SUR LES SÉRIES ENTIÈRES CONVERGENTES OU DIVERGENTES ET LES FRACTIONS CONTINUES RATIONNELLES

PAR

HENRI PADÉ[1]

à LYON.

(1). Les Géomètres du siècle dernier n'apportaient pas autant de soins que nous le faisons aujourd'hui à n'employer, dans le calcul, que des séries convergentes; certain grand traité de calcul différentiel et intégral du commencement de ce siècle le témoigne encore suffisamment. Ce sont surtout GAUSS et ABEL qui, suivant une expression que j'emprunte, »ont rappelé les Géomètres aux convenances de la rigueur et fait cesser ce scandale mathématique».

»Si, par exemple», écrit ABEL au début de son célèbre Mémoire sur la série du binôme, »on doit multiplier deux séries infinies l'une par l'autre, on pose

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots)(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots) = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \ldots.$$

Cette équation est très juste lorsque les séries $u_0 + u_1 + \ldots$, $v_0 + v_1 + \ldots$ sont finies. Mais si elles sont infinies, il est d'abord nécessaire qu'elles convergent, car une série divergente n'a pas de somme; ensuite la série du second membre doit de même converger.»

---

[1] Voyez Thèse de Doctorat: *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles.* Gauthier-Villars, 1892.

Ce sont là des affirmations que je ne saurais contredire dans le cas où les termes des séries considérées sont des nombres donnés quelconques. Mais il est des séries qui peuvent être envisagées à un point de vue différent: ce sont celles où les termes sont des fonctions d'une variable dont la succession obéit à une loi particulière. Si, par exemple, on a affaire à des séries *entières,* comme, justement, la série à laquelle ABEL consacre son mémoire, il n'est pas impossible de montrer qu'une égalité telle que la précédente peut »être juste», ou, pour parler plus clairement, peut acquérir une signification très légitime, que les séries qui y figurent soient convergentes ou divergentes. C'est ce que je voudrais montrer ici.

L'idée fondamentale est donc qu'une série entière met en évidence autre chose qu'une suite de quantités ayant chacune une valeur numérique déterminée pour une valeur donnée de la variable. Elle fait connaître encore et surtout, car c'est bien là le caractère qui la différentie de toute autre série, une suite de polynômes dont chacun se déduit du précédent en ajoutant un terme de degré supérieur à ceux des autres termes.

Il peut arriver que la considération d'une telle suite de polynômes suffise, à elle seule, pour conduire à la définition d'une fonction, et cela, indépendamment des valeurs numériques qu'ils acquièrent quand on donne à la variable une valeur déterminée, en d'autres termes, indépendamment de la convergence ou de la divergence de la série entière dont ils sont extraits; la fonction étant tellement définie, toutefois, que, si la série est convergente, la fonction soit la somme de la série.

C'est la manière d'arriver à cette définition de la fonction qui fait l'objet de la première section de ce travail. Elle repose sur les résultats établis dans le mémoire cité en Note à la page précédente, et sur deux faits très remarquables de convergence signalés par LAGUERRE et HALPHEN. Cependant, pour permettre la lecture sans que l'étude préalable du premier mémoire ait été faite, je commence par un aperçu synthétique très sommaire des résultats qui sont le plus nécessaires, ce qui, au surplus, rend l'enchaînement des idées plus clair.

Une fois la définition de la fonction acquise, les règles élémentaires d'addition et de multiplication des séries peuvent être étendues immédiatement à des séries entières divergentes; je fais cette extension dans une seconde section.

Enfin, dans la troisième et dernière section, je discute brièvement certains des résultats sur lesquels repose la méthode, et, plus particulièrement, la notion fondamentale de *fraction continue simple*.

Ce travail a été résumé dans une courte Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris, le 27 mars 1893.

I.

(2). Désignons par y la série entière convergente ou divergente

$$s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \dots,$$

dans laquelle nous supposons s_0 différent de zéro.

