SUR LES PÔLES DES FONCTIONS UNIFORMES À PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES

PAR

LÉON AUTONNE

À LYON.

CHAPITRE I.

Problème $[r + 1]$.

1° Prenons une fonction uniforme X de $r+1$ variables indépendantes y et x_i, $(i = 1, 2, \ldots, r)$, que l'on peut toujours assimiler aux coordonnées d'un point ζ dans un espace à $r + 1$ dimensions E_{r+1}. Un point ω, $[y = b; x_i = a_i]$, où X n'est pas régulière, sera un »point singulier non essentiel» (WEIERSTRASS, *Abhandlungen aus der Functionenlehre;* 5ème section; page 130) ou »pôle», si, dans le domaine de ω, X est identique au quotient $P_1 : P_0$ de deux fonctions régulières en ω.

2° Supposons que les deux séries P_1 et P_0, *débarrassées de leur p. g. c. d.,* soient nulles en ω. Les allures de X sont très indéterminées en ω et aux abords (WEIERSTRASS, l. c. pages 130 et suivantes), comme on sait.

Il m'a paru intéressant de discuter cette indétermination de X au pôle par une voie un peu différente. Cette dernière est, au fond, une généralisation des procédés employés, dans le cas d'une seule variable, pour lever l'indétermination des symboles dits illusoires $\frac{0}{0}$.

3° La valeur X_ω de X au pôle n'est plus calculable par la division $P_1 : P_0$, le dividende et le diviseur étant nuls tous deux. X_ω sera, *par* *définition*, la valeur limite vers laquelle tend X, quand ζ tend vers ω, c'est à dire quand les modules $|y - b|$, $|x_i - a_i|$ décroissent indéfiniment. Seulement alors X_ω ne sera plus unique et dépendra

soit de la loi conformément à laquelle décroissent simultanément les modules $|y - b|$ et $|x_i - a_i|$,

soit, pour employer un langage géométrique, de l'*itinéraire* $\mathfrak{W}$, que suit ζ pour tendre vers ω.

Dans le cas d'une seule fonction X, X_ω peut (WEIERSTRASS l. c.) prendre en ω une valeur quelconque arbitrairement donnée à l'avance. Au contraire prenons N fonctions, ($N \geqq r + 1$; $P_j = 0$ en ω):

$$X_j = P_j : P_0 \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

munies d'un même dénominateur P_0 et analogues à $X = P_1 : P_0 = X_1$.

Les N valeurs limites des X_j en ω, fournies par *un même itinéraire* $\mathfrak{W}$, ne sont pas *simultanément arbitraires*. Si l'on s'en donne quelques-unes, les autres s'en déduisent.

C'est l'étude de ces dépendances mutuelles qui constitue le fond des présentes recherches.

4° Supposons, pour simplifier. le pôle ω situé à l'origine des coordonnées dans l'espace E_{r+1}, c'est à dire $b = a_i = 0$; prenons $N + 1$ fonctions $F_j(y, x_1, \ldots, x_r)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$, régulières et nulles en ω, avec $N \geqq r + 1$. Nous traiterons le problème suivant:

»construire tous les systèmes de valeurs limites vers lesquelles tendent simultanément les rapports des F_j, quand les modules des $r + 1$ variables tendent à la fois vers zéro».

Nous lui donnerons le nom de »problème $[r + 1]$», notation qui met en évidence le nombre $r + 1$ des variables indépendantes. Le nombre N ne joue aucun rôle essentiel, pourvu qu'il ne soit pas inférieur à $r + 1$.

5° On peut formuler le problème $[r + 1]$ dans un langage géométrique plus commode.

Les $r + 1$ variables indépendantes y et x_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, étant, comme précédemment, les coordonnées d'un point ζ dans un espace E_{r+1} à $r + 1$ dimensions, prenons, dans un espace E_N, les $N + 1$ coordonnées homogènes ξ_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$, d'un point ξ.

En vertu des égalités $\rho\xi_j = F_j$, $\rho =$ facteur de proportionnalité, ξ est l'*image* de ζ. Quand ζ parcourt dans E_{r+1} le domaine commun de convergence $\mathfrak{C}$ des séries F_j, ξ parcourt dans E_N une variété à $r + 1$ dimensions Ξ_{r+1}. Lorsque ζ tend vers ω suivant un certain itinéraire $\mathfrak{W}$, ξ tend vers une certaine position limite $\bar{\xi}$, dont les coordonnées $\bar{\xi}_j$ sont proportionnelles aux limites des F_j.

