{n_1}, k_{n_2}, \ldots, k_{n_\alpha}$. Pour $\rho = R$, toutes les fonctions $S_{\alpha\beta}$ s'annulent, puisque, par hypothèse, tous les M'_{r-1} s'annulent. Par conséquent, si le déterminant

$$(68)\qquad \begin{vmatrix} S'_{m_1 n_1} & \cdot\cdot & S'_{m_1 n_\alpha} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ S'_{m_\alpha \cdot n_1} & \cdot\cdot & S'_{m_\alpha \cdot n_\alpha} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro pour $\rho = R$, le déterminant (66) ne s'annulera que d'ordre α pour $\rho = R$. Or, chacun des déterminants appartenant à $M'_{r-\alpha}$ s'annule d'ordre $\mu_{r-\alpha}$ au moins et, d'après la définition du nombre r_1, on a

$$(69) \qquad \mu_{r-\alpha} > \alpha \quad \text{pour} \quad \alpha = r, r-1, \ldots, r-r_1+1.$$

Donc, tous les déterminants (68) dont le degré α est supérieur à $r - r_1$, s'annulent pour $\rho = R$. Si $r = r_1$, nous voyons donc que le système (64) a $r = r_1$ solutions linéairement indépendantes. Si $r_1 < r$ on a, en vertu de la définition de r_1,

$$(70) \qquad \mu_{r_1} = r - r_1;$$

on en conclut que, parmi ceux des déterminants (68) dont le degré α est égal à $r - r_1$, il y a au moins un qui ne s'annule pas. Car, si tous ces déterminants s'annulaient pour $\rho = R$, tous les déterminants de l'ensemble M'_{r_1} s'annuleraient d'ordre $r - r_1 + 1$ au moins. Mais, parmi les déterminants M'_{r_1}, il y a un au moins qui ne s'annule que d'ordre μ_{r_1} au plus; donc on devait avoir

$$\mu_{r_1} \geqq r - r_1 + 1$$

ce qui est incompatible avec l'égalité (70).

Donc le nombre de solutions linéairement indépendantes du système (64) est égal à r_1 exactement.

Dans le système (60), les inconnues

$$g_{0.k_1}, g_{0.k_2}, \ldots, g_{0.k_r}$$

restent indéterminées puisque tous les déterminants M'_{r-1} s'annulent et que le déterminant $\begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{bmatrix}$ ne s'annule pas. Donc, en vertu du système (64), le nombre de ceux des $g_{0.\lambda}$ qui restent arbitraires est égal à r_1 exactement. Donc, dans l'intégrale la plus générale de genre *un* appartenant à $\rho = R$:

$$\Phi_1 + \Phi_0 \log x$$

le coefficient Φ_0 de $\log x$ contient r_1, et seulement r_1, constantes arbitraires. Donc le nombre des intégrales régulières de genre inférieur ou égal à *un* et appartenant à R est exactement égal à $r + r_1$.

Posant ensuite $\nu = 2$ dans le système (58) et procédant d'une manière analogue, on peut démontrer que $r + r_1 + r_2$ est le nombre des intégrales régulières de genre inférieur ou égal à *deux*, appartenant à R; et ainsi de suite.

10. Pour que, à une quantité donnée quelconque R, appartiennent μ intégrales régulières, il faut donc et il suffit que tous les déterminants M_0 s'annulent d'ordre μ pour $\rho = R$.

Cela étant, démontrons que l'exposant R d'une intégrale régulière quelconque dépend *algébriquement* des paramètres α.

A cet effet, déterminons un q suffisamment grand pour que le déterminant

$$(71) \qquad \begin{pmatrix} -p, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, q \\ -p, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, q \end{pmatrix}$$

soit différent de zéro pour $\rho = R$. On voit facilement que le déterminant

$$(72) \qquad \begin{pmatrix} q-p+1, q-p+2, \ldots, q-1, & q \\ -p \quad , -p-1, \ldots, -2, & -1 \end{pmatrix}$$

est (au signe près) égal au produit suivant

$$(73) \qquad K.\prod_{i=-p}^{-p+q} \chi_{i.i+p},$$

K désignant, pour abréger, le déterminant (71).

Pour qu'il y ait μ intégrales régulières appartenant à R, il *faut* que le déterminant (72) s'annule d'ordre μ au moins; car, dans le cas contraire, tous les déterminants M_0 ne pourraient pas s'annuler d'ordre μ. Par conséquent, R doit être une racine d'ordre μ pour le produit (73). Or on a

$$(74) \qquad \chi_{-p.0} = h_{-p}(\rho) f(\rho), \qquad \chi_{-p+i.i} = h_{-p+i}(\rho) f(\rho + i),$$

$f(\rho)$ désignant la fonction suivante

$$(75) \qquad f(\rho) = \alpha_{\sigma,-p-\sigma}\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+\sigma+1) + \ldots + \alpha_{n,-p-n}$$

et $h_{-p}(\rho)$ étant l'exponentielle définie par la formule (19) (on voit que l'équation $f(\rho) = 0$ est identique à l'équation déterminante de M. Thomé); donc R est racine de l'une au moins des fonctions $f(\rho + i)$.

Soit, dans la suite des fonctions

$$f(\rho), f(\rho + 1), f(\rho + 2), \ldots$$

$f(\rho + \lambda + 1)$ la première qui s'annule pour $\rho = R$ (ce qui revient à supposer que, parmi les racines de $f(\rho)$ congruentes à R, $R + \lambda + 1$ soit celle dont la partie réelle est la plus petite).

Nous avons vu que les μ intégrales appartenant à R peuvent (si elles existent) se représenter par des formules telles que (43), les g étant définies par les formules (40). Or, considérons un déterminant quelconque de la forme

$$\begin{bmatrix} i_1 & \cdot\,\cdot & i_{s-1} & i_s \\ k_1 & \cdot\,\cdot & k_{s-1} & k \end{bmatrix} \tag{76}$$

(s désignant un nombre de la suite $1, 2, \ldots, r$ et k un nombre de la suite $0, 1, \ldots, +\infty$). En vertu de la définition des nombres μ_s, le déterminant

$$\begin{bmatrix} i_1 & \cdot\,\cdot & i_{s-1} \\ k_1 & \cdot\,\cdot & k_{s-1} \end{bmatrix} \tag{77}$$

est, pour $\rho = R$, nul d'ordre μ_{s-1} et doit conserver cette propriété même si l'on y remplace l'une on plusieurs de ses lignes par des lignes quelconques appartenant à la matrice des éléments χ_{ik}. En particulier, remplaçons dans (77) la ligne i_s successivement par les lignes

$$-p, -p + 1, \ldots, -p + \lambda;$$

nous obtiendrons $\lambda + 1$ nouveaux déterminants qui pourront s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=0}^{i+p} \begin{bmatrix} i_1 & \cdot\,\cdot & i_{s-1} & i_s \\ k_1 & \cdot\,\cdot & k_{s-1} & k \end{bmatrix} \chi_{ik}. \qquad {\scriptstyle (i=-p,\,-p+1,\,\ldots,\,-p+\lambda)}$$

Donc, les fonctions $\chi_{i\,i+p}$ $(i = -p, -p + 1, \ldots, -p + \lambda)$ étant par hypothèse différentes de zéro pour $\rho = R$, nous voyons que chacun des déterminants

$$\begin{bmatrix} i_1 & \cdot\,\cdot & i_{s-1} & i_s \\ k_1 & \cdot\,\cdot & k_{s-1} & k \end{bmatrix} \qquad {\scriptstyle (k=0,\,1,\,\ldots,\,\lambda)}$$

doit, pour $\rho = R$, s'annuler d'ordre μ_{s-1} au moins. Mais de là on peut conclure facilement, en vertu des formules (43) et (40), que toute intégrale régulière appartenant à R appartient nécessairement à l'exposant $R + \lambda + 1$.

En d'autres termes, l'exposant d'une intégrale régulière quelconque satisfait nécessairement à l'équation déterminante

$$f(\rho) = 0.$$

(Il y a évidemment une infinité d'exposants auxquels appartient une intégrale régulière quelconque; mais, dans l'énoncé précédent, le mot *exposant* se rapporte, bien entendu, à celui dont la partie réelle est la plus grande possible.)

11. Les déterminants M_0 sont définis dès que l'on connaît les indices du symbole (33') et ces indices sont déterminés en façon que le déterminant (33') ne s'annule pas pour la valeur considérée R de ρ. Désignant les fonctions M_0, rangées dans un ordre quelconque, par

$$F_1(\rho)\,,\, F_2(\rho)\,,\, \ldots\,,\, F_\lambda(\rho),$$

nous savons que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de μ intégrales régulières appartenant à R, s'expriment par les relations suivantes

$$F_k(R) = 0, \qquad F'_k(R) = 0\,, \quad \ldots\,, \quad F_k^{(\mu-1)}(R) = 0. \quad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,\lambda)}$$

Mais il importe d'observer qu'on peut opérer les calculs de telle manière que ces relations expriment les conditions dont il s'agit non seulement pour une valeur donnée de R, mais aussi pour des valeurs quelconques de R situées à l'intérieur d'un domaine fini C, fixé arbitrairement à l'avance.

En effet, la série $\sum_i \sum_k |\chi_{ik}|$ $(i \gtrless k)$ étant uniformement convergente par rapport à ρ à l'intérieur de tout domaine fini, il est clair, d'après les formules (2') et (2'') du paragraphe précédent, qu'on peut déterminer les nombres ν, α, ι et $\varkappa$ de telle manière que le déterminant (33') reste différent de zéro pour des valeurs quelconques de ρ à l'intérieur d'un domaine fini, arbitrairement fixé à l'avance.

Or on trouve facilement un domaine fini C à l'intérieur duquel doit se trouver la quantité R. Car, d'après ce que nous avons vu, R doit satisfaire à l'équation déterminante $f(\rho) = 0$.

Pour notre but, il suffit donc de choisir le domaine C de telle manière que son contour limite embrasse toutes les $n - \sigma$ racines de l'équation $f(\rho) = 0$.

Ceci dit, nous avons le théorème suivant:

Si l'équation (15) *a des intégrales régulières, les exposants auxquels appartiennent ces intégrales sont racines de l'équation déterminante* $f(\rho) = 0$.

Pour que, à une racine quelconque R de l'équation déterminante, appartiennent un nombre donné μ d'intégrales régulières, il faut et il suffit que chacune des fonctions M_0:

$$F_1(\rho)\,,\ F_2(\rho)\,,\ \ldots\,,\ F_\lambda(\rho)$$

(déterminées comme il a été expliqué plus haut) s'annule, pour $\rho = R$, de l'ordre μ.

12. Comme on sait, la première partie de ce théorème avait été trouvée auparavant par M. Thomé, par une méthode entièrement différente. M. Thomé a démontré aussi que le nombre des intégrales régulières de l'équation (15) ne peut être plus grand que le degré de l'équation déterminante. Il est facile de voir que ce résultat découle comme corollaire des considérations précédentes.

En effet, soit R_1 une racine quelconque de l'équation déterminante et s le nombre de celles des racines (comptées avec leurs ordres de multiplicité) de cette équation qui sont congruentes à R_1 mais dont les parties réelles sont égales ou supérieurs à celle de R_1.

Choisissons q assez grand pour que le déterminant (71) soit, pour $\rho = R_1$, différent de zéro. Le déterminant (72) (divisé par un certain facteur qui ne s'annule pas pour $\rho = R_1$) est, comme nous avons vu, égal au produit

$$f(\rho)f(\rho + 1)\ldots f(\rho + q);$$

pour $\rho = R_1$ ce produit ne peut devenir nul d'un ordre supérieur à s; donc, parmi les déterminants M_0, il y a un au moins qui ne devient pas nul d'un ordre supérieur à s. Donc, en vertu du théorème énoncé, le nombre des intégrales régulières appartenant à R_1 est au plus égal à s.

En particulier, dans un groupe quelconque de racines congruentes, désignons par R celle dont la partie réelle est la plus petite, et par s le nombre des racines appartenant au groupe. Une intégrale régulière appartenant à une racine quelconque congruente à R peut évidemment être considérée comme appartenant à R; donc, le nombre des intégrales régulières appartenant à R étant, au plus, égal à s, il est bien clair que le nombre total des intégrales régulières de l'équation (15) est, au plus, égal au degré $n - \sigma$ de l'équation déterminante, ce qu'il fallait démontrer.

Pour que toutes les n intégrales de l'équation (15) soient régulières, il faut donc que l'on ait

$$\sigma = 0,$$

ce qui démontre le théorème de M. Fuchs. Dans le mémoire cité (n° 26) nous avons vu comment la réciproque de ce théorème, due également à M. Fuchs, peut se démontrer à l'aide de la théorie des déterminants infinis.

13. Par le théorème que nous venons d'obtenir, le problème de reconnaître combien d'intégrales régulières possède une équation linéaire donnée, se ramène au problème de déterminer de quel ordre deviennent nulles les fonctions M_0 pour chacune des racines de l'équation déterminante $f(\rho) = 0$.

Les fonctions M_0 de ρ sont des fonctions de ρ et des paramètres $\alpha_{r\lambda}$ que l'on peut toujours trouver, après une suite d'opérations arithmétiques, dès qu'on se donne les valeurs numériques (réelles ou complexes) de ces paramètres. Désignons ces fonctions par

$$F_1(\rho, \alpha), F_2(\rho, \alpha), \ldots, F_\lambda(\rho, \alpha) \tag{78}$$

et convenons de les appeler *les fonctions déterminantes.* En vertu de la méthode employée, il est clair que, après avoir donné des valeurs fixes aux paramètres $\alpha_{r\lambda}$, on peut trouver une infinité de fonctions qui peuvent jouer le rôle de fonctions déterminantes.

En opérant d'une manière convenable, on peut déterminer les fonctions (78) de telle manière que ces fonctions jouent le rôle de fonctions déterminantes, non seulement pour un système de valeurs fixes des paramètres α, mais pour tout système de valeurs de ces paramètres situées à l'intérieur d'un domaine α^0 que nous allons définir.

En effet, soit $\alpha_{r\lambda}^0$ un système quelconque de valeurs positives des paramètres $\alpha_{r\lambda}$ tel que les séries

$$(79) \qquad \sum_{\lambda=-r-p_r}^{+\infty} \alpha_{r\lambda}^0 x^\lambda \qquad (r=2, 3, \ldots, n)$$

aient un domaine de convergence commun X.[1] Pour tout systeme de valeurs des $\alpha_{r\lambda}$ vérifiant les conditions

$$(80) \qquad |\alpha_{r\lambda}| \leqq \alpha_{r\lambda}^0 \qquad (\lambda=-r-p_r, \ldots, +\infty\,; r=2, 3, \ldots, n)$$

les séries

$$\sum_{\lambda=-r-p_r}^{+\infty} \alpha_{r\lambda} x^\lambda$$

qui représentent les coefficients $P(x)$ de l'équation proposée, convergeront aussi dans le domaine X. Par définition, les nombres

$$-2-p_2\,,\ -3-p_3\,, \ldots,\ -n-p_n$$

sont les exposants des puissances de x par lesquelles commencent les développements (16), p désigne le plus grand des nombres

$$p_0(=0)\,, p_2\,, p_3\,, \ldots, p_n$$

et p_σ le premier de ces nombres qui atteint la valeur p. Donnons des valeurs fixes à ces nombres et désignons l'équation différentielle (15), correspondant à un système quelconque $\alpha_{r\lambda}$ de valeurs des paramètres, par

$$P(y\,;\alpha) = 0.$$

Dans l'équation déterminante de cette équation, le premier membre $f(\rho)$ est un polynôme de degré $n-\sigma$ où le coefficient de $\rho^{n-\sigma}$ est égal à $\alpha_{\sigma,-p-\sigma}$ et les autres coefficients égaux à certains autres des paramètres

---

[1] Sans restreindre la généralité du problème, nous pouvons toujours supposer que le point $x = 1$ se trouve à l'intérieur de X (cf. la note à la page 347).