Soient p, q deux nombres, égaux ou inégaux, pris dans la suite $0, 1, 2, 3, \dots$. A ces deux nombres correspond une fraction rationnelle $\frac{U}{V}$, dans laquelle U est de degré au plus égal à p, V de degré au plus égal à q, et qui jouit de la propriété suivante: son développement suivant les puissances croissantes de x coïncide avec la série y jusqu'à un terme de rang plus élevé que cela n'aurait lieu avec toute autre fraction rationnelle dont les degrés des termes ne dépasseraient pas non plus respectivement p et q. Cette fraction speciale $\frac{U}{V}$, nous la nommerons la *fraction rationnelle approchée* de y correspondant au couple (p, q).

Les fractions rationnelles approchées de y forment une suite illimitée à double entrée; nous pouvons les imaginer écrites dans les cases d'un tableau à double entrée (T), les files verticales correspondant aux valeurs $0, 1, 2, \dots$ de p, et les files horizontales à ces mêmes valeurs de q.

Si la fraction approchée qui correspond au couple (p, q) ne figure qu'une seule fois dans le tableau (T), les degrés de ses termes sont précisément égaux à p et q, et son développement suivant les puissances de x coïncide avec la série y jusqu'au terme, exclusivement, de degré $p + q + 1$, terme qui figure nécessairement dans la série. Nous dirons alors que la fraction approchée est une *fraction normale*.

Dans ce qui suit, pour simplifier, nous considérons seulement le cas où le tableau (T) ne renferme que des fractions normales.

Nous dirons de deux fractions approchées $\frac{U}{V}$, $\frac{U'}{V'}$, qui correspondent aux couples (p, q), (p', q'), qu'elles sont *également avancées* dans le tableau, si $p+q$ est égal à $p'+q'$; la fraction $\frac{U'}{V'}$ sera dite plus avancée que la fraction $\frac{U}{V}$, si $p'+q'$ est supérieur à $p+q$. Enfin, deux fractions approchées seront dites *contiguës,* si les cases où elles figurent ont un côté ou un sommet commun.

Extrayons du tableau (T) une suite linéaire de fractions satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. La première fraction sera une fraction du bord du tableau;
2°. Deux fractions consécutives quelconques seront contiguës;
3°. Chaque fraction sera plus avancée dans le tableau que celle qui la précède.

Les fractions d'une telle suite sont les réduites successives d'une fraction continue, dont les numérateurs partiels sont tous des monômes entiers en x dont le degré et le coefficient sont différents de zéro, et les dénominateurs partiels des polynômes dont le terme constant est différent de zéro; à la condition, toutefois, d'adopter, si la première fraction de la suite appartient au bord supérieur du tableau, une fraction continue de la forme

$$\text{(I)} \qquad a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cfrac{\alpha_3}{a_3 + \cdots}},$$

où a_1 est un polynôme, et, si la première fraction de la suite appartient au bord latéral du tableau, une fraction continue de la forme

$$\text{(II)} \qquad \cfrac{\alpha_1}{a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cdots}},$$

α_1 étant une constante. Une fraction continue de cette nature, qu'elle appartienne à l'une ou à l'autre forme, est dite une *fraction continue simple.*

Réciproquement, si les réduites d'une fraction continue simple appartiennent toutes au tableau (T), elles forment une suite de fractions qui satisfait aux trois conditions énoncées précédemment.

(3). Les fractions de la première file horizontale du tableau satisfont à ces conditions; elles ne sont autres que les polynômes obtenus en limitant la série y à ses termes successifs. La fraction continue simple correspondante, qui est de la forme (II), s'obtient immédiatement au moyen des équations

$$\begin{aligned} \alpha_{n+3} S + a_{n+3}(S + s_{n+1}x^{n+1}) &= S + s_{n+1}x^{n+1} + s_{n+2}x^{n+2}, \\ \alpha_{n+3} \quad + a_{n+3} \qquad\qquad &= 1, \end{aligned}$$

où S représente le polynôme, de degré n, qui correspond au couple $(n, 0)$. Ces équations n'expriment pas autre chose que la loi de formation des réduites; elles donnent

$$a_{n+3} = 1 + \frac{s_{n+2}}{s_{n+1}} x, \qquad \alpha_{n+3} = -\frac{s_{n+2}}{s_{n+1}} x,$$

et l'on obtient ainsi la fraction continue

$$\cfrac{s_0}{1 - \cfrac{\frac{s_1}{s_0} x}{1 + \frac{s_1}{s_0} x - \cfrac{\frac{s_2}{s_1} x}{1 + \frac{s_2}{s_1} x - \cfrac{\frac{s_3}{s_2} x}{1 + \frac{s_3}{s_2} x - \dots}}}},$$

déjà donnée par EULER dans son *Introductio*.