Le problème [$r + 1$] s'énonce géométriquement ainsi: »construire la figure Ω_{r+1}, constituée par l'ensemble des points $\bar{\xi}$».

6° Le problème [1] ou $r = 0$ se résout immédiatement; Ω_1 se reduit à un point unique.

J'ai consacré à la résolution du problème [2]

une Note (11 novembre 1895) insérée aux Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris,

un Mémoire inséré aux iRendicon du Cercle Mathématique de Palerme année 1896.

Le cas $r = 2$, problème [3], a fait l'objet de deux Notes (Comptes Rendus, 9 et 30 décembre 1895).

Pour le problème [2], Ω_2 est un système de courbes unicursales de l'espace E_N, que j'ai appelées »fondamentales».

Dans le problème [3], Ω_3 est, dans E_N,

ou bien: un système de surfaces en nombre fini, accompagné d'un système de courbes unicursales en nombre fini (le pôle ω est alors un *zénith*);

ou bien: un système exclusivement composé de courbes unicursales en nombre fini (le pôle ω est alors un *nadir*).

Les mots »courbe» et »surface» de l'espace E_N désignent des variétés à une et deux dimensions respectivement.

Les théories qu'on trouvera ci-après sont entièrement différentes de celles qui viennent d'être rappelées. Il convient d'expliquer pourquoi.

7° Pour résoudre le cas [3] j'ai employé un procédé de réduction successive pour la singularité du pôle sur la *surface* $F_j = 0$. Ce mode de raisonnement devient inextricable pour plus de trois variables indépendantes.

8° Le procédé qui m'a servi à résoudre le cas [2] ne peut non plus se généraliser.

Il est licite dans tous les cas, comme on le verra dans le chapitre suivant, sans restreindre la généralité, de faire

$$F_j = K_j y^m \sum_{l=m-1}^{l=0} y^l A_{jl}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

où les K sont des constantes non nulles et les A des fonctions régulières et nulles au pôle ω.

Soient η_{jl}, $l = 1, 2, \ldots, m$, les m racines de l'équation *algébroïde* en y, $F_j = 0$. Alors

$$F_j \equiv K_j \prod_l (y - \eta_{jl}).$$

Pour $r = 1$, problème [2], on connait parfaitement la nature analytique des η. M. Poincaré dans sa Thèse Inaugurale a démontré que

$$\left|\begin{array}{ll} \eta_{jl} = \theta_{jl}(t), & t^{n_{jl}} = x_1\,; \\ \theta_{jl} = \text{holomorphe}; & n_{jl} = \text{entier positif} \leqq m \end{array}\right|.$$

Au premier chapitre de mon Mémoire des Rendiconti, j'ai effectivement construit les développements θ.

Dès lors la décomposition de F_j en facteurs binômes $y - \eta_{jl}$ peut se réaliser et a servi de base à mon analyse des Rendiconti.

Au contraire, quand $r > 1$, on connait beaucoup moins la nature des fonctions η; la décomposition en facteurs ne sert plus à rien.

9° A la vérité M. Kobb (Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1892) dans son Mémoire: *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables,* a, quand F_j est un polynôme par rapport à toutes les variables, représenté les y et x_i, liées par l'équation $F_j = 0$, par un nombre fini de séries à r variables auxiliaires u. Seulement le choix des u comporte une dose considérable d'indétermination qui masque la nature des η. Cette indétermination n'est pas fortuite et ne peut être levée. Elle a sa source dans le fait bien connu suivant: quand on représente une relation algébrique entre deux variables par un nombre fini de séries, le choix de ces dernières peut se faire d'*une infinité de façons différentes* (position arbitraire des points réguliers sur la courbe algébrique).

Il n'est pas douteux que les η possèdent des propriétés indépendantes du choix des u; on trouverait là matière à l'établissement d'une *théorie des invariants.* Cette dernière à été esquissée par M. KOBB lui-même (*Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables,* Bulletin de la Société Mathématique de France, 1893, pages 76 à 81), mais semble extrêmèment difficile.

10° Quoiqu'il en soit, j'ai dû résoudre le problème [$r+1$] par une toute autre voie que les problèmes [2] et [3].