$\alpha_{r\lambda}$. Par conséquent, si l'on assujettit le paramètre $\alpha_{\sigma,-p-\sigma}$ à rester, en valeur absolue, supérieur à une quantité positive (non nulle) quelconque:

$$(80') \qquad |\alpha_{\sigma,-p-\sigma}| \geqq \theta$$

et les autres paramètres $\alpha_{r\lambda}$ à remplir les conditions (80), on pourra assigner une limite supérieure R^0 aux valeurs absolues des racines de l'équation déterminante. Pour abréger, désignons par T le domaine défini par les conditions (80) et (80').

Considérant ρ et les $\alpha_{r\lambda}$ comme des variables indépendantes, on voit sans difficulté que la série

$$(81) \qquad \sum_m \sum_\lambda |\chi_{m\lambda}| \qquad (m \gtrless \lambda)$$

converge uniformément quand ρ se trouve dans le domaine

$$(82) \qquad |\rho| \leqq R^0$$

et les $\alpha_{r\lambda}$ dans le domaine T.

Donc, en vertu de la formule (2') du paragraphe précédent, on peut, par une suite d'opérations arithmétiques, déterminer un déterminant (33') qui reste différent de zéro tant que ρ et les $\alpha_{r\lambda}$ remplissent les conditions précédentes. Ce déterminant reste, par conséquent, différent de zéro pour chacune des racines de l'équation déterminante, pourvu que les α se trouvent dans le domaine T. Par conséquent les déterminants M_0, définis, comme il a été expliqué, par les indices du symbole (33'), jouent le rôle de fonctions déterminantes pour l'équation différentielle $P(y\,;\alpha) = 0$, α désignant un système quelconque de valeurs dans le domaine T. Le théorème est donc démontré.

Si l'on veut considérer les paramètres $\alpha_{r\lambda}$ comme absolument libres à se mouvoir dans toute l'étendue du plan, on peut encore trouver des fonctions qui jouent le rôle de fonctions déterminantes pour l'équation $P(y\,;\alpha) = 0$, pour tout système de valeurs des $\alpha_{r\lambda}$ qui donnent aux séries (16) un domaine de convergence commun. En effet, désignons par $\overline{M}_0$ l'ensemble des déterminants qu'on peut définir en supprimant successivement dans la matrice (31), p quelconques des lignes. On voit sans peine que, R désignant une racine quelconque de l'équation déterminante, pour que l'équation $P(y\,;\alpha) = 0$ ait μ intégrales appartenant à R, il faut et il suffit que toutes les fonctions $\overline{M}_0$ s'annulent, pour $\rho = R$, d'ordre μ au moins. Mais, le nombre des déterminants $\overline{M}_0$ étant infiniment grand (excepté dans le cas régulier de M. FUCHS), on voit que le nombre des fonctions déterminantes augmente, dans ce cas, au delà de toute limite.

14. Supposons donc que les fonctions (78) jouent le rôle de fonctions déterminantes pour l'équation différentielle $P(y\,;\,\alpha) = 0$ tant que les paramètres α ont des valeurs à l'intérieur de T. Ces fonctions sont entières et transcendantes par rapport à ρ et ont pour coefficients des fonctions, généralement transcendantes, des α. Il ne semble donc pas que l'on peut, dans le cas le plus général, décider, par un nombre fini d'opérations arithmétiques, si l'équation différentielle $P(y\,;\,\alpha) = 0$ a des intégrales régulières ou non.

Mais nous allons montrer que l'on peut former une suite de relations *algébriques* entre les α, qui expriment des conditions suffisantes pour l'existence d'un nombre donné d'intégrales et qui s'approchent autant que l'on voudra des relations nécessaires et suffisantes précédemment obtenues.

En effet, les fonctions (78) ne sont autre chose que ceux des déterminants

(83) $$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}$$

dont les indices $\gamma_1 \,..\, \gamma_p$ appartiennent à la suite des nombres

(84) $$\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\ldots,\,\alpha_\mu\,,\,\iota_1\,,\,\iota_2\,,\,\ldots,\,\iota_\nu.$$

Soit m' le plus grand des nombres (84) et désignons par m un entier quelconque plus grand que m'. Formons le déterminant suivant

(85) $$\begin{vmatrix} \chi_{-p.0} & \cdot\cdot & \chi_{-p.m+p} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \chi_{m.0} & \cdot\cdot & \chi_{m.m+p} \end{vmatrix}$$

(où les éléments au dessus de la diagonale sont tous nuls, d'après les hypothèses faites).

Soient $\delta_0\,,\,\delta_1\,,\,\ldots,\,\delta_m$ ceux des nombres

(86) $$-p\,,\,-p+1\,,\,..\,,\,-1\,,\,0\,,\,1\,,\,..\,,\,m$$

qui n'appartiennent pas à la suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$. D'après le théorème de LAPLACE, étendu aux déterminants infinis de la forme normale, le déterminant (83) s'écrira comme une fonction linéaire par rapport aux déterminants

$$(87) \qquad \begin{vmatrix} \chi_{\delta_0\varepsilon_0} & \cdot\cdot & \chi_{\delta_0\varepsilon_m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \chi_{\delta_m\varepsilon_0} & \cdot\cdot & \chi_{\delta_m\varepsilon_m} \end{vmatrix}$$

où $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_m$ désigne successivement toute combinaison de m nombres différents de la suite

$$(88) \qquad 0, 1, \ldots, m+p.$$

Par conséquent, si ces déterminants sont tous, pour une valeur donnée R de ρ, nuls d'un ordre μ, il en sera de même du déterminant (83).

Donc, pour que chacune des fonctions (83) s'annule d'ordre μ au moins pour $\rho = R$, il suffit que $\rho = R$ soit une racine d'ordre de multiplicité μ pour chacun de ceux des mineurs de (85) que l'on obtient en supprimant dans (85) p quelconques des lignes (84) et p quelconques des colonnes (88).

Le nombre des déterminants (87) ($\delta_0 \ldots \delta_m$ désignant successivement toute combinaison de $m+1$ nombres différents de la suite (86) et $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_m$ toute combinaison de $m+1$ nombres différents de la suite (88)) étant

$$\left(\frac{(m+p+1)(m+p)\ldots(p+1)}{\underline{|m+1}}\right)^2,$$

il semble, au premier abord, que le nombre des relations qui expriment les conditions suffisantes cherchées, dépend de m et augmente avec m au delà de toute limite.

Mais il est facile de voir que, les paramètres α restant à l'intérieur du domaine T et m étant suffisamment grand, le nombre des relations *indépendantes* que l'on obtient, reste fini et indépendant de m. En effet, soient η et η' deux quantités positives assujetties à la seule condition

$$\eta + \eta' < 1;$$

d'après ce que nous savons, on peut déterminer un m_1 tel que l'inégalité

$$(89)\qquad \left|\begin{pmatrix} -p & .. & -1 & 0 & .. & m_1 \\ -p & .. & -1 & 0 & .. & m_1 \end{pmatrix} - 1\right| < \eta$$

ait lieu pour toutes les valeurs de ρ à l'intérieur du domaine défini par (82) et pour toutes les valeurs des α à l'intérieur du domaine T. Or, désignant par m un entier quelconque supérieur à m_1 et convenant de représenter par

$$(90)\qquad \begin{pmatrix} -p & .. & -1 & 0 & .. & m_1 \\ -p & .. & -1 & 0 & .. & m_1 \end{pmatrix}_m$$

le déterminant fini qu'on obtient en supprimant, dans le déterminant infini:

$$(91)\qquad \begin{pmatrix} -p & .. & -1 & 0 & .. & m_1 \\ -p & .. & -1 & 0 & .. & m_1 \end{pmatrix}$$

toutes les lignes et toutes les colonnes numérotées

$$m+1\,,\, m+2\,,\, ..\,,\, +\infty,$$

nous savons que le déterminant (90), pour des valeurs croissantes de m, tend uniformément vers la limite (91) quand ρ et les α restent à l'intérieur du domaine considéré. Par conséquent, on peut prendre m_1 assez grand pour que l'on ait dans ce domaine

$$\left|\begin{pmatrix} -p & .. & m_1 \\ -p & .. & m_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -p & .. & m_1 \\ -p & .. & m_1 \end{pmatrix}_m\right| < \eta' \text{ dès que } m \geqq m_1$$

d'où, en vertu de (89),

$$\left|\begin{pmatrix} -p & .. & -1 & 0 & .. & m_1 \\ -p & .. & -1 & 0 & .. & m_1 \end{pmatrix}_m - 1\right| < \eta + \eta' \text{ dès que } m \geqq m_1.$$

Le déterminant (90) reste donc (pourvu que $m \geqq m_1$) différent de zéro pour toute valeur que peut prendre chacune des racines de l'équation déterminante $f(\rho) = 0$ quand les paramètres α se meuvent d'une manière quelconque à l'intérieur de leur domaine T.

Or, désignant d'une manière générale par

$$(92)\qquad \begin{vmatrix} \iota_1 & \cdot\cdot & \iota_\nu \\ \varkappa_1 & \cdot\cdot & \varkappa_\nu \end{vmatrix}_m$$

celui des mineurs d'ordre ν du déterminant (85) qu'on obtient en remplaçant dans (85) chacun des éléments $x_{\iota_1\varkappa_1}, \ldots, x_{\iota_\nu\varkappa_\nu}$ par l'unité et tout autre élément des lignes $\iota_1 \ldots \iota_\nu$ (ou des colonnes $\varkappa_1 \ldots \varkappa_\nu$) par zéro, on voit que le déterminant (90) est (au signe près) identique au mineur

$$(93)\qquad \begin{vmatrix} -p & \cdot\cdot & -1 & 0 & \cdot\cdot & m_1 \\ m+1 & \cdot\cdot & m+p & 0 & \cdot\cdot & m_1 \end{vmatrix}_m.$$

Ce déterminant reste donc différent de zéro pour les valeurs de ρ qui nous intéresse; pour que les déterminants (87), qui ne sont autres que les mineurs d'ordre p du déterminant (85), s'annulent tous, pour une valeur donnée R dans le domaine (82), d'un ordre déterminé μ, il faut donc et il suffit que R soit une racine d'ordre μ pour chacun de ceux des mineurs d'ordre p du déterminant (85), que l'on peut définir en supprimant, dans le symbole (93), $m_1 + 1$ quelconques des indices supérieurs:

$$-p, \ldots, -1, 0, \ldots, m_1$$

et $m_1 + 1$ quelconques des indices inférieurs:

$$m+1, \ldots, m+p, 0, \ldots, m_1.$$

Le nombre de ces déterminants qui, avec les notations adoptées, se représentent par les symboles:

$$(94)\qquad \begin{vmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ \beta_1 & \cdot\cdot & \beta_p \end{vmatrix}_m \qquad \begin{pmatrix} \gamma_1 \ldots \gamma_p = -p, \ldots, -1, 0, \ldots, m_1 \\ \beta_1 \ldots \beta_p = m+1, \ldots, m+p, 0, \ldots, m_1 \end{pmatrix}$$

étant égal à

$$\left(\frac{(m_1+p+1)(m_1+p)\ldots(p+1)}{\underline{|m_1+1}}\right)^2,$$

ne dépend donc pas de m (pourvu que $m \geqq m_1$).

Si $m < m_1$, nous conviendrons d'attribuer au symbole (94) la valeur zéro toutes les fois que l'un ou plusieurs des indices $\gamma_1 \ldots \gamma_p$ seront supérieurs à m ou que l'un ou plusieurs des indices $\beta_1 \ldots \beta_p$ seront supérieurs à $m+p$.

Alors nous voyons que, m désignant un entier positif (ou nul) *quelconque,* pour que les fonctions déterminantes (83) s'annulent toutes d'ordre μ pour $\rho = R$, il suffit que les déterminants (94) s'annulent tous d'ordre μ pour $\rho = R$.

Ces conditions sont algébriques par rapport aux paramètres $\alpha_{r\lambda}$; en effet, désignons par $f(\rho) = f_0(\rho)$ la fonction $A_{-p.0}$, par $f_p(\rho)$ la fonction $\varphi(\rho)$ et par $f_{p+m}(\rho)$ la fonction $A_{m.0}$ nous aurons, en vertu des formules (20),

$$\chi_{ik} = f_{p+i-k}(\rho + k) h_i(\rho), \tag{95}$$

i désignant un indice quelconque de la suite $-p \ldots +\infty$ et k un indice quelconque de la suite $0 \ldots +\infty$. Au lieu du déterminant (85) nous considérerons donc le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} f_0(\rho) & & \\ f_1(\rho) & f_0(\rho+1) & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{p+m}(\rho) & f_{p+m-1}(\rho+1) \;\ldots & f_0(\rho+p+m) \end{vmatrix} \tag{96}$$

qui n'en diffère que par le facteur exponentiel

$$h_{-p}(\rho) h_{-p+1}(\rho) \ldots h_m(\rho),$$

et nous désignerons, d'une manière générale, par les symboles

$$\left\| \begin{matrix} \iota_1 & \ldots & \iota_\nu \\ \varkappa_1 & \ldots & \varkappa_\nu \end{matrix} \right\|_m \tag{97}$$

les mineurs d'ordre ν de ce déterminant. Ces mineurs ne différant des mineurs correspondants (92) que par certains facteurs exponentiels, le résultat obtenu peut s'énoncer de cette manière:

Soit (15) une équation linéaire donnée; considérons un domaine T (tel qu'il a été défini plus haut) à l'intérieur duquel sont assujettis à rester les paramètres α de cette équation, et déterminons le nombre entier m_1 correspondant; soit enfin m un nombre entier (positif ou nul) quelconque.

Pour que l'équation (15) *admette* μ *intégrales régulières appartenant à une racine quelconque* R *de l'équation déterminante* $f(\rho) = 0$, *il suffit que toutes les fonctions*

$$(98) \qquad \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ \beta_1 & \cdot\cdot & \beta_p \end{matrix} \right\|_m \qquad \begin{pmatrix} \gamma_1 \,..\, \gamma_p = -p, .., -1, 0, .., m_1 \\ \beta_1 \,..\, \beta_p = m+1, .., m+p, 0, .., m_1 \end{pmatrix}$$

s'annulent, pour $\rho = R$, *d'un ordre au moins égal à* μ.

Comme on voit immédiatement, la fonction

$$(99) \qquad \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ \beta_1 & \cdot\cdot & \beta_p \end{matrix} \right\|_m$$

est une fonction entière rationnelle de degré $(m + 1)n$ au plus par rapport à ρ dont les coefficients sont des fonctions entières rationnelles, à coefficients entiers, et de degré $m + 1$ au plus, par rapport aux paramètres suivants:

$$(100) \qquad \alpha_{2,i-2}\,,\ \alpha_{3,i-3}\,,\ \cdot\cdot\cdot\,,\ \alpha_{n,i-n}. \qquad (i = -p, .., -1, 0, .., m)$$

Donc, si l'on se donne un entier positif m, une racine quelconque R de l'équation déterminante et les valeurs numériques des $(n-1)(m+p+1)$ paramètres (100), on peut, par les méthodes ordinaires de l'algèbre, déterminer de quel ordre s'annule chacune des fonctions (98); et l'on peut par conséquent, après une suite d'opérations arithmétiques, décider si les conditions dont il s'agit, sont ou ne sont pas vérifiées.