(4). De cette fraction continue peut se déduire immédiatement la série y correspondante, et ces deux expressions analytiques semblent s'équivaloir entièrement. Cependant, au point de vue de la formation du tableau (T), une distinction doit être faite entre elles: il faut ne voir, dans la série y, que la fraction de rang infiniment grand de la première file horizontale du tableau, tandis que la fraction continue doit être regardée comme faisant connaître, par ses réduites successives, la suite complète des fractions de cette première file. Et, en effet, c'est la généralisation de cette deuxième manière de concevoir la définition du tableau (T) qui nous amène à cette proposition fondamentale: *Le tableau (T) est défini par l'une quelconque de ses fractions continues simples.*

La démonstration repose sur cette remarque que, si l'on connaît la fraction $\frac{U}{V}$ qui correspond au couple (p, q), toutes celles qui sont au plus aussi avancées se trouvent par là-même déterminées.

Soit, en effet, $\frac{U'}{V'}$ une fraction, correspondant au couple (p', q'), au plus aussi avancée que $\frac{U}{V}$, en sorte que la somme $p' + q'$ soit au plus égale à $p + q$. Les développements, suivant les puissances croissantes de x, de $\frac{U}{V}$ et de $\frac{U'}{V'}$ coïncident avec la série y respectivement jusqu'aux termes, exclusivement, de degrés $p + q + 1$ et $p' + q' + 1$; comme $p' + q' + 1$ est au plus égal à $p + q + 1$, on en conclut que les développements de $\frac{U}{V}$ et de $\frac{U'}{V'}$ coïncident entre eux jusqu'aux termes inclusivement, de degré $p' + q'$; donc, si l'on forme le tableau des fractions rationnelles approchées de la fonction $\frac{U}{V}$, la fraction $\frac{U'}{V'}$ sera la fraction de ce tableau qui correspond au couple (p', q'). Ainsi, dès que $\frac{U}{V}$ est connue, $\frac{U'}{V'}$ l'est également.

On voit alors qu'il suffit qu'une suite illimitée de fractions de plus en plus avancées du tableau (T) soit donnée, pour que le tableau tout entier se trouve défini. Or, les réduites d'une fraction continue simple du tableau constituent une suite de cette nature, et la proposition que nous voulions démontrer se trouve établie.

(5). Dans leurs travaux sur le développement en fractions continues des fonctions, Laguerre et Halphen[1] ont mis en lumière deux faits extrêmement remarquables auxquels nous allons avoir recours maintenant.

Laguerre a établi qu'à une série entière divergente pouvait correspondre une fraction continue simple convergente; puis Halphen a montré,

---

[1] Laguerre: Bulletin de la Société mathématique de France, t. 7, 1879; Journal de mathématiques pures et appliquées, 4[e] série, t. 1, 1885.

Halphen: Comptes rendus de l'Académie des sciences, t. 100, 1885; *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. 2, 1888.

qu'inversement, une fraction continue simple pouvait être divergente, alors que la série correspondante était convergente.

Nous sommes maintenant en état de concevoir ces deux résultats particuliers dans ce qu'ils ont de général, et nous dirons simplement: *parmi les fractions continues simples, en nombre illimité, qui peuvent être déduites d'un tableau de fractions rationnelles approchées, les unes peuvent être convergentes, les autres divergentes.*

Supposons alors que l'on ait une fraction continue simple dont toutes les réduites appartiennent à un même tableau de fractions rationnelles approchées; ce tableau se trouve par là entièrement défini; il lui correspond une infinité de fractions continues simples; si, parmi elles, il en est une qui soit convergente, elle définit une fonction, et le tableau est celui des fractions rationnelles approchées de cette fonction. Ainsi, partant d'une fraction continue simple convenable, sans rien supposer, toutefois, sur sa convergence ou sa divergence, nous parvenons à la définition d'une fonction; cette fonction est évidemment la valeur, au sens habituel de ce mot, de la fraction continue simple, au cas où celle-ci est convergente.