La méthode tout-à-fait générale est celle-ci: »ramener la résolution du problème [$r+1$] à celle du problème [r]» c'est à dire, procédant de proche en proche »à celle du problème [1]», directement soluble, ou à »celle du problème [2]» résolu précédemment.

Les détails d'application pour la méthode sont exposés ci-après au chapitre II, mais en voici le principe très-simple.

Comme, dans les relations

$$\rho\xi_j = F_j(y\,;\,x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_r)$$

qui définissent le problème [$r+1$], on peut supposer, sans restreindre la généralité, que les F_j sont des polynômes en y, le procédé purement élémentaire et rationnel de l'élimination ordinaire, convenablement dirigé, permet de se débarrasser de la [$r+1$]$^{\text{ième}}$ variable y, et on est ramené au cas de r variables c'est à dire au problème [r].

Un résumé de la méthode a paru dans les Comptes Rendus (18 janvier 1897).

11° Il serait oiseux d'énumérer toutes les applications possibles des présentes recherches; le lecteur les apercevra lui-même sans peine.

J'en signalerai seulement deux.

On peut faire la discussion *complète,* quelle que soit la singularité, des points *fondamentaux* et des courbes *fondamentales* dans les substitutions Cremona, c'est à dire birationnelles planes. C'est ce qu'on trouvera au troisième chapitre de mon Mémoire des Rendiconti.

Il est possible d'établir une généralisation complète, pour une singularité aussi compliquée qu'on voudra, des travaux de M. NÖTHER (Math. Annalen, t. 3, *Über eindeutige Transformation des Raumes*) relatifs aux points »fondamentaux», aux courbes et surfaces »fondamentales» dans les substitutions birationnelles de l'espace ordinaire.

C'est à l'occasion de ce dernier problème (voir ma Note des Comptes Rendus du 11 mai 1896, *Sur les substitutions régulières non linéaires*) que j'ai abordé les présentes recherches.

La théorie de la birationnalité dans l'espace ordinaire fera l'objet d'un travail ultérieur.

CHAPITRE II.

Réduction du problème $[r+1]$ au problème $[r]$.

1° Soient les équations

$$\rho \xi_j = F_j(y\,;\, x_1\,, \ldots, x_r), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

où les F_j sont des séries entières, convergentes pour

$$|y| \leqq \partial \qquad |x_i| \leqq \partial_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

les ∂ étant des quantités positives données; de plus, par hypothèse,

$$F_j(0\,;\, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Le problème $[r+1]$, défini aux 4° et 5° du chapitre I, consiste »à connaitre tous les systèmes de valeurs, vers lesquelles tendent les rapports des F_j, quand les modules des $r+1$ variables y et x_i tendent vers zéro», ou, en langage géométrique, »à construire la figure Ω_{r+1}, lieu du point $\bar{\xi}$, quand le point ζ de l'espace E_{r+1} tend vers le point ω, où toutes les variables sont nulles, par tous les itinéraires possibles $\mathfrak{W}$».

Je dirai qu'un itinéraire $\mathfrak{W}$ *fournit* le point $\bar{\xi}$, lorsque ξ tend vers $\bar{\xi}$, quand ζ tend vers ω en suivant $\mathfrak{W}$.

Si, dans E_{r+1}, ζ tend vers ω suivant $\mathfrak{W}$, le point x, de coordonnées x_i, dans un espace E_r, tend vers le point x_0, où $x_i = 0$, suivant un itinéraire parfaitement déterminé $\mathfrak{w}$.

2° Opérant au besoin une collinéation convenable tant sur les $N+1$ variables ξ_j que sur les $r+1$ variables y et x_i, c'est à dire un changement de coordonnées dans les deux espaces E_N et E_{r+1}, il est licite de supposer que

$$F_j(y\,;\,0\,,0\,,\ldots,0) = y^m\{K_j + y(\ldots)\},$$

la constante $K_j \neq 0$. Alors le théorème fondamental de WEIERSTRASS permet de remplacer F_j par

$$f_j\,.\,\{1 + \Phi_j(y\,,x_1\,,\ldots,x_r)\}, \qquad \Phi_j(0\,;0\,,\ldots,0) = 0,$$

$$f_j(y) = K_j y^m + a_{j,m-1}y_{m-1} + \ldots + a_{j0},$$

les a étant holomorphes en x_i et nuls avec $x_i = 0$; $i = 1\,,2\,,\ldots,r$.

