THEORIE DER TRANSFORMATIONEN IM R_3, WELCHE KEINE FUNDAMENTALCURVEN 1. ART BESITZEN UND IHRER ENDLICHEN GRUPPEN

VON

S. KANTOR

»We have first raised a dust and then complain, that we cannot see.« BERKELEY.

Bei der Begründung einer allgemeinen Theorie der periodischen Transformationen und ihrer endlichen Gruppen im R_3 und im R_r begegnet man so vielen neuen Erscheinungen und hat sich so viele neue Gesichtspunkte zu schaffen, die mit dem beschränkten Felde der Ebene und den auf sie bezüglichen Theorieen nicht von selbst erscheinen, dass es schon darum nützlich ist, vorher einige besondere Klassen zu betrachten. Das wird noch nützlicher dadurch, dass diese Klassen in der allgemeinen Theorie als Bestandtheil erscheinen und hiemit also nur ein Stück ohnehin unumgänglicher Arbeit anticipirt ist. So weiss man, dass in der Ebene die birationalen Transformationen die Eigenschaft haben, sich aus elementaren Transformationen 2. Ordnung, Q^2, zusammensetzen zu lassen. Wie ich schon früher hervorgehoben, kann Q^2 entweder durch die $(SC)^2$ oder durch die cubische Reciprokaltransformation $x_i x'_i = c$ auf den R_3 (und später auf R_r) verallgemeinert werden, weshalb sich beim Eingange in die Theorie der Periodicität jene Transformationen darbieten, welche entweder nur aus $(SC)^2$ oder nur aus Reciprokaltransformationen zusammengesetzt sind. Die ersteren habe ich im American Journal of Mathematics 1896 abgethan,[1] die anderen, von welchen ich hier handle,

[1] *Theorie derjenigen Transformationen im R_r, welche sich aus quadratischen zusammensetzen lassen.* Vol. 18.

sind dadurch von erhöhtem Interesse, dass sie die im Titel genannte Eigenschaft besitzen (§ 3).[1]

Ich erledige diese Classe von Transformationen mit Bezug auf ihre periodischen Characteristiken und deren Construction sowie auf ihre endlichen Gruppen und deren Construction.[2] Vorher gebe ich im I. Theile die allgemeinen Eigenschaften ihrer Fundamentalsysteme, welche bisher überhaupt nicht in Rede kamen.[3]

Es besteht eine noch allgemeinere *gleichartige* Theorie im R_r, von welcher sich zeigen wird, dass sie die ganze Theorie der ebenen birationalen Transformationen als speciellen Fall enthält.

I. THEIL.

Die Theorie der Fundamentalsysteme.

§ 1. *Eigenschaften der Fundamentalsysteme, welche durch Zusammensetzung von Reciprokaltransformationen entstehen.*

Es soll der Vereinfachung der Sprechweise wegen die Voraussetzung gemacht werden, dass wenn S_1, S_2 Fundamentalsysteme der einen, S'_1, S'_2 jene der 2. Transformation sind, niemals eine Fundamentalcurve 2. Art von S_2 mit einer von S'_1 coincidire, ohne dass die sie bestimmenden Fundamentalpunkte von S_2 mit jenen von S'_1 coincidiren. Ferner soll bei der Zusammensetzung niemals eine Fundamentalcurve von S_2 mit einem Fundamentalpunkte von S'_1 incident sein.

[1] Es ist ferner eine besondere Absicht dieser Arbeit, zum ersten Male auf den Vortheil hinzuweisen, den es bietet, statt der homaloidalen Flächensysteme die homaloidalen Curvensysteme auch im R_r zur Definition einer Transformation zu verwenden.

[2] Die Arbeit schliesst sich also auch an mein Buch: *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene* (Berlin, Mayer & Müller, 1895) an.

[3] Es möge bemerkt sein, dass die Reciprokaltransformation allein als »p-reciproke Transformation» bei S. Lie in einer kurzen Note der Göttinger Nachrichten (1871) zu elementareren Zwecken angewendet vorkommt.

Theorem I. *Ein Fundamentalsystem, das nur durch Wiederholung oder Zusammensetzung mehrerer $(a_i, b_i)^3$ entsteht, besitzt keine Fundamentalcurven 1. Art.*

Eine solche Transformation S entspreche dem Satze und werde mit $(a_i, b_i)^3$ zusammengesetzt zu SS'. Das Fundamentalsystem von SS' ist unter dem transformirten Fundamentalsysteme S_2 und unter b_i zu suchen. Einer Fundamentalcurve von $(SS')_2$ entspricht also in S_1' entweder eine Fundamentalcurve c_1' von S_1' oder eine von S_2 und dieser entspricht in $(SS')_1$ bezüglich eine gewöhnliche Curve von S_1 oder eine Fundamentalcurve von S_1. In beiden Fällen ist die Curve von $(SS')_2$ eine Fundamentalcurve 2. Art.

Anmerkung. Wenn jedoch c_1' durch einen Fundamentalpunkt b von S_2 hindurchgeht, dann entspricht wohl der c_2' eine Fundamentalcurve und gleichzeitig die dem b entsprechende Fundamentalfläche A, aber dies ist eigentlich so aufzufassen, dass sich die homaloidalen Flächen von S_2' längs c_2' berühren und dass der c_2' eigentlich die Curve c_1, den ∞^1 Strahlbüscheln von Nachbarpunkten an c_2' (längs den homaloidalen Flächen) die A entspricht. A bildet also eine Absonderungsfläche nur für jene Flächen des Raumes mit S_2', welche längs der Curve c_2' alle homaloidalen Flächen berühren. Die erste der gemachten Einschränkungen bedeutet also doch nur, dass homaloidale Flächensysteme mit Berührung längs Curven (bei variabeler Berührungsebene) ausgeschlossen sind.

Theorem II. *Die homaloidalen Systeme dieser Transformationen haben nur solche Fundamentalcurven gemeinsam, welche eine nothwendige Folge der Vielfachheiten in den Fundamentalpunkten sind.*

Gilt das Theorem für S, so gilt es auch für $S.(a, b)^3$, denn die Kanten $b_i b_k$ sind nothwendig durch die Punkte b_i gemäss meiner Abhandlung über die $(a_i, b_i)^3$ und würde es für eine der übrigen Fundamentalcurven behufs des Enthaltenseins einer weiteren Bedingung bedürfen, welche ausserhalb der b_i und der transformirten Fundamentalpunkte sich befindet, so würde dies auch auf S sich übertragen. Für $(a, b)^3$ gilt aber das Theorem, also auch für S.

Theorem III. *Die Verwandlung von Ordnung und Singularitäten der M_2 geschieht nach der linearen Substitution*

$$
\mathrm{I)}\quad
\begin{array}{l}
n' = mn - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \ldots - a_\sigma x_\sigma - c_1 y_1 - \ldots - c_{\sigma'} y_{\sigma'},\\
x_1' = b_1 n - a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - \ldots - a_{1\sigma} x_\sigma - c_1^{(1)} y_1 - \ldots - c_{\sigma'}^{(1)} y_{\sigma'},\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot\\
x_\sigma' = b_\sigma n - a_{\sigma 1} x_1 - a_{\sigma 2} x_2 - \ldots - a_{\sigma\sigma} x_\sigma - c_1^{(\sigma)} y_1 - \ldots - c_{\sigma'}^{(\sigma)} y_{\sigma'},\\
y_1' = d_1 n - a_{11}^{(1)} x_1 - a_{12}^{(1)} x_2 - \ldots - a_{1\sigma}^{(1)} x_\sigma - c_{11} y_1 - \ldots - c_{\sigma' 1} y_{\sigma'},\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot\\
y_{\sigma'}' = d_{\sigma'} n - a_{\sigma' 1}^{(1)} x_1 - a_{\sigma' 2}^{(1)} x_2 - \ldots - a_{\sigma'\sigma}^{(1)} x_\sigma - c_{\sigma' 1} y_1 - \ldots - c_{\sigma'\sigma} y_{\sigma'},
\end{array}
$$

wo n die Ordnung, $x_1, \ldots, x_\sigma$ die Vielfachheiten in den Fundamentalpunkten, $y_1, \ldots, y_{\sigma'}$ die Vielfachheitszahlen in den Fundamentalcurven sind.

Setzt man $n = 1$, $x_1 = \ldots = x_\sigma = y_1 = \ldots = 0$, so folgt, dass m die Ordnung der Transformationen, $b_1, \ldots, b_\sigma$, $d_1, \ldots, d_{\sigma'}$ die Vielfachheiten der homaloidalen Flächen in den σ Fundamentalpunkten und den Fundamentalcurven sind. Setzt man $n = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = \ldots = x_\sigma = 0$, $y_k = 0$, so folgt, dass $a_i, a_{1i}, \ldots, a_{\sigma i}, a_{1i}^{(1)}, \ldots, a_{\sigma' i}^{(1)}$ Ordnung und Vielfachheiten der Fundamentalflächen A_i in Fundamentalpunkten und Fundamentalcurven sind. Von den Coefficienten c_i, $c_i^{(h)}$, c_{ik} kann erst später gesprochen werden.

Definitionen. Die Substitutionen des Theoremes III sollen die vollständigen Substitutionen I) heissen. Wenn aber, was zulässig ist, die Glieder mit y unberücksichtiget bleiben, und also die Zeilen für $y_1', \ldots, y_{\sigma'}'$ ganz wegfallen, so bleiben lineare Substitutionen, welche die unvollständigen Substitutionen (oder unvollständigen fundamentalen Substitutionen) I) heissen sollen. Von diesen letzteren wird meistens die Rede sein.

Theorem IV. *Alle Fundamentalsysteme, welche durch Zusammensetzung von $(a_i, b_i)^3$ entstehen, haben ungerade Ordnung und gerade Vielfachheiten.*

Denn der Zusammensetzung zweier Transformationen entspricht nach den Erklärungen für die Ebene[1] die Zusammensetzung der zugehörigen Substitutionen I), sei es der vollständigen, sei es der unvollständigen. Wenn aber das Theorem für zwei unvollständige Substitutionen 1) gilt,

---

[1] Cf. Crelles Journal, Bd. 114, p. 59. Durch Verweisung auf diese Definition der Zusammensetzung kann ich die nachfolgenden Beweise sehr kurz fassen.

so gilt es auch für die Composition, weil der I. Coefficient aus einem Producte zweier ungerader Zahlen durch Addition gerader Producte entsteht, und analog die Coefficienten a_i oder b_i. Für die Reciprokaltransformationen gilt es aber ersichtlich.

Theorem V. *Die unvollständigen Substitutionen* I) *reproduciren die Formen*

$$(1) \qquad 2n^2 - \sum_1^\sigma x_i^2,$$

$$(2) \qquad 4n - \sum_1^\sigma x_i,$$ [1]

sind also stets Hermite'sche Substitutionen.

Denn die componirenden Transformationen $(a_i, b_i)^3$ reproduciren dieselben, indem man nur jedesmal die $\sigma - 4$ Punkte, welche nicht Fundamentalpunkte sind, als gewöhnliche Punkte transformirt voraussetzt, und folglich auch das Gesammtresultat.

Theorem VI. *Die vollständigen Substitutionen* I) *reproduciren die Formen*

$$(3) \qquad \begin{aligned} &n^3 - \sum_1^\sigma x_i^3 + \sum y_{ik}^3, \\ &11n - 2\sum_1^\sigma x_i - \sum y_{ik}. \end{aligned}$$

Hier ist die 2. Summe über alle Fundamentalcurven des Fundamentalsystemes erstreckt. Die componirenden $(a_i, b_i)^3$ reproduciren (3) und da die Fundamentalcurven von I) sich aus denen der Elemente oder ihren Transformirten zusammensetzen, so bleiben die (3) invariant.

Theorem VII. *Die Substitutionen* I) *lassen den Singularitätencomplex* $n = 4s$, $x_1 = \ldots = x_\sigma = 2s$ *und aber auch* $n = 2s$, $x_1 = \ldots = x_\sigma = s$ *ungeändert.*

Denn man kann sich die componirenden $(a_i, b_i)^3$ mit ihren Fundamentalsystemen in dieselbe M_2^2 verlegt denken, welche durch die einzelnen, also auch durch die Gesammttransformation invariant bleiben wird.

[1] Schon in der Ebene können die beiden bekannten Gleichungen durch Zusammensetzung aus den Q^2 beweisen werden. — Bezüglich (3) cf. die Note I) am Ende der Abhandlung.

Corollar. In den Substitutionen 1) gelten die Relationen

$$2d_i = a_{11}^{(i)} + a_{12}^{(i)} + \ldots + a_{1\sigma}^{(i)}.$$

Denn eine M_2^2, welche die y_{ik} Null hat, muss auch die y'_{ik} Null liefern.

Theorem VIII. *Wenn ein Fundamentalpunkt 2a-fach für die homaloidalen Flächen ist, entspricht ihm im anderen Raume eine Absonderungsfläche der Ordnung a.*

Es möge für eine Transformation S gelten. Wird S mit $(a, b)^3$ zusammengesetzt, so erhält man für die Fundamentalpunkte, welche Transformirte aus S_2 sind, dieselbe Vielfachheit und dieselbe Ordnung der Absonderungsfläche wie für S, für $b_1 b_2 b_3 b_4$ aber erhält man nach 1) $x'_i = 2n - x_k - x_l - x_m$ für die Vielfachheit und, da die Ebene $a_k b_l a_m$ in eine Fläche der Ordnung $n - \frac{x_k}{2} - \frac{x_l}{2} - \frac{x_m}{2}$ transformirt wird (da das Theorem für S gelten soll), ist dies die Ordnung der Absonderungsfläche, welche Zahl wirklich die Hälfte von x'_i ist.

Theorem IX. *Die Transformationen haben stets in beiden Räumen gleich hohe Ordnung.*

Das Theorem gelte für S und werde S mit $(a_i, b_i)^3$ zusammengesetzt. Dann entsteht $n' = 3n - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ in S'_2 und aber in S_1 entsteht durch Umsetzung von $M_2^{\frac{x}{2}}(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2)$ unter Voraussetzung der Giltigkeit von V. die Ordnung $3n - 2\frac{x_2}{2} - 2\frac{x_3}{2} - 2\frac{x_4}{2}$ also n'.

Theorem X. *Die Transformationen haben stets in beiden Räumen gleich viele Fundamentalpunkte.*

Durch Zusammensetzung mit $S' = (a_i, b_i)^3$ entsteht eine Transformation, welche die Transformirten der Fundamentalpunkte von S_2 und die diesen conjugirten in S_1 (welche nicht zu a_i-Punkten gehören) zu Fundamentalpunkten hat, was gleiche Anzahlen sind; ferner entweder 4 weitere Fundamentalpunkte in $(SS')_1$ und $(SS')_2$ oder es geht in $(SS')_2$ ein Fundamentalpunkt dadurch verloren, dass $x_k + x_l + x_m = 2n$ ist. Dann ist aber auch der Transformirte von a_i aus S_2 nach S_1 kein Fundamentalpunkt, sodass thatsächlich die Anzahl dieselbe bleibt.

Theorem XI. *Die Anzahl der Fundamentalcurven 2. Art ist mindestens* $\frac{3}{2}(\sigma - 1)$, *wenn* σ *die Anzahl der Fundamentalpunkte ist.*

Gilt das Theorem für S und wird mit $(a_i, b_i)^3$ componirt, so entstehen resp. $\sigma + 1, \sigma + 2, \sigma + 3, \sigma + 4$ Fundamentalpunkte und aber die Anzahl der Fundamentalcurven wächst resp. um 3 oder 6.

Theorem XII. *Die Anzahlen der Fundamentalcurven sind in beiden Räumen dieselben.*

Wird S mit $S' = (a, b)^3$ zusammengesetzt, so erhält man 1, 2, 3, 4 Fundamentalpunkte mehr und eine Fundamentalcurve geht jedesmal nur dann verloren, wenn sie mit einer Kante des Tetraeders, $a_i a_k$, übereinstimmt.

Das Theorem folgt übrigens auch daraus, dass eben jede Fundamentalcurve einer bestimmten anderen entspricht und wenn zwei unendlich nahe rücken, auch die entsprechenden unendlich nahe rücken.

Theorem XIII. *Die Ordnungen der Fundamentalcurven von* R_3 *sind gleich den Vielfachheiten der Fundamentalcurven von* R'_3,[1] *ihre Summe ist* $3(m - 1)$.

Dieses Theorem ist algebraischer Natur. Wenn eine Ebene eine Fundamentalcurve in k Punkten schneidet, so geht die homaloidale Fläche k-fach durch die entsprechende Fundamentalcurve hindurch.

Theorem XIV. *Die Summe der Ordnungen der* σ *Absonderungsflächen ist* $2(m - 1)$ *und die Summe ihrer Quadrate ist* $\frac{m^2 - 1}{2}$.

Die ersten Coefficienten der $\sigma + 1$ ersten Zeilen in 1) sind die Ordnung m und die doppelten Ordnungen der Absonderungsflächen und durch Einsetzung der unvollständigen I) in die Formen (2) entsteht das Theorem.

Theorem XV. *Die Summe der Vielfachheiten einer und derselben Fundamentalfläche in allen* σ *Fundamentalpunkten ist* $4a_i - 1$ *und die Summe ihrer Quadrate ist* $2a_i^2 + 1$.

---

[1] *Corollar.* Auch die Fundamentalflächen haben die Eigenschaft, nur solche Fundamentalcurven zu enthalten, welche eine nothwendige Folge ihrer singulären Punkte sind.

Denn die Coefficienten in der i. Colonne von 1) sind Ordnung und Vielfachheiten einer Fundamentalfläche und die Einsetzung in (2) lehrt das Theorem. Ein 2. Beweis wird wie bei vorhergehenden Theoremen durch die Zusammensetzung aus $(a_i, b_i)^3$ geliefert.

Theorem XVI. *Die Summe der Vielfachheiten, mit welchen alle vorhandenen Fundamentalflächen durch einen und denselben a_i-fachen Fundamentalpunkt gehen, ist $2a_i - 1$ und die Summe ihrer Quadrate ist $\frac{a_i^2}{2} + 1$.*

Es gelte für S. Wird mit $S' = (a, b)^3$ componirt, so bleiben nur die Glieder für diejenigen Fundamentalflächen, in deren zugeordnete Fundamentalpunkte kein a fällt, bestehen, diese sowie die anderen sind aber als $2a_i - x_k - x_l - x_m$ auszudrücken, daher die Summe $2\Sigma a - \Sigma x_k - \Sigma x_l - \Sigma x_m$, und da Σa nach Voraussetzung von XIV $2(m-1)$, so folgt

$$4(m-1) - \Sigma x_k - \Sigma x_l - \Sigma x_m$$

und wieder wegen Voraussetzung

$$4(m-1) - 2X_k - 2X_l - 2X_m + 3 = 4m - 2X_k - 2X_l - 2X_m - 1.$$

Die Vielfachheit der transformirten homaloidalen Flächen im Punkte b_i ist $2m - X_k - X_l - X_m$, so dass das Theorem wirklich $4m - 2X_k - 2X_l - 2X_m - 1$ verlangt.

Die Summe der Quadrate der transformirten Vielfachheiten ist

$$\Sigma(2a - x_k - x_l - x_m)^2 = 4\Sigma a^2 - 4\Sigma a x_k - 4\Sigma a x_l - 4\Sigma a x_m + \Sigma x_k^2 + \Sigma x_l^2 + \Sigma x_m^2$$

$$= 2(m^2 - 1) + \frac{X_k^2 + 1}{2} + \frac{X_l^2 + 1}{2} + \frac{X_m^2 + 1}{2} - 4\Sigma a x_k - 4\Sigma a x_l - 4\Sigma a x_m$$

wegen Voraussetzung des Theoremes für S. Für $\Sigma a x_l$ wird in XVII der Werth $\frac{1}{2} m X_k$ bewiesen, also kommt

$$2(m^2 - 1) + \frac{X_k^2 + X_l^2 + X_m^2 + 3}{2} - 2m(X_k + X_l + X_m).$$

Nun ist das Quadrat der transformirten Vielfachheit $(2m - X_k - X_l - X_m)^2$ und das Theorem verlangt also, dass $[(2m - X_k - X_l - X_m)^2 - 1] : 2$ der vorigen Summe gleich sei, was der Fall ist.

Theorem XVII. *Die Summe der Producte aus den Ordnungen der Fundamentalflächen in ihre Vielfachheit, mit welcher sie durch einen festen Fundamentalpunkt gehen, über alle Fundamentalflächen erstreckt, ist* $\frac{1}{2}mX_i$, *wenn* X_i *die Vielfachheit der homaloidalen Flächen im Punkte ist.*

Es gelte für S. Wird mit $S' = (a, b)^3$ componirt, so wird die transformirte Summe sein

$$\Sigma(3a_i - x_i - x_k - x_l - x_m)y_{hk} = 3\Sigma a_i y_{hk} - \Sigma x_i y_{hk} - \Sigma x_k y_{hk} - \Sigma x_l y_{hk} - \Sigma x_m y_{hk},$$

wenn die Durchgänge y sich auf einen Fundamentalpunkt beziehen, in den kein Punkt a_i verlegt wird. Nun ist wegen S die $\Sigma a_i y_{hk} = \frac{1}{2}mY_k$ und wegen XVIII das übrige gleich $-\frac{1}{2}(\Sigma X_i Y_k + \Sigma X_k Y_k + \Sigma X_l Y_k + \Sigma X_m Y_k)$ aber es ist der Werth des Theorems für das transformirte System gleich $(3m - X_i - X_k - X_l - X_m)Y_k$, sodass die Richtigkeit in die Augen fällt.

