SUR LES SÉRIES DE TAYLOR.

Lettre adressée à l'éditeur

PAR

EMILE BOREL

à PARIS.

Monsieur,

Vous avez bien voulu me demander de vous indiquer comment on pourrait, en partant des éléments, démontrer les théorèmes sur les séries de TAYLOR que j'ai énoncés dans les Comptes Rendus, en décembre 1896 (en esquissant une démonstration reposant sur deux mémoires relatifs aux séries divergentes, parus en 1896 dans le Journal de M. JORDAN). Je suis très heureux d'avoir une occasion de vous montrer comment des résultats, auxquels ma théorie des séries divergentes m'a conduit d'une manière intuitive, peuvent être démontrés directement par une méthode peut-être plus simple, mais qui semble assez artificielle.

Je considère une série de TAYLOR dont le rayon de convergence est égal à l'unité:

$$f(z) = \Sigma a_n z^n$$

et je suppose, pour plus de netteté, que $\sqrt[n]{|a_n|}$ a *pour limite un.* Dans le cas où il n'en serait pas ainsi, rien ne serait changé aux conclusions qui suivent, comme on le voit par des remarques analogues à celles que j'ai faites dans le Journal de M. JORDAN (1896, p. 451).

J'appellerai fonction entière associée à la fonction $f(z)$, la fonction

$$F(z) = \sum \frac{a_n z^n}{\underline{|n}}.$$

Lorsque on donne à z toutes les valeurs de module r, appelons $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$; on démontre facilement (voyez mon mémoire sur les zéros des fonctions entières que vous imprimez actuellement dans les Acta[1]) que, lorsque r augmente indéfiniment $e^{-r(1+\alpha)}M(r)$ tend

[1] Acta mathematica, t. 20.

vers zéro et $e^{-r(1-\alpha)}M(r)$ ne tend pas vers zéro, quelque petit que soit le nombre positif α. D'autre part, posons $z = re^{i\theta}$, r et θ étant réels, et considérons le produit $e^{-r(1-\alpha)}F(z)$, dans lequel θ reste fixe et r augmente indéfiniment; α est un *nombre positif* arbitraire. Si, quel que soit α, ce produit ne tend pas vers zéro pour r infini, θ sera dit un argument singulier pour la fonction entière $F(z)$; si l'on peut prendre α assez petit pour que le produit tende vers zéro, θ sera dit un argument ordinaire de la fonction $F(z)$. Cela posé, la première proposition que nous ayons à démontrer est la suivante: *les points singuliers de la fonction $f(z)$ sur son cercle de convergence ont précisément pour arguments les arguments singuliers de la fonction entière associée $F(z)$.*

Pour démontrer cette proposition, désignons par Γ un contour infiniment voisin du contour Γ' obtenu en menant des tangentes au cercle de convergence de $f(z)$ en chaque point singulier; Γ est intérieur à Γ'; supposons d'ailleurs que Γ ne renferme pas de points singuliers de $f(z)$ (dans le cas contraire, il suffirait de compléter Γ' en menant en chaque point singulier une perpendiculaire à la droite qui le joint à l'origine). Considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z}e^{a\left(\frac{x}{z}-1\right)}dz.$$

Il est manifeste que, lorsque la constante positive a augmente indéfiniment, x étant un point quelconque intérieur à Γ, cette intégrale tend vers zéro; car dans ces conditions, on a, sur tout le contour Γ, $\left|e^{a\left(\frac{x}{z}-1\right)}\right| < e^{-ka}$, k étant un nombre positif (voir mon mémoire du Journal de M. Jordan).

Or il est aisé de voir que cette intégrale est précisément égale à $e^{-a}F(ax)$. Donc ce produit tend vers zéro lorsque a augmente indéfiniment par valeurs positives, lorsque x est intérieur à Γ. Mais, si θ est l'argument d'un point du cercle de convergence, non singulier pour $f(z)$, nous pouvons prendre $x = \frac{e^{i\theta}}{1-\alpha}$, α étant positif; si α est assez petit, x est intérieur à Γ. Dès lors, si l'on pose $a = r(1-\alpha)$, on a

$$e^{-a}F(ax) = e^{-r(1-\alpha)}F(re^{i\theta})$$

et, par définition, dire que l'on peut choisir α de manière que ce produit tende vers zéro lorsque r augmente indéfiniment, c'est dire que θ est un argument ordinaire pour $F(z)$. Par conséquent, aux points ordinaires de $f(z)$ correspondent des arguments ordinaires de $F(z)$. Il reste à faire voir que, réciproquement, aux arguments ordinaires de $F(z)$ correspondent des points ordinaires de $f(z)$. Une remarque préliminaire est indispensable. Supposons, que dans un intervalle (θ_0, θ_1) donné, la fonction $F(z)$ ait des arguments singuliers partout condensés (überall dicht); nous savons déjà que la fonction $f(z)$ a sur l'arc correspondant du cercle de convergence, des points singuliers partout condensés, c'est à dire que cet arc est regardé comme singulier dans son entier. Au point de vue de la recherche des singularités de $f(z)$, il est donc sans intérêt de rechercher si dans l'intervalle (θ_0, θ_1) la fonction $F(z)$ a ou non des arguments ordinaires. Les raisons de continuité que nous allons invoquer bientôt montreraient qu'elle n'en a pas; cependant, en modifiant légèrement leur définition, on pourrait sans doute arriver à reconnaître si $f(z)$ tend vers une limite déterminée lorsque z tend vers le cercle de convergence avec un argument déterminé, mais ce n'est point la question qui nous occupe actuellement.