Il est évident que les rapports des F_j tendent vers les mêmes limites que les rapports des *polynômes* $f_j(y)$ en y.

3° Rappelons maintenant, en les étendant à un espace E_N quelconque, quelques propriétés des courbes planes unicursales (voir LÜROTH, Math. Annalen, t. 9, et CLEBSCH, *Leçons sur la géométrie*, t. 3 de la traduction française A. BENOIST, page 287 et suivantes).

Soient les $N+1$ équations

$$(0) \qquad \left|\begin{array}{c} \rho\xi_j = f_j(y) = K_j y^m + \ldots + a_{jl}y^l + \ldots + a_{j0} \\ j = 0\,,1\,,\ldots,N; \qquad l = 0\,,1\,,\ldots,m-1\,; \\ \text{les } K \text{ et les } a \text{ étant des constantes.} \end{array}\right|.$$

Formons aussi les expressions

$$\varphi_{\alpha\beta}(y) = \begin{vmatrix} f_\alpha & \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial y} \\ f_\beta & \dfrac{\partial f_\beta}{\partial y} \end{vmatrix} \qquad \alpha\,,\beta = 0\,,1\,,\ldots,N$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(y) = \sum_{n=0}^{n=2(m-1)} \Phi_{\alpha\beta n} y^n.$$

Quel est le lieu du point ξ quand y varie?

4° Il peut se faire d'abord que tous les $\varphi_{\alpha\beta}(y) \equiv 0$. Alors

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{f_\beta}{f_\alpha} \equiv 0 \qquad f_\beta : f_\alpha = \mathrm{C^{te}}.$$

Le p. g. c. d. des polynômes f_j est du degré m. Le point ξ est fixe. Ses coordonnées s'obtiennent par simple division des polynômes.

5° Ecartons ce cas particulier et supposons $\varphi_{01}(y) \not\equiv 0$, c'est à dire $f_1 : f_0$ variable. Soit k un troisième indice pris dans la suite $2, 3, \ldots, N$.

Traitons $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$ comme les coordonnées homogènes d'un point χ dans un plan $\mathbf{e}$. Les trois équations

$$(0) \qquad \rho\xi_0 = f_0(y), \qquad \rho\xi_1 = f_1(y), \qquad \rho\xi_k = f_k(y)$$

définissent dans $\mathbf{e}$ une courbe plane unicursale g. L'équation

$$P_k(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) = 0$$

de g s'obtient en éliminant ρ et y entre les trois égalités (0) ci-dessus; alors

$$P_k(f_0, f_1, f_k) \equiv 0.$$

La relation $P_k(\xi_0, \xi_1, \xi_k) \equiv P_k(\xi) = 0$ exprime que les deux équations en y

$$\frac{f_0}{\xi_0} = \frac{f_1}{\xi_1} = \frac{f_k}{\xi_k}$$

ont au moins une racine commune.

Les trois dérivées partielles

$$\frac{\partial P_k}{\partial \xi_0} \qquad \frac{\partial P_k}{\partial \xi_1} \qquad \frac{\partial P_k}{\partial \xi_k}$$

sont proportionnelles respectivement à

$$\varphi_{1k} \qquad \varphi_{k0} \qquad \varphi_{01}.$$

Par hypothèse $\varphi_{01} \not\equiv 0$, donc $\frac{\partial P_k}{\partial \xi_k} \not\equiv 0$ et 1° la variable ξ_k *figure effectivement* dans P_k, 2° $P_k(\xi) \not\equiv 0$.

P_k est une forme ternaire en ξ_0, ξ_1, ξ_k que nous écrirons

$$P_k = \sum p^{(k)}_{\beta_0 \beta_1 \beta_k} \xi_0^{\beta_0} \xi_1^{\beta_1} \xi_k^{\beta_k}.$$

Les p sont des polynômes par rapport aux coefficients (3°) K_j et a_{ji}.

6° Revenons maintenant à l'espace E_N et formons les $N-1$ équations

$$P_k = 0; \qquad k = 2, 3, \ldots, N.$$

Elles sont toutes distinctes. Aucune en effet ne peut être une conséquence algébrique des autres, car chacune P_k est seule à contenir effectivement la variable ξ_k.

Les $N - 1$ équations $P_k = 0$ définissent donc dans l'espace E_N une variété à *une* dimension ou *courbe* Γ.