Démontrons maintenant que, quand m croît indéfiniment, les fonctions (98), multipliées par des facteurs exponentiels convenables, tendent indéfiniment vers les fonctions déterminantes de l'équation (15); autrement dit, démontrons que les conditions suffisantes (correspondant à l'indice m), qui expriment l'existence d'un nombre donné d'intégrales régulières, s'approchent (pour des valeurs croissantes de m) autant que l'on veut des conditions nécessaires et suffisantes précédemment trouvées.

En effet, le déterminant (91) étant différent de zéro pour les valeurs de ρ et des paramètres qui nous intéressent, nous pouvons donner aux indices qui définissent le déterminant (33'), les valeurs suivantes:

$$\nu = m_1 + 1\,; \quad \alpha_1 = -p\,,\ ..\,,\ \alpha_p = -1\,,\ \iota_1 = 0\,,\ \iota_2 = 1\,,\ ..\,,\ \iota_\nu = m_1\,,$$

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1\,,\ ..\,,\ x_\nu = m_1.$$

Les fonctions déterminantes sont donc les déterminants suivants:

$$(101)\qquad \begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix} \qquad {\scriptstyle (\gamma_1 \ldots \gamma_p = -p, \ldots, -1, 0, \ldots, m_1)}$$

et les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de μ intégrales régulières appartenant à R s'expriment en écrivant que les fonctions (101), ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $\mu - 1$, s'annulent pour $\rho = R$.

Désignant par

$$(102)\qquad \begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}_m$$

le déterminant fini auquel se réduit le déterminant infini $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}$ quand on y supprime toutes les lignes et toutes les colonnes numérotées

$$m+1\,,\, m+2\,,\, \ldots + \infty,$$

on obtient facilement la relation suivante:

$$(103)\qquad \begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}_m = (-1)^{(m+1)p} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ m+1 & \cdot\cdot & m+p \end{vmatrix}_m .$$

Le premier membre de cette égalité tendant uniformément, quand m croît indéfiniment, vers la valeur $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}$, il en sera de même du second membre. Il est donc démontré que les déterminants

$$(104)\qquad \left\|\begin{matrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ m+1 & \cdot\cdot & m+p \end{matrix}\right\|_m ,$$

multipliés par des exponentielles convenables, tendent respectivement vers les fonctions déterminantes (101). Il reste à démontrer que chacun des autres déterminants (98), multiplié par un certain facteur exponentiel, tend vers zéro. En effet, chaque déterminant de la forme

$$\left\|\begin{matrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ \beta_1 & \cdot\cdot & \beta_p \end{matrix}\right\|_m$$

où $\beta_1 \ldots \beta_p$ n'est pas une permutation des nombres $m+1, \ldots, m+p$ contient, suivant les cas, une ou plusieurs des colonnes $m+1, \ldots, m+p$. Donc, si l'on désigne par u_i la somme suivante

$$(105) \qquad u_i = |\chi_{ii} - 1| + \Sigma_k |\chi_{ik}|$$

et par v_m la somme des valeurs absolues des $\frac{p(p+1)}{2}$ éléments

$$\begin{array}{llll} \chi_{m-p+1.m+1}\,, & & & \\ \chi_{m-p+2.m+1}\,, & \chi_{m-p+2.m+2}\,, & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \chi_{m.m+1} & , \chi_{m.m+2} & , \cdots , & \chi_{m.m+p} \end{array}$$

on aura

$$\left| \begin{Bmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \\ \beta_1 & \cdots & \beta_p \end{Bmatrix}_m \right| \leqq v_m \prod_{i=-p}^{m} (1 + u_i).$$

Le produit $\Pi(1 + u_i)$ étant uniformément convergent dans le domaine considéré et la quantité v_m tendant uniformément vers zéro quand m croît indéfiniment, notre assertion se trouve, par conséquent, justifiée.

15. Avant d'aller plus loin, nous allons appliquer ce qui précède à un exemple. Considérons l'équation suivante

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + \left(\frac{a_0}{x^3} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{b_0}{x^4} + \frac{b_1}{x^3} + \frac{b_2}{x^2}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{c_0}{x^5} + \frac{c_1}{x^4} + \frac{c_2}{x^3}\right)y = 0$$

les a, b, c désignant des coefficients constants.

Ici nous avons $p = 1$, $\sigma = 2$ et

$$f_0(\rho) = \rho(\rho - 1)a_0 + \rho b_0 + c_0,$$
$$f_1(\rho) = \rho(\rho - 1)(\rho - 2)(\rho - 3) + \rho(\rho - 1)a_1 + \rho b_1 + c_1,$$
$$f_2(\rho) = \rho(\rho - 1)a_2 + \rho b_2 + c_2;$$

pour un indice $m > 2$, la fonction $f_m(\rho)$ est nulle identiquement. Supposons que les relations suivantes aient lieu entre les paramètres

$$(\mathrm{II}) \qquad b_0 = -2a_0, \qquad b_1 = -c_1, \qquad c_0 = 2a_0.$$

Il s'ensuit que les fonctions $f_0(\rho)$, $f_0(\rho + 1)$ et $f_1(\rho)$ ont une racine commune: $\rho = 1$. Pour $\rho = 1$, tous les mineurs d'ordre $p = 1$ du déterminant (96) s'annulent puisque, dans chacun d'eux, il y a une ligne au moins dont tous les éléments s'annulent. Par conséquent, l'équation proposée admet, au moins, une intégrale régulière appartenant à l'exposant $\rho = 1$. Soit

$$g_0 x + g_1 x^2 + g_2 x^3 + \dots$$

cette intégrale. Pour trouver les valeurs des coefficients g, il faudra considérer le système d'équations (30). La fonction $f_0(\rho)$ ayant les deux racines $\rho = 1$ et $\rho = 2$, reste différente de zéro pour toute autre valeur de ρ. Les équations

$$\begin{aligned} f_2(1)g_0 + f_1(2)g_1 + f_0(3)g_2 &= 0, \\ f_2(2)g_1 + f_1(3)g_2 + f_0(4)g_3 &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

permettent donc d'exprimer $g_2, g_3, \dots$ en fonction linéaire et homogène par rapport à g_0 et g_1.

Tous ceux des mineurs d'ordre 1 de la matrice

$$\begin{matrix} \chi_{-1.0}, & & \\ \chi_{0.0}, & \chi_{0.1}, & \\ \chi_{1.0}, & \chi_{1.1}, & \chi_{1.2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \end{matrix}$$

qu'on obtient en supprimant l'une quelconque des colonnes et deux quelconques des lignes $1, 2, 3, \dots$, s'annulent pour $\rho = 1$; il en est de même de ceux qu'on obtient en supprimant, dans la matrice précédente, l'une quelconque des colonnes, l'une quelconque des deux lignes $-1, 0$ et l'une quelconque des lignes $1, 2, 3, \dots$; de plus, il existe un i tel que le mineur du second ordre $\begin{pmatrix} -1 & 0 & i \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne s'annule pas pour $\rho = 1$. Par conséquent, pour que *tous* les mineurs d'ordre 1 s'annulent pour $\rho = 1$, il faut et il suffit que les deux mineurs

$$\text{(III)} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

s'annulent pour $\rho = 1$.

Cette condition sera vérifiée si l'on suppose, par exemple, que les fonctions $f_1(\rho+1)$, $f_1(\rho+2)$, $f_2(\rho+1)$, $f_2(\rho+2)$ s'annulent aussi pour $\rho=1$; ceci exige que l'on ait, outre les relations (II), les conditions suivantes:

$$a_1 = b_1 = 0, \qquad b_2 = -4a_2, \qquad c_2 = 6a_2.$$

Si cette condition est vérifiée, nous savons, d'après les résultats précédents, que le système linéaire auquel doivent satisfaire les g, admettra *deux* solutions linéairement indépendantes. Ce sont les deux inconnues g_0 et g_1 qui resteront arbitraires. L'équation proposée admettra donc, dans ce cas, *deux* intégrales régulières et linéairement indépendantes.

Si nous supposons, au contraire, que l'un au moins des déterminants (III) soit différent de zéro pour $\rho=1$, il y aura une relation linéaire entre g_0 et g_1 à savoir:

$$g_1\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}_{\rho=1} = g_0\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}_{\rho=1}$$

et l'équation proposée n'admettra qu'une seule intégrale régulière.

Supposons, en particulier, que $\rho=1$ soit le seul nombre entier et positif qui vérifie l'équation

$$f_1(\rho) = 0.$$

Le terme initial

$$\text{(IV)} \qquad \chi_{11}\,\chi_{22}\,\chi_{33}\,\cdot\,\cdot$$

du développement du déterminant $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ sera alors différent de zéro pour $\rho=1$; les autres termes peuvent, comme nous savons, être ordonnés selon les puissances croissantes des paramètres et s'annulent tous quand on a

$$a_2 = 0, \qquad b_2 = 0, \qquad c_2 = 0.$$

Par conséquent, si a_2, b_2, c_2 ont des valeurs absolues inférieures à un certain nombre positif (qu'on peut calculer facilement en remarquant que la différence entre le déterminant $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et le terme (IV) est, en valeur absolue, inférieure ou égale à la différence entre le produit

$$\Pi_i(\Sigma_k |\chi_{ik}|)$$

et la valeur absolue du même terme), le déterminant $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ reste, pour $\rho = 1$, différent de zéro. En d'autres termes, si a_2, b_2, c_2 sont suffisamment petits en valeur absolue, l'équation considérée n'admettra qu'une *seule* intégrale régulière.

La suite de critères algébriques que nous avons formée au n° 14 n'est pas la seule dont on pourrait se servir. Considérons, par exemple, le cas où les coefficients de l'équation considérée (15) sont des fonctions rationnelles de x ayant pour seules singularités les points $x = 0$ et $x = \infty$. Dans ce cas, les développements (16) ne contiennent qu'un nombre fini de termes; il existe donc, d'après la définition des fonctions $f_m(\rho)$ (cf. formule (95)) un entier positif q tel que la fonction $f_m(\rho)$ est nulle identiquement dès que l'indice $m > q$. Dans chaque colonne d'un déterminant quelconque de la forme (83), tous les éléments, sauf $q + 1$ d'entre eux, sont, par suite, nuls identiquement. Fixons arbitrairement un entier positif m et considérons la matrice partielle formée par m quelconques des colonnes de la matrice des éléments χ_{ik}. Puisque toutes ces colonnes appartiennent à chacun des déterminants (83), nous voyons que, si tous les déterminants de degré m qu'on peut former par m lignes de la matrice partielle considérée, s'annulent d'un ordre μ pour une valeur donnée R de ρ, il en sera de même de tous les déterminants (83) et l'équation (15) admettra, par suite, μ intégrales régulières appartenant à $\rho = R$. Or, d'après ce qui a été dit plus haut, le nombre des déterminants qu'on peut former au moyen de la matrice dont il s'agit sont, si on laisse de côté tous ceux qui sont nuls identiquement, en nombre nécessairement limité. Par là nous avons donc une méthode de former (et cela d'une infinité de manières) une suite indéfinie de critères algébriques pour décider si l'équation considérée admet des intégrales régulières. Prenant, par exemple, $m = 1$ on voit que, si les $q + 1$ fonctions

$$f_0(\rho)\,,\ f_1(\rho)\,,\ \ldots\,,\ f_q(\rho)$$

s'annulent toutes d'ordre μ pour $\rho = R$, l'équation proposée admettra μ intégrales régulières. Supposons, en second lieu, $m = 2$ et considérons la matrice

$$\begin{array}{llll} f_0(\rho)\,, f_1(\rho) & , \ldots , f_q(\rho), & & \\ & f_0(\rho+1)\,, \ldots , f_{q-1}(\rho+1)\,, f_q(\rho+1). & & \end{array}$$

D'après ce que nous avons vu, si chacun des déterminants

$$\begin{vmatrix} f_\alpha(\rho) & f_\beta(\rho) \\ f_{\alpha-1}(\rho+1) & f_{\beta-1}(\rho+1) \end{vmatrix} \qquad {\scriptstyle (\alpha,\beta=0,1,\ldots,q)}$$

(où l'on convient de remplacer la fonction $f_{\alpha-1}(\rho+1)$ par zéro quand $\alpha = 0$) s'annule d'ordre μ pour $\rho = R$, l'équation considérée admettra encore μ intégrales régulières.

Plus généralement, si tous les déterminants de degré m de la matrice formée par les m lignes suivantes

$$\begin{array}{l} f_0(\rho)\,, f_1(\rho) \qquad , \ldots , f_q(\rho) \\ \qquad f_0(\rho+1)\,, \ldots , f_{q-1}(\rho+1)\,, f_q(\rho+1), \\ \qquad\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad f_0(\rho+m-1)\,, \ldots , f_q(\rho+m-1) \end{array}$$

s'annulent d'ordre μ pour $\rho = R$, l'équation donnée admettra μ intégrales régulières appartenant à $\rho = R$. Nous pouvons ajouter que ces intégrales sont, en général, régulières non seulement dans le voisinage de $x = 0$ mais aussi dans le voisinage de $x = \infty$. Car on voit sans difficulté que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de μ intégrales de la forme

$$x^R(F_0 + F_1 \log x + F_2 (\log x)^2 + \ldots)$$

où les F désignent des polynômes entiers de degré m au plus par rapport à x, s'expriment en disant que tous les déterminants dont il s'agit s'annulent d'ordre μ pour $\rho = R$.

Pour en avoir une application très simple, considérons l'équation du troisième ordre:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{a_0}{x^3} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{b_0}{x^4} + \frac{b_1}{x^3} + \frac{b_2}{x^2}\right)y = 0$$

avec la condition $a_0 \neq 0$.

Ici nous avons

$$f_0(\rho) = \rho a_0 + b_0, \qquad f_1(\rho) = \rho(\rho - 1)(\rho - 2) + \rho a_1 + b_1,$$
$$f_2(\rho) = \rho a_2 + b_2.$$

Donc, pour que les trois fonctions $f_0(\rho)$, $f_1(\rho)$, $f_2(\rho)$ possèdent une racine commune, il suffit que l'on ait

$$b_0 = -\eta a_0, \qquad b_2 = -\eta a_2,$$

η désignant l'une quelconque des racines de l'équation

$$f_1(\rho) = 0.$$

Par conséquent, l'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{a_0}{x^3} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x}\right)\frac{dy}{dx} + \left(-\frac{\eta a_0}{x^4} + \frac{b_1}{x^3} - \frac{\eta a_2}{x^2}\right)y$$

a certainement une intégrale régulière [1] quelles que soient les valeurs des paramètres a_0, a_1, a_2 et b_1 (il convient d'ajouter que cette intégrale régulière est la seule qui existe puisque l'équation déterminante $f_0(\rho) = 0$ est du premier degré).

Appliquons maintenant à la même équation le second des critères dont nous venons de parler plus haut. Tous les déterminants du second degré de la matrice

$$\begin{matrix} f_0(\rho), & f_1(\rho), & f_2(\rho), \\ f_0(\rho+1), & f_1(\rho+1), & f_2(\rho+1) \end{matrix}$$

devant s'annuler pour $\rho = -\frac{b_0}{a_0}$, il est nécessaire de distinguer deux cas:

---

[1] A savoir la fonction x^η.