Dans l'hypothèse très particulière où la fraction continue simple qui sert de point de départ est celle d'Euler, ou, ce qui revient au même, si c'est une série entière qui sert à définir le tableau, nous avons cette proposition: *une série entière peut suffire, qu'elle soit convergente ou divergente, à définir une fonction; et cette définition est alors telle que, lorsque la série est convergente, la fonction n'est autre que la somme de la série.*

II.

(6). Soient (T_1) et (T_2) deux tableaux de fractions rationnelles approchées, que nous supposerons, comme précédemment, uniquement composés de fractions normales.

De ces deux tableaux, nous en déduisons un troisième (T) de la façon suivante: désignons par $\frac{U_1}{V_1}, \frac{U_2}{V_2}$ les fractions qui, dans $(T_1), (T_2)$, correspondent au couple (p, q). Faisons la somme $\frac{U_1}{V_1} + \frac{U_2}{V_2}$, et formons la fraction rationnelle approchée $\frac{U}{V}$ qui, pour cette fonction, correspond au couple (p, q). La fraction $\frac{U}{V}$ sera celle que nous ferons figurer, dans le tableau (T), dans la case (p, q).

Je dis maintenant que, si les tableaux (T_1) et (T_2) définissent chacun une fonction, respectivement les fonctions y_1 et y_2, le tableau (T) est un tableau de fractions rationnelles approchées, il définit une fonction y, et cette fonction est la somme $y_1 + y_2$ des deux premières.

Dans ces hypothèses, on a, en effet,

$$y_1 = \frac{U_1}{V_1} + h_1 x^{p+q+1} + h_1' x^{p+q+2} + \ldots,$$

$$y_2 = \frac{U_2}{V_2} + h_2 x^{p+q+1} + h_2' x^{p+q+2} + \ldots;$$

d'autre part, en raison de la façon même dont est définie la fraction $\frac{U}{V}$:

$$\frac{U_1}{V_1} + \frac{U_2}{V_2} = \frac{U}{V} + k x^{p+q+1} + k' x^{p+q+2} + \ldots;$$

et on conclut de ces égalités celle-ci:

$$y_1 + y_2 = \frac{U}{V} + h x^{p+q+1} + h' x^{p+q+2} + \ldots.$$

Si donc on forme le tableau qui correspond à la fonction $y_1 + y_2$, la fraction $\frac{U}{V}$ sera, dans ce tableau, celle qui figure dans la case (p, q); en d'autres termes, le tableau obtenu n'est autre que (T), ce qui démontre la proposition.

(7). Si $\frac{U_1}{V_1}$ et $\frac{U_2}{V_2}$ sont des polynômes, la fraction $\frac{U}{V}$ est simplement leur somme.

Supposons maintenant que les deux tableaux (T_1) et (T_2) aient été déduits de deux séries entières, convergentes ou divergentes; alors les polynômes qui composent la première file horizontale du tableau (T)

sont ceux que l'on déduit de la série, convergente ou divergente, obtenue en ajoutant terme à terme les deux séries données, et l'on arrive ainsi à ce résultat: *Si deux séries entières, convergentes ou divergentes, définissent chacune une fonction, la série, convergente ou divergente, obtenue en les ajoutant terme à terme, définit elle-même une fonction qui est la somme des deux premières.*

(8). Tout ce que nous venons de dire pour l'addition peut évidemment être répété pour la multiplication; la fraction $\frac{U}{V}$ du tableau (T), qui correspond au couple (p, q), est alors la fraction rationnelle approchée de la fonction $\frac{U_1}{V_1} \times \frac{U_2}{V_2}$ pour le couple (p, q). On arrive à cette conclusion: *Si deux séries entières, convergentes ou divergentes*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

définissent chacune une fonction, la série entière, convergente ou divergente,

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots$$

définit elle-même une fonction qui est le produit des deux premières. [1]

III.