Sous le bénéfice des relations $P_k = 0$, les N équations en y

$$\frac{f_0}{\xi_0} = \frac{f_1}{\xi_1} = \ldots = \frac{f_N}{\xi_N},$$

ou le système équivalent

$$(0) \qquad \left| \begin{array}{c} \xi_\beta f_\alpha(y) - \xi_\alpha f_\beta(y) = 0 \\ \alpha\,, \beta = 0\,, 1\,, \ldots\,, N \end{array} \right|,$$

possèdent s racines communes, $s \geqq 1$. Les premiers membres de (0) possèdent un p. g. c. d. de degré s

$$Y(y\,;\,\xi) \equiv Y(\xi) \equiv Y(y) \equiv Y_s y^s + Y_{s-1} y^{s-1} + \ldots + Y_0,$$

où, pour $\tau = 0\,, 1\,, \ldots\,, s$,

$$Y_\tau(\xi) = \sum q^{(\tau)}_{\gamma_0\gamma_1\ldots\gamma_N} \xi_0^{\gamma_0} \ldots \xi_N^{\gamma_N}.$$

Y_τ est un polynôme homogène par rapport aux ξ_j et les coefficients $q^{(\tau)}$ sont des polynômes par rapport aux K_j et aux a_{jl}.

Si on traite y comme un paramètre, l'équation $Y(\xi) = 0$ représente une »hypersurface» H.

7° Le point ξ, donné par les équations (0) du 3°, peut aussi être envisagé comme obtenu, dans l'espace E_N, par l'intersection de la courbe Γ avec l'hypersurface H. La courbe et l'hypersurface n'ont qu'*une seule* intersection *mobile avec* y; les coordonnées de cette intersection sont donc rationnelles en y. Elles sont proportionnelles aux f_j.

8° Rien n'est à changer aux calculs précédents (3° à 7°) lorsque les a_{jl} ne sont plus des constantes (comme au 3°) mais des fonctions holomorphes en x_i (comme au 2°).

Prenons le point x, de coordonnées x_i, indéterminé dans l'espace E_r et dans le domaine de convergence des séries. Nous aurons encore les

$N-1$ équations $P_k(\xi;x)=0$ de la courbe Γ et l'équation $Y(y;\xi;x)=0$ de l'hypersurface H. Les coefficients

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{\alpha\beta n} & \text{de} & \varphi_{\alpha\beta}(y) & (3°) \\ p^{(k)} & \text{de} & P_k & (5°) \\ q^{(\tau)} & \text{de} & Y_\tau & (6°) \end{array}$$

sont holomorphes en x_i. Pour $x_i=0$ les a_{jl} s'évanouissent par hypothèse. On voit sans peine qu'il en est de même des $\Phi_{\alpha\beta n}$. Alors $\varphi_{\alpha\beta}(y) \equiv 0$, $\frac{\partial P_k}{\partial \xi_0}=\frac{\partial P_k}{\partial \xi_1}=\frac{\partial P_k}{\partial \xi_k}\equiv 0$, $P_k \equiv 0$, $\rho^{(k)}_{\beta_0\beta_1\beta_k}=0$. Les équations (0) du 6° ont $m>s$ racines nulles c'est à dire communes et $q^{(\tau)}_{\gamma_0\ldots\gamma_N}=0$.

Quand x voyage dans le domaine de convergence commun $\mathfrak{E}$ des séries a, Φ, $p^{(k)}$, $q^{(\tau)}$, la courbe Γ et l'hypersurface H varient. Pour x infiniment voisin de x_0 (1°), c'est à dire pour $|x_i|$ infiniment petit,

$$|a_{jl}|, \quad |\Phi_{\alpha\beta n}|, \quad |p^{(k)}_{\beta_0\beta_1\beta_k}|, \quad |q^{(\tau)}_{\gamma_0\ldots\gamma_N}|$$

sont aussi infiniment petits.