Ou bien la fonction $f_2(\rho + 1)$ ne s'annule pas pour cette valeur de ρ; alors on voit que $f_1(\rho)$ et $f_2(\rho)$ doivent être nuls, ce qui nous ramène au cas déjà traité. Ou bien la fonction s'annule pour $\rho = -\frac{b_0}{a_0}$; la seule équation qui reste à vérifier est alors

$$\begin{vmatrix} f_0(\rho + 1), & f_1(\rho + 1) \\ f_1(\rho) & , f_2(\rho) \end{vmatrix} = 0.$$

Or, quand $f_0(\rho) = 0$ et $f_2(\rho + 1) = 0$ on a $f_0(\rho + 1) = a_0$ et $f_2(\rho) = -a_2$ de sorte que l'équation précédente peut s'écrire

$$f_1(\rho) f_1(\rho + 1) + a_0 a_2 = 0.$$

Désignant par ϑ l'une quelconque des racines de cette équation, nous voyons donc que l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{a_0}{x^3} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x}\right)\frac{dy}{dx} + \left(-\frac{\vartheta a_0}{x^4} + \frac{b_1}{x^3} - \frac{(1 + \vartheta)a_2}{x^2}\right)y$$

a toujours une intégrale régulière, quelles que soient les valeurs des paramètres a_0, a_1, a_2 et b_1 (cette intégrale a d'ailleurs la forme simple $x^\vartheta - \frac{f_1(\vartheta)}{f_0(\vartheta + 1)} x^{\vartheta+1}$ ainsi qu'on le vérifie directement).

16. Nous venons de trouver (n° 14) une suite indéfinie de critères pour *l'existence* d'intégrales régulières. Proposons-nous maintenant de trouver une suite correspondante de critères pour la *non-existence* de ces intégrales.

Il est clair qu'on peut former une suite indéfinie de nombres positifs

$$\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m, \ldots$$

ayant pour limite zéro et satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\left| \begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \\ -p & \cdots & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \\ -p & \cdots & -1 \end{pmatrix}_m \right| \leqq \eta_m; \quad {\scriptstyle (\gamma_1, \ldots, \gamma_p = -p, \ldots, -1, 0, \ldots, m_1)} \tag{106}$$

c'est ce qu'on voit immédiatement en partant de la formule

$$(107)\qquad \left|\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}_m\right| \leqq \prod_{i=-p}^{+\infty}(1+u_i) - \prod_{i=-p}^{m}(1+u_i)$$

où les u_i sont définis par la formule (105). Pour trouver une expression de η_m en fonction de l'indice m, désignons par K une quantité positive plus grande que le produit

$$(108)\qquad \prod_{i=-p}^{+\infty}(1+u_i)$$

tant que ρ et les α restent dans leurs domaines respectifs R^0 et T; le second membre de (107) sera moindre que

$$(109)\qquad K\Big(\prod_{i=m+1}^{+\infty}(1+u_i) - 1\Big)$$

et, dès que m sera assez grand pour que la somme $\sum_{i=m+1}^{+\infty} u_i = S_m$ soit inférieure à l'unité, la quantité (109) sera évidemment inférieure à

$$K\frac{S_m}{1-S_m}.$$

L'élément χ_{ii} (i étant un indice quelconque non nul) peut, en vertu de la formule

$$\chi_{ii} = \Big(1+\frac{\rho-\rho_1}{i}\Big)e^{-\frac{\rho-\rho_1}{i}}\Big(1+\frac{\rho-\rho_2}{i}\Big)e^{-\frac{\rho-\rho_2}{i}}\cdot\cdot\Big(1+\frac{\rho-\rho_n}{i}\Big)e^{-\frac{\rho-\rho_n}{i}}$$

s'écrire sous la forme

$$\chi_{ii} = 1 - \frac{A_i}{i^2},$$

A_i désignant une quantité qui, pour toutes les valeurs de l'indice i et pour toutes les valeurs de ρ et des α à l'intérieur des domaines R^0 et T, reste inférieure en valeur absolue à une quantité positive A. Un élément χ_{ik} dont les indices i et k sont différents, peut s'écrire sous la forme

$$\chi_{ik} = h_i(\rho)([i-k]_2 i^{n-2} + [i-k]_3 i^{n-3} + \cdot\cdot + [i-k]_n),$$

$[i-k]_2$, $[i-k]_3$, .., $[i-k]_n$ désignant certaines fonctions linéaires et homogènes par rapport aux $n-1$ paramètres suivants

$$(110) \qquad \alpha_{2.i-k-2}\,,\ \alpha_{3.i-k-3}\,,\ \ldots,\ \alpha_{n.i-k-n}$$

dont les coefficients sont des fonctions entières rationnelles, à coefficients entiers, de la quantité $\rho + k - i$. On voit immédiatement que chacune des séries

$$\Sigma_\nu |[\nu]_2|\,,\ \Sigma_\nu |[\nu]_3|\,,\ \ldots,\ \Sigma_\nu |[\nu]_n|$$

est convergente et reste inférieure à une quantité finie tant que ρ reste dans le domaine R^0 et les α dans le domaine T. Par conséquent, on peut calculer des quantités positives U_2, U_3, .., U_n telles que la série

$$\sum_{i=m+1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{i+p} |\chi_{ik}| = S_m$$

reste inférieure à

$$U_2 \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} + U_3 \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{1}{i^3} + \ldots + U_n \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{1}{i^n}.$$

Cette dernière quantité est inférieure à

$$\frac{1}{m} U_2 + \frac{1}{2}\frac{1}{m^2} U_3 + \ldots + \frac{1}{n-1}\frac{1}{m^{n-1}} U_n$$

puisque l'on a

$$\sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{1}{i^q} < \int_m^{+\infty} \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{q-1}\frac{1}{m^{q-1}}; \qquad (q=2, 3, \ldots, n)$$

nous pouvons donc écrire

$$S_m < \frac{1}{m} U_2 + \frac{1}{2}\frac{1}{m^2} U_3 + \ldots + \frac{1}{n-1}\frac{1}{m^{n-1}} U_n.$$

Fixons arbitrairement une quantité $\varepsilon < 1$ et déterminons un m' tel que S_m reste inférieur à ε dès que $m \geqq m'$; posons enfin

$$\frac{K}{1-\varepsilon}(U_2) = V_1; \qquad \frac{K}{2(1-\varepsilon)} U_3 = V_2; \quad \ldots; \quad \frac{K}{(n-1)(\varepsilon-1)} U_n = V_{n-1},$$

$$\theta(m) = \frac{V_1}{m} + \frac{V_2}{m^2} + \ldots + \frac{V_{n-1}}{m^{n-1}}.$$

Il est clair que nous pouvons poser, dans la formule (106)

$$(111) \qquad \eta_m = \theta(m) \quad \text{dès que } m \geqq m';$$

pour une valeur $m < m'$, nous conviendrons d'attribuer au symbole $\theta(m)$ une valeur quelconque η_m vérifiant la condition (106).

Pour que l'équation (15) possède une intégrale régulière appartenant à $\rho = R$, il faut et il suffit que tous les déterminants (101) s'annulent pour $\rho = R$. Donc, en vertu de (106) et (103) il faut avoir

$$(112) \qquad \left| \begin{Bmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ m+1 & \cdot\cdot & m+p \end{Bmatrix}_m \right| \leqq \theta(m) \quad \text{pour } \rho = R,$$

quelque grand que soit m. Si on a au contraire, pour une combinaison particulière $\gamma_1 \,..\, \gamma_p$ de p nombres de la suite

$$(113) \qquad -p, \,..,\, -1, 0, \,..,\, m_1,$$

l'inégalité suivante:

$$(114) \qquad \left| \begin{Bmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ m+1 & \cdot\cdot & m+p \end{Bmatrix}_m \right| > \theta(m)$$

l'équation (15) ne peut avoir aucune intégrale régulière appartenant à $\rho = R$. Nous obtenons donc la règle suivante:

Soit (15) une équation linéaire donnée; considérons un domaine T, défini par (80) et (80'), à l'intérieur duquel sont assujettis à rester les paramètres α de cette équation et déterminons le nombre entier m_1 correspondant; soit enfin m un nombre entier (positif ou nul) quelconque.

Pour que l'équation (15) *n'admette aucune intégrale régulière appartenant à une racine donnée R de l'équation déterminante, il suffit que l'inégalité* (112) *soit vérifiée pour $\rho = R$ et pour une combinaison $\gamma_1 \,..\, \gamma_p$ au moins de p nombres de la suite* (113).

Si l'on choisit m assez grand, ces conditions suffisantes pour la non-existence d'intégrales régulières s'approchent autant que l'on veut des conditions nécessaires et suffisantes.

Supposons, en effet, que l'inégalité ou l'égalité (112), ait lieu quelque grand que soit m, pour une valeur donnée $\rho = R$ et pour toute combinaison $\gamma_1 \ldots \gamma_p$ de p nombres de la suite (113); quand m croîtra indéfiniment, le premier membre de (112) tendra vers $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_p \\ -p & \ldots & -1 \end{pmatrix}$ et le second vers zéro. En d'autres termes, tous les déterminants (101) s'annulent pour $\rho = R$; par conséquent, l'équation (15) possède au moins une intégrale régulière appartenant à $\rho = R$.

Donc, pour qu'une telle intégrale n'existe pas, il faut et il suffit que l'on puisse trouver une combinaison $\gamma_1 \ldots \gamma_p$ et une valeur m assez grand pour que l'inégalité (114) ait lieu pour $\rho = R$ et pour cette valeur m; ce qui prouve bien notre assertion.

17. Pour décider si une équation de la forme (15) dont les paramètres ont des valeurs numériques données, possède ou non une intégrale régulière appartenant à R on peut, par conséquent, procéder de la manière suivante. On détermine le nombre m_1 et l'on calcule les valeurs, pour $\rho = R$, de toutes les fonctions (94) correspondant à l'indice m. En donnant à cet indice successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots$, on peut arriver à une valeur m telle que les fonctions (94) correspondantes sont toutes nulles pour $\rho = R$; dans ce cas, l'équation (15) a certainement une intégrale régulière appartenant à R. Ou bien, l'indice m peut être tel que l'inégalité (114) ait lieu pour une combinaison au moins de p nombre de la suite (113); dans ce cas, l'équation (15) ne possède aucune intégrale régulière appartenant à R.

Mais il pourrait arriver qu'aucun de ces deux cas ne se présente tant que l'indice m reste inférieur à tel nombre positif que l'on voudra fixer arbitrairement à l'avance; et le nombre des opérations arithmétiques nécessaires pour résoudre la question proposée pourrait alors croître au delà de toute limite. Toutefois, dans le cas le plus général, ce nombre ne croîtra pas au delà d'une certaine limite; car, si l'équation ne possède aucune intégrale régulière appartenant à R (et c'est là le cas le plus général), on arrivera, d'après ce qui précède, après une suite limitée d'opérations arithmétiques, à un indice m pour lequel l'inégalité (114) aura lieu.

Pourtant il y a des cas où la méthode précédente ne donnera pas de réponse à la question proposée; et il semble nécessaire alors, pour arriver à bonne fin, de faire une étude approfondie des fonctions déterminantes elles-mêmes. Une telle étude ne sera pas faite dans le présent mémoire. Nous nous bornerons, dans le paragraphe suivant, d'établir quelques propriétés générales de ces fonctions.

§ 3.

18. Nous avons vu que le problème général concernant les intégrales régulières se ramène à l'étude de certains déterminants infinis, définis par des symboles de la forme

$$\begin{pmatrix} \iota_1 & \cdot\,\cdot & \iota_p & \iota_{p+1} & \cdot\,\cdot & \iota_{p+\nu} \\ -p & \cdot\,\cdot & -1 & x_{p+1} & \cdot\,\cdot & x_{p+\nu} \end{pmatrix}, \tag{115}$$

les indices ι appartenant à la suite $-p, \ldots, -1, 0, \ldots, +\infty$ et les x à la suite $0, 1, \ldots, +\infty$. Nous savons que ces déterminants sont des fonctions entières de ρ dont les coefficients s'expriment en fonction des paramètres

$$\alpha_{2,\lambda-2}, \alpha_{3,\lambda-3}, \ldots, \alpha_{n,\lambda-n}. \qquad {\scriptstyle (\lambda=-p,\ldots,-1,0,1,\ldots,+\infty)} \tag{116}$$

Pour faire un premier pas dans l'étude de ces fonctions, nous allons les développer en séries procédant selon les puissances de ces paramètres.

Considérons d'abord le déterminant suivant

$$\begin{pmatrix} -p & \cdot\,\cdot & -1 \\ -p & \cdot\,\cdot & -1 \end{pmatrix} \tag{117}$$

qui, comme on voit immédiatement, peut s'érire sous la forme

$$\begin{vmatrix} \chi_{00} & \chi_{01} & \cdot\,\cdot & \chi_{0p} & & & \\ \chi_{10} & \chi_{11} & \cdot\,\cdot & \chi_{1p} & \chi_{1p+1} & & \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}. \tag{118}$$

Chacun des éléments diagonaux χ_{ii} étant linéaire par rapport aux $n - 1$ paramètres

$$(119) \qquad \alpha_{2,-2}, \alpha_{3,-3}, \ldots, \alpha_{n,-n},$$

nous pouvons écrire

$$(120) \qquad \chi_{ii} = \chi_{ii}^{(1)} + \chi_{ii}^{(2)},$$

$\chi_{ii}^{(1)}$ étant indépendant des paramètres (116) et $\chi_{ii}^{(2)}$ étant linéaire et homogène par rapport à eux. On voit, d'après la formule (20), que ces fonctions s'écrivent ainsi

$$\chi_{ii}^{(1)} = (\rho + i)_n h_i(\rho),$$

$$\chi_{ii}^{(2)} = [(\rho + i)_{n-2}\alpha_{2,-2} + (\rho + i)_{n-3}\alpha_{3,-3} + \ldots + \alpha_{n,-n}]h_i(\rho),$$

le symbole $(\rho + i)_k$ désignant, d'une manière générale, le produit suivant

$$(\rho + i)(\rho + i - 1) \ldots (\rho + i - k + 1).$$

Le produit

$$(121) \qquad \pi(\rho) = \prod_{i=0}^{+\infty} \chi_{ii}^{(1)}$$

converge absolument; c'est ce qu'on voit en écrivant chaque facteur $\chi_{ii}^{(1)}$ (excepté $\chi_{00}^{(1)}$) sous la forme

$$(122) \qquad \chi_{ii}^{(1)} = \left(1 + \frac{\rho}{i}\right)e^{-\frac{\rho}{i}}\left(1 + \frac{\rho - 1}{i}\right)e^{-\frac{\rho-1}{i}} \ldots \left(1 + \frac{\rho - n + 1}{i}\right)e^{-\frac{\rho-n+1}{i}}.$$

Nous pouvons donc, dans le déterminant (118), diviser les éléments de chaque ligne i par le facteur correspondant $\chi_{ii}^{(1)}$ et, en introduisant les notations

$$(123) \qquad \frac{\chi_{ii}^{(2)}}{\chi_{ii}^{(1)}} = \xi_{ii}, \qquad \frac{\chi_{ik}}{\chi_{ii}^{(1)}} = \xi_{ik}, \qquad (i \gtrless k)$$

écrire le déterminant (117), divisé par $\pi(\rho)$, sous la forme suivante

$$(124) \qquad \begin{vmatrix} 1 + \xi_{00}, & \xi_{01}, & \ldots \\ \xi_{10}, & 1 + \xi_{11}, & \ldots \\ . & . & \ldots \end{vmatrix}.$$