Theorem XVIII. *Für zwei feste Fundamentalpunkte ist die Summe der Producte der Vielfachheiten in ihnen, erstreckt über alle Fundamentalflächen, gleich* $\frac{1}{2}X_i Y_k$, *wo* X_i, Y_k *die Vielfachheiten der homaloidalen Flächen in diesen beiden Punkten sind.*

Es gelte für S. Wird mit $S' = (a, b)^3$ componirt, so ist die transformirte Summe $\Sigma(2a_p - x_k - x_l - x_m)(2a_p - y_i - y_l - y_m)$ und also wegen Voraussetzung und wegen XIV gleich $2(m^2 - 1) - m(X_k + X_l + X_m) - m(Y_i + Y_l + Y_m) + \frac{1}{2}(X_k + X_l + X_m)(Y_i + Y_l + Y_m) + 2$ während der transformirte Werth des Theoremes ist $\frac{1}{2}(2m - X_k - X_l - X_m)(2m - Y_k - Y_l - Y_m)$, was mit dem vorigen Werthe übereinstimmt. Dies, wenn beide Punkte mit Punkten a_i coincidiren. Wenn nur ein Punkt der beiden genannten mit a_i coincidirt, so ist die transformirte Summe vom Werthe $\Sigma(2a_p - x_k - x_l - x_m)y_q$ und y_q hat denselben Werth wie für S_2', die Ausrechnung beweist auch hier das Theorem. Stimmt keiner der zwei Fundamentalpunkte mit a_i überein, so ändert sich die Summe für S gar nicht.

Theorem XIX. *Die Summe der Vielfachheiten einer homaloidalen Fläche in allen Fundamentalcurven 2. Art oder auch die Summe der Ordnungen aller Fundamentalcurven 2. Art ist* $3(m-1)$.

Die Form (3) muss durch die Substitutionen 1) ungeändert bleiben. Der Coefficient von n ist $11(m-1) - 2\Sigma b_i - \Sigma b_{ik}$ der wegen XIV $3(m-1) - \Sigma b_{ik}$, muss aber wegen der Invarianz Null sein.

Theorem XX. *Die Summe der Cuben der Zahlen aus XIX weniger der Summe der Cuben der Vielfachheiten, welche die homaloidalen Flächen in den Fundamentalpunkten haben, ist* $1-n^3$.

Der Beweis wird durch Einsetzung in (3) geliefert.

Theorem XXI. *Die Summe der Vielfachheiten einer Fundamentalfläche* a_i. *Ordnung in den Fundamentalcurven, durch welche sie hindurchgeht ist* $3a_i$.[1]

Es gelte für S. $(a,b)^3$ liefert dann Ordnung $(3a - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$ der Fundamentalfläche. Die Summe der freien Curven bleibt $3a$, die Summe der 6 Kanten liefert $(a - x_1 - x_2) + \ldots + (a - x_3 - x_4) = 6a - 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4$, also die ganze Summe $9a - 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4$, was gleich dem Dreifachen der neuen Ordnung ist.

Theorem XXII. *Die Summe der Vielfachheiten, mit welchen alle vorhandenen Fundamentalcurven durch einen bestimmten Fundamentalpunkt hindurchgehen, ist* $3a_i$, *wenn* $2a_i$ *die Vielfachheit des Fundamentalpunktes ist.*

Dies ist eine Folge von XXI. Denn wenn eine Fundamentalcurve c durch einen Fundamentalpunkt a_{ik}-fach geht, so enthält die dem Punkte entsprechende Fundamentalfläche die der c entsprechende Fundamentalcurve c' in der Vielfachheit a_{ik}.

Theorem XXIII. *Die Summe der Vielfachheiten, mit welchen eine bestimmte Fundamentalcurve* ν. *Ordnung durch die Fundamentalpunkte hindurchgeht, welche sie enthält, ist* 2ν.

---

[1] Die Summe der Ordnungen der Fundamentalcurven, durch welche eine Fundamentalfläche hindurchgeht, hängt nicht allein von der Ordnung a_i ab. Ebenso die Summe der homaloidalen Vielfachheiten aller vorhandenen Fundamentalcurven, welche durch einen bestimmten Fundamentalpunkt hindurchgehen.

Es gelte für S. Die Zusammensetzung mit $S' = (a\,,\,b)^3$ gibt die Ordnung $\nu' = 3\nu - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ der Fundamentalcurve und dieselben Vielfachheiten in den freien Fundamentalpunkten, in den neuen aber $\nu - x_k - x_l - x_m$, daher die Gesammtsumme wegen Voraussetzung $2\nu - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + (\nu - x_1 - x_2 - x_3) + (\nu - x_1 - x_2 - x_4) + (\nu - x_2 - x_3 - x_4) = 6\nu - 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4$ was $2\nu'$ ist.

Theorem XXIV. *Die Summe der Quadrate der Vielfachheiten, mit welchen eine bestimmte Fundamentalcurve ν. Ordnung durch die Fundamentalpunkte hindurchgeht, ist* $\frac{\nu^2 + 3}{2}$.

Die Summe der Quadrate der freien Fundamentalpunkte ist

$$\frac{\nu^3 + 3}{2} - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2,$$

die Summe der neuen ist

$$\sum_1^4 (\nu - x_k - x_l - x_m)^2 = 4\nu^2 + 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 - 6\nu(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

und also die Gesammtsumme $\frac{9\nu^2 + 3}{2} + 2\Sigma x^2 - 6\nu\Sigma x$, während

$$\nu'^2 = (3\nu - 2\Sigma x)^2 \text{ ist.}$$

Theorem XXV. *Die Summe der Vielfachheiten, mit welchen alle Fundamentalflächen durch eine bestimmte Fundamentalcurve der homaloidalen Vielfachheit ν hindurchgehen, ist 2ν, die Quadratsumme* $\frac{\nu^2 + 3}{2}$.[1]

Das Theorem ist eine Folge von XXIII und XXIV mittelst Umsetzung in den zweiten Raum.

Definition. Ich bezeichne als homaloidale Curven das System der Curven, welche den Geraden des R_3 durch die Transformation entsprechen. Sie gehen durch die Fundamentalpunkte mit den halben Vielfachheiten von deren homaloidalen Vielfachheiten.[2]

---

[1] Über die Summe der homaloidalen Vielfachheiten aller Fundamentalpunkte, welche in einer bestimmten Fundamentalcurve enthalten sind, lässt sich kein Theorem geben.

[2] Man sollte eigentlich von zweierlei homaloidalen Vielfachheiten der Fundamentalpunkte sprechen, nämlich der für die M_2 und der für die M_1.

Theorem XXVI. *Für die homaloidalen Curven ist die Summe der Vielfachheiten in den Fundamentalpunkten* $2m - 2$ *und die Summe der Quadrate dieser Zahlen ist* $\frac{m^2 - 1}{2}$.

Der Beweis ist genau derselbe wie in XXIII, XXIV. Das Theorem wird für uns von der grössten Wichtigkeit werden.

Theorem XXVII. *Für die Verwandlung der Ordnung* n, *Vielfachheiten* $\mathfrak{x}_i$ *in den Fundamentalpunkten und Anzahl* $\mathfrak{y}_{ik}$ *der Stützpunkte auf die Fundamentalcurven für die Curven* M_1 *des* R_3 *geschieht nach den linearen Substitutionen*

$$\text{II)}\quad \begin{aligned}
\mathfrak{n}' &= m\mathfrak{n} - 2a_1\mathfrak{x}_1 - 2a_2\mathfrak{x}_2 - \dots - 2a_\sigma\mathfrak{x}_\sigma - \nu_1\mathfrak{y}_1 - \dots - \nu_{\sigma'}\mathfrak{y}_{\sigma'},\\
\mathfrak{x}_1' &= b_1\mathfrak{n} - \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{a}_{21}\mathfrak{x}_2 - \dots - \mathfrak{a}_{\sigma 1}\mathfrak{x}_\sigma - \nu_{11}\mathfrak{y}_1 - \dots - \nu_{\sigma' 1}\mathfrak{y}_{\sigma'},\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
\mathfrak{x}_\sigma' &= b_\sigma\mathfrak{n} - \mathfrak{a}_{1\sigma}\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{a}_{2\sigma}\mathfrak{x}_2 - \dots - \mathfrak{a}_{\sigma\sigma}\mathfrak{x}_\sigma - \nu_{1\sigma}\mathfrak{y}_1 - \dots - \nu_{\sigma'\sigma}\mathfrak{y}_{\sigma'},\\
\mathfrak{y}_i' &= \mathfrak{y}_i. \qquad\qquad (i = 1, \dots, \sigma')
\end{aligned}$$

Hier soll $\mathfrak{y}_i'$ sich auf die der $\mathfrak{y}_i$ entsprechende Fundamentalcurve beziehen.

Wird $\mathfrak{n} = 1$, $\mathfrak{x}_1 = \dots = \mathfrak{x}_\sigma = 0$, $\mathfrak{y}_i' = 0$ gesetzt, so erhält man $n' = m$, $\mathfrak{x}_i' = b_i$, es sind also die b_i die Vielfachheiten der homaloidalen Curven in den Fundamentalpunkten und diese sind nach dem allgemeinen Theoreme gleich den Ordnungen der Fundamentalflächen des 2. Raumes, also den halben Vielfachheiten der Fundamentalpunkte für die homaloidalen Flächen.

Theorem XXVIII. *Die Summe aus den Producten der Ordnung in das Quadrat der Vielfachheit erstreckt über alle Fundamentalcurven ist* $m(m - 1)$.

Denn schneidet man mit einer Ebene das homaloidale System in Curven der Ordnung m, so erhält man für diese in jedem Schnittpunkte mit einer ν'-fachen Curve ν. Ordnung einen ν'-fachen Punkt, also ν solcher, daher $\Sigma\nu.\nu'^2 = m^2 - m$. Dieses System betreffen ist zu bemerken, dass es kein unabhängiges sein wird, indem $\sum\frac{\nu.\nu'(\nu'+1)}{2} > \frac{m(m+3)}{2} - 3$ werden kann.

Theorem XXIX. *Die unvollständigen Substitutionen* II) *lassen ungeändert die Formen*

$$\mathfrak{n}^2 - 2\Sigma\mathfrak{x}^2, \tag{4}$$

$$2\mathfrak{n} - \Sigma\mathfrak{x} \tag{5}$$

(*sind also Hermite'sche Substitutionen*), *sowie die Singularitätencomplexe* $\mathfrak{n} = 4s$, $\mathfrak{x}_1 = \ldots = \mathfrak{x}_\sigma = s$ oder $\mathfrak{n} = 6s$, $\mathfrak{y}_{ik} = 2s$ *oder* $\mathfrak{n} = 10s$, $\mathfrak{x}_i = s$, $\mathfrak{y}_{i'} = 2s$.

Unter unvollständigen Substitutionen II sind jene verstanden, welche durch Weglassung der $\mathfrak{y}$ in den ersten $\sigma + 1$ Zeilen und der letzten σ' Zeilen entstehen, was widerspruchsfrei geschehen kann. Der Beweis des Theoremes geschieht dann durch Zusammensetzung aus den elementaren $(a, b)^3$, indem auch diese Substitutionen II sich genau entsprechend den Transformationen zusammensetzen, wenn immer für jeden neuen Fundamentalpunkt eine neue Variable eingeführt wird. Für $(a, b)^3$ ist das Theorem bewiesen worden. Für $\mathfrak{n} = 6s$, $\mathfrak{y}_{ik} = 2s$ ist die Invarianz auch direct leicht beweisbar. Trifft nämlich eine Curve eine Fundamentalcurve 2 mal, so sondert sich die conjugirte ab und die entsprechende Curve trifft überdies diese zweimal, trifft sie alle, so sondert sich $6(m - 1)$ ab.

Theorem XXX. *Wenn eine Transformation ein Flächensystem* $n, x_1, \ldots, x_\sigma$ *in sich transformirt, transformirt sie auch das Flächensystem* $n - 4, x_1 - 1, \ldots, x_\sigma - 1$ *in sich und wenn sie ein Curvensystem* $\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{\sigma'}$ *in sich transformirt, transformirt sie auch das Curvensystem* $\mathfrak{n} - 10, \mathfrak{x}_1 - 1, \ldots, \mathfrak{x}_\sigma - 1, \mathfrak{y}_1 - 2, \ldots, \mathfrak{y}_{\sigma'} - 2$ *in sich.*

Folgt aus der Transformation eines linearen Polynomes in ein solches durch I. und II. und aus XXIX. Das Theorem ist hier rein arithmetisch; es ist nur aus der Definition von I) und II) als linearer Substitutionen, welche durch Zusammensetzung der elementaren Substitutionen für $(a, b)^3$ entstehen, gewonnen.

Theorem XXXI. *Die Form*

$$\frac{1}{6}[(n+1)(n+2)(n+3) - 1 - \Sigma x(x+1)(x+2) + \Sigma y(y^2 - 1)] \tag{6}$$

bleibt ungeändert durch die Transformation mit den Substitutionen I.

Diese Form lässt sich nämlich direct aus den Formen (2) und (3) linear zusammensetzen. Mit Hilfe von XIV., XV., XIX. wird bewiesen, dass diese Form (6) für die homaloidalen Flächen den Werth 3 annimmt und sie drückt wirklich für die Flächen die Dimension gemäss der allgemeinen Formel aus.[1] Ebenso lehrt (6), dass für eine Fundamentalfläche die Dimension Null ist, u. zw. auf Grund dessen, dass auch sie nur Fundamentalcurven als nothwendige enthält.

Theorem XXXII. *Die Form* $n\mathfrak{n} - \sum_1^\sigma x\mathfrak{x} - \sum_1^\sigma y\mathfrak{y}$ *bleibt ungeändert, wenn man auf die zwei Variabelnreihen bezüglich die Substitutionen* I), II) *anwendet.*

Diese Form drückt die Zahl der freien Schnittpunkte einer Fläche des Systemes $n, x_1, \ldots, x_\sigma, y_1, \ldots, y_\sigma$ mit einer Curve des Systemes $\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{\sigma'}$ aus.

Theorem XXXIII. *Die Substitutionen* I) *lassen auch ungeändert die Form*

$$\frac{1}{6}\left[(n+1)(n+2)(n+3) - \Sigma y_i(y_i+1)[3n-2y_i+5]\nu_i - \frac{1}{2}(2y_i+1)\rho_i\right]$$
$$- \sum_i x_i(x_i+1)(x_i+2) + \Sigma y_i(y_i+1)(3x_k-2y_i+2)a_{ik}.$$

Hier bezeichnen ν_i, ρ_i Ordnung und Classe einer Fundamentalcurve und a_{ik} die Vielfachheit, mit welcher sie durch den mit x_k bezeichneten Fundamentalpunkt hindurchgeht. Die Form ist jene, welche Nöther Ann. di Mat., Ser. 2ª, Tome V. für die Dimension eines Flächensystemes mit singulären Punkten und Curven ausspricht.[2]

---

[1] Nöther, *Sulle curve multiple delle superficie algebriche.* Ann. di Mat., S. 2ª. T. 5.

[2] Die Substitutionen I) lassen auch die trilineare Form ungeändert, welche die Anzahl der Schnittpunkte von drei Flächen $n, x, y; n', x', y'; n'', x'', y''$ ausdrückt. Sie ist eigentlich quadrilinear, da die ν_i selbst auch transformirt werden müssen (die ν_i sind die m_i in Nöther's Formel). Aus jener entsteht eine invariante cubische Form mit einer Variabelnreihe, indem $n = n' = n''$, $x = x' = x''$, $y = y' = y''$ gesetzt wird, der Rang des Flächensystems n, x, y.

Ich muss aber hervorheben, dass in dieser ganzen Arbeit von *keinem einzigen* der Nöther'schen Resultate Verwendung geschieht, denn XXXI. leitet sich ohne sie her und XXXIII. habe ich nur der Vollständigkeit wegen für den Leser hingeschrieben.

Ja, wegen ihrer beschränkten Giltigkeit ist ihre Anwendbarkeit vielleicht unmöglich.

Theorem XXXIV. *Die vollständigen wie unvollständigen linearen Substitutionen I., II. haben die Determinante* $= 1$.

Auch dieses folgt aus der Zusammensetzung der Transformationen durch elementare cubische Reciprokaltransformationen.

Theorem XXXV. *Vermindert man die Vielfachheit a_{ik} einer Fundamentalfläche a_i. Ordnung A_i im Punkte a_k um 1, so wird die neue Fläche in eine Fläche a_k. Ordnung transformirt, welche aus A_k durch Verminderung der Vielfachheit in a_i' um 1 entsteht.*

Die Curven in A bilden ein homaloidales System mit den in A enthaltenen Fundamentalpunkten als in derselben Vielfachheit genommenen Punkten, welche sie für die A besitzen und sind entstanden durch den Schnitt mit den um die Fundamentalfläche A verminderten homaloidalen Flächen, welche nämlich den Ebenen durch a entsprechen. Als Fundamentalcurven fungiren auf A die in A enthaltenen Fundamentalcurven der Transformation.

Die ebenen Schnitte der Fundamentalflächen sind von variablem Geschlechte und es sind also auch die Osculationskegel der homaloidalen Flächen in den Fundamentalpunkten von variablem Geschlechte.

Theorem XXXVI. *Wenn eine Fundamentalfläche A_i a_i. Ordnung durch einen Fundamentalpunkt x_k, a_{ik}-fach hindurchgeht, so geht die dem x_k entsprechende Fläche A_k' durch den Punkt x_i' ebenfalls a_{ik}-fach.*

Die Nachbarpunkte im Osculationskegel von A_i im x_k entsprechen den Nachbarpunkten von x_i im Osculationskegel von A_k und dieses Entsprechen ist collinear.

Es gelten noch die folgenden Theoreme:

Theorem XXXVII. *Wenn eine Fundamentalfläche durch zwei Fundamentalpunkte der Ordnungen a_i und a_k, wo $a_i > a_k$, mit den Vielfachheiten a_{i1} und a_{k1} geht, so ist $a_{i1} > a_{k1}$.*

Theorem XXXVIII. *Wenn eine Fundamentalcurve durch zwei Fundamentalpunkte der Ordnungen a_i und a_k, wo $a_i > a_k$, mit den Vielfachheiten ν_{i1}, ν_{k1} geht, so ist $\nu_{i1} > \nu_{k1}$.*

Theorem XXXIX. *Wenn durch denselben Fundamentalpunkt zwei Fundamentalflächen der Ordnungen* a_i, a_k, *wo* $a_i > a_k$, *mit den Vielfachheiten* a_{1i}, a_{1k} *gehen, so ist* $a_{1i} > a_{1k}$.

Theorem XL. *Wenn durch denselben Fundamentalpunkt zwei Fundamentalcurven der Vielfachheiten* ν_i, ν_k *gehen, wo* $\nu_i > \nu_k$, *mit den Vielfachheiten* ν_{1i}, ν_{1k}; *so ist* $\nu_{1i} > \nu_{1k}$.

Theorem XLI. *Wenn für* 4 *Fundamentalpunkte die Summe der Ordnungen* $a_i + a_k + a_l + a_m \gtrless 2m$, *so ist auch für jede Fundamentalfläche a. Ordnung, welche durch sie mit den Vielfachheiten* a_{1i}, a_{k1}, a_{l1}, a_{m1} *geht,* $a_{i1} + a_{k1} + a_{l1} + a_{m1} \gtrless 2a$.

Theorem XLII. *In den Theoremen XXXVII. bis XL. ist überdies stets* $a_i - a_{i1} \geqq a_k - a_{k1}$, $\nu_i - \nu_{i1} \geqq \nu_k - \nu_{k1}$, $a_i - a_{1k} \geqq a_k - {}_{1k}$, $\nu_i - \nu_{1i} \geqq \nu_k - \nu_{1k}$.

Theorem XLIII. *Die Fundamentalpunkte theilen sich in jedem der beiden Räume in Grüppchen gleicher Vielfachheit und die in diesen Grüppchen enthaltenen Anzahlen von Punkten sind in beiden Räumen dieselben.*

Theorem XLIV. *Jedes Grüppchen des einen Raumes entspricht einem bestimmten Grüppchen des anderen Raumes, so nämlich, dass die Absonderungsfläche eines Fundamentalpunktes in dem Grüppchen in allen Fundamentalpunkten des correspondirenden Grüppchens gleiche Vielfachheiten besitzt mit Ausnahme eines einzigen Fundamentalpunktes.*

Theorem XLV. *Die Differenz unter den beiden im vorigen Theoreme genannten Vielfachheiten ist* $= \pm 1$.

Die letzten 3 Theoreme können durch Zusammensetzung aus elementaren $(a, b)^3$ bewiesen werden.