9° Au lieu d'appliquer le calcul du 5° aux trois indices $0, 1, k$ nous aurions pu l'appliquer à trois indices différents quelconques j, j', j'' pris dans la suite $0, 1, \ldots, N$. Au lieu de P_k nous aurions obtenu

$$\Delta_{jj'j''}(\xi_j, \xi_{j'}, \xi_{j''}) = \sum D^{(jj'j'')}_{\delta_j\delta_{j'}\delta_{j''}} \xi_j^{\delta_j} \xi_{j'}^{\delta_{j'}} \xi_{j''}^{\delta_{j''}}.$$

Les trois dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\Delta_{jj'j''}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_{j'}}\Delta_{jj'j''}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_{j''}}\Delta_{jj'j''}$$

sont alors proportionnelles respectivement à

$$\varphi_{j'j''}(y), \quad \varphi_{j''j}(y), \quad \varphi_{jj'}(y).$$

10° Par hypothèse, nous savons résoudre le problème [r]. Appliquons le procédé aux fonctions D et Φ des r variables x_i. Dans l'espace E_r, x suivant vers x_0 un certain itinéraire $\mathfrak{w}$ nous construirons toutes les limites des rapports des D et des Φ. Nous pourrons notamment mettre dans $\varphi_{\alpha\beta}(y)$ un coefficient $\psi^{(\alpha\beta)}$ en facteur, tel que

$$\lim \frac{\Phi_{\alpha\beta n}}{\psi^{(\alpha\beta)}}, \qquad n = 0, 1, \ldots, 2(m-1),$$

reste finie [1] et écrire

$$\varphi_{\alpha\beta}(y) = \psi^{(\alpha\beta)}\chi_{\alpha\beta}(y).$$

Cela exige bien entendu que $\varphi_{\alpha\beta}(y) \not\equiv 0$ et qu'un au moins des $\Phi_{\alpha\beta n} \not\equiv 0$, quand x parcourt l'itinéraire $\mathfrak{w}$.

Enfin nous choisirons une combinaison 01 d'indices $\alpha\beta$ telle que

$$\lim \frac{\psi^{(\alpha\beta)}}{\psi^{(01)}} \tag{0}$$

reste finie [1] pour toutes les combinaisons d'indices $\alpha\beta$. Cela n'est pas en contradiction avec le choix fait au 5° des indices 0 et 1, car actuellement $\varphi_{01}(y) \not\equiv 0$, sans quoi l'expression (0) est infinie ou indéterminée.

Alors

$$»\lim \frac{\varphi_{\alpha\beta}(y)}{\varphi_{01}(y)} = \lim \frac{\psi^{(\alpha\beta)}\chi_{\alpha\beta}(y)}{\psi^{(01)}\chi_{01}(y)}$$

ne peut être infinie quel que soit y».

11° Les choses étant ainsi préparées, abordons la résolution du problème $[r+1]$ et faisons tendre x vers x_0 suivant l'itinéraire $\mathfrak{w}$.

Il peut se faire que, tout le long de $\mathfrak{w}$, $\Phi_{\alpha\beta n} \equiv 0$ pour tous indices α, β, n. On s'en assurera en appliquant le procédé de résolution du problème $[r]$ (pour abréger »procédé $\{r\}$») aux fonctions $\Phi_{\alpha\beta n}$ des r variables x_i.

On est alors dans le cas du 4°; les rapports des $f_j(y)$ sont indépendants de y; les ξ_j sont proportionnels à des fonctions holomorphes des x_i et le procédé $\{r\}$ permettra de construire les $\bar{\xi}_j$ et le point $\bar{\xi}$.

12° Ce cas particulier écarté, choisissons, grâce à une application convenable du procéde $\{r\}$, les deux indices 0 et 1 comme il est dit au 10°.

---

[1] N. B. — Je comprends zéro parmi les quantités finies.

Vers quelle limite tend la courbe Γ definie par les $N-1$ équations du 6°

$$P_k(\xi, x) = 0?$$

Il suffit de voir vers quelle limite tendent les premiers membres des $P_k = 0$.

Le procédé $\{r\}$ fournit les limites de tous les rapports des coefficients

$$p^{(k)}_{\beta_0\beta_1\beta_k},$$

fonctions holomorphes des x_i. Mettons dans P_k en facteur un coefficient ϖ_k tel que

$$\lim \frac{p^{(k)}_{\beta_0\beta_1\beta_k}}{\varpi_k}$$

reste finie et posons

$$P_k = \varpi_k \overline{P}'_k(\xi).$$

La courbe $\overline{\Gamma}$, limite de Γ, sera définie par les $N-1$ équations

$$\overline{P}_k(\xi) \equiv \overline{P}_k(\xi_0, \xi_1, \xi_k) = 0,$$

$\overline{P}_k$ étant la limite de $\overline{P}'_k$.

Reste à montrer que les équations $\overline{P}_k = 0$ sont toutes distinctes comme les $P_k = 0$.