(9). On voit le rôle fondamental que prennent, dans les considérations qui précèdent, les résultats obtenus par LAGUERRE et HALPHEN; ils constituent, avec la notion de la multiplicité des fractions continues simples pour une même fonction, le fond même de la méthode.

Déjà, au siècle dernier, LAMBERT avait constaté, par le calcul direct d'un certain nombre de réduites, qu'une fraction continue pouvait être convergente tandis que la série d'où on l'avait déduite était divergente;

---

[1] Ces résultats ont été communiqués à M. J. TANNERY dans une lettre datée de Gœttingue, le 1er avril 1891.

mais c'est là une constatation qui, après des exemples comme ceux que nous offre la série de STIRLING, est totalement dénuée de valeur démonstrative, et LAGUERRE est le premier qui ait mis le fait en question tout à fait hors de doute.

J'ai donné la définition précise de la fraction continue simple et établi les modes de génération de celles qui correspondent à une fonction dans le mémoire auquel se rapporte ce travail.

Auparavant, les Géomètres qui s'occupaient de la question du développement d'une fonction en fractions continues se trouvaient en présence tantôt de l'une, tantôt de l'autre de celles qui correspondent à la fonction qu'ils étudiaient; en sorte que, sous cette expression »le développement d'une fonction en fraction continue», on a entendu les choses les plus diverses.

Le plus généralement, ils supposaient la série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x. En suivant alors, pas à pas, la méthode qui est employée pour obtenir le développement en fraction continue arithmétique d'un nombre irrationnel, on obtient une fraction continue où tous les numérateurs partiels sont égaux à l'unité et tous les dénominateurs partiels des polynômes entiers en x. La nature de l'approximation donnée par les réduites successives a alors un caractère très précis qui les caractérise complètement.

C'est la convergence d'une fraction continue de cette nature que LAGUERRE a mise en évidence, alors que la série, ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, d'où il l'a déduite, est divergente et satisfait, au point de vue *formel,* à une équation différentielle linéaire du premier ordre; la fonction vers laquelle converge la fraction continue est une intégrale de cette équation.

Si, dans une telle fraction continue, on remplace x par $\frac{1}{x}$ et que l'on rende, par des multiplications convenables, tous les éléments, numérateurs et dénominateurs partiels, entiers, on obtient une fraction continue simple. Dans le cas le plus général, cette fraction est *régulière:* tous les numérateurs partiels sont du second degré, et tous les dénominateurs partiels du premier; dans tous les cas, c'est une fraction très particulière parmi celles qui correspondent à la fonction.

Ce sont des développements de cette dernière forme régulière que

Jacobi avait adoptés pour la fonction $\sqrt{P(x)}$, $P(x)$ représentant un polynôme du quatrième degré, alors qu'il en a fait connaître, sans démonstration, les expressions générales des réduites en termes elliptiques. Mais, tandis qu'il y a une infinité de tels développements pour la fonction, ayant cette forme régulière ou d'autres encore, il n'en a considéré que deux. Halphen, entrant dans la voie qui lui était ainsi ouverte, a repris également ces deux seuls développements pour démontrer, d'abord les propositions de Jabobi, et en déduire, ensuite, avec une sagacité merveilleuse, les admirables résultats que l'on sait et qui ont été si justement appréciés par M. Poincaré dans la notice qu'il a consacrée, dans le journal de l'Ecole Polytechnique, a l'illustre Géomètre. Mais n'est-il pas permis de croire que cette particularisation excessive des développements considérés a pu cacher ce que les résultats obtenus peuvent avoir de général, et, par conséquent, la loi, sans doute plus simple, dont ils ne sont que des cas spéciaux.