§ 2. *Eigenschaften der Fundamentalsysteme ohne Fundamentalcurven* 1. *Art.*

Theorem XLVI. *Werden zwei solche Transformationen* S, S' *zusammengesetzt, so erhält man eine Transformation derselben Definition.*

Das Fundamentalsystem $(SS')_2$ setzt sich aus den durch S' transformirten freien Fundamentalgebilden von S in S_2 und aus den Fundamentalgebilden von S_2' zusammen, enthält also nur Fundamentalcurven 2. Art. Nur wenn eine Fundamentalcurve von S_2 mit einem Fundamentalpunkte von S_1' coincidirt, kann der Curve eine Fläche entsprechen, aber dies ist doch immer so, dass der Curve eigentlich eine Curve und nur der gleichzeitigen Berührung der Flächen längs jener Curve die Fundamentalfläche entspricht.

Diese Transformationen bilden also eine in sich geschlossene unendliche Gruppe.

Theorem XLVII. *Die Anzahl der Fundamentalpunkte ist in beiden Räumen dieselbe.*

Die Postulation der Ein-Eindeutigkeit reicht zum Beweise hin. Denn in Folge deren müssen lineare Substitutionen unter den Ordnungen n und Vielfachheiten x in den Fundamentalpunkten bestehen, welche dieselben in beiderlei Sinne ohne Unbestimmtheit finden lassen, wozu die Gleichheit der Variabelnzahl in beiden Räumen Bedingung ist.

Theorem XLVIII. *Für die Transformationen gilt* $mm' - 1 = \Sigma a_i A_i = \Sigma a_i' A_i'$, *wenn* m, m' *die beiden Ordnungen,* a_i, a_i' *die Vielfachheiten der Fundamentalpunkte in* R_3, R_3', A_i, A_i' *die Ordnungen der entsprechenden Fundamentalflächen sind.*

Ein Ebenenbüschel in R_3 und das entsprechende Flächenbüschel in R_3' liefern (die Coincidenz von R_3, R_3' zeitweilig vorausgesetzt) eine Fläche $(m' + 1)$. Ordnung, Ort der Punkte, die mit ihren Transformirten Gerade über die Axe des Büschels liefern. Die Fläche geht a_i'-fach durch die Fundamentalpunkte von R_3' und transformirt sich in die analoge Fläche des R_3, sodass besteht $(m' + 1)m - \Sigma a_i' A_i' = m + 1$.

Corollar. Die homaloidalen Curven im R_3 gehen A_i-fach durch die a_i-fachen Fundamentalpunkte und treffen die Fundamentalcurven nicht in variablen Punkten.

Theorem XLIX. *Eine Fläche* 4. *O., welche in allen Fundamentalpunkten von* R_3 *Doppelpunkte hätte, würde in eine eben solche Fläche des* R_3' *verwandelt werden.*

Die Jacobi'sche Fläche hat die Ordnung $4(n - 1)$ und es ist also $2\Sigma' A_i' = 4(n - 1)$, $2\Sigma A_i = 4(n' - 1)$, weil die einem Fundamentalpunkte entsprechende Fläche bekanntlich zweimal zählt. Also $\Sigma A_i = 2(n' - 1)$, und $4n' - 2\Sigma A_i = 4$.

Corollar. Eine Fläche 2. Ordnung, welche durch alle Fundamentalpunkte von R_3 einfach geht, wird in eine eben solche Fläche des R'_3 verwandelt.

Theorem L. *Die Transformation muss in beiden Systemen von gleicher Ordnung sein.*

Ich benütze das vorstehende Corollar und denke mir eine Fläche 2. Ordnung durch alle Fundamentalpunkte.[1] Unter den Punkten der beiden so einander entsprechenden M_2^2 entsteht dann eine birationale Verwandtschaft, in welcher den ebenen Schnitten die Schnitte mit den homaloidalen Flächen entsprechen. Diese Verwandtschaft muss, da sie stereographisch auf die Ebene projicirt werden kann, in beiden Systemen gleicher Ordnung sein, also auch die beiderseitigen homaloidalen Flächen, $n = n'$.

Theorem LI. *Einem k-fachen Fundamentalpunkte entspricht eine Absonderungsfläche der Ordnung $\frac{k}{2}$; alle Fundamentalpunkte haben also gerade Vielfachheit.*

Denn der Fundamentalpunkt wird auch k-fach für die Verwandtschaft unter den Punkten der M_2^2 und in dieser entspricht ihm eine Curve derselben Ordnung k. Diese Curve ist aber der Schnitt von M_2^2 mit der zum Punkte gehörigen Absonderungsfläche im Raume und diese ist also von der Ordnung $\frac{k}{2}$.

Theorem LII. *Die Ordnung der Transformation ist stets ungerade und* $\Sigma k^2 = 2(n^2 - 1)$.

Denn nach XLVIII. $n^2 - 1 = 2\Sigma A_i^2$, also $n^2 = 2\Sigma A_i^2 + 1$.

Für jede birationale Transformation im R_3 gilt der Satz: Durch die Fundamentalcurven 2. Art gehen die homaloidalen Flächen stets nur in Folge der Fundamentalcurven 1. Art. Also gilt:

Theorem LIII. *Die Fundamentalcurven 2. Art sind Curven, welche durch die singulären Punkte allein vollständig bestimmt sind.* Ebenso:

---

[1] Das Gewagte dieses Beweises will ich nicht verhüllen. Man vergleiche hiezu die 1. Note auf p. 110 meines Buches über Gruppen, Mayer & Müller, Berlin 1895.

Theorem LIV. *Die homaloidalen Flächen sind Flächen, welche vermöge der singulären Punkte allein das Geschlecht $p = 0$ haben und durch die Fundamentalcurven 2. Art nur mit solchen Vielfachheiten gehen, welche eine nothwendige Consequenz der Vielfachheiten in den Fundamentalpunkten sind.*

Theorem LV. *Die homaloidalen Curven sind rationale Curven, welche ihren rationalen Caracter sowie ihre Unbestimmtheit $u = 4$ nur durch ihre Vielfachheit in den Fundamentalpunkten erhalten.*

Es ist überhaupt sowohl im R_3 als im R_r bei jeder einzelnen Transformation das grösste Gewicht darauf zu legen, *auf welche Art* die homaloidalen Curven ihren rationalen Character erhalten, ebenso die homaloidalen $M_2, M_3, \ldots, M_{r-1}$.

Bekanntlich kann eine Curve im Raume singuläre Punkte annehmen, ohne dass sich die Anzahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte ändert. Ich möchte daher jeder Raumcurve eine gewisse primitive Curve zuweisen, welche gar keine vielfachen Punkte besitzt, aber dieselbe Anzahl scheinbarer Doppelpunkte und aus welcher also jene numerisch durch Aufnahme vielfacher Punkte entsteht. Ich schliesse nun in dem gegenwärtigen Falle das ausserordentlich wichtige Theorem, welches in der Anmerkung zu LXI. einen strengeren Beweis erfährt:

Theorem LVI. *Die homaloidalen Curven aller Transformationen gegenwärtiger Art sind solche Curven, welche ohne die Vielfachheiten in den Fundamentalpunkten das für Curven ihrer Ordnung überhaupt mögliche Maximalgeschlecht haben.*

Das heisst, ihre primitiven Curven sind Curven maximalen Geschlechtes. — Ich benütze jedoch LVI. und LVII. nirgends.

Theorem LVII. *Für die homaloidalen Curven gilt*

$$\sum \frac{\alpha_i(\alpha_i - 1)}{2} = \frac{(\nu - 1)(\nu - 2)}{2} - \left[\frac{\nu - 1}{2}\right]^2.$$

Hiebei ist $\left[\frac{\nu - 1}{2}\right]$ der ganze Quotient der Division $(\nu - 1) : 2$, und α_i sind die singulären Punkte der Curven, ν die Ordnung. In der That hat ein α_i-facher Punkt auch im R_r für das Geschlecht der Curve den Werth von $\frac{\alpha_i(\alpha_i - 1)}{2}$ Doppelpunkten und nach einem Theoreme von

Halphen [1] ist $\left[\frac{\nu-1}{2}\right]^2$ die Maximalzahl von scheinbaren Doppelpunkten einer Curve ν. Ordnung, also jene Differenz das Maximalgeschlecht, welches nach LV., LVI. durch die a_i-fachen Punkte absorbirt werden muss.

Theorem LVIII. *Die Summe und die Summe der Quadrate der Vielfachheiten, mit welchen sämmtliche vorhandenen Fundamentalflächen durch einen bestimmten $2a_i$-fachen Fundamentalpunkt gehen, ist $4a_i - 1$ und $2a_i^2 + 1$.*

Ich verwende wieder die invariante Fläche 2. Ordnung und projicire die birationale Verwandtschaft in derselben stereographisch auf die Ebene. Dann erscheinen den $2a_i$-fachen Fundamentalpunkten des R_3 entsprechend auch in der Ebene $2a_i$-fache Fundamentalpunkte, hinzu treten noch die Schnittpunkte der Ebene mit den beiden Erzeugenden des Centrums als m-fache Fundamentalpunkte, während die Ordnung in der Ebene $2m$ wird. Es ist also nach den Gleichungen in der Ebene [2] $\Sigma a_{ik} + 2a_i = 3(2a_i) - 1$, wo die a_{ik} dieselben Durchgänge wie im R_3, also die Zahlen des Theoremes sind, und weil die beiden hinzukommenden Fundamentalcurven durch jeden Punkt mit dessen halber Vielfachheit gehen. [3]

Für die Summe der Quadrate folgt ebenso $\Sigma a_{ik}^2 + 2a_i^2 = (2a_i)^2 + 1$, also $\Sigma a_{ik}^2 = 2a_i^2 + 1 = \frac{(2a_i)^2}{2} + 1$. [4]

---

[1] C. R. Bd. 70. — Das Theorem LVII., dessen von LVI. unabhängiger Beweis in der Anmerkung nach LXI. geliefert wird, steht ebenso wie LVI. mit einer Behauptung Halphen's über Raumcurven in n° 22 des Chap. II. seiner Preisschrift über die algebraischen Raumcurven (Journal de l'École polyt. Cah. LI.) in nur scheinbarem Widerspruche. Die betreffende Behauptung scheint mir übrigens *unrichtig*.

[2] Crelles Journal, Bd. 114, p. 57.

[3] Diese Fundamentalcurven sind die stereographischen Projectionen der den beiden Erzeugenden in der Verwandtschaft auf M_2^2 entsprechender Curven m. Ordnung, welche nach der allgemeinen Theorie als homaloidale Curven durch einen a_i-fachen Punkt A_i-fach gehen, also nach LI. $\frac{a_i}{2}$-fach.

[4] Das Gewagte des Beweises mittelst M_2^2 wird sehr gemildert, wenn man bedenkt, dass auch eine Fläche 4. O., welche doppelt durch die Fundamentalpunkte geht, dadurch abbildbar werden kann, dass sie einen 3-fachen Punkt erhält und allgemeiner, dass man für hinreichend grosses s stets wird eine Fläche der Ordnung $2s$ finden können, welche durch die sämmtlichen Fundamentalpunkte s-fach geht und ausserhalb derselben einen $(2s-1)$-fachen Punkt besitzt, also ein Monoid. In diesem Monoide (oder unter den beiden

Theorem LIX. *Die Summe und die Summe der Quadrate der Vielfachheiten, mit welchen eine bestimmte Fundamentalfläche a_i. Ordnung durch die Fundamentalpunkte hindurchgeht, welche sie enthält, sind $4a_i - 1$ und $2a_i^2 + 1$.*

Die stereographische Abbildung der M_2^2 liefert von der Ebene aus die Gleichungen $\Sigma a_{ki} + 2a_i = 3(2a_i) - 1$, weil die Fundamentalcurven die Projectionen der Schnitte von M_2^2 mit den Fundamentalflächen sind, welche jede Erzeugende in a_i Punkten treffen und die Ordnung der Fundamentalcurve also $2a_i$ wird. Ebenso für die Quadrate.

Theorem LX. *Wird durch eine dieser Transformationen ein Flächensystem in ein anderes verwandelt, so wird auch das adjungirte Flächensystem in das adjungirte verwandelt.*

Die Singularitäten, welche die adjungirten Flächen in den Fundamentalcurven 2. Art haben *können,* bedürfen einer genauen allgemeinen Untersuchung, kommen aber hier nicht in Betracht, da sie auf die Verwandlung durch die Transformation nur dadurch Einfluss haben könnten, dass sie die Vielfachheit der adjungirten Fläche in den Fundamentalpunkten beeinflussen. Dies ist aber nach dem Theoreme LIII. nicht möglich. Der adjungirte Singularitätencomplex ist also $n - 4$, $x_i - 2$ und nach XLIX. in $n' - 4$, $x_i' - 2$ verwandelt.

Theorem LXI. *Für die homaloidalen Curven gilt* $\Sigma\alpha = 2(\nu - 1)$, $2\Sigma\alpha^2 = \nu^2 - 1$.

Denn die Curve geht, weil sie einer Geraden entspricht, gemäss LI. und LII. durch einen k-fachen Fundamentalpunkt $\frac{k}{2}$-fach und es ist aber $\frac{k}{2} = a_i$, wegen XLIX. und LII. $\Sigma a_i = 2(m - 1)$, $2\Sigma a_i^2 = m^2 - 1$, und nach L. ist die Ordnung ν gleich der der homaloidalen Flächen.

Anmerkung. Andererseits kann man diese Relationen aus LVII. folgern, wenn man das Theorem LXII. hinzunimmt. Lässt man aber den hier gegebenen Beweis und seine Voraussetzungen gelten, was sogar besser ist, so kann man aus den beiden Relationen die Relation des Theoremes

---

entsprechenden) entsteht dann eine birationale Verwandtschaft, welche sich durch Projection aus den $(2s - 1)$-fachen Punkten in eine ebene birationale Transformation überträgt.

LVII. herleiten und aus diesem dann auf LVI. schliessen, welches *wichtige* Theorem dann bewiesen ist, ohne auf allgemeine Transformationsrelationen sich zu stützen.

Corollar. Sowohl die homaloidalen Curven als die Fundamentalcurven sind von der Art, dass sie unbeschadet ihrer Natur in Flächen 2. O. enthalten sein können.

Theorem LXII. *Wenn eine homaloidale Curve gegenwärtiger Art in einer M_2^2 enthalten ist, so sind ∞^1 mit denselben Singularitäten in der M_2^2 enthalten.*

Denn die stereographische Projection liefert Curven mit denselben Vielfachheiten und zwei $\frac{m}{2}$-fachen Punkten oder einen $\frac{m-1}{2}$-fachen und einem $\frac{m+1}{2}$-fachen und zwar, da hier m ungerade, den 2. Fall. Es ist also die Dimension

$$\frac{1}{2}m(m+3)-\frac{1}{2}\Sigma a_i(a_i+1)-\frac{1}{2}\frac{m-1}{2}\left(\frac{m+1}{2}-\frac{1}{2}\frac{m+1}{2}\frac{m+3}{2}\right)=+1$$

gemäss XLIX. und LII.

Es folgt dies auch ohne die Relationen LII. Die Summe der Vielfachheiten ist $2m-2$, damit also eine durch die Fundamentalpunkte gehende M_2^2 die Curve enthalte, bedarf es dreier Bedingungen, die Dimension aller Curven ist aber 4, also bleibt in M_2^2 die Dimension 1.

Theorem LXIII. *Wenn eine Fundamentalfläche A_i', die zu x_i gehört, a_{ik}-fach durch x_k' geht, so geht die Fundsmentalfläche A_k, welche zu x_k' gehört, a_{ik}-fach durch x_i.*

Folgt ebenfalls aus der Projection der invarianten M_2^2 und der entsprechenden Eigenschaft der birationalen Transformationen in der Ebene. Auf demselben Wege ergeben sich noch die Theoreme:

In jeder solchen Transformation des Raumes theilen sich die Fundamentalpunkte jedes Systemes in Grüppchen gleicher Vielfachheit und die Anzahlen der in diesen Grüppchen enthaltenen Punkte sind in beiden Systemen dieselben.

Jedes Grüppchen ist einem bestimmten Grüppchen des zweiten Raumes coordinirt, so zwar, dass die Absonderungsfläche eines Fundamentalpunktes in jedem Fundamentalpunkte des coordinirten Grüppchens dieselbe Vielfachheit hat mit Ausnahme eines einzigen und die Differenz der Vielfachheiten ist $= \pm 1$.

Auch die Theoreme XXXVII. bis XL. lassen sich mittelst der M_2^2 beweisen.

§ 3. *Identität der Transformationen der* §§ 1 *und* 2.

Theorem LXIV. *Für die homaloidalen Curven der Transformationen des* § 2 *ist stets, wenn* a_1, a_2, a_3, a_4 *die* 4 *höchsten Fundamentalpunkte sind,* $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > m$.

Ich denke mir die homaloidale Curve in einer M_2^2 enthalten, was bei dem arithmetischen Character gegenwärtiger Sätze keine Einschränkung und aber nach dem Corollare zu LXI. möglich ist. Es wird also nach LXII. folgen, dass die M_2^2 der Curven ∞^1 enthält. Die stereographische Projection verwandelt diese in ein Büschel von Curven der Ordnung m mit zwei vielfachen Punkten $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m+1}{2}$ und mit $a_1, \ldots, a_\sigma$-fachen Punkten, welche Curven $p = 0$ haben. Ein solches Büschel ist nach bekannten Theoremen stets auf niedere Ordnung zu bringen durch Anwendung einer Q^2, welche die drei höchsten Basispunkte besitzt. Es muss also entweder $a_1 + a_2 + a_3 > m$ sein, womit aber das Theorem, u. zw. stärker als gewünscht, bewiesen wäre, oder es muss wenigstens $\frac{m+1}{2} + \frac{m-1}{2} + a_1 > m$ sein. Denn wären auch nur zwei Punkte a gleich $\frac{m-1}{2}$, so müsste $a_1 + a_2' + a_3 > m$ sein, da nicht $a_3 = a_4 = \ldots = a_\sigma = 1$ sein kann. Es muss also der Fall supponirt werden, dass dem Nöther'schen Theorem nur durch jene Ungleichheit genügt wird, was aber auch der ungünstigste ist. Gleichzeitig können wir von nun ab die Voraussetzung $a_2, a_3, \ldots, a_\sigma > \frac{m-1}{2}$ machen.

Durch Anwendung von Q^2 mit jenen 3 Hauptpunkten folgt dann ein Büschel von Curven der Ordnung $m - a_1$ mit $\frac{m+1}{2} - a_1$-fachem,

$\frac{m-1}{2}-a_1$-fachem Punkte und $a_2, a_3, \ldots, a_\sigma$-fachen Punkten. Dieses Büschel muss nun weiter reducirbar sein, es muss also die Summe der drei höchsten Basispunkte $> m - a_1$ sein.

Wäre nun $\left(\frac{m+1}{2}-a_1\right)+\left(\frac{m-1}{2}-a_1\right)+a_2 > m - a_1$, so wäre $a_2 > a_1$, was nicht sein soll. Es muss also $a_2 > \frac{m-1}{2}$ oder $a_1 + a_2 > \frac{m-1}{1}$ sein, und aber ebenso nach $a_3 > \frac{m-1}{2}-a_1$ oder $a_1 + a_3 > \frac{m-1}{2}$ sein. Es bleibt die Transposition durch $\left(\frac{m+1}{2}-a_1\right)+a_2+a_3 > m - a$, womit $a_2 + a_3 > \frac{m-1}{2}$ verknüpft ist. Die Voraussetzung, dass auch $\frac{m+1}{2}-a_1$ nicht unter den höchsten sei, führt aber zu $a_2 + a_3 + a_4 > m - a_1$, was das Theorem liefern würde.

Bemerken wir nun aber, dass $a_1 \geqq \frac{m+1}{4}$ sein muss. Denn wenn alle a_i gleich sind, gilt nach § 2 $\sigma a = 2(m-1)$, $\sigma a^2 = \frac{m^2-1}{2}$ also $a = \frac{m+1}{4}$. Dies ist aber nach bekannten arithmetischen Grundsätzen das Minimum. Nach der Relation $a_2 + a_3 > \frac{m-1}{2}$ bliebe also nur noch zu beweisen, dass auch $a_4 \geqq \frac{m+1}{4}$.