La série $\sum_{i,k}|\xi_{ik}|$ étant convergente pour toute valeur de ρ, nous pouvons, en vertu d'une formule envisagée au mémoire cité (n° 7), développer le déterminant (124) sous la forme

$$(125)\qquad 1+\Sigma\xi_{\mu\mu}+\sum\begin{vmatrix}\xi_{\mu\mu} & \xi_{\mu\nu}\\ \xi_{\nu\mu} & \xi_{\nu\nu}\end{vmatrix}+\sum\begin{vmatrix}\xi_{\mu\mu} & \xi_{\mu\nu} & \xi_{\mu\lambda}\\ \xi_{\nu\mu} & \xi_{\nu\nu} & \xi_{\nu\lambda}\\ \xi_{\lambda\mu} & \xi_{\lambda\nu} & \xi_{\lambda\lambda}\end{vmatrix}+\ldots$$

les indices de sommation $\mu, \nu, \lambda, \ldots$ parcourant la suite des nombres

$$(126)\qquad 0, 1, \ldots, +\infty$$

et étant assujettis à la condition

$$(127)\qquad \mu<\nu<\lambda<\ldots$$

Or, nous pouvons écrire

$$\xi_{ik}=\frac{A_{ik}}{(\rho+i)_n}$$

où

$$(128)\qquad A_{ik}=(\rho+k)_{n-2}\alpha_{2,i-k-2}+(\rho+k)_{n-3}\alpha_{3,i-k-3}+\ldots+\alpha_{n,i-k-n}.$$

Donc, en introduisant les notations

$$S_{\mu_1\ldots\mu_r}=\begin{vmatrix}A_{\mu_1\mu_1} & \ldots & A_{\mu_1\mu_r}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ A_{\mu_r\mu_1} & \ldots & A_{\mu_r\mu_r}\end{vmatrix};\qquad S^{(r)}=\sum_{\mu_1\ldots\mu_r}\frac{S_{\mu_1\mu_r}}{(\rho+\mu_1)_n\ldots(\rho+\mu_r)_n}\qquad (\mu_1<\ldots<\mu_r)$$

nous obtenons la formule suivante

$$(129)\qquad \begin{pmatrix}-p & \ldots & -1\\ -p & \ldots & -1\end{pmatrix}=\pi(\rho)+\pi(\rho)S^{(1)}+\pi(\rho)S^{(2)}+\ldots+\pi(\rho)S^{(r)}+\ldots$$

La série du second membre converge absolument pour toute valeur de ρ et converge uniformément dans un domaine fini quelconque; et il en est de même de chacune des séries $S^{(r)}$ (voir mém. cité, § 1, n° 15). Chacune des fonctions A_{ik} étant linéaire et homogène par rapport aux paramètres (116), nous voyons que la fonction $\begin{pmatrix}-p & \ldots & -1\\ -p & \ldots & -1\end{pmatrix}$, développée selon les puissances croissantes de ρ, aura pour coefficients des séries absolument convergentes procédant selon les puissances et les produits de ces paramètres; si on considère ce déterminant comme fonction des paramètres (116), la formule (129) donnera le développement de cette fonction selon les puissances croissantes de ces paramètres, $\pi(\rho)$ étant le terme de degré *zéro*, $\pi(\rho)S^{(1)}$ l'ensemble des termes de degré *un*, et, d'une manière générale, $\pi(\rho)S^{(r)}$ l'ensemble des termes de degré r.

D'après la formule (128), on pourra développer le déterminant $S_{\mu_1..\mu_r}$ de la manière suivante:

$$S_{\mu_1..\mu_r} = \sum (\rho+\mu_1)_{n-k_1}(\rho+\mu_2)_{n-k_2}\,..\,(\rho+\mu_r)_{n-k_r} S^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r} \tag{130}$$

la sommation s'étendant à toute permutation $k_1\,..\,k_r$ de r nombres de la suite $2, 3, .., n$ et $S^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r}$ désignant le déterminant des r^2 éléments suivants

$$\alpha_{k_\lambda, \mu_\nu-\mu_\lambda-k_\lambda}. \qquad (\nu, \lambda = 1, 2, .., r) \tag{131}$$

Désignant l'élément $\alpha_{k_\lambda, \mu_\nu-\mu_\lambda-k_\lambda}$ par $(\nu\,.\,\lambda)$ de sorte que le déterminant $S^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r}$ prenne la forme

$$\begin{vmatrix} (1\,.\,1) & .. & (1\,.\,r) \\ . & .. & . \\ (r\,.\,1) & .. & (r\,.\,r) \end{vmatrix}, \tag{132}$$

nous savons que chaque terme de ce déterminant peut s'obtenir en partageant, d'une manière convenable, les facteurs du terme initial

$$(1\,.\,1)(2\,.\,2)\,..\,(r\,.\,r)$$

en groupes et en permutant ensuite circulairement les indices appartenant à chaque groupe. Si donc nous désignons, d'une manière générale, par $[i_1\,..\,i_\nu]$ le produit suivant

$$(i_1\,.\,i_2)(i_2\,.\,i_3)\,..\,(i_{\nu-1}\,.\,i_\nu)(i_\nu\,.\,i_1),$$

un terme quelconque du déterminant $S^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r}$ pourra s'écrire sous la forme

$$(-1)^{r-q}\,.\,[i_1\,..\,i_{\nu_1}][i_{\nu_1+1}\,..\,i_{\nu_2}]\,..\,[i_{\nu_{q-1}+1}\,..\,i_{\nu_q}], \tag{133}$$

l'ensemble des indices i représentant une permutation convenable des nombres $1, 2, .., r$ et les nombres $\nu_1, \nu_2, .., \nu_q (= r)$ étant convenablement choisis dans la suite $1, 2, .., r$.

Dans la série $S^{(r)}$, les indices de sommation $\mu_1 .. \mu_r$ prennent toutes les valeurs de la suite $0, 1, .. +\infty$ qui satisfont à la condition

$$\mu_1 < \mu_2 < .. < \mu_r;$$

or, le déterminant $S_{\mu_1..\mu_r}$ restant inaltéré si l'on permute ces indices d'une manière quelconque, nous pouvons écrire

$$S^{(r)} = \frac{1}{\underline{|r}} \sum \frac{S_{\mu_1..\mu_r}}{(\rho + \mu_1)_n .. (\rho + \mu_r)_n}, \tag{134}$$

les indices $\mu_1 .. \mu_r$ devant parcourir la suite $0, 1, .. +\infty$ et étant assujettis à la seule condition de rester tous inégaux.

Donc, remarquant qu'on a

$$\frac{(\rho + \mu)_{n-k}}{(\rho + \mu)_n} = \frac{1}{(\rho + \mu - n + k)_k}$$

et posant, pour abréger

$$\frac{1}{(\rho + \mu_1 - n + k_1)_{k_1} (\rho + \mu_2 - n + k_2)_{k_2} .. (\rho + \mu_r - n + k_r)_{k_r}} = T^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r}, \tag{135}$$

nous pouvons égaler la série $S^{(r)}$ (multipliée par $\underline{|r}$) à la somme d'un nombre fini de séries de la forme

$$\sum_{\mu_1..\mu_r} (-1)^{r-q} [1 .. \nu_1][\nu_1 + 1 .. \nu_2] .. [\nu_{q-1} + 1 .. \nu_q] T^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r} \tag{136}$$

(car, dans l'expression $[1 .. \nu_1][\nu_1 + 1 .. \nu_2] .. [\nu_{q-1} + 1 .. \nu_q]$ on peut évidemment remplacer les indices $1, 2, .., \nu_q$ par $i_1, i_2, .., i_{\nu_q}$ puisque ceci ne change pas la valeur de la somme (136)).

Soient $\lambda_1 .. \lambda_{\nu_1}$ une permutation quelconque des nombres $\mu_1 .. \mu_{\nu_1}$; $\lambda_{\nu_1+1} .. \lambda_{\nu_2}$ une permutation quelconque des nombres $\mu_{\nu_1+1} .. \mu_{\nu_2}; ..; \lambda_{\nu_{q-1}+1} .. \lambda_{\nu_q}$ une permutation quelconque des nombres $\mu_{\nu_{q-1}+1} .. \mu_{\nu_q}$; il est facile de voir qu'on peut considérer la série (136) comme la somme de

$$\underline{|\nu_1} \, \underline{|\nu_2 - \nu_1} .. \underline{|\nu_q - \nu_{q-1}}$$

séries de la même forme (136) mais dans chacune desquelles on assujettit les indices $\mu_1 \ldots \mu_r$ à des conditions de la forme

$$(136') \qquad \lambda_1 < \ldots < \lambda_{\nu_1} \,;\; \lambda_{\nu_1+1} < \ldots < \lambda_{\nu_2} \,;\; \ldots \,;\; \lambda_{\nu_{q-1}+1} < \ldots < \lambda_{\nu_q};$$

ces conditions seront vérifiées, et cela de la manière la plus générale, si nous posons

$$(137) \qquad \begin{gathered} \lambda_1 = \beta_1, \qquad \lambda_{\nu_1+1} = \beta_2 \,, \quad \ldots, \quad \lambda_{\nu_{q-1}+1} = \beta_q, \\ \lambda_{\nu_i+\tau} = \beta_{i+1} + c_{i.1} + c_{i.2} + \ldots + c_{i.\tau-1} \\ {\scriptstyle (\tau=2,3,\ldots,\nu_{i+1}-\nu_i\,;\; i=0,1,\ldots,q-1)} \end{gathered}$$

où $\nu_0 = 0$, les c désignant des entiers positifs (non nuls) quelconques et les β étant des entiers positifs (ou nuls) assujettis aux conditions suivantes

$$(138) \qquad \begin{gathered} \beta_{i+1} \gtrless \beta_{j+1}, \\ \beta_{i+1} + c_{i.1} + \ldots + c_{i.\tau-1} \gtrless \beta_{j+1} + c_{j.1} + \ldots + c_{j.\sigma-1}, \\ (i \gtrless j\,;\; \tau = 2, 3, \ldots, \nu_{i+1} - \nu_i\,;\; \sigma = 2, 3, \ldots, \nu_{j+1} - \nu_j). \end{gathered}$$

Par conséquent, une série quelconque de la forme (136) où les indices $\mu_1 \ldots \mu_r$ sont assujettis aux conditions (136′) peut être remplacée par une série de cette nouvelle forme

$$(139) \qquad \sum_{(c)} \sum_{\beta_1 \ldots \beta_q} (-1)^{r-q} [1 \ldots \nu_1][\nu_1 + 1 \ldots \nu_2] \ldots [\nu_{q-1} + 1 \ldots \nu_q] \, T^{k_1 \ldots k_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r}$$

où le premier signe de sommation indique que les nombres c doivent parcourir, indépendamment les uns des autres, la suite $1, 2, \ldots, +\infty$, la sommation par rapport à $\beta_1 \ldots \beta_q$ étant limitée par les conditions (138).

Or chacune des expressions

$$(139') \qquad [\nu_i + 1 \ldots \nu_{i+1}]$$

est indépendante des indices $\beta_1 \ldots \beta_q$ puisqu'elle ne depend que des différences réciproques des nombres

$$(140) \qquad \lambda_{\nu_i+1}, \lambda_{\nu_i+2}, \ldots, \lambda_{\nu_{i+1}}$$

et que ces différences, en vertu de (137), s'expriment en fonction des nombres c seuls. La série (139) peut donc s'écrire sous la forme

$$(141) \qquad \sum_{(c)} K^{(c)} \sum_{\beta_1 \ldots \beta_q} T^{k_1 \ldots k_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r},$$

$K^{(c)}$ désignant l'expression suivante

$$(142) \qquad K^{(c)} = (-1)^{r-q}[1 \,..\, \nu_1][\nu_1 + 1 \,..\, \nu_2]\,..\,[\nu_{q-1} + 1 \,..\, \nu_q].$$

L'expression (139′) dépend et dépend seulement, de certains des paramètres

$$\alpha_{k,s-t-k}$$

où k est un nombre de la suite

$$(143) \qquad k_{\nu_i+1}\,,\, k_{\nu_i+2}\,,\, \ldots,\, k_{\nu_{i+1}}$$

et où s et t sont des nombres de la suite

$$(144) \qquad \lambda_{\nu_i+1}\,,\, \lambda_{\nu_i+2}\,,\, \ldots,\, \lambda_{\nu_{i+1}}.$$

La différence entre deux quelconques des nombres (144) s'exprimant sous la forme

$$(145) \qquad \lambda_{\nu_i+\tau} - \lambda_{\nu_i+\sigma} = c_{i,\sigma} + \ldots + c_{i,\tau-1}$$

(où l'on suppose $\tau > \sigma$), nous voyons donc que, si

$$(146) \qquad \alpha_{k_1,g_1-k_1}\,,\, \alpha_{k_2,g_2-k_2}\,,\, \ldots,\, \alpha_{k_r,g_r-k_r}$$

désignent les paramètres qui figurent dans l'expression $K^{(c)}$, chacun des indices $g_1, g_2, \ldots, g_r$ (pris, selon les cas, avec le signe $+$ ou $-$) sera nécessairement égal à la somme de certains des nombres c.

Je dis que,

$$(147) \qquad g_1^0\,,\, g_2^0\,,\, \ldots,\, g_r^0$$

étant des entiers donnés quelconques, le système d'équations

$$(148) \qquad g_1 = g_1^0, \qquad g_2 = g_2^0\,, \quad \ldots, \quad g_r = g_r^0$$

où les c sont considérés comme inconnus, n'aura qu'un nombre fini de solutions en entiers positifs.

En effet, puisque $\lambda_{\nu_i+1}, \lambda_{\nu_i+2}, \ldots, \lambda_{\nu_{i+1}}$ est une permutation de $\mu_{\nu_i+1}, \mu_{\nu_i+2}, \ldots, \mu_{\nu_{i+1}}$, nous pouvons poser

$$(149) \qquad \mu_{\nu_i+s} = \lambda_{\nu_i+\tau_s}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu_{i+1} - \nu_i)$$

$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\nu_{i+1}-\nu_i}$ désignant une permutation convenable des nombres $1, 2, \ldots, \nu_{i+1} - \nu_i$. Par conséquent, on peut définir les g par les formules suivantes

$$g_{\nu_i+s} = \lambda_{\nu_i+\tau_s} - \lambda_{\nu_i+\tau_{s+1}} \qquad (s=1, 2, \ldots, \nu_{i+1}-\nu_i;\ i=0, 1, \ldots, q-1) \tag{150}$$

où l'on convient de poser $\tau_{s+1} = \tau_1$ pour $s = \nu_{i+1} - \nu_i$. De cette formule, on peut conclure que chacune des $r - q$ quantités c figure nécessairement dans l'une au moins des équations (148); car, τ_α désignant l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, \nu_{i+1} - \nu_i$ (excepté l'unité) et $\tau_{\beta+1}$ celui qui est égal à *un*, on aura, en vertu de (150)

$$\sum_{s=\alpha}^{\beta} g_{\nu_i+s} = \lambda_{\nu_i+\tau_\alpha} - \lambda_{\nu_i+1}$$

pourvu que $\alpha \leqq \beta$ et

$$\sum_{s=\beta+1}^{\alpha-1} g_{\nu_i+s} = \lambda_{\nu_i+1} - \lambda_{\nu_i+\tau_\alpha}$$

pourvu que $\alpha \geqq \beta + 2$ (α ne peut être $= \beta + 1$ car on aurait alors $\tau_\alpha = 1$, contrairement à l'hypothèse). Donc, dans tous les cas, on voit d'après la formule (145) que l'inconnue $c_{i,\tau_\alpha - 1}$ figure dans la somme de certains des g et, par conséquent, dans l'une au moins de ces expressions.

Or, en vertu de la forme des g, chaque équation $g_k = g_k^0$ n'aura, pour les inconnues qui y figurent, qu'un nombre limité de solutions en entiers positifs. Par conséquent, on voit bien qu'il y a seulement un nombre fini de combinaisons des indices positifs c qui peuvent satisfaire aux équations (148).