C'est une autre forme de fraction continue simple que celle que Gauss a fait connaître pour le quotient de deux séries hypergéométriques; elle est également régulière, les numérateurs partiels y sont du premier degré, et les dénominateurs partiels sont des constantes. Là encore, il y a, pour la fonction, un nombre illimité de développements de cette forme, tandis que, jusqu'ici, celui de Gauss seul a été considéré. On sait la belle tentative faite par Riemann pour établir la convergence de cette fraction continue. En lisant sa démonstration, on peut remarquer qu'il obtient, pour expression générale par des séries hypergéométriques de la réduite de rang m, deux formes différentes suivant que m est pair ou impair; c'est qu'au fond la fraction continue considérée n'est que la superposition, pour ainsi dire, de deux fractions continues simples, l'une d'elles ayant pour réduites les réduites de rang pair, et l'autre les réduites de rang impair, fractions qui pourraient être obtenues immédiatement par la simple application d'une identité de Lagrange; mais alors il semble bien que la méthode de démonstration de Riemann, si tant est qu'elle soit tout à fait rigoureuse, s'appliquerait à la démonstration de la convergence des autres fractions continues régulières relatives à la fonction considérée.

Le développement d'Euler, enfin, est un troisième type de développement encore considéré autrefois. Il est également régulier; les numérateurs et les dénominateurs partiels sont du premier degré. Comme dans les cas précédents, il y a, pour une fonction, une infinité de développements de cette forme, et le seul qui ait été considéré jusqu'ici est celui-là même donné par EULER, qui a pour réduites les polynômes successifs de la série.

Ces quelques exemples ne suffisent-ils pas déjà à justifier cette assertion qu'un sens assez vague était attaché à cette expression de développement d'une fonction en fraction continue, qu'on entendait par là des modes de développements fort différents les uns des autres, sans liens apparents entre eux, qu'on n'apercevait pas la multiplicité, pour une même fonction, des fractions continues de chacun de ces modes.

Les ouvrages classiques traitant de la question accusent, en général, au plus haut point, ces défauts. Je ne parle pas de l'étrange confusion qui y apparaît entre la théorie du développement d'un nombre irrationel en fraction continue arithmétique et celui d'une fonction en fraction continue algébrique; le rapprochement que l'on fait toujours entre ces deux ordres de faits est tout aussi bizarre que le serait l'idée que la théorie des séries entières doit toujours et nécessairement être précédée de la théorie des fractions décimales. Mais on peut constater que les auteurs négligent de faire savoir ce qu'ils entendent par le développement d'une fonction en fraction continue, ou que, s'ils font connaître une définition, ils choisissent un mode particulier de développement dans lequel ne rentrent pas ensuite tous leurs exemples, ou même dont il n'a jamais été donné aucun exemple.

Mais il y a plus. Au moins tous les développements que nous avons cités jusqu'ici, si divers et si épars soient-ils, avaient ce caractère commun que leurs réduites avaient avec la fonction développée certaines relations précises d'approximation; mais on a été jusqu'à donner, sous le nom de développement en fraction continue d'une fonction, des expressions qui n'ont plus avec celle-ci aucun rapport, au point de vue de l'approximation donnée par les réduites.

Je puis, par exemple, égaler une fonction à une fraction continue limitée dans laquelle je me donne arbitrairement tous les numérateurs partiels et tous les dénominateurs partiels sauf le dernier, et regarder cette égalité comme une équation d'où je déduis ce dernier dénominateur. Si, maintenant, je développe celui-ci, n'importe comment, en fraction continue et que je le remplace, dans l'égalité, par ce développement, j'obtiens une fraction continue à la formation de laquelle a bien contribué la fonction; mais il est bien clair que les réduites de cette fraction, au moins les premières, n'ont plus absolument aucune relation d'aucune espèce avec la fonction développée; doit-on dire que l'on a là un développement en fraction continue de la fonction?

De même, il ne suffit pas qu'une fonction satisfasse à une équation fonctionnelle linéaire à trois termes, analogue aux relations entre séries hypergéométriques contiguës, pour que le développement que l'on en déduit, par le procédé connu, pour le quotient de deux de ces fonctions, ait quelque relation d'approximation avec ce quotient. Il semble qu'on l'ait pu croire, cependant, et qu'on se soit demandé quelles relations les réduites d'un développement obtenu ainsi pouvaient avoir avec celles des développements d'EULER et de GAUSS, sans qu'on ait pu faire la réponse, bien entendu.