Wird die vorletzt genannte Transposition wirklich ausgeführt, so entsteht ein Büschel von Curven $p = 0$ der Ordnung

$$2(m-a_1)-\left(\frac{m+1}{1}-a_1\right)-a_2-a_3 = \frac{3m-1}{2}-a_1-a_2-a_3$$

und mit den Fundamentalpunkten $\frac{m-1}{2}-a_1, \frac{m-1}{2}-a_2, \frac{m-1}{2}-a_3$, $m-a_1-a_2-a_3, a_4, \ldots, a_\sigma$, wovon der erstere vom vorherigen Büschel als unverwendet übrig ist, und wo die Punkte nicht in der Reihenfolge der Grösse stehen. Transformirt man nun mit $\frac{m-1}{2}-a_1, \frac{m-1}{2}-a_2$, $\frac{m-1}{2}-a_2$, so entsteht $3m-1-2a_1-2a_1-2a_3-\frac{1}{2}(3m-3)+a_1+a_2+a_3$

$= \frac{3m+1}{2} - a_1 - a_2 - a_3$, also keine Verringerung, während das Büschel reducirbar sein muss. Auch $\frac{m-1}{2} - a_2$, $\frac{m-1}{2} - a_3$, $m - a_1 - a_2 - a_2$ können nicht die 3 höchsten Basispunkte sein, weil sie die transponirte Ordnung $3m - 1 - 2a_1 - 2a_2 - 2a_3 - 2m + 1 + 2a_2 + 2a_3 + a_1 = m - a_1$ liefern, also wieder keine Verringerung. Es muss also jedenfalls a_4 mit verwendet werden, also a_4 muss unter den drei höchsten Fundamentalpunkten sein. Es möge nun a_4 grösser sein als einer der vorhergehenden Basispunkte. Ist $a_4 > m - a_1 - a_2 - a_3$, so folgt sofort $m > a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ qu. e. d. Ist $a_4 > \frac{m-1}{2} - a_1$, so folgt $\frac{m-1}{2} < a_1 + a_4$ also $a_1 + a_4 \frac{m-1}{2} + 1$ wenigstens, aber es ist auch nach obigem $a_2 + a_2 = \frac{m-1}{2} + 1$ wenigstens, also durch Addition dieser beiden Beziehungen $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = m + 1$ wenigstens. Damit ist denn der ungünstigste Fall erledigt, da unter den vier dem a_4 vorausgehenden Zahlen $\frac{m-1}{2} - a_1$ (oder sicher immer unter den drei ersten Zahlen) die kleinste ist.

Aber der hiemit gelieferte Beweis ist allgemein, da die Hinzunahme der M_2^2 keine andere Bedeutung hat, als der Hinzunahme eines $\frac{m-1}{2}$-fachen und eines $\frac{m+1}{2}$-fachen Punktes, welche nach dem in Anmerkung nach LXI. bewiesenen Theoreme LVI. (oder LVII.) vorhanden sind, ein geometrisches Substrat zu liefern.

Der Beweis gilt nun aber auch ohne Rücksicht auf unendlich nahe Lage von Fundamentalpunkten, denn da das Theorem über die ebenen Curvenbüschel, aus dem sich der Beweis entwickelt, ohne diese Einschränkung gilt, und jene Lage sich in keiner anderen Weise bei der Projection geltend macht, so überträgt sich die Allgemeinheit auf den Raum.

Theorem LXV. *Die homaloidalen Curven der Transf. des § 2 lassen sich stets durch Anwendung cubischer Reciprokaltransformationen $(a, b)^3$ in das Geradensystem verwandeln.*

Denn verwendet man die 4 höchsten Fundamentalpunkte a_1, a_2, a_3, a_4 für eine $(a, b)^3$, so wird $3m - 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) < 3m - 2m$ d. h. $< m$ werden und die Ordnung ist vermindert. Die neu erhaltenen

Curven sind aber wieder von derselben Art, da ja sie gleichfalls wieder als homaloidale Curven in einer Transformation dieser Classe erscheinen, und gestatten also neuerdings Anwendung von LXIV. und $(a, b)^3$. So fortgesetzt wird m bis auf 3 und dann auf 1 reducirt werden.

Theorem LXVI. *Die Transformationen ohne Fundamentalcurven* 1. *Art sind aus cubischen Reciprokaltransformationen zusammensetzbar.*

Überträgt man nämlich das System der homaloidalen Curven und setzt gleichzeitig $(a, b)^3$ mit der gegebenen Transformation zusammen, so wird die neue Transformation die übertragenen Curven zu homaloidalen haben, also selbst ebenfalls von niedrigerer Ordnung sein, und man wird successive bis zu einer $(a, b)^3$ selbst gelangen können.

Hiemit ist die Identität der Transformationen der §§ 1 und 2 nachgewiesen. Der Beweis des Theoremes hätte auch *direct für die homaloidalen Flächen geführt werden können* und sogar ganz abgesehen davon, dass mit der Relation $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > m$ gleichzeitig für die 4 höchsten Singularitäten $2a_1, 2a_2, 2a_3, 2a_4$ der homaloidalen Flächen die Relation $(2a_1) + (2a_2) + (2a_3) + (2a_4) > 2m$ gefunden ist. Man kann nämlich sogar direct eine invariante M_2^2 benützen, die birationale Verwandtschaft in derselben durch stereographische Projection abbilden, und wird hierbei ein Netz von Curven $p = 0$ der Ordnung $2m$ erhalten, welche $2a_1, \dots, 2a_\sigma$-fache und zwei m-fache Punkte haben, weil die M_2^m jede Erzeugende durch O in m Punkten treffen. In der That ist die Dimension

$$\frac{1}{2} 2m(2m + 3) - \frac{1}{2} \Sigma 2a_i(2a_i + 1) - 2\frac{1}{2} m(m + 1) = 3,$$

wovon noch der Transformirte von O, resp. diese Projection zu subtrahiren ist, so dass ∞^2 bleibt. Auf dieses Netz ist dann das Schlussverfahren anzuwenden, womit ich LXIV. bewiesen habe.

§ 4. *Einige specielle Transformationen gegenwärtiger Art.*

Theorem LXVII. *Wenn ein Fundamentalsystem der Ordnung m einen Fundamentalpunkt der Ordnung m* — 1 *enthält, so sind die Vielfachheiten* *der übrigen Fundamentalpunkte die Doppelten der eines ebenen Fundamentalsystemes der Ordnung* $\frac{m+1}{2}$.

Denn aus $\sum_1^\sigma a_i = 2m - 2$ und $\sum_1^\sigma a_i^2 = \frac{m^2-1}{2}$ folgt $\sum_2^\sigma a_i = \frac{3(m+1)}{2} - 3$, $\sum_2^\sigma a_i^2 = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - 1$ (da $a_1 = \frac{m-1}{2}$) qu. e. d.

Die Fundamentalcurven 2. Art für ein solches System sind die Geraden, welche a_1 mit $a_2, \ldots, a_\sigma$ verbinden, dann die Curven, welche aus denjenigen der erwähnten ebenen Verwandtschaft so abgeleitet werden, dass man den Curven ν. Ordnung Curven $2\nu - 1$. Ordnung substituirt, welche in $x_2, \ldots, x_\sigma$ dieselben Vielfachheiten wie jene und in x_1 die Vielfachheit $\nu - 1$ haben. Diese Fundamentalcurven sind für die M_2^m einfach und sind jenen Geraden genau dem Entsprechen in der Ebene (unter den x_i und ihren Fundamentalcurven) gemäss zugeordnet. Die Gesammtanzahl ist also $2(\sigma - 1)$.

Die Fundamentalflächen sind den Punkten $x_2, \ldots, x_\sigma$ entsprechend Kegel mit der Spitze in x_1 und aufstehend über den Fundamentalcurven des (fingirten) ebenen Systemes, und dem x_1 entsprechend, eine Fläche $\frac{m-1}{2}$. Ordnung mit $x_1 \frac{m-3}{2}$, welche ausserdem durch $x_2, \ldots, x_\sigma$ mit den Vielfachheiten $a_2, \ldots, a_\sigma$ geht.

Wenn $2a_1 = 2a_2 = m - 1$, so ist also $2a_3 = \ldots = 2a_\sigma = 2$, die Fundamentalcurven sind zweimal $\sigma - 2$ Geraden aus x_1, x_2 nach $x_3, \ldots, x_\sigma$, die Gerade $x_1 x_2$ und die Curve $m - 2$. Ordnung durch $x_1^{m-3} x_2^{m-3} x_3 \ldots x_\sigma$. Die Transformation verwandelt das Ebenenbüschel durch $x_1 x_2$ in das Ebenenbüschel durch $x_1' x_2'$ und zwar mit quadratischen Verwandtschaften unter den Ebenenpaaren.[1]

Theorem LXVIII. *Die einzigen Fundamentalsysteme mit* $a_1 = \ldots = a_\sigma$ *sind* $(1, 1, 1, 1)^3$, $(4, 4, 4, 4, 4, 4)^7$, $(8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8)^{15}$.

---

[1] Die irreductible einfache Fundamentalcurve I. Art, welche bei der allgemeinen dyoidalen Transformation mit quadratisch verwandten Ebenen auftritt, ist also hier in obiger Weise zerfallen und dadurch in die 2. Art übergegangen, dass sich der Character I. Art auf einzelne Punkte in ihr zusammengezogen hat.

Aus XLIX. und LII. folgt $\sigma\alpha = 2(m-1)$, $2\sigma\alpha^2 = m^2 - 1$, $\alpha = \frac{m+1}{4}$, $\sigma = \frac{m-1}{m+1}$, $m = \frac{8+\sigma}{8-\sigma}$, welches ganz wird für $\sigma = 4, 6, 7$ und $m = 3, 7, 15$. Diese Fundamentalsysteme sollen als Q^3, Q^7, Q^{15} bezeichnet werden, während T^k immer die Potenz einer Transformation bezeichnen soll.

Die Fundamentalcurven für Q^7 sind die 15 Geraden $x_i x_k$ einfach und die $(x_1 \ldots x_6)^3$ dreifach, für Q^{15} die 21 Geraden $x_i x_k$ einfach und die 7 Curven $(x_i x_{i+1} \ldots x_{i+6})^3$ dreifach. Die Fundamentalflächen für Q^7 sind Kegel $(x_i^2 x_{i+1} \ldots x_{i+5})^2$ und für Q^{15} Flächen 4. Ordnung $(x_i^3 x_{i+1}^2 \ldots x_{i+6}^2)^4$.

Theorem LXIX. *Unter den Transformationen mit nicht mehr als 6 Punkten kann keine höhere als 7., mit nicht mehr als 7 keine höhere als 15. Ordnung sein.*

Die Fundamentalflächen sind nämlich nur Ebene durch 3 Punkte, quadratischer Kegel, M_2^3 mit 4 Doppelpunkten und 3 einfachen, M_2^4 mit 1 dreifachen und 6 Doppelpunkten. Wegen LXVIII. und Minimumsätzen hat jede Transformation höherer als 7., 15. O. einen höheren also 4- oder 8-fachen Fundamentalpunkt.

Theorem LXX. *Die Fundamentalsysteme mit weniger als 8 Punkten sind* $(1, 1, 1, 1)^3$, $(4, 4, 2, 2, 2, 2)^5$, $(6, 4, 4, 4, 2, 2, 2)^7$, $(4, 4, 4, 4, 4, 4)^7$, $(8, 4, 4, 4, 4, 4, 4)^9$, $(6, 6, 6, 4, 4, 4, 2)^9$, $(8, 6, 6, 6, 6, 4, 4)^{11}$, $(8, 8, 8, 6, 6, 6, 6)^{13}$, $(8, 8, 8, 8, 8, 8, 8)^{15}$. *Die Anzahl der Fundamentalsysteme mit einer Anzahl $\sigma > 7$ Fundamentalpunkten ist unendlich.*

Die ersten Fundamentalsysteme gewinnt man leicht mit Anwendung des Theoremes LXVI. Zum Beweise des 2. Theiles des Th. genügt es, die cubische Characteristik $(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4)$ b_1 in b_1' in $\ldots b_1^h = a$, für $h > 3$ zu verwenden. Denn nach der Theorie dieser Transformationen (s. Am. J. 1896) ist sie für $h > 3$ aperiodisch und liefert also unendlich viele Fundamentalsysteme, welche keine anderen als diese Fundamentalpunkte haben und von denen keines unendlich oft wiederkehren kann, ohne Periodicität zu bewirken.

II. THEIL.

Theorie der periodischen Characteristiken. Äquivalenz mit den Typen.

§ 1. *Allgemeine Sätze über Characteristiken und die linearen Substitutionen* I) *und* II).

Das Problem der Zusammensetzung führt nun sofort zum Probleme der Periodicität. Hier eben erweisen sich die Fundamentalsysteme des I. Theiles als die genaue Verallgemeinerung der birationalen Transformationen der Ebene. Damit nämlich Reduction der Ordnung bis auf Eins durch successive Anwendung (T^i) eintreten könne, reicht das Princip der Verkettung der Fundamentalpunkte vollkommen aus. Damit also die Characteristik, d. i. die Gesammtheit der Fundamentalgebilde und ihrer Transformirten, Periodicität liefere, ist nothwendig, dass die Fundamentalpunkte b_i von R_3' mit den a_i von R_3 verkettet oder coincident sind. Für die Verminderung der Ordnung ist die Verkettung der Fundamentalcurve 2. Art gleichgiltig. Die Fälle, wo b_i mit Fundamentalcurven c_i incident sind, ohne in Fundamentalpunkte überzugehen, können also nicht periodisch sein. Um die entsprechenden Substitutionen I) und II) zu schreiben (characterisirt), hat man also n' dem n, die x' den x und die y' den y zuzuweisen und die x', x, die y', y je unter einander zu verketten.[1] Rein arithmetisch ist die Verkettung der y', y von jener der x', x ganz unabhängig und hier zweigt sich abermals eine neue arithmetische Untersuchungsrichtung von dem geometrischen Gebiete ab. Jedoch gilt in Folge des Theoremes LIII:

Theorem I. *Durch die Coincidenzen und Verkettungen der Fundamentalpunkte sind die Coincidenzen und Verkettungen der Fundamentalcurven*

[1] Rein arithmetisch ist es sogar möglich, auch die x' mit den y, die y' mit den x zu verketten. Die Schreibung der Substitutionen I) und II) für diesen Fall kann möglicher Weise zu neuen Classen ganzzahliger periodischer linearer Substitutionen führen.

(2. *Art) vollständig bestimmt. Die Characteristik ist schon periodisch, wenn auch nur die unvollständigen Substitutionen* I) *periodisch sind.*

Es folgt also daraus auch die Periodicität des vollständigen Substitutionen I) und II). Das Theorem (von FROBENIUS) über die Periodicität einer linearen Substitution überträgt sich auch hierher.[1] Die characterisirten Substitutionen I) oder II) sind periodisch, wenn die characteristische Function einfache Elementartheiler und nur Einheitswurzeln zu Wurzeln hat.

Corollar. Sobald die Zahl $\sigma < 8$, kann die Periodicität keinen Index > 30 haben (Crelles Journal, Bd. 114, p. 50). Auf Grund der Theoreme XLIII. bis XLV. und dann Ende von § 2 kann auch die Directrixsubstitution einer Characteristik definirt werden. Man lässt in einer primitiven Characteristik (d. i. nur mit Verkettungen) auf einen Punkt a_i jenen folgen, der dem mit jenem coincidenten nach XLIV. conjugirt ist. In der derivirten Characteristik (d. i. mit Verkettungen) setzt man den Cyclus genau durch die Verkettungen der Characteristik fort und schliesst ihn wie bei der primitiven.

Die wichtigen Theoreme XXV. bis XXXIX. auf p. 62 bis 64 cit. Abh. gelten genau auch hier, wobei nur in XXXIX. statt Transformationen von Jonquières die Transformationen dieser Abh. I. Th. § 4 LXXXVII. a. E. zu setzen sind und in XXXII. statt 2, 3 hier 3, 4.

Theorem II. *Jede Characteristik mit weniger als* 8 *Punkten liefert ein endliches Tableau successiver Transformationen und ist periodisch.*

Denn nach I. § 4. gibt es nur eine endliche Anzahl von Fundamentalsystemen, welche nur in eine endliche Anzahl Characteristiken über die 7 Punkte vertheilt werden können und keine Characteristik kann sich in derselben Vertheilung über die 7 Punkte wiederholen, da sonst (cf. cit. Abh.) die Characteristik sich schon früher mit der Collineation hätte endigen müssen.

Theorem III. *Die involutorischen Characteristiken* $(a_i b_i)$ *von* Q^7 *und* Q^{15} *sind vertauschbar mit allen Characteristiken von* 6, *resp.* 7 *Punkten.*

Jede $(a, b)^3$, welche die 4 Punkte über den 6, 7 Punkten besitzt, verwandelt die Transformation in eine Transformation derselben Art,

[1] Für die Ebene von mir angegeben Crelles Journal Bd. 114, p. 61.

also auch jede aus $(a, b)^3$ zusammengesetzte Characteristik über den 6, 7 Punkten.

Die Theoreme L. bis LIV. cit. Abh. gelten auch hier, ebenso auch Th. LV., LVI. In der Deutung von LVI. (l. c.) tritt jedoch hier eine Änderung ein. Die Zahl $m - a_{1z_1} - \ldots - a_{\sigma z_\sigma}$ ist eine Invariante der unvollständigen Substitutionen I), die Anzahl der Doppelpunkte im R_3 ist jedoch hier $2m + 2 - \nu$, wo ν die Verringerung durch uneigentliche Doppelpunkte ist und diese Anzahl ist bei Erhaltung der Zahl σ der Characteristikpunkte (d. i. der Variabelnzahl der Substitution) gewiss invariant. Es muss also die Differenz

$$2\nu - (a_{1z_1} + \ldots + a_{\sigma z_\sigma})$$

invariant sein u. zw. wie Beispiele lehren, constant und weiter gleich Null. Dies beweist das

Theorem IV. *Die Incidenz eines Fundamentalpunktes a_i gegenwärtiger Transformationen mit der ihm entsprechenden Absonderungsfläche, welche a_{ik}-fach durch den dem a_i coincidenten Fundamentalpunkt b_k hindurchgeht, absorbirt (uneigentlich) $2a_{ik}$ Doppelpunkte.*

Die 1. Invariante der Substitution 1.) ist also die Hälfte der Anzahl der eigentlichen Doppelpunkte, noch vermindert um 1.

Die Theoreme LXIV. bis LXXVIII. der cit. Abh. gelten mit geringen Abänderungen auch hier. An die Stelle von LIX. bis LXIII. l. c. treten Theoreme, welche erst nach Ausspruch des Äquivalenztheoremes in § 5 bewiesen und angegeben werden sollen.

Theorem V. *Die characteristischen Functionen der Substitutionen* I) *und* II) *sind für jede Characteristik einander gleich.*

Man beweist es, indem man die Reduction auf die Typen durchführt, für jeden einzelnen Typus den Beweis führt und dann bemerkt, dass die allgemeinen Typen durch Hinzufügung von Cyclen entstehen, welche in beide Functionen gleiche Factoren liefern.

Theorem VI. *Wenn eine Characteristik gegenwärtiger Fundamentalsysteme periodisch ist, sind alle Wiederholungen, welche denselben Index haben, mit ihr durch eben solche Transpositionen äquivalent.*

Auch dies wird für die einzelnen Typen des II. Th. § 5 bewiesen und von dort aus auf die äquivalenten nicht typischen Characteristiken geschlossen, weil aus $P^{-1}T^kP = T$ folgt $P^{-1}(Q^{-1}TQ)^kP = Q^{-1}TQ$.

Theorem VII. *Wenn die Anzahl der Factoren* $(x - 1)$ *der characteristischen Function* $>$ *als der Rang der Characteristik plus* 1, *ist die Charakteristik einer der §§ 3, 4 äquivalent.*

§ 2. *Die anallagmatischen Curvensysteme und die Reductibilität auf die Typen.*

I. Beweis.

Theorem VIII. *Jede periodische Characteristik besitzt unendlich viele invariante Singularitätencomplexe* $\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\sigma$ *beliebig hohen Geschlechtes* p.

Denn da es sich hier nur um Characteristiken handelt, so kann man die Gesammtheit der transformirten Curven einer Geraden stets in solcher Lage befindlich denken, dass dieselbe als reductible Raumcurve gelten kann, was die Erfüllung zweier Ungleichheiten erfordert. Seien $n_1, \ldots, n_\sigma$ die Partialordnungen, $h_1, \ldots, h_\sigma$ die Partialanzahlen der scheinbaren Doppelpunkte, k_{ij} die Anzahlen der gemeinsamen Treffgeraden dieser Theile, so muss wegen der Projection auf eine Ebene, $n = n_1 + \ldots + n_\sigma$, $2(h_1 + h_2 + \ldots + h_\sigma + \Sigma k_{ij}) \leqq (n-1)(n-3)$ sein und da $2h_i \leqq (n_i - 1)(n_i - 2)$, ist $2\Sigma h_i \leqq \Sigma n_i^2 - 3\Sigma n_i + 2\sigma$ und also, wenn in den letzten Formeln die Gleichheit gilt,

$$(2) \qquad 2\Sigma k_{ij} \leqq 2\Sigma n_i n_j - 2(\sigma - 1).$$

Andererseits ist $4(\Sigma h_\sigma + \Sigma k_{ij}) \geqq (n-1)^2$ und da $4h_i \geqq (n_i - 1)^2$, ist $4\Sigma h_i \geqq \Sigma n_i^2 - 2\Sigma n_i + \sigma$, also, wenn in der letzten Formeln Gleichheit gilt, sicher

$$(3) \qquad 4\Sigma k_{ij} \geqq 2\Sigma n_i n_j - (\sigma - 1).$$

Das Geschlecht p der Gesammtcurve ist $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma h_i - \Sigma k_{ij}$, also $2p = \Sigma n_i n_j - (\rho - 1) + \Sigma p_i - \Sigma k_{ij}$, daher $2p = \Sigma p_i + \Sigma n_i n_j - (\sigma - 1) - \Sigma k_{ij}$

und im Falle der Giltigkeit der vorhergehenden beiden Formeln, d. i. sicher dann, wenn $p_i = 0$,

$$(4) \qquad 2p = \Sigma n_i n_j - (\sigma - 1) - \Sigma k_{ij}$$

stets positiv. Dieser Fall $p_i = 0$ tritt ein, wenn man die Transformirten einer rationalen Curve summirt und es kann unter Erfüllung von (2) und (3) der Werth von (4) willkürlich gross gemacht werden. Übrigens können (2) und (3) auch mit $p_i \gtrless 0$ erfüllt werden.