15° Il suffit d'établir (6°) que la coordonnée ξ_k *figure effectivement* dans $\overline{P}_k$, ou que

$$\frac{\partial \overline{P}_k}{\partial \xi_k} \not\equiv 0.$$

Si, en effet, $\frac{\partial \overline{P}_k}{\partial \xi_k} \equiv 0$, alors quel que soit y,

$$\lim \frac{\dfrac{\partial P_k}{\partial \xi_0}}{\dfrac{\partial P_k}{\partial \xi_k}} \equiv \infty, \qquad \lim \frac{\dfrac{\partial P_k}{\partial \xi_1}}{\dfrac{\partial P_k}{\partial \xi_k}} \equiv \infty$$

c'est à dire (5°)

$$\lim \frac{\varphi_{1k}}{\varphi_{01}} \equiv \infty, \qquad \lim \frac{\varphi_{k0}}{\varphi_{01}} \equiv \infty;$$

cela est contraire à l'hypothèse faite (12° et 10°) sur le choix des deux indices 0 et 1.

D'ailleurs on ne peut avoir $\overline{P}_k(\xi) \equiv 0$, quels que soient ξ_0, ξ_1, ξ_k car la dérivée partielle par rapport à ξ_k n'est pas $\equiv 0$, comme proportionnelle à (voir 10°)

$$\lim \chi_{01}(y) = \lim \frac{\varphi_{01}(y)}{\psi^{(01)}}.$$

Bref toutes les $N - 1$ équations $P_k = 0$ sont distinctes et définissent une courbe $\overline{\Gamma}$, limite de Γ. On voit que »la construction de $\overline{\Gamma}$ exige seulement l'application du procédé $\{r\}$».

14° Théorème: »Le point $\bar{\xi}$ est sur la courbe $\overline{\Gamma}$.»

Cela résulte immédiatement du 7° car ξ est, pour chaque position de x, à l'intersection de Γ avec H. Quand x tend vers x_0 et ξ vers $\bar{\xi}$, Γ tend vers $\overline{\Gamma}$, donc $\bar{\xi}$ est sur $\overline{\Gamma}$, c. q. f. d.

15° Tout point de $\overline{\Gamma}$ fait-il partie de Ω_{r+1}?

Il faut répondre par l'affirmative.

Soit en effet μ un point *quelconque* de $\overline{\Gamma}$ défini comme intersection de $\overline{\Gamma}$ avec l'hyperplan $\mu_0\xi_1 - \mu_1\xi_0 = 0$, le quotient $\mu_1 : \mu_0$ étant arbitraire. Je vais construire un itinéraire $\mathfrak{W}$ *fournissant* (1°) le point μ.

16° Les équations $P_k(\xi) = 0$ expriment (6°) que le système

$$\left|\begin{array}{c} \xi_\beta f_\alpha(y) - \xi_\alpha f_\beta(y) = 0 \\ \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, N. \end{array}\right|.$$

d'équations en y possède s racines communes, $s \geqq 1$.

Soit λ, de coordonnées λ_j avec $\lambda_1 : \lambda_0 = \mu_1 : \mu_0$, un point d'intersection de Γ avec l'hyperplan précédent $\lambda_0\xi_1 - \lambda_1\xi_0 = 0$. Les équations en y

$$\lambda_\beta f_\alpha(y) - \lambda_\alpha f_\beta(y) = 0$$

auront, pour x quelconque, s racines communes. Soit η l'une d'elles. D'ailleurs (3°)

$$\lambda_\beta f_\alpha(y) - \lambda_\alpha f_\beta(y) = y^m\{\lambda_\beta K_\alpha - \lambda_\alpha K_\beta\} + y^{m-1}(\ldots) + \ldots;$$

toutes les m racines s'évanouissent quand $|x_i| = 0$, x venant en x_0, le point λ étant distinct du point K de coordonnées K_j. Donc »η a zéro pour limite».

Faisons décrire au point ζ un itinéraire $\mathfrak{W}$ ainsi défini

1° x décrit l'itinéraire $\mathfrak{w}$, dont il a été question au cours du présent chapitre,

$$2° \qquad y = \eta.$$

Il est évident que, suivant $\mathfrak{W}$, ζ aboutit en ω.