(10). Ce sont toutes ces constatations qui, alors que, guidé par de fausses analogies entre la théorie des fractions continues arithmétiques et celle des fractions continues algébriques, je poursuivais un but bien différent, m'ont conduit à rechercher des fondements précis d'une théorie des fractions continues algébriques. Prenant pour point de départ le caractère des réduites d'être des fractions rationnelles approchées de la fonction, j'ai été amené à la définition de la fraction continue simple, à la notion de leur multiplicité pour une même fonction, à l'étude des types réguliers, rattachant ainsi à une conception générale et parfaitement précise tous les exemples divers donnés antérieurement.

La fraction continue simple est à celles où les éléments sont simplement rationnels, ce que la série entière est à celles où les termes sont aussi simplement rationnels; c'est là une analogie importante pour justifier l'introduction de la notion de fraction continue simple, et qui eut peut-être empêché certains doutes de se manifester [1] si je l'avais plus clairement mise en évidence.

---

[1] Revue générale des sciences, 3[e] année, p. 381. M. L. AUTONNE m'accorde un résultat que je n'ai pas obtenu. Si j'ai tenté de traiter, par ma méthode, la série hypergéométrique, ce dont je ne dis pas un mot dans mon mémoire, mes efforts ont

Le caractère fondamental d'une série entière consiste en ce que chaque nouveau terme ajouté est un monôme entier de degré supérieur à tous les précédents, en sorte que l'on obtient des polynômes qui représentent avec une approximation de plus en plus grande l'un quelconque de ceux qui viennent après.

Or, dans une fraction continue simple, ce caractère fondamental se retrouve: chaque réduite représente avec une approximation qui croît en même temps que le rang l'une quelconque des réduites suivantes; et il disparaît si l'on modifie de quelque façon la définition, comme le peuvent montrer les exemples les plus simples. Si donc on veut trouver, dans les fractions continues, l'analogue de la série entière, c'est tout au moins parmi les fractions continues simples qu'il faut le chercher. Le seul reproche que l'on pourrait encore adresser à la définition de la fraction continue simple, c'est de n'être pas encore assez restrictive; et, en effet, cette définition laisse échapper ce caractère important, sur lequel j'ai insisté précédemment et qui appartient aux séries entières, que ses réduites soient nécessairement des fractions rationnelles approchées pour une réduite de rang plus élevé quelconque; si on se donne, à priori, une fraction continue simple, ses réduites ne sont par conséquent pas nécessairement des fractions d'un tableau de fractions rationnelles approchées; elle ne définit pas en général un tel tableau, tandis qu'une série entière le définit toujours.

(11). Comme une série entière peut être mise sous forme de fraction continue simple, le théorème d'Abel sur la convergence des séries entières peut être transporté à cette fraction continue, et l'on est alors conduit à rechercher ce que devient ce théorème quand, au lieu de considérer la fraction continue d'Euler, on s'adresse à une fraction continue simple quelconque. Comme je l'ai montré, on retrouve la notion de cercle de convergence, mais modifiée d'une façon essentielle, en ce qu'il peut y avoir, à l'intérieur du cercle de convergence, des ensembles spéciaux de points, isolés ou formant des lignes ou des champs, pour lesquels la fraction diverge, tandis qu'inversement de tels ensembles peuvent se présenter à l'extérieur du cercle de convergence pour lesquels la fraction converge.

échoué; je n'ai traité, en empruntant l'expression générale de la fraction rationnelle approchée à M. Hermite, que la fonction exponentielle.

Ces considérations montrent combien il serait intéressant de reprendre, au point de vue général auquel nous pouvons nous placer maintenant avec la notion de la multiplicité des fractions continues pour une même fonction, les beaux travaux d'HALPHEN, qui semble bien avoir rencontré les premiers exemples de ces ensembles spéciaux de points où il y aurait convergence ou divergence anomales.

Lyon, le 26 février 1893.