Theorem IX. *Wenn eine Transformation gegenwärtiger Art einen Complex* $\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\sigma$ *in sich transformirt, transformirt sie auch* $\mathfrak{n} - 4, \mathfrak{x}_1 - 1, \ldots, \mathfrak{x}_\sigma - 1$ *in sich.*

Denn dieser ist die lineare Combination aus jenem und aus $4, 1, \ldots, 1$. Der 2. kann *der adjungirte* Complex des 1. genannt werden. Man kann nun von irgend einem Complexe ausgehend die Reihe der successive adjungirten Curvensingularitätencomplexe bilden.

Theorem X. *Für jeden Singularitätencomplex, welcher durch eine der gegenwärtigen Characteristiken anallagmatisch ist, ohne Fundamentalcurven 2. Art zu schneiden, kann man numerisch voraussetzen, dass die Curve ohne jene Singularitäten das Maximalgeschlecht besitze.*

Denn nach Annahme von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\sigma$ hängt das Geschlecht nur von der Anzahl h der scheinbaren Doppelpunkte ab, welche aber auf die Characteristik ohne Einfluss ist, schon darum, weil man die Curve wegen der Invarianz der M_2^2 (Th. XLIX.) in einer solchen enthalten voraussetzen kann, in einer solchen M_2^2 aber M_1^n des Maximalgeschlechtes enthalten sind und vermöge der Schnitte mit den Erzeugenden wieder in solche verwandelt werden. Für die »Transformationen» wird jedoch ein eigener, genauerer Beweis zu suchen sein. Die Voraussetzung des Maximalgeschlechtes soll nun hinfort immer gemacht werden.

Theorem XI. *Dann ist die Zahl u des adjungirten Singularitätencomplexes gleich der Zahl $p - 1$ des vorhergegangenen Complexes.*

Das p dieser Curve ist $\frac{(\mathfrak{n}-2)^2}{4} - \sum \frac{\mathfrak{x}_i(\mathfrak{x}_i - 1)}{2}$. Das u des adjungirten Complexes muss definirt werden wie oben für die homaloidalen Curven als die Dimension einer in einer M_2^2 enthaltenen Curve $\mathfrak{n}, \mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\sigma$.

Nun ist diese Dimension $\frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}+3)}{2} - 2 \cdot \frac{\mathfrak{n}}{2}\left(\frac{\mathfrak{n}}{2}+1\right) : 2 - \sum \frac{\mathfrak{r}_i(\mathfrak{r}_i+1)}{2}$ für $n - 4$, $\mathfrak{r}_i - 1$ gebildet $(\mathfrak{n}^2 - 4\mathfrak{n} - 2\Sigma\mathfrak{r}_i(\mathfrak{r}_i - 1)) : 4$ und aber das vorhergehende p ist wie soeben $(\mathfrak{n}^2 - 4\mathfrak{n} + 4 - 2\Sigma\mathfrak{r}_i(\mathfrak{r}_i - 1)) : 4$.

Anmerkung. Diese willkürliche Zuschreibung einer Zahl u, welche jedoch die wichtige Eigenschaft hat, endlich constant abzunehmen, ist einem ähnlichen Vorgange zu vergleichen, welcher bereits in der Theorie der r-dimensionalen quadratischen Transformationen in Amer. J. 1896 aufgetreten ist.

Theorem XII. *Wenn die Curven des adjungirten Singularitätencomplexes zerfallen, so kann dies nur so geschehen, dass die Bestandtheile mehrere Curven eines linearen ∞^2-Systemes sind oder eine feste Curve und ein in einem linearen Systeme variirender Bestandtheil.*

Der Beweis wird ähnlich wie in Acta Math. Bd. 19, p. 119.

Ich bilde nun für irgend ein invariantes Curvensystem von hinreichend hohem p das adjungirte System, für dieses abermals und setze sofort, indem ich, wenn der Fall XII. eintritt, die Verminderung nur auf den variablen Bestandtheil anwende. Das Verfahren wird jedoch aufgehalten, wenn man zu $p = 0$ kommt und schon für $p = 1$ wird $u' = 0$ und der adjungirte Complex könnte dann auch als Fundamentalcomplex (Fundamentalcurve) in die Transformation eintreten. Für diese Fälle sorgen die folgenden Theoreme.

Theorem XIII. *Wenn ein Curvensystem nur in Folge vielfacher Punkte in der Characteristik $p = 0$ und die obige Zahl $u = 2$ hat, ist es durch Reciprokaltransformationen übertragbar in die Geraden eines Stralenbündels.*

Es gelten die Formeln $[(n-2)^2 - 2\Sigma\mathfrak{r}_i(\mathfrak{r}_i - 1)] = 0, 1, 2, 3$ und $[n(n+3) - n(n+1) : 2 - \Sigma\mathfrak{r}_i(\mathfrak{r}_i + 1)] : 2 = -1$, woraus folgt $\Sigma\mathfrak{r}_i = 2n$ [1] und $\Sigma\mathfrak{r}_i^2 = \frac{n^2}{2} + 2$. Mittelst dieser kann man noch wie in I. Th. § 3.

[1] Die Formeln des Textes sind unter der Voraussetzung von geradem n gegeben. Ganz entsprechende Formeln entstehen für ungerades n mit der Bedingung, dass die Erzeugenden in $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ Punkten getroffen werden.

LXIV. die Reduction bis auf $n = 1$ durchführen, wenn man beachtet, dass in diesen noch Bruchtheile mit dem Nenner 4 enhalten sein können.

Theorem XIV. *Wenn ein Curvensystem nur in Folge vielfacher Punkte in der Characteristik $p = 0$ und $u = 3$ hat, ist es durch Reciprokaltransformationen in Raumcurven 3. O. durch 3 feste Punkte oder für $u = 4$ in die Geraden des Raumes oder in die Kegelschnitte durch 2 feste Punkte übertragbar.*

Denn es können ebenso wie in I., LXIV. und hier XIII. zwei Formeln aufgeschrieben werden, aus welchen $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_4 > 2n$ folgt und man muss für $u = 4$ das in § 3. vernachlässigte Kegelschnittsystem hier aufnehmen. Für $u = 3$ gibt es kein anderes durch Punkte allein bestimmbares System.

Theorem XV. *Wenn eine Characteristik gegenwärtiger Art ein Geradenbündel in sich verwandelt, ist sie eine Transformation des I. Th. § 4. mit $(a_1^{m-1} b_1^{m-1})$.*

Denn der Scheitel des Bündels muss ein $(m - 1)$-facher Fundamentalpunkt für beide Räume sein, nach I. Th. § 1.

Theorem XVI. *Wenn eine Characteristik ein Curvensystem $p = 0$, $u = 2$ der Art des I. Th. in sich verwandelt, ist sie birational äquivalent einer Characteristik mit $(a_1^{n-1} b_1^{n-1})$.*

Das Curvensystem werde durch Transpositionen des I. Theiles in ein Geradenbündel übertragen, dann wird gleichzeitig die Characteristik in eine mit invariantem Geradenbündel transponirt, worauf dann XV. anwendbar ist.

Theorem XVII. *Wenn eine Characteristik alle C_3 durch 3 feste Punkte unter einander verwandelt, ist sie eine cubische Transformation mit $(a_1 a_{i_1})$, $(a_2 a_{k_2})$, $(a_3 a_{l_3})$, wo $i, k, l = 1, 2, 3$.*

Denn nur für diese ist die Summe der Ordnungen von drei Fundamentalpunkten $3(m - 1)$.

Theorem XVIII. *Wenn eine Characteristik einen Complex $p = 0$, $u = 3$ in sich transformirt, ist sie äquivalent einer cubischen Characteristik aus XVII.*

Man wendet XIV. an und auf das erhaltene C_3-system XVII.

Theorem XIX. *Wenn eine Characteristik einen Complex $p = 0$, $u = 4$ in sich transformirt, ist sie entweder einer Collineation oder einer Characteristik $(a_1^{m-1} b_2^{m-1})(a_2^{m-1} b_1^{m-1})$ oder einer Characteristik $(a_1^{n-1} b_1^{n-1})$ birational äquivalent.*

Man wendet XIV. an und das Lemma, dass eine Characteristik, welche die Kegelschnitte durch 2 Punkte a_1, a_2 unter einander verwandelt, entweder die eine oder die andere des Theoremes sein muss.

Theorem XX. *Jedes Curvensystem der Art des I. Theiles, welche $p = 1$. $u = 2, 3, 4$ hat, kann durch successive Reciprokaltransformationen in ein System von Curven 4. O. 1. Art durch 8, 6, 5 Punkte übergeführt werden oder für $u = 2$ in ein System von Curven 4s. Ordnung mit 8 s-fachen Punkten.*

Die beiden Formeln

$$\frac{(\mathfrak{n}-2)^2}{4} - \sum \frac{\mathfrak{x}_i(\mathfrak{x}_i - 1)}{2} = 1,\text{[1]}$$

$$\frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}+3)}{2} - \frac{\mathfrak{n}(\mathfrak{n}+2)}{4} - \sum \frac{\mathfrak{x}_i(\mathfrak{x}_i + 1)}{2} = u$$

liefern $\Sigma \mathfrak{x}_i^2 = \frac{\mathfrak{n}^2}{2} - u$, $\Sigma \mathfrak{x}_i = 2\mathfrak{n} - u$. Aus diesen kann mittelst desselben Verfahrens, dass ich oben für die rationalen Curven eingeschlagen und unter Benützung der bekannten Sätze über die Système elliptischer Curven in der Ebene die Relation $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_4 > 2\mathfrak{n}$ abgeleitet werden, insolange $\mathfrak{n} > 4$ oder $\mathfrak{x}_i \gtrless \mathfrak{x}_k$.

Theorem XXI. *Wenn eine Characteristik gegenwärtiger Art ein Curvensystem $p = 1$, $u = 2, 3, 4$ in sich transformirt, so ist sie einer Transformation mit 8, 7, 6, 5 Punkten in der Characteristik birational äquivalent.*

Denn es gilt wegen $\Sigma a_i = 4(m-1)$ das *Lemma*, dass eine Characteristik, welche ein ∞^2, ∞^3, ∞^4 System von C_4 $p = 1$ in sich transformirt, ausser diesen festen Punkten keine Fundamentalpunkte, also auch

---

[1] Auch hier sind nur die Formeln für gerades $\mathfrak{n}$ gegeben. Neben diesen stellen sich entsprechende für ungerades $\mathfrak{n}$.

keine Characteristikpunkte haben kann. Wenn also nach Anwendung von XX. das C_4-System erreicht ist, muss auch die Characteristik mit weniger als 9 Punkten erlangt sein.

Theorem XXII. *Eine periodische Characteristik mit 8 Punkten muss stets entweder einer monoidalen oder einer dyoidalen oder einer Characteristik mit $\sigma < 8$ Punkten äquivalent sein.*

Denn wenn sie keinen anallagmatischen Complex mit $p = 0$ gestattet, so muss man durch die Anwendung der Verminderung auf die invarianten Complexe mit höherem p stets auf Complexe mit $p = 1$ gelangen. Ein zweiter Complex $p = 1$, $u = 2$ kann aber nicht da sein, da man durch Transpositionen, welche nur Fundamentalpunkte unter den 8 Punkten benützen, auf C_4 $p = 1$ kommen müsste, wobei die schon vorhandenen C_4 $p = 1$ ebenfalls erhalten blieben, was unvereinbar ist. $p = 1$, $u = 1$ erfordert aber successive $p = 1$ und diese führen sofort zur Existenz von nur $p = 1$, was mit der Periodicität gemäss VIII. unvereinbar ist. Aus dem 2. Gliede des Schlusses wird also $u = 3$ gefolgert.

Für die Transformationen kann der Beweis anders geführt werden.

Theorem XXIII. *Jede periodische Characteristik eines Fundamentalsystemes gegenwärtiger Art ist durch Reciprokaltranspositionen äquivalent entweder:*

1. *Einer Collineation, oder*
2. *Einer Characteristik mit $(a_1^{n-1} b_1^{n-1})$, oder*
3. *Einer Characteristik mit $(a_1^{n-1} b_2^{n-1})(a_2^{n-1} b_1^{n-1})$, oder*
4. *Einer Characteristik mit $\sigma < 8$ Punkten.*

Zum Beweise dieses Haupttheoremes verwende ich nun das oben nach XII. erwähnte Princip der Verminderung der adjungirten Complexe. Ich gehe von einem Complexe aus, dessen u gemäss Theorem VIII. bereits als $\geqq 2$ vorausgesetzt werden kann, da die Curven des Systemes doch den ganzen R_3 mindestens einfach erfüllen müssen und bilde die Reihe der successiven adjungirten Complexe. Nach LX. des I. Theiles müssen auch diese durch die Characteristik anallagmatisch sein. Entweder kann die Reihe bis $n = 1, 2, 3, 4$ fortgesetzt werden, dann ist die Characteristik von selbst eine von denen des Theoremes. Oder man wird durch einen Complex $p = 0$, $u > 1$ aufgehalten; dann wendet man die Theoreme XVI., XVIII., XIX. an. Oder man wird durch $p = 1$ aufgehalten, wo man wieder $u > 1$ voraussetzen mag; dann wendet man XXI. an, vervollständigt durch XXII.

II. Beweis.

Es werden wieder die invarianten Curvensysteme benützt. Nur wird die Existenz der rationalen oder elliptischen Curvensysteme als Folge der Periodicität auf andere Art hergeleitet.

Theorem XXIV. *Jede Characteristik gegenwärtiger Fundamentalsysteme kann man sich widerspruchslos in einer invarianten M_2^2 enthalten denken.*

Denn die stereographische Projection liefert eine ebene Characteristik von Fundamentalsystemen, welche durch Zusammensetzung von nur Fundamentalsystemen $(e_1^3 e_2^3 b_1^2 b_2^2 b_3^2 b_4^2 a)^6$ wo e_1, e_2 die Schnittpunkte mit den Erzeugenden des Centrums sind, gewonnen werden. Alle diese Characteristiken mit denselben e_1, e_2 geben eine geschlossene Gruppe und liefern durch Rückprojection auf die M_2^2 eine Characteristik fraglicher Art.

Corollar I. Die Theorie gegenwärtiger Characteristiken sowie ihrer endlichen Gruppen kann als identisch mit der Theorie der eben beschriebenen ebenen Characteristiken bei gemeinsamen e_1, e_2 angesehen werden.

Corollar II. Jede Characteristik aus XXIV. kann widerspruchslos als in einer C_4 mit Spitze oder einer zerfallenden C_4, welche invariant seien, enthalten angesehen werden.

Theorem XXV. *Jede periodische Characteristik gegenwärtiger Fundamentalsysteme besitzt entweder ein invariantes Curvensystem (Singularitätencomplex) $p = 0$ und Dimension > 1 oder ein invariantes Curvensystem (Singularitätencomplex) $p = 1$ und Dimension > 1.*

Denn die als invariant vorausgesetzte M_2^2 gibt durch stereographische Projection eine ebene periodische Transformation, welche also auch, als Characteristik aufgefasst, einen invarianten Complex gestattet, der entweder $p = 0$ oder $p = 1$ hat, gewiss aber $u > 0$, wofür der Bildung des u zufolge die räumliche Dimension > 1 geschrieben werde.

Von dem Theoreme XXV. gelangt man durch meine oben hergeleiteten Hilfstheoreme eben wieder zum Haupttheoreme XXIII.

Anmerkung. Es könnte im Anschlusse an XXIV. ein anderer Beweis versucht werden, wenn in der Ebene bewiesen werden könnte, dass die Characteristiken der im Beweise zu XXIV. genannten Art durch Fundamentalsysteme $(e_1^3 e_2^3 b_1^2 b_2^2 b_3^2 b_4^2 a)^6$ mit gemeinsamen e_1, e_2 auf Typen transponirt werden können.

III. Beweis.

Theorem XXVI. *Jede periodische Characteristik besitzt unendlich viele invariante Singularitätencomplexe $n, x_1, \ldots, x_\sigma$ von beliebig hohem Flächengeschlechte p.*

Die Formel für die Zahl p wird aus der Nöther'schen Formel (Ann. di Mat., ser. 2, t. 5) durch ein Zusatzglied erhalten, das wegen der ausgezeichneten Curven, welche die Fläche in den Fundamentalcurven 2. Art besitzen kann, gewonnen wird. Dieses Glied ist hier gewiss positiv und seine Weglassung verstärkt nur den zu liefernden Beweis. Dann bleibt aber eine in n und x_i cubische Formel, welche für die Argumente $n_1 + \ldots + n_i$, $x_1^{(i)} + \ldots + x_i^{(i)}$ nach bekannten arithmetischen Sätzen einen Werth annimmt, der $>$ als die Summe ihrer Werthe für die Argumente $n_1, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(\sigma)}$; $n_2, x_2^{(1)}, \ldots, x_2^{(\sigma)}$; ... In Folge dessen kann man aus einem Singularitätencomplexe nebst seinen sämmtlichen Transformirten successive Singularitätencomplexe von stets wachsendem p herstellen.

Theorem XXVII. *Wenn der adjungirte Singularitätencomplex $n - 4$, $x_1 - 2, \ldots, x_\sigma - 2$*[1] *zu einer zerfallenden Fläche gehört, so zerfällt diese entweder in eine feste Fläche und einen in einem linearen Systeme variablen Bestandtheil oder in mehrere Flächen eines und desselben linearen Systemes.*

Der Beweis wird genau wie für die Ebene in Acta Math. t. 19, p. 119 geliefert.

Theorem XXVIII. *Wenn für einen invarianten Singularitätencomplex $n, x_1, \ldots, x_\sigma$ die Zahl $p < 0$, $n > 1$ wird, so können die Singularitäten-*

[1] Hier für Flächen bedarf es keiner neuen Definition des adjungirten Complexes, es ist die Clebsch—Zeuthen—Nöther'sche, die schon im I. Theile erwähnt würde.

complexe $\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\sigma$ *der diesen Fällen gegenseitig gemeinsamen Schnittcurven nur* $p = 0, 1$ *haben.*

Die zu diesen Curven adjungirten Flächen sind der Ordnung $2n - 4$ und gehen $(2x_i - 2)$-fach durch die Punkte der Characteristik. Sie sind ebenfalls invariant und schneiden auf den Curven die bekannte $G^{p-1}_{2(p-1)}$ aus. Nun gibt es keine Flächen $n - 4$, $x_i - 2$; in Folge dessen auch keine $n - 2$, $x_i - 1$ und mithin auch keine $2(n-2)$, $2(x_i - 1)$, wie aus den Formeln für p zu beweisen ist. Die Curven können also keine Reihe G besitzen und müssen $p = 0, 1$ haben.

Theorem XXIX. *Die hier möglichen invarianten Complexe* $n, x_1, \ldots, x_\sigma$, *welche* $p < 0$ *haben, ohne zu zerfallen, sind durch Reciprokaltransformationen überführbar in Kegelflächensysteme mit gemeinsamer Spitze.*

Denn die rationalen Curven, in denen sie sich schneiden, müssen stets ein Büschel bilden (sodass also die Schnittcurve stets in mehrere Bestandtheile zerfällt), weil ein Netz von rationalen Curven auf einer der Flächen sofort deren Abbildbarkeit, also $p = 0$ für sie bedingen würde. Die elliptischen Curven schliessen sich aber aus wegen des Reductionstheoremes aus XX., weil mit diesen 8 Punkten Flächen von $p < 0$ nicht gebildet werden können (als Örter von je ∞^1 elliptischen $C_{4s} a_1^s \ldots a_8^s$). Auf das ∞^2 System von Curven mit $p = 0$ kann dann das Reductionstheorem angewendet werden.

Theorem XXX. *Wenn eine Characteristik gegenwärtiger Art einen Flächensingularitätencomplex* $n, x_1, \ldots, x_\sigma$ *mit* $p = 0$, $u > 0$ *invariant lässt, lässt sie stets auch einen Curvensingularitätencomplex* $p = 0$, $u > 1$ *oder* $p = 1$ *invariant.*

Denn da die Flächen eines Büschels im Systeme $p = 0$ haben, sind sie abbildbar und indem man die unter zweien hervorgerufene Verwandtschaft in die Ebene abbildet, schliesst man aus den Theoremen für diese hier, dass es stets ein rational distinctes, in ein ganz analoges übergeführtes Curvensystem $p = 0$ oder $p = 1$ geben muss. Da aber für alle Flächen des Büschels die abbildenden Punkte und Linien in derselben Weise vertheilt sind (obwohl nicht eben dieselben sein müssen), so werden diese Curvenbüschel insgesammt ein Curvensystem $u \geqq 2$ geben.

Zur Vollendung des Beweises für XXIII. bliebe nun noch übrig, ein Äquivalenztheorem für die Flächensysteme $n, x_1, \ldots, x_\sigma$ zu suchen, welche $p = 1$, $u > 0$ besitzen. Es ist hier nöthig, eine Beschränkung einzuführen.