Pour trouver l'ensemble de ceux des termes de la série (141) qui dépendent, et dépendent uniquement, des paramètres suivants

$$\alpha_{k_1, g_1^0 - k_1}, \alpha_{k_2, g_2^0 - k_2}, \ldots, \alpha_{k_r, g_r^0 - k_r}, \tag{151}$$

il faut limiter la sommation par rapport aux indices c à celles des combinaisons qui vérifient au moins un des $\underline{|r}$ systèmes d'équations suivants

$$g_1 = g_{\beta_1}^0, \quad g_2 = g_{\beta_2}^0, \quad \ldots, \quad g_r = g_{\beta_r}^0,$$

où $\beta_1 \,.\,.\, \beta_r$ désignent successivement toute permutation des r nombres $1, 2, \ldots, r$.

Ces combinaisons étant en nombre nécessairement limité, nous voyons donc que le coefficient par lequel est multiplié, dans la série (141), le produit des r paramètres (151), s'exprime linéairement et à coefficients rationnels par rapport à certaines séries de la forme

$$\sum_{\beta_1..\beta_q} T^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r}. \tag{152}$$

Donc, si nous développons l'expression $\pi(\rho) S^{(r)}$ selon les divers produits qu'on peut former par r des paramètres α, c'est-à-dire si nous écrivons

$$\pi(\rho) S^{(r)} = \sum_{k_1..k_r} \sum_{g_1..g_r} U^{k_1..k_r}_{g_1..g_r} \alpha_{k_1, g_1 - k_1} \,.\,.\, \alpha_{k_r, g_r - k_r}, \tag{153}$$

la sommation par rapport aux $k_1 \,.\,.\, k_r$ s'étendant à toute permutation de r nombres de la suite $2, 3, \ldots, n$ et celle par rapport aux $g_1 \,.\,.\, g_r$ à toute permutation de r nombres de la suite

$$-p, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty, \tag{154}$$

chaque coefficient $U^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r}$ s'exprimera linéairement et à coefficient rationnels par rapport à un nombre fini de séries de la forme

$$\pi(\rho) \cdot \sum_{\beta_1..\beta_q} T^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r}, \tag{155}$$

19. Nous nous trouvons donc amené à étudier d'abord les séries de la forme (152).

En permutant les indices $1, 2, .., r$ des nombres $\mu_1, \mu_2, .., \mu_r$ d'une manière convenable, on obtient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; désignant par $l_1, l_2, \ldots, l_r$ la permutation correspondante des nombres $k_1, k_2, \ldots, k_r$, on pourra, en vertu de la formule (135), écrire $T^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r}$ sous la forme

$$T^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r} = \frac{1}{(\rho + \lambda_1 - n + l_1)_{l_1} (\rho + \lambda_2 - n + l_2)_{l_2} \,.\,.\, (\rho + \lambda_r - n + l_r)_{l_r}} \tag{156}$$

ou, en posant

$$\prod_{i=1}^{\nu_1}(\rho + \lambda_i - n + l_i)_{l_i} = \psi_1(\rho + \beta_1),$$

(157)
$$\prod_{i=\nu_1+1}^{\nu_2}(\rho + \lambda_i - n + l_i)_{l_i} = \psi_2(\rho + \beta_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\prod_{i=\nu_{q-1}+1}^{\nu_q}(\rho + \lambda_i - n + l_i)_{l_i} = \psi_q(\rho + \beta_q),$$

(158)
$$T^{k_1 \ldots k_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r} = \frac{1}{\psi_1(\rho + \beta_1)\psi_2(\rho + \beta_2) \ldots \psi_q(\rho + \beta_p)}.$$

D'après (157), chaque fonction $\psi_k(\rho + \beta_k)$ est une fonction entière rationnelle de degré

$$\sum_{i=\nu_{k-1}+1}^{\nu_k} l_k$$

par rapport à $\rho + \beta_k$, ayant pour coefficients des nombres entiers qui ne dépendent que de n, de $k_1, \ldots, k_r$ et des nombres c.

La série (152) prend donc la forme suivante

(159)
$$\sum_{\beta_1 \ldots \beta_q} \frac{1}{\psi_1(\rho + \beta_1)\psi_2(\rho + \beta_2) \ldots \psi_q(\rho + \beta_q)},$$

la sommation s'étendant à toutes les permutations de q nombres de la suite $0, 1, \ldots, +\infty$, excepté celles pour lesquelles une ou plusieurs des égalités

(160)
$$\beta_{i+1} = \beta_{j+1},$$
$$\beta_{i+1} + c_{i.1} + \ldots + c_{i.\tau-1} = \beta_{j+1} + c_{j.1} + \ldots + c_{j.\sigma-1},$$

$$(i \gtrless j;\ \tau = 2, 3, \ldots, \nu_{i+1} - \nu_i;\ \sigma = 2, 3, \ldots, \nu_{j+1} - \nu_j;\ i, j = 0, 1, \ldots, q - 1)$$

sont vérifiées. Cette série, qui représente manifestement une fonction de ρ méromorphe dans tout domaine fini, sera désignée par $F(\rho)$, Pour en évaluer la valeur en fonction des fonctions élémentaires de l'analyse, nous pouvons procéder de la manière suivante.

Si, dans la série (159), nous n'assujettissons les indices $\beta_1 \ldots \beta_q$ à aucunes conditions, la somme S de cette série sera égale au produit des q séries simples:

$$(161) \qquad \sum_{\beta_1} \frac{1}{\psi_1(\rho + \beta_1)}, \quad \sum_{\beta_2} \frac{1}{\psi_2(\rho + \beta_2)}, \quad \ldots, \quad \sum_{\beta_q} \frac{1}{\psi_q(\rho + \beta_q)};$$

d'un autre côté, on peut écrire

$$S = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots$$

$F_0 = F(\rho)$ désignant l'ensemble de ceux des termes de S dont les indices $\beta_1 \ldots \beta_q$ ne satisfont à aucune des relations (160), F_1 désignant l'ensemble de ceux dont les indices $\beta_1 \ldots \beta_q$ vérifient une, et une seule, des relations (160), F_2 désignant l'ensemble de ceux dont les indices $\beta_1 \ldots \beta_q$ vérifient deux, et deux seules, des relations (160), et ainsi de suite.

Or, assujettir, dans une série multiple d'ordre q, les indices à remplir une ou plusieurs relations linéaires, cela revient à la transformer en une série multiple d'ordre inférieur à q. Donc notre série $F(\rho)$ s'exprime en fonction rationnelle et entière par rapport à certaines séries, de la même forme d'ailleurs, mais dont l'ordre de multiplicité est inférieur à q. Opérant de la même manière sur chacune de ces séries et procédant ainsi de proche en proche, nous voyons qu'on peut exprimer $F(\rho)$ en fonction rationnelle et entière par rapport à un certain nombre de séries *simples* dont chacune est de la forme suivante

$$(162) \qquad \sum_{\beta=0}^{+\infty} \frac{1}{\psi_{\delta_1}(\rho + \gamma_1 + \beta)\psi_{\delta_2}(\rho + \gamma_2 + \beta) \ldots \psi_{\delta_s}(\rho + \gamma_s + \beta)},$$

s désignant un nombre de la suite $1, 2, \ldots, q$, les $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$ des nombres de la même suite et $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ étant des entiers qui ne dépendent que des nombres c.

Si nous posons

$$\Phi(\rho + \beta) = \psi_{\delta_1}(\rho + \gamma_1 + \beta)\psi_{\delta_2}(\rho + \gamma_2 + \beta) \ldots \psi_{\delta_s}(\rho + \gamma_s + \beta)$$

$\Phi(\rho + \beta)$ sera une fonction entière rationnelle de $\rho + \beta$, ayant pour coefficients des nombres entiers et pour racines des nombres entiers aussi. Soient

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t$$

les racines distinctes de $\Phi(\rho+\beta)$, et

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_t$$

leurs ordres de multiplicité. Nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\Phi(\rho+\beta)}=\sum_{\nu=1}^{t}\left[\frac{B_\nu}{\rho+\beta-\varepsilon_\nu}+\sum_{\lambda=1}^{\varkappa_\nu-1}B_{\nu\lambda}\frac{d^\lambda}{d\rho^\lambda}\frac{1}{\rho+\beta-\varepsilon_\nu}\right],$$

les B_ν et les $B_{\nu\lambda}$ désignant des nombres rationnels; d'ailleurs, le degré de la fonction $\Phi(\rho+\beta)$ étant égal ou supérieur à 2, les résidus B_ν satisfont nécessairement à la relation

$$\sum_{\nu=1}^{t}B_\nu=0;$$

donc l'égalité précédente (où nous supposerons $\beta>0$) ne cessera pas d'être vraie si nous retranchons du second membre la somme

$$\sum_{\nu=1}^{t}\frac{B}{\beta}.$$

Ceci posé, désignons par $\theta(\rho)$ la fonction suivante

$$\theta(\rho)=\frac{1}{\rho}+\sum_{\beta=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\rho+\beta}-\frac{1}{\beta}\right].$$

(D'après les formules connues relatives à la fonction Γ, on a la relation

$$\theta(\rho)=-\frac{\Gamma'(\rho)}{\Gamma(\rho)}-C,$$

$\Gamma(\rho)$ désignant, selon l'usage, la fonction Eulérienne définie par la formule

$$\frac{1}{\Gamma(\rho)}=e^{C\rho}\rho\prod_{\beta=1}^{+\infty}\left(1+\frac{\rho}{\beta}\right)e^{-\frac{\rho}{\beta}}$$

et C la constante dite d'EULER.)

Nous obtiendrons

$$\sum_{\beta=0}^{+\infty}\frac{1}{\Phi(\rho+\beta)}=\sum_{\nu=1}^{t}\left[B_\nu\theta(\rho-\varepsilon_\nu)+\sum_{\lambda=1}^{\varkappa_\nu-1}B_{\nu\lambda}\theta^{(\lambda)}(\rho-\varepsilon_\nu)\right].$$

Or, d'après les propriétés de la fonction θ, on a, en désignant par ε un entier positif quelconque:

$$\theta(\rho - \varepsilon) = \frac{1}{\rho - \varepsilon} + \frac{1}{\rho - \varepsilon + 1} + \cdot\cdot + \frac{1}{\rho - 1} + \theta(\rho),$$

et, quand ε désigne un entier négatif quelconque $= -\eta$:

$$-\theta(\rho + \eta) = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho + 1} + \cdot\cdot + \frac{1}{\rho + \eta - 1} - \theta(\rho).$$

Donc la série (162) peut être considérée comme la somme de deux fonctions dont l'une est linéaire et homogène, à coefficients rationnels, par rapport à $\theta(\rho)$ et à quelques-unes des dérivées de cette fonction, tandis que l'autre s'exprime en fonction entière et rationnelle, à coefficients rationnels, par rapport aux quantités suivantes

$$(163)\qquad \begin{array}{llll} \frac{1}{\rho - \varepsilon}, & \frac{1}{\rho - \varepsilon + 1}, & \ldots, & \frac{1}{\rho - 1}, \\ \frac{1}{\rho}, & \frac{1}{\rho + 1}, & \ldots, & \frac{1}{\rho + \eta - 1}, \end{array}$$

(où ε désigne successivement tous ceux des nombres ε, qui sont positifs et $-\eta$ tous ceux qui sont négatifs).

On en conclut que la série $F(\rho)$ s'exprime en fonction entière rationnelle, à coefficient rationnels, par rapport aux fonctions

$$(164)\qquad \theta(\rho),\ \theta'(\rho),\ \ldots,\ \theta^{x}(\rho)$$

(x désignant un entier positif dépendant de r, facile à calculer dans chaque cas particulier et auquel il serait facile, dans le cas général, d'assigner une limite supérieure) et aux fonctions (163) (où ε et η désignent certains entiers dépendant uniquement des nombres c).

Posant, pour abréger,

$$(165)\qquad \vartheta(\rho) = \rho \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{\rho}{i}\right) e^{-\frac{\rho}{i}},$$

on peut, en vertu de la définition (121), écrire la fonction $\pi(\rho)$ sous la forme

$$\pi(\rho) = \vartheta(\rho)\vartheta(\rho - 1)\,..\,\vartheta(\rho - n + 1). \tag{166}$$

On en obtient, d'après des formules bien connues relatives à la fonction Γ,

$$\pi(\rho) = E.(\rho - 1)^{n-1}(\rho - 2)^{n-2}\,..\,(\rho - n + 1)(\vartheta(\rho))^n,$$

E désignant la constante

$$E = e^{\frac{n(n-1)}{2}C};$$

d'ailleurs, entre les fonctions $\theta(\rho)$ et $\vartheta(\rho)$ on a la relation suivante

$$\theta(\rho) = \frac{\vartheta'(\rho)}{\vartheta(\rho)}.$$

Par suite, chaque expression de la forme (155) (divisée par la constante E) est une fonction entière et rationnelle, à coefficients rationnels, par rapport à ρ, à $\vartheta(\rho)$, aux fonctions (164) et aux fonctions (163).

Donc, d'après ce que nous avons vu, chaque coefficient $U_{g_1..g_r}^{k_1..k_r}$ du développement (153) s'exprime aussi sous cette forme.

20. Ayant ainsi trouvé la forme analytique sous laquelle se présente le déterminant $\begin{pmatrix} -p & .. & -1 \\ -p & .. & -1 \end{pmatrix}$ quand on le développe en série procédant suivant les puissances croissantes des paramètres $\alpha_{i,k}$, il sera facile de le développer selon les puissances croissantes de ρ.

Dans le voisinage de $\rho = 0$, la fonction $\theta(\rho)$ peut, comme on sait, se développer de la manière suivante:

$$\theta(\rho) = \frac{1}{\rho} + \rho\mathfrak{P}(\rho)$$

$\mathfrak{P}(\rho)$ étant une série procédant selon les puissances positives de ρ et dont les coefficients ont (aux signes près) les valeurs

$$\tau_2\,,\ \tau_3\,,\ \tau_4\,, \ldots,\ \tau_k\,, \ldots$$

τ_k désignant le nombre suivant:

$$(167) \qquad \tau_k = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots \qquad {\scriptstyle (k=2,3,..)}$$

Quant aux fonctions de la forme (163), chacune d'elles, développée selon les puissances croissantes de ρ, aura pour coefficients des nombres rationnels et ne contiendra, au plus, qu'une seule puissance négative de ρ.

Enfin, la fonction $\vartheta(\rho)$ est une fonction entière de ρ dont les coefficients sont des polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport aux nombres τ.

Dans le développement de $U^{k_1..k_r}_{g_1..g_r}$ selon les puissances croissantes de ρ, les puissances négatives de ρ disparaîtront nécessairement, puisque $U^{k..k_r}_{g..g_r}$ est une fonction entière de ρ. Donc cette fonction (divisée par E) se développe en une série procédant selon les puissances positives de ρ dont les coefficients sont rationnels par rapport aux τ.

Donc, la série du second membre de (129) pouvant, en vertu de sa convergence uniforme, être écrite sous la forme d'une série entière par rapport à ρ, nous arrivons à cette conclusion:

Le déterminant $\begin{pmatrix} -p & . & . & -1 \\ -p & . & . & -1 \end{pmatrix}$ *est une fonction entière de* ρ *dont les coefficients sont des séries absolument convergentes procédant selon les puissances des paramètres* α*; dans chacune de ces séries, les coefficients (divisés par la constante* E*) sont des polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport aux nombres* τ.

21. La méthode précédente pour le développement du déterminant $\begin{pmatrix} -p & . & . & -1 \\ -p & . & . & -1 \end{pmatrix}$ s'applique à tout déterminant de la forme (115). En effet, on peut obtenir l'un quelconque des déterminants (115) en supprimant, dans $\begin{pmatrix} -p & . & . & -1 \\ -p & . & . & -1 \end{pmatrix}$, certaines lignes et certaines colonnes et en y remplaçant certaines lignes et certaines colonnes par des lignes et des colonnes convenablement choisies dans la matrice des éléments χ_{ik}; et on voit facilement que ces opérations n'altèrent pas essentiellement la forme analytique et les propriétés générales du déterminant considéré. Ce n'est qu'à fin

de simplifier les formules que nous nous sommes borné à l'étude de $\begin{pmatrix} -p & . & . & -1 \\ -p & . & . & -1 \end{pmatrix}$. Aussi les conclusions précédentes relatives à ce déterminant subsistent-elles sans modification pour le cas d'un déterminant quelconque de la forme (115).