Nous pouvons donc nous borner à considérer le cas où $F(z)$ admet comme arguments ordinaires tous les arguments compris entre θ_0 et θ_1; il s'agit de montrer que l'arc correspondant du cercle de convergence est un arc ordinaire de $f(z)$. Par hypothèse, à chaque valeur de θ comprise entre θ_0 et θ_1, les limites étant comprises, correspond un nombre positif α tel que le produit $e^{-r(1-\alpha)}F(re^{i\theta})$ tend vers zéro lorsque r augmente indéfiniment par valeurs positives. On voit aisément que la limite supérieure A, des valeurs que l'on peut donner à α pour une même valeur de θ, est une fonction continue de θ; dès lors, si l'on considère les valeurs de A correspondant aux diverses valeurs de θ comprises entre θ_0 et θ_1, elles admettent une limite inférieure qui ne peut être nulle; sinon elle serait atteinte pour quelque valeur de θ, laquelle serait un argument singulier, contrairement à l'hypothèse; il résulte de là que nous pouvons trouver une valeur *fixe* de α telle que, quel que soit θ entre θ_0 et θ_1, on ait

$$\lim_{r=\infty} e^{-r(1-\alpha)}F(re^{i\theta}) = 0.$$

Cela posé, considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}F(az)\,da.$$

Cette intégrale représente, lorsqu'elle a un sens, une fonction analytique de z, qui coïncide visiblement avec la fonction $f(z)$ à l'intérieur de son cercle de convergence. Or il est manifeste qu'elle conserve un sens si l'on suppose l'argument de z compris entre θ_0 et θ_1, son module étant *inférieur* à $\frac{1}{1-a}$; la fonction analytique $f(z)$ peut donc être prolongée au delà de l'arc $\theta_0 \theta_1$ du cercle de convergence, c. q. f. d.

Notre proposition est donc complètement établie: *les arguments singuliers et ordinaires de $F(z)$ correspondent respectivement aux points singuliers et ordinaires de $f(z)$.*

Voici maintenant une application de cette proposition, application qui repose sur la détermination simple de certains arguments singuliers. Considérons une série de modules croissants

$$r_0, r_1, r_2, \ldots$$

et faisons leur correspondre des nombres positifs *tendant vers zéro:*

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots.$$

Supposons que θ_n soit un argument *quelconque* tel que l'on ait

(1) $$|F(r_n e^{i\theta_n})| > e^{r_n(1-\alpha_n)}.$$

Je dis que tout argument θ, que l'on peut prendre égal à θ_n pour une infinité de valeurs de n, est un argument singulier; car, si la relation (1) est vérifiée, lorsque $\theta_n = \theta$, pour une infinité de valeurs de n, on ne peut avoir

$$\lim_{r=\infty} e^{-r(1-\alpha)} F(re^{i\theta}) = 0;$$

car, quelque petit que soit α, α_n finit par être inférieur à α pour les grandes valeurs de n. On ne trouve pas d'ailleurs ainsi certainement tous les arguments singuliers; par exemple, si les α décroissent trop rapidement, il peut se faire que la relation (1) ne soit vérifiée pour aucune valeur de θ_n; mais les arguments que l'on obtient sont certainement singuliers, quels que soient les r et les α (satisfaisant aux conditions indiquées).

Supposons maintenant que nous partagions les termes successifs de $F(z)$ en groupes, de telle manière que le $n^{\text{ième}}$ groupe soit formé des termes dont le rang est compris entre $2^{2^{2n-1}} = s$ et $2^{2^{2n+1}} = s^4$. Considérons ce groupe de termes, dans lequel nous donnons au module de z la valeur $s^2 (= 2^{2^{2n}})$; il est très aisé de voir que le maximum du module de ce polynome (lorsque l'argument de z prend toutes les valeurs possibles) diffère très peu du maximum du module de $F(z)$ pour la même valeur s^2 du module de z; autrement dit, les termes de $F(z)$ qui ne figurent pas dans ce $n^{\text{ième}}$ groupe ont, pour $|z| = s^2$, une somme négligeable par rapport aux grandes valeurs du module de $F(z)$. On en conclut aisément qu'en choisissant convenablement les α et en prenant $r_n = 2^{2^{2n}}$, on peut définir les arguments θ_n *exclusivement à l'aide des termes du* $n^{\text{ième}}$ *groupe;* d'ailleurs ces θ_n couvriront, si l'on veut, un arc du cercle, supérieur à sa $n^{\text{ième}}$ partie et tel, par suite, que *la somme de tous les arcs,* correspondant ainsi à toutes les valeurs de n, *augmente indéfiniment avec* n. Pour qu'un argument θ soit singulier, il *suffit* qu'il appartienne à une infinité de tels arcs. Or il est clair que, si l'on suppose la fonction $F(z)$ *quelconque,* c'est à dire ses coefficients indépendants les uns des autres, ces arcs recouverts par les θ_n, étant définis séparément par des groupes successifs de coefficients sans lien entre eux, devront être regardés comme indépendants. On a donc sur un cercle *une infinité d'arcs indépendants,* dont la somme dépasse tout nombre donné; donc, *en général,* tout point du cercle appartiendra à une infinité d'arcs. Donc, *en général,* tous les arguments d'une fonction entière sont singuliers et par suite, *dans le cas général, une série de Taylor admet son cercle de convergence comme coupure.* C'est là la conclusion que je me proposais d'établir et que j'ai démontrée pour la première fois dans les Comptes Rendus du 11 décembre 1896. On pourrait, je crois, tirer bien d'autres conséquences de cette méthode de recherche des points singuliers et, tout d'abord, l'étendre au moins à certains points singuliers non situés sur le cercle de convergence, mais j'ai déjà peut-être trop abusé de votre bienveillante attention.

Je termine donc en vous priant d'agréer l'expression de mes sentiments de respect et de sincère dévouement.

Paris, le 22 mai 1897.