Die Nöther'sche Formel gilt für die homaloidalen Systeme, welche hier auftreten, deswegen *nicht,* weil die hier so zahlreich und wesentlich erscheinenden Fundamentalcurven 2. Art als »mitbedingte Curven» zuweilen einen Zusatz von Gliedern erforderlich machen. Aus demselben Grunde gilt sie nicht für alle invarianten Flächensysteme, die hier auftreten. Festzuhalten ist jedoch, dass wenn ein Flächensystem nur solche gemeinsame Curven hat, welche eine nothwendige Folge seiner singulären Punkte sind, auch das adjungirte Flächensystem nur durch solche gemeinsame Curven geht, welche eine nothwendige Folge seiner singulären Punkte sind.

Dieser Zusatz, welcher also ausdrückt, dass die Durchgänge einer Fläche durch die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ nicht unabhängig sein müssen, ist aber jedenfalls hier positiv. Seine Weglassung reducirt daher die Dimensionszahl, resp. das Geschlecht p.

Ich erlaube mir nun den Kunstgriff, in der Reihe der successiven adjungirten Systeme jedesmal nur $(n+1)(n+2)(n+3) - \Sigma x_i(x_i+1)(x_i+2)$ zu berechnen, welcher Standpunkt auch dadurch erreichbar wäre, dass man nur invariante Flächensysteme sich dächte, welche in keiner Weise durch Fundamentalcurven 2. Art hindurchgehen. Ob es aber solche gibt, müsste erst bewiesen werden, da die durch Summation der Transformirten einer Fläche gewonnenen diese Eigenschaft nicht haben. Dann spreche ich also aus:

Theorem XXXI. *Alle Flächensingularitätencomplexe $n, x_1, \ldots, x_\sigma$, welche das so berechnete p gleich 1 und u (entsprechend berechnet) > 0 haben, sind durch Reciprokaltransformationen übertragbar in $n = 2s$, $x_1 = \ldots = x_\sigma = s$.*

Denn man kann mittelst der Theorie der Maxima und Minima beweisen, dass für jene Complexe, solange sie nicht diese typische Form haben, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 2n$. Nämlich bei geradem n wird der obige Complex, bei ungeradem der entsprechend gebildete unter allen, welche gleiche p, u liefern, die kleinsten x_i haben. Hier ist aber $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2n$, für die aber, welche ungleiche x_i haben, wird diese Summe stets grösser sein.

Theorem XXXII. *Eine Characteristik, welche das Flächensystem $n = 2s$, $x_i = s$ in sich verwandeln soll, kann ausserhalb dieser Punkte keine Punkte besitzen.*

Denn erst, wenn die Fläche in allen Fundamentalpunkten s-fache Punkte hat, wird $n' = m \, . \, 2s - \Sigma s = 2s$ nach Th. XIV. des I. Theiles.

Theorem XXXIII. *Eine Characteristik, welche nur die invarianten Singularitätencomplexe $n = 2s$, $x_i = s$ besitzt, kann für $\sigma \geqq 8$ nicht periodisch sein.*

Denn für $\sigma = 5, 6, 7, 8$ werden die Zahlen p nach oben berechnet

$$\frac{3s^3 + 9s^2 + 12s}{6}, \frac{2s^3 + 6s^2 + 10s}{6}, \frac{s^3 + 3s^2 + 8s}{6}, s$$

und für $\sigma = 9$ bereits negativ, sodass dem Th. XXVI. nicht entsprochen würde. Aber auch für $\sigma = 8$ ist die Existenz der invarianten Singularitätencomplexe nur scheinbar. Für die Transformationen soll es später (III. Th.) bewiesen werden, für die Characteristiken kann man zunächst die Existenz von nur Curvensingularitätencomplexen mit $n = 4s$, $\mathfrak{x}_1 = \ldots = \mathfrak{x}_8 = s$ folgern und hieraus die Aperiodicität mittelst der invarianten M_2^2. [1]

Habe ich nun diese Hilfssätze [2] vorausgeschickt, so gelange ich zum Haupttheoreme XXIII, indem ich auf die Flächensysteme eines p, das nicht 0 oder 1 ist, die Verminderung durch Adjunction anwende. Komme ich dabei zu einem Zerfallen, benütze ich XXVII., komme ich zu $p > 0$ so benütze ich XXVIII., komme ich zu $p = 0$, so benütze ich XXX. oder die letzte Anmerkung unter dem Texte, komme ich zu $p = 1$ (unter dem gemachten Vorbehalte), so benütze ich XXXI., komme ich zu keinem dieser Hindernisse, kann also das Princip fortgesetzt anwenden, so komme

---

[1] Die Schnittcurven der Flächen $M_2^{2s}(x_i^s)$ sind $\mathfrak{n} = 4s^2$, $\mathfrak{x}_i = s^2$ und da sie vom Maximalgeschlechte sind, so ist ihr Geschlecht unter Rücksicht auf die $\mathfrak{x}_i$ gleich $\left(\frac{4s^3 - 2}{2}\right)^2 - 8\frac{s^2(s^2 - 1)}{2} = 1$. Diese Curven, das ist also überhaupt alle invarianten Curven, sind elliptisch, womit dem Th. VII. widersprochen wäre.

[2] Ich bin im Th. XXX. auf meine obigen Theoreme über Curvensysteme übergegangen, aber es ist hier auch leicht möglich, $p = 0$ so zu behandeln wie ich in XXXI. $p = 1$ behandle und es finden sich als Typen Systeme von Ebenen, M_2^2, M_2^3 und M_2^4 mit Doppelpunkten. Solche Typen existiren aber für allgemeine Flächensysteme nicht.

ich von selbst zu Ebenen, M_2^2, M_2^3 oder M_2^4 und eine gewiss einfache Discussion lässt in den für diese anallagmatischen Transformationen jene des Theoremes XXIII. erkennen.

IV. Beweis.

Derselbe entspricht der für die ebenen Transformationen von mir in Crelles Journal, Bd. 114 gegebenen III. Methode. Es wird der *Rang* der zu einer Characteristik gehörigen linearen Substitutionen 1) definirt. Es werden äquimultiple Characteristiken als solche definirt, welche nur Singularitätencomplexe $n, x_1, \ldots, x_\sigma$ invariant lassen. Es wird hauptsächlich bewiesen:

Theorem XXXIV. *Wenn in einer Characteristik ein Singularitätencomplex invariant ist, welcher nicht äquimultipel ist, so kann man durch Particularisirung des in ihm enthaltenen Parameters stets einen Complex* $p = 0$, $u \geqq 0$ *erreichen, oder einen, der sich zu einem solchen ergänzen lässt.*

Man beweist ferner, dass eine Fläche mit $p = 0$, $u = 0$ (allein in Folge der Singularitäten in den Characteristikpunkten) als Fundamentalfläche einer gegenwärtigen Transformation benützt werden kann und hat dann das Theorem bewiesen (als Umformung von XXXIV):

Theorem XXXV. *Eine nicht äquimultiple periodische Characteristik kann entweder einer Collineation, oder einer Transformation* $(a_1^{m-1} b_1^{m-1})$ *oder einer Transformation* $(a_1^{m-1} b_2^{m-1})(a_2^{m-1} b_1^{m-1})$ *oder einer mit* $\sigma < 8$ *Fundamentalpunkten birational äquivalent gemacht werden.*

Dies ist im Wesen das Haupttheorem XXIII.

Es kann endlich entsprechend der II. Methode in Cr. J. Bd. 114 noch ein *V. Beweis* gegeben werden, indem man trachtet, überhaupt eine arithmetische Formel für den Periodicitätsindex (beziehungsweise Ausdruck für die Aperiodicität) einer gesetzmässig gebildeten Characteristik aufzustellen durch successive Bildung immer allgemeinerer Classen von Fundamentalsystemen. Hiezu ist es gut, die Substitutionen I) und II) als Definitionen zu verwenden.

§ 3. *Die Characteristiken der Fundamentalsysteme mit* a_1^{m-1}, b_1^{m-1} (*I. Th. § 4*).

Theorem XXXVI. *Die Characteristik mit* $(a_1 b_1)$ *ist periodisch und mit demselben Index, sobald die von den übrigen Punkten gebildete Characteristik* $Ch_{\sigma-1}$ *in der Ebene genommen periodisch ist und umgekehrt.*

Denn indem man für beide Characteristiken die Substitutionen I) aufschreibt, beweist man durch eine einfache Umformung der Determinante, dass die erste ch. F. gleich der zweiten mal $(x - 1)$ ist. Auch durch das Tableau der successiven Transformationen erhellt dasselbe.

Theorem XXXVII. *Zwei Characteristiken* Ch_σ *mit* $(a_1 b_1)$ *sind äquivalent, wenn die Characteristiken* $Ch_{\sigma-1}$ *äquivalent sind.*

Denn ist Q^ν eine Transposition, welche die beiden $Ch_{\sigma-1}$ äquivalent macht, so liefert die Transposition $((a_1 b_1)^{2\nu-2} Q^\nu)$ auf die erste Ch_σ angewandt, eine Transformation $(a_1 b_1)$, wo $Ch_{\sigma-1}$ mit jener der zweiten Ch_σ übereinstimmt, also diese Ch_σ selbst.

Corollar I. Wenn $Ch_{\sigma-1}$ der Collineation äquivalent ist, ist es auch Ch_σ.[1]

Corollar II. Wenn Ch_σ in der Punktezahl reductibel sein soll, so muss $Ch_{\sigma-1}$ es sein und umgekehrt.

Corollar III. Es gibt so viele typische Characteristiken mit $(a_1 b_1)$, als es typische Characteristiken überhaupt in der Ebene gibt. Hieraus folgt:

---

[1] Zufolge dem in I. Th. § 4 Gesagten beginnen die fundamentalen Substitutionen I) und II) für die gegenwärtigen Fundamentalsystemen wie folgt; wenn mit x, x', $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ die Vielfachheiten in a, b bezeichnet werden:

$$\begin{aligned}
n' &= mn - \frac{m-1}{2}x - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots, & \mathfrak{n}' &= m\mathfrak{n} - (m-1)\mathfrak{x} - 2a_1 \mathfrak{x}_1 - 2a_1 \mathfrak{x}_2 - \cdots,\\
x' &= (m-1)n - \frac{m-3}{2}x - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots, & \mathfrak{x}' &= \frac{m-1}{2}\mathfrak{n} - \frac{m-3}{2}\mathfrak{x} - a_1 \mathfrak{x}_1 - a_2 \mathfrak{x}_2 - \cdots,\\
x_1' &= 2b_1 n - b_1 x - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots, & \mathfrak{x}_1' &= b_1 \mathfrak{n} - b_1 \mathfrak{x} - a_{11}\mathfrak{x}_1 - a_{12}\mathfrak{x}_2 - \cdots,\\
x_2' &= 2b_2 n - b_2 x - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots, & \mathfrak{x}_2' &= b_2 \mathfrak{n} - b_2 \mathfrak{x} - a_{21}\mathfrak{x}_1 - a_{22}\mathfrak{x}_2 - \cdots.
\end{aligned}$$

Theorem XXXVIII. *Die typischen Characteristiken mit* $(a_1^{m-1}\,b_1^{m-1})$ *sind* 48 *isolirte, welche durch Verbindung von* $(a_1^{m-1}\,b_1^{m-1})$ *mit den* 48 *isolirten Typen* B_9; ..., Σ_2 *der Ebene erhalten werden und die Classen* $(a_1^{m-1}\,b_1^{m-1})$, $(a_2^{m-1}\,b_2^{m-1})$.

Corollar I. Die Characteristiken $(a_1^{m-1}\,b_1^{m-1})$, b_i^2 in $\ldots(b_i^2)^{h_i} = a_{i_\lambda}^2$ sind periodisch für alle Werte von h_i und der Index ist das kleinste Multiplum aller Zahlen $h_i + 1$.

Corollar II. Wenn $Ch_{\sigma-1}$ äquimultipel ist, so hat Ch_σ nur die anallagmatischen Singularitätencomplexe $n, n-3s, s, \ldots s.$ [1] und $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}-3\mathfrak{s}, \mathfrak{s}, \ldots \mathfrak{s}$.

---

[1] Obzwar für das Typenproblem nicht erforderlich, mögen über die Fundamentalsysteme des § 3 noch folgende Theoreme mitgetheilt sein:

Theorem XXXVIII'. *Ist* Δ *die char. Function der fundamentalen linearen Substitution für die aus den* $x_1, \ldots, x_\sigma$ *gebildete ebene Characteristik* $Ch_{\sigma-1}$, Δ_{11} *die* 1. *Unterdeterminante, so ist die char. Function für* b_1 *in* a_1, $Ch_{\sigma-1}$ *(oder* x' *in* x, $Ch_{\sigma-1}$*):*

$$-(\rho - 1)\big(\Delta(1 + 2\rho) + \Delta_{11}(\rho^2 + 1 + \rho)\big).$$

Es sind die fundamentalen Substitutionen vorbereitet zur Berechnung von ρ diese:

$$\begin{aligned}
\rho n &= mn - \frac{m-1}{2}x - a_1x_1 - a_2x_2 - \ldots,\\
\rho x' &= (m-1)n - \frac{m-3}{2}x - a_1x_1 - a_2x_2 - \ldots,\\
\rho x &= x'\\
\rho x_1' &= 2b_1n - b_1x - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots\\
&\quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

woraus durch einfache Umformung der obige Werth entsteht.

Theorem XXXVIII''. *Die Characteristiken* b_1 *in* a_1, $Ch_{\sigma-2}$, *wo* $Ch_{\sigma-2}$ *einer der* 48 *Typen aus der Ebene ist, sind aperiodisch, sobald die Gesammtzahl der Punkte* > 7 *ist.*

Ich beweise nämlich, dass nicht invariante Curven jedes Geschlechtes p da sind. Das Maximalgeschlecht der invarianten Curve $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}-3\mathfrak{s}, \mathfrak{s}, \ldots, \mathfrak{s}$ ist nämlich

$$\frac{(\mathfrak{n}-2)^2}{4} - (\sigma-2)\frac{\mathfrak{s}(\mathfrak{s}-1)}{2} - 2\frac{(\mathfrak{n}-3\mathfrak{s})(\mathfrak{n}-3\mathfrak{s}-1)}{2} = \frac{-3\mathfrak{n}^2 + 2(16+\sigma)\mathfrak{s}^2 + 14\mathfrak{n}\mathfrak{s} + 4\mathfrak{s}}{4}$$

und es muss $5\mathfrak{s} \geqq \mathfrak{n} \geqq 3\mathfrak{s}$ sein, sodass die Einsetzung des günstigsten Werthes $\mathfrak{n} = 3\mathfrak{s}$

§ 4. *Die Characteristiken von* $a_1^{m-1}, a_2^{m-1'}; b_1^{m-1}, b_2^{m-1}$.

Theorem XXXIX. *Die Characteristiken* $(a_1 b_2), (a_2 b_1), b_i$ *in* $\ldots b_i^{h_i} = a_{i\lambda}$ *können in der Ordnung reducirt werden, wenn nicht alle* $i_\lambda = i$ *sind.*

Die entsprechende Transposition für $(a_1 b_1), (a_2, b_2), \ldots$ ist möglich zufolge Theorem XXXVII. und ändert sich aber nicht durch die Vertauschung von a_1, a_2.

Theorem XL. *Die Characteristik* $(a_1 b_2), (a_2 b_1), b_i$ *in* $\ldots b_i^{h_i} = a_i$ *hat den Index* $2N$, *wo* N *das kleinste Multiplum aller Zahlen* $h_i + 1$.

Denn Collineation tritt nach $2N$ Anwendungen ein wegen XXXVIII. und das involutorische Paar a_1, a_2 ist verschwunden.

Theorem XLI. *Die Characteristiken* $(a_1 b_1), b_2$ *in* a_2, $(a_i b_i)$ *sind aperiodisch für* $m > 17$, $(a_1 b_1)$, b_2 *in* b_2' *in* a_2, $(a_i b_i)$ *für* $m > 5$.

Denn der bezügliche Satz ist Preisschrift IV. § 7 XII. bewiesen und wie in der Th. der cub. Transf. gilt, dass wenn $Ch(a_2, \ldots; b_2, \ldots)$ reductibel ist, auch $(a_1 b_1) Ch(a_2, \ldots, b_2, \ldots)$ reductibel ist.

Für $m = 5$ sind periodisch die den cubischen ebenen Characteristiken mit $(a_1 b), (a b_1)$ entsprechenden, für $m = 7$ nur $(a_i b_i)$, $i = 3, \ldots, 8$ und $(a_i b_i)$, $i = 3, \ldots, 7$, b_8 in a_8.

---

liefert $\dfrac{-(2\sigma - 13)\mathfrak{s}^2 + 4\mathfrak{s} + 4}{4}$ also für $\sigma = 8$ den Werth $\dfrac{-3\mathfrak{s}^2 + 4\mathfrak{s} - 4}{4}$, welcher nur für $\mathfrak{s} = 1$ den Werth 1 annimmt.

Es sind also nur zu untersuchen 1. die cubischen Transformationen b_1 in a_1 2. die Transformationen 5. Ordnung, welche aber ebenfalls eigentlich unter die Fundamentalsysteme des § 4 gehört.

Die übrigen Characteristiken des Fundamentalsystemes a^{n-1} können dadurch erhalten werden, dass in einer ebenen Characteristik eine Coincidenz $(a_k \beta_j)$ in zwei Theile gespalten wird durch Einfügung der beiden Punkte a, b, nämlich in $(a_k b), (a \beta_j)$. Die linearen Substitutionen II) lehren dann, dass $\mathfrak{n} - 3\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$, also $\mathfrak{n} = 4\mathfrak{s}$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{s}$ sein muss; die Characteristik ist äquimultipel, wenn die ebene Characteristik es war. Es können also nur die ebenen Characteristiken mit 6 Punkten räumliche periodische Ch. liefern.

Macht man aber diesen Ersetzungsprocess an einer nicht typischen Characteristik, so kann dennoch die räumliche Characteristik typisch werden.

Theorem XLII. *Die Characteristiken* b_1 *in* a_1, b_2 *in* a_2, $(a_i b_i)$ *sind aperiodisch für* $m > 3$, *doch* $(a_1 b_2)$, b_1 *in* b_1' *in* a_2, $(a_i b_i)$; $(a_1 b_2)$, b_1 *in* a_2, $(a_i b_i)$ *für* $m > 5$.

Aus den linearen Substitutionen[1] folgt für das Geschlecht der invarianten Curven, wenn man mit σ die Anzahl der Punkte im Cyclus von a_1 bezeichnet,

$$\frac{(\mathfrak{n}-2)^2}{4} - m\frac{\mathfrak{s}(\mathfrak{s}-1)}{2} - \frac{\sigma}{2}\left[\frac{(\mathfrak{n}-2)^2}{4} - \frac{(\mathfrak{n}-2)(2\mathfrak{s}-1)}{2}\right]$$

wo $\mathfrak{s}$ die Vielfachheit in den $(a_i b_i)$ ist; wird nun das Maximum dieses Werthes bestimmt, so ergibt sich, dass es für die Werthe m des Theoremes nicht > 1 werden kann.

Theorem XLIII. *Die Characteristiken* $(a_1 b_3)(a_3 b_1)(a_4 b_2)(a_2 b_4)(a_i b_i)$ *und* $(a_1 b_3)(a_3 b_2)(a_2 b_4)(a_4 b_1)$ *sind äquimultipel und daher aperiodisch für* $m > 5$.

Für die 1. z. B. hat man

$$0 = \frac{m-1}{2}\mathfrak{n} - \frac{m-3}{2}\mathfrak{x} - \frac{m-1}{2}\mathfrak{y} - 2\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 - \ldots,$$

$$0 = \frac{m-1}{2}\mathfrak{n} - \frac{m-1}{2}\mathfrak{x} - \frac{m-3}{2}\mathfrak{y} - \mathfrak{x}_1 - 2\mathfrak{x}_2 - \ldots,$$

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{n} - \mathfrak{x} - \mathfrak{y} - \mathfrak{x}_1, \qquad \mathfrak{x}_i = \mathfrak{n} - \mathfrak{x} - \mathfrak{y} - \mathfrak{x}_i,$$

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{n} - \mathfrak{x} - \mathfrak{y} - \mathfrak{x}_2$$

woraus $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_i$. Ebenso für die 2. Characteristik.