§ 4.

22. Considérons, en particulier, le cas où l'équation proposée (15) a pour coefficients des fonctions rationnelles de x. On pourra l'écrire sous la forme

$$(168) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{Q_2}{Q_0}\frac{1}{x^{2+p}}\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \frac{Q_3}{Q_0}\frac{1}{x^{3+p}}\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} + \ldots + \frac{Q_n}{Q_0}\frac{1}{x^{n+p}} y = 0,$$

$Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ désignant des polynômes entiers en x qui ne s'annulent pas tous pour $x = 0$, Q_0 un polynôme semblable qui ne s'annule pas pour $x = 0$ et p un entier convenable.

Si $p \leqq 0$, l'équation (168) appartiendra visiblement, dans le voisinage de $x = 0$, à la classe simple des équations régulières. Nous pouvons donc nous borner au cas ou l'on a $p > 0$.

Développons les Q selon les puissances de x:

$$(169) \qquad Q_\nu = \beta_{\nu 0} + \beta_{\nu 1} x + \beta_{\nu 2} x^2 + \ldots + \beta_{\nu m} x^m \qquad {\scriptstyle (\nu = 0, 2, 3, \ldots, n)}$$

et supposons, ce qui est évidemment permis, que β_{00}, c'est-à-dire le terme indépendant de x dans le développement de Q_0, soit égal à *un*.

Cela posé, nous pouvons écrire, dans un certain voisinage de $x = 0$,

$$(170) \qquad \frac{Q_r}{Q_0}\frac{1}{x^{r+p}} = \sum_{\lambda=-r-p}^{+\infty} \alpha_{r\lambda} x^\lambda, \qquad {\scriptstyle (r = 2, 3, \ldots, n)}$$

les $\alpha_{r\lambda}$ désignant des fonctions entières rationnelles, à coefficients rationnels, par rapport aux $\beta_{r\lambda}$ et aux $\beta_{0\lambda}$. En convenant de considérer chacun des $\beta_{r.0}$ comme homogène et de degré 1 par rapport à une variable auxiliaire t, chacun des $\beta_{r.1}$ comme homogène et de degré $2, \ldots$, chacun des $\beta_{r.m}$ comme homogène et de degré $m + 1$ mais chacun des $\beta_{0.\lambda}$ comme homogène et de degré λ, on voit que le coefficient $\alpha_{r,-r-p}$ sera homogène et de degré 1, que $\alpha_{r,-r-p+1}$ sera homogène et de degré $2, \ldots$, que $\alpha_{r,-r-p+k}$ sera homogène et de degré $k+1$, et ainsi de suite.

Cela étant, considérons les déterminants (83), définis, comme il a été expliqué, en fonction de ρ et des paramètres $\alpha_{r\lambda}$; nous avons vu que, abstraction faite du facteur E, chacun d'eux peut être mis sous la forme d'une série entière

$$(171) \qquad S_0 + S_1\rho + S_2\rho^2 + \ldots$$

où chacun des coefficients S_ν est une série absolument convergente, procédant selon les puissances des paramètres $\alpha_{r\lambda}$ et ayant pour coefficients des polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport aux nombres τ. Exprimant les $\alpha_{r\lambda}$ en fonction des $\beta_{r\lambda}$, on voit sans difficulté que chaque série S_ν converge uniformément par rapport aux $\beta_{r\lambda}$ à l'intérieur d'un domaine fini quelconque; par conséquent, les S_ν sont des fonctions entières par rapport aux $\beta_{r\lambda}$.

D'après la convention faite plus haut, un produit quelconque de la forme

$$(172) \qquad \alpha_{k_1,g_1-k_1}\alpha_{k_2,g_2-k_2}, \ldots, \alpha_{k_r,g_r-k_r}$$

est du degré

$$(173) \qquad (g_1+p+1)+\ldots+(g_r+p+1)$$

par rapport à t. La série S_ν étant ordonnée selon les produits (172) (r prenant successivement les valeurs $1, 2, \ldots, +\infty$), chacun des indices $g_1, g_2, \ldots, g_r$ d'un terme quelconque sera supérieur ou égal à $-p$. On en conclut qu'il n'y a, dans S_ν, qu'un nombre fini de combinaisons des indices g pour lesquelles l'expression (173) prend une valeur donnée; autrement dit, si μ désigne un entier positif quelconque, il n'y a, dans S_ν, qu'un nombre fini de termes de degré μ par rapport à t.

Or, ordonner la série (171) selon les puissances croissantes de t, cela revient évidemment à l'ordonner selon les puissances croissantes des paramètres β. D'où cet énoncé:

Chacune des fonctions déterminantes de l'équation (168) *est une fonction entière de ρ dont les coefficients, considérés comme fonctions des paramètres β, sont des fonctions entières ayant pour coefficients des polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport aux nombres τ.*

23. Soit, dans la suite des paramètres suivants:

$$\beta_{20}\,,\ \beta_{30}\,,\ \ldots,\ \beta_{n0}, \tag{174}$$

$\beta_{\sigma 0}$ le premier qui n'est pas nul. L'équation déterminante, relative à $x = 0$, sera évidemment

$$\begin{aligned} f(\rho) \equiv \beta_{\sigma.0}\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - n + \sigma + 1) \\ + \beta_{\sigma+1.0}\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - n + \sigma + 2) + \ldots + \beta_{n.0} = 0. \end{aligned} \tag{175}$$

Pour que les α se trouvent à l'intérieur d'un domaine T, défini par des conditions de la forme (80) et (80'), il suffit que les β satisfassent aux conditions suivantes

$$\beta_{00} = 1; \quad |\beta_{r\lambda}| \leqq \beta^0_{r\lambda}, \qquad (r = 0, 2, 3, \ldots, n;\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots, m) \tag{176}$$

$$|\beta_{\sigma.0}| \geqq \theta \tag{176'}$$

les $\beta^0_{r\lambda}$ désignant des constantes positives (ou nulles) quelconques et θ une quantité positive (non nulle) quelconque. Appelons U le domaine des paramètres β défini par ces conditions.

D'après ce que nous avons vu, on peut toujours, par une suite finie d'opérations arithmétiques, trouver un entier λ et λ fonctions entières de ρ:

$$F_1(\rho)\,,\ F_2(\rho)\,,\ \ldots,\ F_\lambda(\rho) \tag{177}$$

qui jouent le rôle de fonctions déterminantes pour l'équation considérée, relativement au point singulier $x = 0$, tant que les paramètres β restent à l'intérieur du domaine U. R désignant l'une quelconque des racines de l'équation déterminante, nous savons que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un nombre donné μ d'intégrales régulières appartenant à R s'expriment en disant que les fonctions (177) doivent, pour $\rho = R$, s'annuler de l'ordre μ; et de là se déduisent immédiatement les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (168) possède, dans le voisinage de $x = 0$, un nombre donné s d'intégrales régulières.

Proposons-nous maintenant de traduire ces conditions en *relations* entre les paramètres.

Ceci se fait sans difficulté dans le cas où toutes les racines de l'équation $f(\rho) = 0$ sont incongruentes. En effet, désignons par

$$R_1\,,\ R_2\,,\ \ldots,\ R_{n-\sigma} \tag{178}$$

les racines de $f(\rho) = 0$, par

$$t\,,\,u_1\,,\,u_2\,,\,\ldots\,,\,u_\lambda$$

$\lambda + 1$ variables auxiliaires et par $G(tu_1 \ldots u_\lambda)$ le produit suivant

$$(179) \qquad \prod_{\nu=1}^{n-\sigma}(t - u_1 F_1(R_\nu) - u_2 F_2(R_\nu) - \ldots - u_\lambda F_\lambda(R_\nu));$$

il suffira d'écrire que $G(tu_1 \ldots u_\lambda)$, considérée comme fonction de t, a s racines nulles quelles que soient les valeurs des variables $u_1 \ldots u_\lambda$; ce qui conduit à un certain nombre de relations de la forme

$$(180) \qquad H(R_1\,,\,R_2\,,\,\ldots\,,\,R_{n-\sigma}) = 0,$$

H désignant une fonction entière et symétrique par rapport aux racines (178) et étant, par suite, représentable par un développement de la forme

$$(181) \qquad H = H_0 + H_1 + H_2 + \ldots + H_\nu + \ldots,$$

H_ν désignant un polynôme homogène et symétrique de degré ν par rapport aux R. D'après la propriété des fonctions (177) établie au numéro précédent, on voit que, dans chacun des polynômes H_ν, les coefficients sont des fonctions entières par rapport aux $\beta_{r\lambda}$ dont les coefficients (divisés par la constante E) sont des polynômes, à coefficients rationnels, par rapport aux nombres τ.

Or, écrivant $f(\rho)$ sous la forme

$$(182) \qquad f(\rho) = \beta_{\sigma.0}(\rho^{n-\sigma} + f_1\rho^{n-\sigma-1} + f_2\rho^{n-\sigma-2} + \ldots + f_{n-\sigma})$$

et convenant de considérer $f_1\,,\,f_2\,,\,\ldots\,,\,f_{n-\sigma}$ comme des quantités homogènes des degrés respectifs $1\,,\,2\,,\ldots,\,n-\sigma$ par rapport à une variable auxiliaire t, on sait que tout polynôme homogène symétrique et de degré ν par rapport aux racines R, peut s'écrire sous la forme d'un polynôme en $f_1\,,\,f_2\,,\,\ldots\,,\,f_{n-\sigma}$, homogène et de degré ν par rapport à t. Chacun des coefficients f (multipliée par $\beta_{\sigma.0}$) s'exprimant en fonction linéaire et homogène, à coefficients entiers, par rapport aux paramètres $\beta_{\sigma+1,0}\,,\,\beta_{\sigma+2,0}\,,\,\ldots\,,\,\beta_{n,0}$, on en conclut que toute fonction telle que H est une fonction entière par rapport à $\frac{1}{\beta_{\sigma.0}}$ et aux $\beta_{r.\lambda}$, ayant pour coefficients des polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport aux τ.

Toutefois, les relations ainsi obtenues cessent d'exprimer les conditions dont il s'agit dès que deux ou plusieurs des racines R deviennent congruentes. Pour obtenir des formules qui embrassent tous les cas possibles, il faudra modifier la méthode précédente. Tout d'abord, nous avons besoin de quelques considérations préliminaires relatives à la divisibilité de fonctions entières.

24. Soient

$$\psi(\rho) = a_0 + a_1\rho + \cdot\cdot + a_{m-1}\rho^{m-1} + \rho^m,$$
$$F(\rho) = b_0 + b_1\rho + \cdot\cdot + b_{m-1}\rho^{m-1} + b_m\rho^m + \cdot\cdot$$

deux fonctions de ρ dont l'une $\psi(\rho)$ est entière et rationnelle de degré m, l'autre $F(\rho)$ entière (rationnelle ou transcendante). Pour trouver les relations entre les a et les b qui sont nécessaires et suffisantes pour que $\psi(\rho)$ et $F(\rho)$ possèdent un facteur commun de degré s, nous emploierons la méthode suivante.

Soient

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

m quantités arbitraires que nous supposerons d'abord différentes entre elles. Si nous écrivons

$$(183) \quad \begin{aligned} F(\rho_1) &= A_0, \\ F(\rho_2) &= A_0 + A_1(\rho_2 - \rho_1), \\ F(\rho_3) &= A_0 + A_1(\rho_3 - \rho_1) + A_2(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F(\rho_m) &= A_0 + A_1(\rho_m - \rho_1) + \cdot\cdot + A_{m-1}(\rho_m - \rho_1)(\rho_m - \rho_2)\cdot\cdot(\rho_m - \rho_{m-1}) \end{aligned}$$

les coefficients $A_{\nu-1}$ auront les valeurs

$$A_{\nu-1} = \begin{vmatrix} 1, & \rho_1, & \ldots, & \rho_1^{\nu-2}, & F(\rho_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \rho_\nu, & \ldots, & \rho_\nu^{\nu-2}, & F(\rho_\nu) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & \rho_1, & \ldots, & \rho_1^{\nu-2}, & \rho_1^{\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \rho_\nu, & \ldots, & \rho_\nu^{\nu-2}, & \rho_\nu^{\nu-1} \end{vmatrix} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(183') \qquad A_{\nu-1} = \frac{F(\rho_1)}{\varphi'_\nu(\rho_1)} + \frac{F(\rho_2)}{\varphi'_\nu(\rho_2)} + \cdots + \frac{F(\rho_\nu)}{\varphi'_\nu(\rho_\nu)} \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\ldots,m)}$$

$\varphi_\nu(\rho)$ désignant la fonction suivante

$$\varphi_\nu(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\cdots(\rho - \rho_\nu).$$

$A_{\nu-1}$, considéré comme fonction de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$, étant visiblement une fonction entière, nous pouvons poser

$$(184) \qquad A_{\nu-1} = \theta(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu) \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\ldots,m)}$$

en désignant par $\theta(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu)$ une fonction entière par rapport aux $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ ayant pour coefficients des polynômes à coefficients rationnels par rapport aux b.

Ceci posé, désignons par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ les racines de $\psi(\rho)$; je dis que la condition nécessaire et suffisante pour que $F(\rho)$ et $\psi(\rho)$ admettent un diviseur commun de degré s consiste en ceci: on doit avoir, pour une permutation convenable $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ de s des racines de $\psi(\rho)$,

$$(185) \qquad \theta(\rho_1) = 0, \qquad \theta(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad \ldots, \quad \theta(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s) = 0.$$

C'est ce qui est évident dans le cas où toutes les racines de $\psi(\rho)$ sont différentes car, dans ce cas, les équations (185) sont, en vertu des relations (183), équivalentes aux suivantes:

$$F(\rho_1) = 0, \qquad F(\rho_2) = 0, \quad \ldots, \quad F(\rho_s).$$

Pour le démontrer d'une manière générale, remarquons d'abord que les équations (185) sont équivalentes aux suivantes

$$(185') \qquad \theta(\rho_{\alpha_1}) = 0, \qquad \theta(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}) = 0, \ldots, \theta(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}, \ldots, \rho_{\alpha_s}) = 0,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ désignant une permutation quelconque des nombres $1, 2, \ldots, s$; on a, en effet, en vertu des formules (183),

$$\begin{aligned}
\theta(\rho_{\alpha_1}) &= A_0 + H_{1.1}A_1 + H_{12}A_2 + \cdots + H_{1.s-1}A_{s-1},\\
\theta(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}) &= \qquad\quad A_1 + H_{22}A_2 + \cdots + H_{2.s-1}A_{s-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\theta(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}, \ldots, \rho_{\alpha_s}) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A_{s-1},
\end{aligned}$$

les H désignant certaines expressions entières et rationnelles par rapport aux ρ; en d'autres termes, on peut passer du système des fonctions

$$\theta(\rho_1)\,,\ \theta(\rho_1\,,\rho_2)\,,\,..\,,\ \theta(\rho_1\,,\rho_2\,,\,..\,,\rho_s)$$

à celui des fonctions

$$\theta(\rho_{a_1})\,,\ \theta(\rho_{a_1}\,,\rho_{a_2})\,,\,..\,,\ \theta(\rho_{a_1}\,,\rho_{a_2}\,,\,..\,,\rho_{a_s})$$

par une substitution linéaire de la forme

$$\begin{vmatrix} 1\,, & H_{1.1}\,, & \ldots\,, & H_{1.s-1} \\ & 1 & \ldots\,, & H_{2.s-1} \\ & & \ldots & \cdot \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

ce qui prouve bien l'équivalence des systèmes d'équations (185) et (185').