Le point ξ coïncide avec λ et ne peut quitter ni la courbe Γ ni l'hyperplan; à la limite ξ vient en $\bar{\xi}$ sur $\overline{\Gamma}$ sans avoir quitté l'hyperplan, donc $\bar{\xi}$ coïncide avec μ, c. q. f. d.

17° La démonstration ne subsiste plus pour le point K, de coordonnées K_j, lui-même. K fait d'ailleurs aussi partie de Ω_{r+1} car il est très facile de construire un itinéraire $\mathfrak{W}$ qui fournisse K.

Posons à cet effet $x_i = y^{\rho_i}$, $\rho_i =$ entier positif. Le coefficient a_{jl} de f_j devient

$$a_{jl} = y^{\sigma_{jl}} A_{jl}(y), \qquad A_{jl}(0) \neq 0.$$

On peut toujours prendre les ρ assez grands pour que les σ soient aussi grands que l'on voudra et en particulier pour que

$$m < l + \sigma_{jl}.$$

Alors dans f_j c'est le terme $K_j y^m$ qui est d'ordre minimum en y et l'itinéraire $\mathfrak{W}$ défini par

$$x_i = y^{\rho_i}$$

fournit le point K.

18° Toute la discussion du présent chapitre se résume ainsi qu'il suit.

Partant des équations (3°)

$$\rho\xi_j = K_j y + \sum_{l=m-1}^{l=0} y^l a_{jl}(x_1, \ldots, x_r) = f_j(y),$$

formons les expressions

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta} &= \begin{vmatrix} f_\alpha & \frac{\partial f_\alpha}{\partial y} \\ f_\beta & \frac{\partial f_\beta}{\partial y} \end{vmatrix} = \sum_{n=0}^{n=2(m-1)} y^n \Phi_{\alpha\beta n}(x_1, \ldots, x_r) \\ \text{et} \quad & \\ P_k &= \sum \xi_0^{\beta_0} \xi_1^{\beta_1} \xi_k^{\beta_k} p^{(k)}_{\beta_0\beta_1\beta_k}(x_1, x_2, \ldots, x_r). \end{aligned}\right\}.$$

Soit Ω_r la figure lieu du point $\bar{h}$, le point h ayant des coordonnées proportionnelles aux

$$\Phi_{\alpha\beta n} \quad \text{et aux} \quad p^{(k)}_{\beta_0\beta_1\beta_k}.$$

La construction de Ω_r exige uniquement la résolution du problème [r].

Un point $\bar{h}$ de Ω_r fournit pour la figure Ω_{r+1}, lieu du point $\bar{\xi}$,

soit un point unique U (éventualité du 11°) que fait immédiatement connaitre le procédé $\{r\}$,

soit une courbe toute entière $\overline{\Gamma}$, c'est à dire ∞ points.

Quand $\bar{h}$ parcourt Ω_r, U ou $\overline{\Gamma}$ engendrent Ω_{r+1}.

Appelons S_i le nombre des dimensions que possède Ω_i.

$S_{r+1} = S_r + 1$, s'il existe au moins une courbe telle que $\overline{\Gamma}$,

$S_{r+1} = S_r$, s'il existe seulement des points tels que U.

Bref $S_{r+1} \leqq S_r + 1$ et, comme $S_1 = 0$, $S_{r+1} \leqq r$. »Le nombre de dimensions de la figure Ω est au plus égal à celui des variables indépendantes, diminué d'une unité.»

19° A peine est-il besoin de faire remarquer qu'il peut exister des itinéraires $\mathfrak{W}$ qui ne fournissent aucun point $\bar{\xi}$. Ils sont constitués par des zéros communs aux $N+1$ fonctions F_j du 1°.

Par exemple, pour $r = 2$, cas [3], supposons que les surfaces ordinaires $F_j(y, x_1, x_2) = 0$, $F_j =$ polynôme, aient une courbe g, issue de l'origine, commune. Un itinéraire $\mathfrak{W}$, qui coïncide avec g, ne fournit aucun point limite $\bar{\xi}$.

20° J'espère traiter dans un travail ultérieur le »problème des itinéraires $\mathfrak{W}$» c'est à dire les questions suivantes:

I. un point $\bar{\xi}$ étant donné sur Ω_r construire tous les itinéraires qui fournissent $\bar{\xi}$;

II. étudier comment varient ces itinéraires, lorsque $\bar{\xi}$ se déplace sur Ω_r.

Lyon le 1er mai 1897.