[1] Die fundamentalen linearen Substitutionen I) und II) für die Fundamentalsysteme des § 4 beginnen:

$$\text{I)} \quad \begin{aligned} n' &= mn - \frac{m-1}{2}x - \frac{m-1}{2}y - x_1 - x_2 - \ldots, \\ x' &= (m-1)n - \frac{m-3}{2}x - \frac{m-1}{2}y - x_1 - x_2 - \ldots, \\ y' &= (m-1)n - \frac{m-1}{2}x - \frac{m-3}{2}y - x_1 - x_2 - \ldots, \end{aligned}$$

$$\text{II)} \quad \begin{aligned} \mathfrak{n}' &= m\mathfrak{n} - (m-1)\mathfrak{x} - (m-1)\mathfrak{y} - 2\mathfrak{x}_1 - 2\mathfrak{x}_2 - \ldots, \\ \mathfrak{x}' &= \frac{m-1}{2}\mathfrak{n} - \frac{m-3}{2}\mathfrak{x} - \frac{m-1}{2}\mathfrak{y} - \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 - \ldots, \\ \mathfrak{y}' &= \frac{m-1}{2}\mathfrak{n} - \frac{m-1}{2}\mathfrak{x} - \frac{m-1}{2}\mathfrak{y} - \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 - \ldots. \end{aligned}$$

Theorem XLIV. *Wenn in einer Characteristik mit lauter Coincidenzen die Punkte $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ in zwei Cyclen mit mindestens einer Ordnung > 2 oder in einen Cyclus > 4 eintreten, so ist dieselbe reductibel auf niederen Grad.*

Die Transposition $(a_1 b_1 a_2 b_2)^3$ leistet dies jedesmal. Ist ein Cyclus von der Ordnung 3, so entsteht in der neuen Characterstik b_1 in b'_1 in a_1 mit $(b_2 a_3)(b_3 a_2)$, was aperiodisch ist für $m > 3$, oder wenn ein Cyclus mit Ordnung > 3 vorkommt, b_2 in a_3, b_i in a_2, wo i auch 3 sein kann. Auch diese Characteristik ist aperiodisch für $m > 3$. Indem man dies übrigens nur für $i = 3$ voraussetzt (direct beweist), kann man successive die Ordnung des Cyclus von 4 auf $5, 6, \ldots$ erhöhen und muss bei jedem einzelnen Schritte beweisen, dass für die betreffende Ordnung des Cyclus die nicht erweiterte Characteristik aperiodisch ist für $m > 5$, die wie zuletzt erweiterte — b_2 in a_3, b_i in a_2 — aperiodisch ist schon für $m > 3$. Hiemit wird vereint, dass die Erweiterungen aperiodischer Characteristiken es a fortiori sind und dass Characteristiken mit $(a_i b_k)$ statt $(a_i b_i)$ als letztem Theile selben Index wie diese haben. So kommt das allgemeine

Theorem XLV. *Für $m > 5$ sind alle Characteristiken dieses Fundamentalsystemes aperiodisch mit Ausnahme der Characteristiken $(a_1 b_2)(a_2 b_1)$ oder $(a_1 b_1) \ldots$, welche im Typentheoreme auftreten.*

§ 5. *Die periodischen Characteristiken mit 6, 7 Punkten.*

Es sind die 9 Fundamentalsysteme aus Th. LXX. der Reihe nach zu untersuchen. Die cubische Transformation habe ich im American Journal Bd. 19 (*Theorie der periodischen cubischen Transformationen*, Cap. II) erledigt; ich gelange also zu

$$\text{II.} \quad Q^5 = (b_1^4 b_2^4 b_3^2 b_4^2 b_5^2 b_6^2)^5.$$

Als nicht reductibel auf Q^3 erweisen sich die folgenden Characteristiken: 1. b_1 in a_2, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_2)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, $(a_6 b_6)$, 2. b_1 in a_1, $(a_2 b_3)$, $(a_3 b_2)$, $(a_4 b_5)$, $(a_5 b_4)$, $(a_6 b_6)$, 3. b_1 in a_2, $(a_1 b_2)$, $(a_i b_i)$, 4. $(b_1 a_2)$, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, $(a_6 b_6)$, 5. $(b_1 a_2)$, $(a_1 b_3)$, b_2 in a_3, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, $(a_6 b_6)$, 6. b_1 in a_2, $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, $(a_6 b_6)$, 7. $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_1)$,

(a_2b_4), (a_4b_2), (a_5b_5), (a_6b_6), 8. (a_1b_3), (a_3b_1), (a_2b_4), (a_4b_2), (a_5b_5), b_6 in a_6, 9. (a_1b_3), b_1 in a_3, (a_2b_4), (a_4b_2), (a_5b_5), (a_6b_6), 10. (b_1a_2), (a_1b_3), (a_3b_2), (a_4b_4), (a_5b_5), b_6 in a_6, 11. (a_1b_3), (a_4b_1), (a_2b_4), (a_3b_2), (a_5b_5), (a_6b_6), 12. (a_1b_3), (a_4b_1), (a_2b_4), b_2 in a_3, (a_5b_5), (a_6b_6), 13. (a_1b_3), (a_3b_2), (a_2b_4), (a_4b_1), (a_5b_5), b_6 in a_6.

Theorem XLVI. *Die Characteristiken n.* 7, 11 *haben die Indices* 4, 4 *und sind typisch.*

Die T^i sind resp. $(2,4,4,2,2,2)^5$, $(2,2,2,2,4,4)^5$, $(4,2,2,4,2,2)^5$, $(.)^1$, und $(2,4,2,4,2,2)^5$, $(2,2,2,2,4,4)^5$, $(4,2,4,2,2,2)^5$, $(.)^1$, den typischen Character beweisen die Transpositionen.

Theorem XLVII. *Die Characteristiken* 1. 2. 4. 6. 12. *sind äquivalent mit Characteristiken des* § 3.

$(a_2a_3a_4a_5)^3$ liefert jeweilen in dem neuen Raume $(A_6^4B_6^4)$ gemäss § 3.

Theorem XLVIII. *n.* 3. *ist reductibel auf* 6 *Punkte.*

Denn die Ebene $a_1b_1a_2$ ist invariant und wird mit $(—)^3$ über $a_1b_1a_2z$ transponirt, so wird z in dem neuen Raume invariant.

Theorem XLIX. *Die Characteristiken n.* 10. *und* 5. *sind äquivalent und vom Index* 10.

Die T^i sind für n. 5: $(4,2,4,.,2,2,2)^5$, $(4,4,6,4,2,2,2)^7$, $(6,2,6,6,4,4,4)^9$, $(4,4,8,6,6,6,6)^{11}$, $(8,8,8,8,8,8)^{15}$, $(4,6,4,8,6,6,6)^{11}$, $(4,4,2,4,6,6,6)^9$, $(2,6,2,6,4,4,4)^7$, $(4,4,.,2,2,2,2)^5$, $(.)^1$.

Theorem L. *n.* 8. *und n.* 13. *sind vom Index* 8. *und typisch. n.* 9. *ist äquivalent n.* 8.

Die T^i für n. 8. sind: $(2,4,2,4,2,2,.)^5$, $(2,4,2,4,4,6,2)^7$, $(6,8,6,8,6,8,6)^{13}$, $(6,6,6,6,8,8,8)^{13}$, $(8,6,8,6,6,6,8)^{13}$, $(4,2,4,2,4,2,6)^7$, $(4,2,4,2,2,.,2)^5$, $(.)^1$. — $(a_1a_2a_4a_5)^3$ reducirt n. 9. auf n. 8.[1]

[1] Die Beweise sind jedesmal nach meiner Theorie Crelles Journal Bd. 114 zu vervollständigen.

Die typischen Caracteristiken der Ordnung 5 sind also:

$(a_1 b_3), (a_3 b_1), (a_4 b_2), (a_2 b_4), (a_5 b_5), (a_6 b_6)$ Index 4,

$(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_4), (a_4 b_1), (a_5 b_5), (a_6 b_6)$ » 4,

$(a_1 b_3), (a_3 b_1), (a_4 b_2), (a_2 b_4), (a_5 b_5)$, b_6 in a_6 » 8,

$(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_4), (a_4 b_1), (a_5 b_5)$, b_6 in a_6 » 8,

$(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_1), (a_4 b_4), (a_5 b_5)$, b_6 in a_6 » 10.

III. $Q^7 = (f^6 d_1^4 d_2^4 d_3^4 b_1^2 b_2^2 b_3^2)^7$.

$(f d_1 d_2 d_3)^3$ liefert $(f'^2 d_1'^2 d_2'^2 d_3'^2)^3$ und reducirt also alle Characteristiken mit $(ff')(d_i d_k')$ oder $(d_i f')(f d_k')$.

$(f d_1 d_2 b_1)^3$ liefert $(f'^4 d_1'^2 d_2'^2 d_3'^2 b_1'^2 b_2'^2)^6$, reducirt also die übrigen mit Ausnahme von

1. $(d_1 f'), (f b_2'), (d_2 b_3'), (d_3 b_1'), (b_1 d_2'), (b_2 d_3'), (b_3 d_1')$,

2. $(b_1 f'), (f b_1'), (d_1 b_3'), (d_2 d_2'), (d_3 b_2'), (b_2 d_3'), (b_3 d_1')$.

Theorem LI. *n. 1. ist vom Index 6 und typisch, n. 2. vom Index 4 und typisch.*

Die T^i von n. 1. sind: $(6, 2, 2, 2, 4, 4, 4)^7$, $(6, 4, 4, 8, 6, 6, 6)^{11}$, $(4, 4, 8, 6, 6, 6, 6)^{11}$, $(4, 8, 6, 4, 6, 6, 6)^{11}$, $(4, 6, 4, 4, 2, 2, 2)^7$, $(.)^1$. Die T^i von n. 2. sind $(6, 2, 2, 4, 2, 4, 4)^7$, $(8, 6, 8, 6, 6, 6, 8)^{13}$, $(2, 6, 4, 4, 4, 2, 2)^7$, $(.)^1$.

IV. $Q^7 = (d_1^4 \ldots d_6^4)^7$.

$(d_i d_k d_l d_m)^3$ reducirt stets mit Ausnahme von

n. 1. $(d_i d_i')$, $i = 1 \ldots 6$,

n. 2. $(d_i d_i')$, d_6' in d_6, $i = 1 \ldots 5$.

Theorem LII. *n. 2. ist vom Index 6 und typisch.*

Die T^i sind $(4, 4, 4, 4, 4, 4, .)^7$, $(4, 4, 4, 4, 4, 8, 4)^9$, $(8, 8, 8, 8, 8, 8, 8)^{15}$, $(4, 4, 4, 4, 4, 4, 8)^9$, $(4, 4, 4, 4, 4, ., 4)^7$, $(.)^1$.

$$\text{V.} \quad Q^9 = (h^8 d_1^4 \dots d_6^4)^9.$$

$(h d_1 d_2 d_3)^3$ liefert $(h'^6 d_1'^4 d_2'^4 d_3'^4 d_4'^2 d_5'^2 d_6'^2)^7$, reducirt also, wenn $(d_i h')$, $(h d_k')$, $(d_l d_i')$, $(d_m d_l')$ stattfindet, was immer eintritt.

$$\text{VI.} \quad Q^9 = (f_1^6 f_2^6 f_3^6 d_1^4 d_2^4 d_3^3 b^2)^9.$$

$(f_1 f_2 f_3 d_1)^3$ liefert $(d_2'^4 d_3'^4 f_1'^2 f_2'^2 f_3'^2 d_1'^2)^5$ und reducirt daher stets, wie eine Discussion der Coincidenzen beweist.

$$\text{VII.} \quad Q^{11} = (h^8 f_1^6 f_2^6 f_3^6 f_4^6 d_1^4 d_2^4)^{11}.$$

$(h f_1 f_2 f_3)^3$ liefert $(h'^9 f_1'^4 f_2'^4 f_3'^4 f_4'^2 d_1'^2 d_2'^2)^7$ reducirt also stets, da auch im Falle $(h d_i')$, $(d_j h')$ stets $(h f_i f_k f_l)^3$ so gewählt werden kann, dass zwei f'^4 eintreten.

$$\text{VIII.} \quad Q^{13} = (h_1^8 h_2^8 h_3^8 f_1^6 f_2^6 f_3^6 f_4^6)^{13}.$$

$(h_1 h_2 h_3 f_1)^3$ liefert $(h_1'^6 h_2'^6 h_3'^6 f_1'^2 f_2'^4 f_3'^4 f_4'^4)^9$, reducirt stets.

$$\text{IX.} \quad Q^{15} = (h_1^8 h_2^8 h_3^8 h_4^8 h_5^8 h_6^8 h_7^8)^{15}.$$

$(h_1 h_2 h_3 h_4)^3$ reducirt stets mit Ausnahme von $(h_i h_i')$, $i = 1, \dots, 7$.

Indem diese Resultate zusammengesetzt und in das Theorem XXIII. eingeführt werden, entsteht das Haupttheorem:

Theorem LIII. *Alle periodischen Characteristiken von Fundamentalsystemen ohne Fundamentalcurven* 1. *Art sind birational äquivalent entweder:*

1. einer homographischen Vertauschung unter einer Anzahl Punkten.
2. einer Characteristik mit $(a^{n-1} b^{n-1})$ und typischem ternären Reste.
3. einer Characteristik mit $(a_1^{n-1} b_2^{n-1})$, $(b_1^{n-1} a_2^{n-1})$, b_i in $\dots b_i^{h_i} = a_i$.

4.	$(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4), (a_4 b_1)$,	3. Ordnung	Index	4.
5.	$(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4)$, b_1 in a_4,	3. »	»	6.
6.	$(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4)$, b_1 in b_1' in a_4,	3. »	»	10.
7.	$(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4)$, b_1 in b_1' in b_1'' in a_4,	3. »	»	18.
8.	$(a_1 b_2), (a_2 b_3)$, b_4 in a_3, b_1 in a_4,	3. »	»	8.
9.	$(a_1 b_2), (a_2 b_3)$, b_4 in a_3, b_1 in b_1' in a_4,	3. »	»	14.
10.	$(a_1 b_2)$, b_3 in a_2, b_4 in a_3, b_1 in a_4,	3. »	»	30.
11.	$(a_1 b_3), (a_3 b_1), (a_4 b_2), (a_2 b_4), (a_5 b_5), (a_6 b_6)$,	5. »	»	4.

12.	$(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_4), (a_4 b_1), (a_5 b_5), (a_6 b_6)$,	5.	Ordnung	Index 4.
13.	$(a_1 b_3), (a_3 b_1), (a_2 b_4), (a_4 b_2), (a_5 b_5)$, b_6 in a_6,	5.	»	» 8.
14.	$(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_4), (a_4 b_1). (a_5 b_5)$, b_6 in a_6,	5.	»	» 8.
15.	$(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_1), (a_4 b_4), (a_5 b_5)$, b_6 in a_6,	5.	»	» 10.
16.	$(d_i d_i')$, $i = 1, \ldots, 6$,	7.	»	» 2.
17.	$(d_i d_i')$, d_6 in a_6, $i = 1, \ldots, 5$,	7.	»	» 6.
18.	$(d_1 f'), (f b_2'), (d_2 b_3'), (d_3 b_1'), (b_1 d_2'), (b_2 d_3'), (b_3 d_1')$,	7.	»	» 6.
19.	$(b_1 f'), (f b_1'), (d_1 b_3'), (d_2 d_2'), (d_3 b_2'), (b_2 d_3'), (b_3 d_1')$,	7.	»	» 4.
20.	$(f_i f_i')$, $i = 1, \ldots, 7$,	15.	»	» 2.

III. THEIL.

Die periodischen Transformationen. Construction der Typen.

§ 1. *Reduction auf die Typen.*

In den III ersten Beweisen des II. Theiles § 2. kann die Reihenfolge der Theoreme auch für wirklich existirende Transformationen ausgesprochen werden. Insbesondere gilt die Existenz des invarianten ∞^2-Systemes rationaler oder elliptischer Curven. Über die Theoreme der Äquivalenz letzterer ist jedoch dieselbe Einschränkung zu machen, von welcher ich noch in umfangreicherer Geltung zu sprechen haben werde, dass sie nämlich beim Übergange vom Arithmetischen zum Algebraischen nur insofern gelten, als die 4 höchsten Fundamentalpunkte, welche zur Verminderung der Ordnung nöthig sind, thatsächlich von den übrigen trennbare sind, also gewiss wohl dann, wenn überhaupt alle Punkte rational bekannt sind.

Indessen kann auf folgende Weise die allgemeine Giltigkeit des Äquivalenztheoremes für die Transformationen erschlossen werden. Wenn in einer existirenden periodischen Transformation mehrere Punkte der Characteristik gemeinsam durch eine algebraische Gleichung gegeben sein sollen, so müssen diese Punkte sicherlich für die Characteristik dieselbe Bedeutung haben. Ich behaupte:

Lemma. Wie immer man einen der 19 Typen des III. Theiles durch eine Transposition überträgt, es werden stets in der erhaltenen Transformation die zur Transposition nöthigen Punkte sich so gegen die Characteristik verhalten, dass sie in Folge dessen von den übrigen rational trennbar sein müssen.

Der ausführliche Beweis dieser Angabe wird geführt, indem man die 19 Typen Q einzeln durchgeht und auf jeden die algebraische Transposition P anwendet mit Berücksichtigung der wesentlich verschiedenen Lagen, welche die Fundamentalpunkte von P zu der Characteristik Q haben können. Auf Grund des Lemmas kann nun ausgesprochen werden:

Theorem I. *Alle periodischen Transformationen ohne Fundamentalcurven 1. Art sind äquivalent entweder:*

1. *einer Collineation.*
2. *einer Transformation mit* $(a^{n-1} b^{n-1})$ *nebst einer Characteristik der* a_i, b_i, *welche zu den 27 construirbaren ebenen Typen gehört* (Cr. Journal Bd. 114).
3. *einer Transformation mit* $(a_1^{n-1} b_1^{n-1}), (a_2^{n-1} b_2^{n-1})$, b_i in $\ldots b_i^h = a_i$.
4. *einer Transformation mit* $(a_1^{n-1} b_2^{n-1}), (a_2^{n-1} b_1^{n-1})$, b_i in $\ldots b_i^h = a_i$.
5. *einer Transformation mit weniger als 8 Fundamentalpunkten.*

§ 2. *Drei Constructionsmethoden. Die Transformationen mit* $(a^{n-1} b^{n-1})$.

1. Wenn eine abbildbare Fläche durch Q invariant ist,[1] so erhält sie eine Verwandlung ihrer Punkte unter sich aufgeprägt, deren Abbildung auf die Ebene aus der Natur von Q bestimmbar ist. Umgekehrt liefert diese a priori construirte Transformation in der Ebene die Verwandtschaft in der Fläche und diese bestimmt die Raumtransformation Q. In dieser Art sollen hauptsächlich die M_2^2 und die M_2^n mit a^{n-1} angewendet werden.

Auf Grund des in meiner Abhandlung über die cubische Reciprokaltransformation[2] gegebenen Theoremes kann ich aussprechen:

---

[1] Dies ist meine in den Acta Mathematica, Bd. 19 angewendete Methode aus Comptes Rendus 1885, 5 janvier.

[2] Am. Journ. of Math. XIX.

Theorem II. *Die Theorie der gegenwärtigen Characteristiken ist auch in Hinsicht auf Äquivalenz identisch mit der Theorie jener ebenen Characteristiken* 5. *Ordnung, welche zwei Paare Fundamentalpunkte* $(e_1 e_1')(e_2 e_2')$ *oder* $(e_1 e_2')(e_2 e_1')$ *gemeinsam coincident haben, und der aus diesen zusammengesetzten.*

Ich denke mir nämlich durch die sämmtlichen σ (auch > 9) Punkte der Characteristik eine Fläche 2. Ordnung gehend, welche in sich transformirt wird und kann dann die Projection der in M_2^2 entstehenden Verwandlung aus einem Punkte vornehmen.

2. Die Parameterdarstellung der durch Q invarianten Curven [1] bietet eine 2. Methode. Um die Anwendung FUCHS'scher Functionen oder auch die von CLEBSCH der Raumcurve adjungirten Integrale zu vermeiden, beziehe man M_1^n eindeutig auf eine ebene Curve $C_{n'}$. Die Reihe J_n^3 auf M_1^n, in welcher die R_2 des R_3 schneiden, gibt als Bild eine Reihe J_n^3 auf $C_{n'}$. Wenn es nun möglich ist, eine Matrix

$$\begin{matrix} m & , a_1 & , \ldots , & a_\sigma , \\ -a_1 & , a_{11} & , \ldots , & a_{1\sigma} , \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_{11} & , a_{\sigma 1} & , \ldots , & a_{\sigma\sigma} \end{matrix}$$

eines Fundamentalsystemes von oben I. Theil zu finden, durch welches M_1^n in sich transformirt wird, so sei $I_i^{(1)} + \ldots + I_i^{(n)} \equiv K_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ das ABEL'sche Theorem für eine Gruppe von J_n^3 auf $C_{n'}$, und also $\equiv K_i$ die rechte Seite des Schnittpunkttheorems für eine Gruppe, die Bild einer Schnittes von M_1^n mit M_2^m ist, ferner $A_1^{(i)}, \ldots, A_p^{(i)}$ die Integralsummen in den Punkt a_i-tupeln, welche bezüglich den σ resp. $a_1', \ldots, a_i', \ldots, a_\sigma'$-fachen Punkten von M_1^n auf $C_{n'}$ entsprechen. Dann lässt sich von Congruenz 3) auf p. 139 der Acta Math. Bd. 19 an die dortige Rechnung genau hieher übertragen und führt zu $p\sigma$ Congruenzen unter den $p\sigma$ Grössen A, wie l. c. 6). Auch die Rechnung auf p. 141 ist übertragbar

[1] Auch schon für die Flächen konnte statt der geometrischen Abbildung die Parameterberechnung für die Transformation verwendet werden, sogar für Flächen $p > 0$; doch ist wenigstens für $n > 3$ die Parameterdarstellung der M_2^n noch zu wenig vorgeschritten.

und liefert eine Relation unter den Wurzeln der WEBER'schen Gleichung für principale Transformation der ϑ und meiner Determinante Δ_{xx}.