Si les racines

$$(186) \qquad \rho_1\,,\rho_2\,,\,..\,,\rho_s$$

ne sont pas toutes distinctes, nous les supposerons rangées de la manière suivante

$$\bar\rho_1 = \,..\, = \bar\rho_a \neq \rho_{a+1} = \,..\, = \bar\rho_\beta \neq \,..\, \neq \bar\rho_{\lambda+1} = \,..\, = \bar\rho_s$$

c'est-à-dire nous désignerons par $\bar\rho_1\,,\bar\rho_{a+1}\,,\bar\rho_{\beta+1}\,,\,..\,,\bar\rho_{\lambda+1}$ les racines distinctes, par $\bar\rho_1\,,\bar\rho_2\,,\,..\,,\bar\rho_a$ celles égales a $\bar\rho_1$, par $\bar\rho_{a+1}\,,\bar\rho_{a+2}\,,\,..\,,\bar\rho_\beta$ celles égales à $\bar\rho_{a+1}$ et ainsi de suite.

En vertu des relations (183) on a (en supposant d'abord les ρ distinctes)

$$\theta(\bar\rho_1\,,\bar\rho_2\,,\,..\,,\bar\rho_\nu) = \frac{\theta(\bar\rho_1\,,\bar\rho_2\,,\,..\,,\bar\rho_{\nu-1}) - \theta(\bar\rho_1\,,\bar\rho_2\,,\,..\,,\bar\rho_{\nu-2}\,,\bar\rho_\nu)}{\bar\rho_{\nu-1} - \bar\rho_\nu}$$

d'où se conclut que l'on a, pour $\bar\rho_1 = \bar\rho_2 = \,..\, = \bar\rho_a$:

$$\theta(\bar\rho_1\,,\bar\rho_2\,,\,..\,,\bar\rho_\nu) = \frac{d^{\nu-1}F(\bar\rho_1)}{d\bar\rho_1^{\nu-1}}\,. \qquad {\scriptstyle (\nu=2,3,..,a)}$$

Si, dans les équations (185'), nous prenons $\rho_{a_1} = \bar{\rho}_1, \rho_{a_2} = \bar{\rho}_2, \ldots, \rho_{a_s} = \bar{\rho}_s$ les α premières de ces équations seront donc équivalentes aux suivantes

$$(187) \qquad F(\bar{\rho}_1) = 0, \qquad F'(\bar{\rho}_1) = 0 \ , \ \ldots, \ F^{(\alpha-1)}(\bar{\rho}_1) = 0.$$

On a de même, pour $\bar{\rho}_{\alpha+1} = \bar{\rho}_{\alpha+2} = \ldots = \bar{\rho}_\beta$:

$$\theta(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \ldots, \bar{\rho}_\nu) = \frac{\partial^{\nu-\alpha-1}}{\partial \bar{\rho}_{\alpha+1}^{\nu-\alpha-1}} \theta(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \ldots, \bar{\rho}_{\alpha+1}); \qquad (\nu = \alpha+2, \ldots, \beta)$$

or, en vertu des relations (183') et des α premières des relations (185'), on obtient

$$\theta(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \ldots, \bar{\rho}_{\alpha+1}) = \frac{F(\bar{\rho}_{\alpha+1})}{(\bar{\rho}_{\alpha+1} - \bar{\rho}_1)(\bar{\rho}_{\alpha+1} - \bar{\rho}_2) \ldots (\bar{\rho}_{\alpha+1} - \bar{\rho}_\alpha)}$$

ce qui conduit aux relations suivantes:

$$(188) \qquad F(\bar{\rho}_{\alpha+1}) = 0, \quad F'(\bar{\rho}_{\alpha+1}) = 0 \ , \ \ldots, \ F^{(\beta-\alpha-1)}(\bar{\rho}_{\alpha+1}) = 0.$$

Continuant ainsi de proche en proche, nous voyons que les équations (185') sont équivalentes à l'ensemble des relations (187), (188), ... On en conclut que les relations (185) expriment bien les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction $F(\rho)$ soit divisible par

$$(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) \ldots (\rho - \rho_s).$$

Formons le produit suivant

$$(189) \qquad \prod_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} [u_1 \theta(\rho_{\alpha_1}) + u_2 \theta(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}) + \ldots + u_s \theta(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}, \ldots, \rho_{\alpha_s})]$$

$\alpha_1 \ldots \alpha_s$ désignant successivement toute permutation de s nombres distincts de la suite

$$1, 2, 3, \ldots, m$$

et $u_1, u_2, \ldots, u_s$ étant des variables auxiliaires; pour que $F(\rho)$ et $\psi(\rho)$ admettent un diviseur commun de degré s, il faut et il suffit que ce produit soit nul quels que soient $u_1, u_2, \ldots, u_s$, car, d'après ce que nous avons vu, il faut et il suffit que l'un au moins de ses facteurs s'annule identiquement. Mais de là on est conduit à un certain nombre de relations de la forme

$$(190) \qquad H(a, b) = 0$$

$H(a, b)$ désignant une série convergente procédant selon les puissances croissantes de a et de b et ayant pour coefficients des nombres rationnels.

Ces relations (190), qui sont évidemment en nombre fini, expriment donc les conditions dont il s'agit, quelles que soient les valeurs des coefficients a et b.

25. Pour pouvoir appliquer ces résultats au problème que nous avons en vue, il faut démontrer d'abord le théorème suivant:

Pour que l'équation (168) admette un nombre donné s d'intégrales régulières, il faut et il suffit que les fonctions (177) possèdent $s(k-h+1)$ racines en commun avec la fonction suivante

$$f(\rho)f(\rho+1)\ldots f(\rho+k), \tag{191}$$

k et h désignant des entiers positifs convenables.

Soient, en effet,

$$R_1, R_2, \ldots, R_{n-\sigma} \tag{192}$$

les $n-\sigma$ racines de l'équation déterminante $f(\rho)=0$. Supposant que les paramètres β restent dans l'intérieur du domaine U défini par (176) et (176'), nous pouvons assigner une limite supérieure H aux valeurs absolues des différences

$$R_\mu - R_\nu; \qquad {\scriptstyle(\mu,\nu=1,2,\ldots,n-\sigma)}$$

soit h l'entier positif immédiatement supérieur au nombre H et désignons par k un entier quelconque supérieur à h.

Supposons que les racines (192) soient numérotées de telle manière que $R_1, R_2, \ldots, R_\alpha$ désignent les racines incongruentes de $f(\rho)$, et que, de plus, R_ν ait une partie réelle inférieure à celle de toute autre racine de $f(\rho)$ congruente à R_ν (ν désignant successivement $1, 2, \ldots, \alpha$).

Désignons par t_ν le nombre des racines (comptées avec leurs ordres de multiplicité) congruentes à R_ν de sorte qu'on ait

$$t_1+t_2+\ldots+t_\alpha = n-\sigma;$$

soit s_ν l'exposant de la plus haute puissance de $\rho - R_\nu$ qui divise toutes les fonctions (177). Nous aurons la condition suivante

$$s_\nu \leqq t_\nu \qquad {\scriptstyle(\nu=1,2,\ldots,\alpha)}$$

et le nombre des intégrales régulières de l'équation (168) sera égal à $s_1 + s_2 + \cdot\cdot + s_\alpha$. Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de s intégrales régulières peut s'écrire ainsi:

$$s_1 + s_2 + \cdot\cdot + s_\alpha \geqq s. \tag{193}$$

Les fonctions (177) s'annulent, pour $\rho = R_\nu$, d'ordre s_ν au moins, mais de là on peut conclure que ces fonctions s'annulent du même ordre pour $\rho = R_\nu - \lambda$, λ désignant un entier positif quelconque; car, si elles ne s'annulaient toutes que d'un ordre inférieur à s_ν, le nombre des intégrales régulières appartenant à $R_\nu - \lambda$ serait inférieur à s_ν, ce qui est évidemment contraire à l'hypothèse.

Or, k désignant un entier positif quelconque supérieur à h, la fonction (191) s'annule pour $\rho = R_\nu - \lambda$ d'ordre s_ν au moins, pourvu que l'on ait

$$\lambda \leqq k - h.$$

Par conséquent, le nombre des racines communes aux fonctions (177) et (191) est, au moins, égal à

$$(s_1 + s_2 + \cdot\cdot + s_\alpha)(k - h + 1);$$

donc, S désignant le nombre exact de ces racines communes, la formule

$$S \geqq s(k - h + 1) \tag{194}$$

exprime une condition *nécessaire* pour l'existence de s intégrales régulières.

Pourvu que k soit suffisamment grand, cette condition nécessaire entraînera la formule (193) et exprimera donc en même temps la condition suffisante.

En effet, toute racine commune aux fonctions (177) et (191) peut s'écrire sous la forme $R_\nu - \lambda$, ν désignant un entier positif convenable et λ un entier positif ou négatif convenable. Or, de résultats précédemment obtenus (cf. n° 10) il résulte que, si toutes les fonctions (177) s'annulent, pour $\rho = R_\nu - \lambda$, d'un certain ordre μ, ces fonctions s'annulent nécessairement aussi, pour $\rho = R_\nu$, de cet ordre μ au moins. Les seules valeurs de ρ pour lesquelles *peut* s'annuler la fonction (191) sont évidemment

$$R_\nu + h,\ R_\nu + h - 1,\ldots,\ R_\nu,\ R_\nu - 1,\ldots,\ R_\nu - k. \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, \alpha)}$$

Donc, s_ν désignant l'exposant de la plus haute puissance de $\rho - R_\nu$ qui divise toutes les fonctions (177) et (191), on aura

$$(s_1 + s_2 + \ldots + s_a)(k + h + 1) \geqq S;$$

donc, si l'on suppose la condition (194) vérifiée, il vient

$$(s_1 + s_2 + \ldots + s_a)(k + h + 1) \geqq s(k - h + 1).$$

De là et en vertu de la formule

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_a \leqq n - \sigma$$

on obtient

$$(195)\quad (s_1 + s_2 + \ldots + s_a)(k + 1) - s(k + 1) + h(n - \sigma + s) \geqq 0.$$

Si l'entier positif $k + 1$ remplit la condition

$$(196)\qquad k + 1 > h(n - \sigma + s),$$

ce que nous supposerons, la formule (195) ne peut évidemment être vraie que si l'on a

$$(197)\qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_a \geqq s.$$

C. q. f. d.

Il est donc démontré que, si l'on choisit h comme il a été expliqué plus haut et k conformément à la condition (196), le nombre total des intégrales régulières de l'équation (168) est égal au plus grand entier contenu dans le nombre

$$\frac{S}{k - h + 1},$$

S désignant, comme plus haut, le nombre total des racines communes aux fonctions (177) et (191). En d'autres termes, dire que l'équation (168) admet un nombre donné s d'intégrales régulières, cela revient à dire que le nombre des racines communes aux fonctions (177) et (191) est, au moins, égal à $s(k - h + 1)$.

26. Désignons la fonction (191) par $\Phi(\rho)$ et posons

$$F(\rho) = \xi_1 F_1(\rho) + \xi_2 F_2(\rho) + \ldots + \xi_\lambda F_\lambda(\rho),$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\lambda$ désignant des variables auxiliaires. Pour exprimer que l'équation (168) possède s intégrales régulières, il suffira d'écrire que les fonctions $F(\rho)$ et $\Phi(\rho)$ ont $s(k-h+1)$ racines communes quelles que soient les valeurs de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\lambda$.

En vertu de la formule (175), $\Phi(\rho)$ est une fonction entière rationnelle de ρ de degré

$$(n-\sigma)(k+1)=m$$

et pourra s'écrire sous la forme

$$\Phi(\rho)=\Phi_0\rho^m+\Phi_1\rho^{m-1}+\ldots+\Phi_m,$$

Φ_0 désignant la puissance $k+1^{\text{ième}}$ de $\beta_{\sigma.0}$ et les autres Φ_ν, des expressions entières et rationnelles, à coefficients entiers, par rapport aux paramètres β. D'après ce que nous avons vu au n° 23, l'existence d'un nombre donné de racines communes à $F(\rho)$ et $\Phi(\rho)$ s'exprime par un nombre fini de relations de la forme

$$H=0,$$

H désignant une série procédant selon les puissances de

$$\frac{1}{\Phi_0}, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$$

et des coefficients de $F(\rho)$ et ayant pour coefficients des nombres rationnels; considérée comme fonction de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\lambda$, H est une fonction entière *rationnelle* puisque son degré par rapport aux coefficients de $F(\rho)$ est nécessairement inférieur à un certain nombre fini. Par conséquent, en égalant à zéro chacun des coefficients de la fonction H (considérée comme fonction de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\lambda$) on obtiendra un nombre fini de relations de la forme

$$K=0, \tag{198}$$

K désignant une fonction entière par rapport à $\frac{1}{\beta_{\sigma.0}}$ et aux paramètres β, dont les coefficients sont des polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport aux nombres τ. D'où ce théorème:

Etant donnés une équation différentielle (168), *son ordre n et le degré*

$n - \sigma$ de son équation déterminante, on peut toujours, par une suite finie d'opérations arithmétiques, trouver une suite finie de relations de la forme (198) *qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation proposée admette, dans le voisinage de $x = 0$, un nombre donné d'intégrales régulières.*

Ces relations (198) expriment les conditions dont il s'agit tant que les paramètres β restent dans l'intérieur d'un domaine U, fixé arbitrairement à l'avance par des conditions de la forme (176) et (176').

Nous sommes donc parvenu à la solution complète du problème que nous nous étions proposé, à savoir de trouver les *relations* qui expriment l'existence d'un nombre donné d'intégrales régulières d'une équation linéaire donnée. Mais il convient d'ajouter que ce résultat ne permet pas, du moins dans le cas général, de décider, par une suite *finie* d'opérations arithmétiques, si l'équation proposée possède des intégrales régulières ou non; car les seconds membres des relations (198) sont, en général, des fonctions entières *transcendantes*. Nous avons trouvé plus haut (n[os] 14—16), il est vrai, une suite de critères algébriques qui permettent de résoudre le problème dans des cas étendus. Mais en même temps, nous avons reconnu l'existence de certains cas d'exception où les opérations algébriques ne conduisent pas à bonne fin. A cause de ces cas et de la nature transcendante des fonctions K, il n'est pas encore possible de répondre à la question suivante:

Peut-on toujours, par une suite finie d'opérations arithmétiques, décider combien une équation linéaire à coefficients rationnels possède d'intégrales régulières?

La solution de ce problème, si jamais on pourra la trouver, dépendra sans doute d'une étude approfondie des fonctions déterminantes (177) ou, ce qui revient au même, des fonctions K.

Dans ce qui précède, nous avons toujours supposé que l'équation considérée (15) ou (168) fût privée du terme en $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. Cette hypothèse est toujours légitime puisqu'une équation quelconque peut se ramener immédiatement à ce cas par une transformation connue; mais, pour la théorie des intégrales régulières, une telle transformation pourra introduire certaines difficultés de sorte que, dans beaucoup de cas, il sera préférable d'aborder l'étude de l'équation donnée sans aucune transformation préalable. En opérant ainsi, les déterminants infinis que l'on rencontrera ne seront plus de la forme normale, de sorte que les méthodes employées plus haut ne seront plus applicables. Il faudra, dans ce cas, se servir d'une classe plus générale de déterminants infinis, déterminants dont nous avons établi la convergence dans une note publiée aux Comptes rendus de l'Académie de Paris, le 30 janvier 1893.