3. Besonders wichtig sind auch hier die Berechnungen von Characteristiken, welche eine M_1^4 mit Spitze und Schnittpunkttheorem $u_1 + \ldots + u_4 = 0$ in sich transformiren oder eine M_1^4 mit $p = 1$. Der Calcul ist wenig von Acta Math. Bd. 19, p. 135—137 verschieden und liefert insbesondere:

Theorem III. *Die Determinante, welche über die Existenz einer Characteristik des II. Theiles auf M_1^4 mit Spitze entscheidet, ist bis auf einen Factor $x - 1$ proportional der Determinante für die fundamentale Substitution der Characteristik. Wenn eine M_1^4 mit Spitze invariant ist, trägt sie denselben Index wie der Index der ganzen räumlichen Transformation.*

4. Es sollen nun die Transformationen mit $(ab)^{n-1}$ behandelt werden.

Theorem IV. *Wenn eine isolirte typische Characteristik aus II. Th. LIII, n. 1 existirt, enthält sie stets eine invariante M_2^2, die nicht zerfällt.*

M_2^2 könnte nur in zwei Ebenen durch (ab) zerfallen, aber keiner der 27 ebenen Typen gestattet ein invariantes Geradenpaar. σ ist bezüglich 7, 8, 9.

Die Geraden durch (ab) werden unter einander, und also die beiden Erzeugenden der M_2^2 durch O in sich transformirt oder vertauscht. Daher kann wie folgt endgiltig construirt werden: Durch zwei Doppelpunkte $f_1 f_2$ oder ein Paar involutorischer Punkte $i_1 i_2$ eines ebenen Typus ziehe man M_2^2 und projicire aus dem Schnittpunkte O zweier Erzeugenden durch $f_1 f_2$ oder $i_1 i_2$ den Typus auf M_2^2, dann entsteht dort die Characteristik des räumlichen Typus 3., 5. bis 33. Ordnung und mit O als $(a_1 b_1)$.

Wie in § 10 des Cap. II. meiner Abhandlung aus dem Am. Journ.[1] folgt nun, dass für die 7-punktigen Typen Q der Index des M_2^2-Netzes derjenige Index ist, mit welchem die involutorischen Paare der XLIII_2, welche über Q und einem seiner Doppelpunkte construirt ist, durch Q unter einander transformirt werden. Ferner habe ich dort die Varietäten für die Transformationen 3. Ordnung bereits gegeben.

---

[1] Am. Journ. of Math. 1897: *Theorie der periodischen cubischen Transformationen im R_3.*

Theorem V. *Für* $(a_1 b_1)$, Γ_6 *und* $(a_1 b_1)$, Δ_3 *gibt es* 3, 2 *Varietäten, für* $(a_1 b_1)$, Γ'_6; $(a_1 b_1)$, Γ''_6: $(a_1 b_2)$, E_4; $(a_1 b_1)$, θ_2; $(a_1 b_1)$, Γ_{10}; $(a_1 b_1)$, Γ_{12}; $(a_1 b_1)$, Δ_8; $(a_1 b_1)$, E_6; $(a_1 b_1)$, E'_6; $(a_1 b_1)$, E''_6; $(a_2 b_1)$, Z_5; $(a_1 b_1)$, H_6; $(a_1 b_1)$, H'_6; $(a_1 b_1)$, I_4; $(a_1 b_1)$, N_3; $(a_1 b_1)$, Σ_2; *resp.* 6, 6, 4, 5, 4, 5, 5, 5, 5, 4, 5, 3, 4, 3, 4 *Varietäten.*

Diese hängen von dem Vorhandensein des $f_1 f_2$- oder $i_1 i_2$-Paares im ebenen Typus ab und über ihre M_1^4 wird aus den in der Preisschrift beschriebenen invarianten C_3 heraus entschieden.[1]

Theorem VI. *Auf einer Curve* M_1^4 *mit Spitze, für welche* $\Sigma u = a_1$ *das Schnittpunkttheorem, hat man nur die für eine ebene* C_3^3 *in* *Acta Math. Bd.* 19, *p.* 136 *berechneten Parameter der* $b_1, \ldots, b_\sigma$ *mit* $(a_1 b_1)$ *zu verbinden, um die Characteristik im* R_3 *zu haben.*

Hierbei ist $(a_1 b_1)$ aus den Gleichungen

$$-4\frac{D}{B} + (m-1)a_1 + \ldots + \alpha_\sigma b_\sigma = m a_1,$$

$$-\frac{D}{B} + \left(m - \frac{C}{B}\right)a_1 + \ldots + \alpha_{1\sigma} b_\sigma = \frac{m-1}{2} a_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

zu berechnen, wo die für die Fundamentalfläche von $a_1 \ldots a_\sigma$ geltenden nicht aufgeschrieben sind. Die letzten σ dieser Gleichungen stimmen aber im Wesen mit den für die Ebene geltenden überein.

Dasselbe Theorem gilt für eine invariante Curve M_1^4. $p = 1$, wenn auf derselben als Schnittpunkttheorem $\Sigma u \equiv a_1$ genommen wird.

5. Die 3. Methode wird im V. Theile §§ 4, 5, 6 angewendet werden.

§ 3. *Die typischen Transformationen mit* $(a_1^{m-1} b_1^{m-1})$, $(a_2^{m-1} b_2^{m-1})$ *oder* $(a_1^{m-1} b_2^{m-1})$, $(a_2^{m-1} b_1^{m-1})$.

Theorem VII. *Jede Transformation* $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_i *in* $\ldots b_i^h = a_i$ $(i = 3, \ldots, m-1)$ *ist mit einer als invariant vorausgesetzten* M_2^2 *construirbar.*

[1] Cf. wegen der Typenbenennung Cr. Journal, Bd. 114.

Denn indem man die erste Methode des vorigen Paragraphen anwendet, kann man immer zwei Doppelpunkte $f_1 f_2$ in der Ebene finden, welche mit $(a_2 b_2)$ daselbst nicht alineirt sind. Construirt man über ihnen die M_2^2, so erhält man die Transformation.

Wenn $h = 1$, gibt es eine 2. Varietät. Man kann dann ein mit (aa') nicht alineirtes Paar $i_1 i_2$ in der Ebene finden, über diesem die Erzeugenden von M_2^2 errichten und construiren.

Theorem VIII. *Jede Transformation aus VII. ist auch mit einer als invariant vorausgesetzten M_1^4 mit Spitze construirbar.*

Ich habe Preisschrift IV, § 7, bewiesen, dass jede JONQUIÈRES'sche Transformation (ab) mit invarianter C_3^3 construirbar ist; hienach kann VI. angewendet werden.

Theorem IX. *Die Transformationen* $(a_1 b_1), (a_2 b_2), (a_3 b_3)$, b_i in $\ldots b_i^h = a_i$ $(i = 4, \ldots, m + 1)$ *sind nur mit einer invarianten M_2^2 construirbar, welche ein Kegel ist, wenn $h > 1$.*

Denn in der ebenen Transformation kann man für $h > 1$ weder $i_1 i_2$ noch ein Paar $f_1 f_2$ finden ohne Alineation mit (ab), weil $a a_3$ schon ein Doppelstral ist. Auf dem 2. Doppelstrale wird es einen Doppelpunkt geben, der mit seinem seitlichen, unendlich nahen Doppelpunkte als $f_1 f_2$ genommen werden kann.

Für $h = 1$ gibt es eine Varietät mit Hyperboloid, wo die Erzeugenden durch $(a_1 b_1)$ involutorisch vertauscht werden. Für die M_1^4 gilt VIII. auch hier.[1]

Theorem X. *Die allgemeinste Form der Transformationen* $(a_1 b_1), (a_2 b_2)$ *kann mittelst einer invarianten* $M_2^n(a_1^{n-1} b_2^{n-1})$ *construirt werden.*

Denn $x_1 = n - 1$, $x_2 = n - 1$, $x_3 = 1, \ldots, x_\sigma = 1$ ist anallagmatisch und in dem linearen Systeme aller solcher M_2^n, welche a_1^{n-1}, a_2^{n-1} und alle Punkte der Characteristik enthalten, wird es stets eine invariante M_2^n geben, welche nicht zerfällt. Dann wird wie für M_2^2 construirt. Eine Gerade der Ebene wird von a_1 aus in eine $M_1^n a_1^{n-1}$ projicirt, diese

[1] Die Transformation $(a_1 b_1), (a_2 b_2)$ existirt, wenn $(a_3 b_3), (a_4 b_4)$ vorhanden und $m > 3$, nicht mit invarianter M_2^2.

in eine $M_1^{mn-(m-1)(n-1)}$ durch $a_1^{\frac{m-3}{2}+n-1}$ verwandelt und diese von a_1 herabprojicirt. Hieraus: Man construire in der Ebene die Transformation $Q=(ab), \ldots,$ nehme in einer Geraden über (aa') zwei Punkte $a_1 a_2$ als $n-1$-fache Punkte einer M_2^n und sorge dafür, dass die Geraden derselben, welche von $(a_1 b_1)$ ausgehen, die Ebene in einem oder mehreren Cyclen der Transformation schneiden. Dann liefert die Q projicirt auf M_2^n eine Verwandlung, welche die Raumtransformation vollkommen bestimmt.

Theorem XI. *Die Transformation* $(a_1 b_2), (a_2 b_1)$, b_i *in* $\ldots b_i^h = a_i$ *sowie* $(a_1 b_2), (a_2 b_1)$, b_i *in* $\ldots b_i^h = a_i$ $(i = 4, \ldots, \sigma)$, $(a_3 b_3)$ *existirt stets mit einer invarianten* M_2^2.

Beweis wie für $m=3$ in Am. Journal of Math. 1897. Die Projection aus einem gewöhnlichen Doppelpunkte O auf M_2^2 liefert

$$((e_1^{m-1} e_2'^{m-1})(e_2^{m-1} e'^{m-1})(e_3^{m-1} e_4'^{m-1})(e_4^{m-1} e_3'^{m-1}), e_i^2 \ldots)^{2m-1},$$

deren Transposition durch $(e_1 e_2 e_3)^2$ gibt

$$(E_3 \text{ in } E_3, (E_1 E_2'), (E_2 E_1'), (E_4^{m-2} E_3'^{m-2}), \ldots)^{m-1}.$$

Wenn $h > 1$, muss also $E_2' = E_1$, $E_1' = E_2$ sein. Die Construction ist vollendet mit jener einer ebenen Transformation von Jonquières, ihrer Transposition und der Errichtung einer M_2^2. Für die 2. Transformation erhält man $(E_5 E_6')$, also falls nicht E_1, E_2 unendlich nahe sind, nothwendig auch $(E_6 E_5')$. $E_1 E_2$ in unendlicher Nähe bedeutet aber die Kegelfläche. Für $h=1$ ist eine 2. Varietät mit $E_1 = E_1'$, $E_2 = E_2'$ zulässig, wie l. c.

Theorem XII. *Die allgemeinste Form von* $(a_1 b_2), (a_2 b_1)$ *kann mittelst einer invarianten* $M_2^n(a_1^{n-1} a_2^{n-1})$ *construirt werden.*

Denn wie in X. kann man stets eine solche M_2^n für hinreichend grosses n finden. Eine Gerade der Ebene wird dann von a_1 aus in eine $M_1^n(a_1^{n-1})$ projicirt, diese in $M_1^{m+n}\left(b_1^{n-1+\frac{m+1}{2}} b_2^{\frac{m-1}{2}} \ldots\right)$ verwandelt und diese von a_1 aus in eine $M_1^{\frac{m-1}{2}+n}\left(b_2^{\frac{m-1}{2}+n-1} \ldots\right)$ herabprojicirt, welche ausser durch die Punkte $b_3 \ldots b_\sigma$ durch weitere $2n-2$ Punkte geht, die Schnittpunkte der Bildebene mit den durch a_1 gehenden einfachen Geraden der M_2^n. Es entsteht eine Jonquières'sche Transformation mit (ab) und $2n - 2$ Coincidenzen (bei unbestimmter Directrixsubstitution) und Verkettungen der $b_3 \ldots b_\sigma$ und $a_3 \ldots a_\sigma$ gemäss den räumlichen. Wegen der Projectivität unter den Ebenen durch $a_1 a_2$ folgt, dass die Directrixsubstitution für die Coincidenzen aus Cyclen der Ordnung $(h + 1)$ und etwa $1, 2 (e_i e_i')$ bestehen muss, also $2n - 2 \equiv 0, 1, 2 \mod (h + 1)$. Nimmt man eine solche Transformation in der Ebene an, in einer Geraden durch (ab) zwei Punkte a_1, a_2, so kann die räumliche Transformation hieraus construirt werden.[1]

§ 4. *Construction der Typen* 5. *bis* 15. *Ordnung.*

Theorem XIII. *Sind $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$, $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$ die Fundamentalsysteme einer Transformation $a_1^4 b_1^4$, $a_2^4 b_2^4$, $a_i^2 b_i^2$, so besteht die Collineation a_1 in b_1, a_2 in b_2. a_i^1 in b_i und reciprok.*

Aus $(a_1 a_2 a_3 a_4, a_1' a_2' a_3' a_4')^3 . (a_1' a_2' a_3'' a_4'', b_1 b_2 b_5 b_6)^3$ folgt $(a_1^4 a_2^4 a_3^2 a_4^2 a_5^2 a_6^2, b_1^4 b_2^4 b_3^2 b_4^2 b_5^2 b_6^2)^5$, wo a_5, a_6 in a_4'', a_3'' durch T_1 und a_3', a_4' in b_4, b_3 durch T_2 übergehen. Nach einem Theoreme aus Am. Journal XIX. besteht die Collineation a_1 in a_1', a_2 in a_2', a_3 in a_3', a_4 in a_4', a_5 in a_4'', a_6 in a_3'' und die andere a_1' in b_1, a_2' in b_2, a_3'' in b_5, a_4'' in b_6, a_3' in b_3, a_4' in b_4, woraus durch Composition folgt a_1 in b_1, a_2 in b_2, a_3 in b_3, a_4 in b_4, a_5 in b_5, a_6 in b_6. Hierin liegt auch der Beweis für die Umkehrung.

LIII. n° 10. erfordert nach XIII., dass $a_1 a_3$, $a_2 a_4$ zwei involutorische Paare a_5, a_6 zwei Doppelpunkte einer Raumcollineation seien, welche, da die 6 Punkte unabhängig sein müssen, eine geschaarte Involution sein muss. T entsteht durch Zusammensetzung von $(a_i b_i)$ $(i = 1 \ldots 6)$ mit dieser Collineation. Ist M_1^4 mit Spitze invariant, so folgt aus $a_1 + a_2 + a_5 + \alpha a_5 \equiv \beta$ und $a_1 + a_2 + a_6 + \alpha a_6 \equiv \beta$, $a_5 = a_6$, aber mit Coincidenz von a_5, a_6 würde die Collineation $a_5 a_6$, $a_1 a_3$ in einer Ebene verlangen. In M_1^4 mit $u' + iu \equiv \gamma$ ist die Transformation dagegen construirbar, a_5, a_6 werden die Doppelpunkte der Correspondenz $u' + iu \equiv \gamma$.

[1] Wenn an $(a_1 b_1)$ oder an $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ sämmtliche übrigen Fundamentalpunkte unendlich nahe rücken, kann die Transformation auch einen Index haben, der ein Vielfaches vom Index der Characteristik ist.

T^2 transformirt jede Ebene von $b_5 b_6$ in sich und hat in jeder 4 Doppelpunkte, deren Ort als Durchschnitt zweier Kegel 3. Ordnung (mit den Scheiteln a_5, a_6, weil die ternäre involutorische Q^3 unter den Geraden von a_5 eine M_1^3 als Doppelpunktsort hat), eine Curve 8. Ordnung durch $a_1^2 \dots a_6^2$ ist. Diese M_1^3 ist Ort von ∞^1 involutorischen Paaren für T. Es gibt invariant 4 Curven M_1^4, welche aus M_1^1 und M_1^3 bestehen, zwei, deren M_1^1 durch a_5, zwei, wo sie durch a_6 gehen. Zwei invariante M_1^4 sind harmonisch.

LIV. n° 11. erfordert nach XIII., dass $a_1 a_3 a_2 a_4$ ein Quadrupel einer Collineation Index 4 und a_5, a_6 zwei Doppelpunkte derselben sind. T entsteht durch Zusammensetzung der Transformation $(a_i b_i)$ mit dieser Collineation. Invariant sind die 4 zerfallenden M_2^2: $a_1 a_3 a_5 + a_2 a_4 a_6$, $a_1 a_3 a_6 + a_2 a_4 a_5$, $a_1 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_6$, $a_1 a_4 a_6 + a_2 a_3 a_5$. In der That lehrt die Parameterrechnung von vorhin, dass M_1^4 mit Spitze nicht möglich ist, aber hier auch, dass M_0^4 mit $u' + iu \equiv \gamma$ nicht möglich ist.

T^2 transformirt die Ebenen von $b_5 b_6$ mit Involution unter einander, die beiden Doppelebenen enthalten acht Bestandtheile der invarianten M_1^4.

LIII. n° 12. **Theorem XIV.** *Die Characteristik* $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_1)$, $(a_2 b_4)$, $(a_4 b_2)$, $(a_5 b_5)$, $(a_6 b_6)$ *ist nicht constructibel.*

M_1^4 mit Spitze kann nicht invariant sein, da a_5 ein Doppelpunkt auf M_1^4 sein müsste, aber die Spitze nicht sein kann, also der 8. Basispunkt d_8 des durch die 7 Punkte bestimmten Netzes wäre, was ebenfalls zu Widerspruch führt. Invariante zerfallende M_1^4 ist nicht möglich zu combiniren. Es müssten also 3 harmonische M_1^4 invariant sein, auf jeder a_5 ein Doppelpunkt und d_8 der 2. Doppelpunkt sein. Aber die Characteristik besitzt 10 uneigentliche Doppelpunkte, daher zwei eigentliche, von denen d_8 nur einer, der andere in einer invarianten M_1^4 wäre. Übrigens lehrt auch die Parameterrechnung für $u' + iu \equiv \gamma$ die Unmöglichkeit. Denn aus $i(-a_2 - a_3 - a_4) - (a_4 + a_5 + a_6) \equiv \gamma$ und $a_2 + a_3 + a_4 - ia_4 + \gamma \equiv 0$ folgt $a_5 + b_6 \equiv (i-1)\gamma$ und symmetrisch auch $b_5 + a_6 \equiv (i-1)\gamma$, also $b_6 \equiv a_6$.

LIII. n° 13. **Theorem XV.** *Die Characteristik* $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, $(a_2 b_4)$, $(a_4 b_1)$, $(a_5 b_5)$, b_6 *in* a_6 *existirt nicht.*

M_1^4 mit Spitze führt wie soeben zu Paradoxem, ebenso $u' + iu \equiv \gamma$. Es gibt aber, wie eine Discussion beweist, nicht 6 invariante zerfallende M_1^4.

LIV. n° 14. **Theorem XVI.** *Die Characteristik* $(a_1 b_3)$, $(a_3 b_2)$, $(a_2 b_1)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, a_6 *in* a_6 *existirt nicht.*

Die 7 Punkte bestimmen ein Netz von M_2^2, dessen 8. Basispunkt ein Doppelpunkt d_8 von T ist. M_1^4 mit Spitze kann nicht invariant sein, weil a_4, a_5 coincidiren müssten. Zerfallende M_1^4 erfordern mindestens Alineation von Punkten, welche sich aus den successiven Fundamentalsystemen als unmöglich erweist.

LVII. n° 15. erfordert keine Bedingung für das Bestehen.

LVII. n° 16. **Theorem XVII.** *Die Characteristik* $(d_i d_i')$ $i = 1, \ldots, 5$, d_6 *in* a_6 *ist nicht existent.*

Sie besitzt 20 uneigentliche Doppelpunkte, also mehr als $2m + 2$, daher ∞^1, deren Ortscurve wegen der Äquimultiplicität durch b_6, a_6 gienge, während diese nicht als Doppelpunkte fungiren können.

LIII. n° 17. **Theorem XVIII.** *Die Characteristik* $(d_1 f')$, $(f b_2')$, $(d_2 b_3')$, $(d_3 b_3')$, $(b_1 d_2')$, $(b_2 d_3')$, $(b_3 d_1')$ *existirt nicht.*

Es sind 16 uneigentliche Doppelpunkte vorhanden. Der 8. Basispunkt d_8 ist ein Doppelpunkt und kann, wie eine Discussion beweist, nicht unendlich nahe an einen der 7 Punkte rücken. Es wären also ∞^1 Doppelpunkte und ∞^1 invariante M_1^4 vorhanden, welche wegen $(b_1 d_2')$, $(b_2 d_3')$, $(b_3 d_1')$ (Parameterrechnung gibt $b_1 = b_2 = b_3$) nicht Spitze haben und nicht $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$ tragen kann. $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ kann sie nicht tragen, weil sie d_8 und einen willkürlichen der ∞^1 Doppelpunkte, also zwei enthalten müsste. Ferner können ∞^1 zerfallende M_1^3 ersichtlich nicht invariant sein.

LIII. n° 18. **Theorem XIX.** *Die Characteristik* $(b_1 f')$, $(f b_1')$, $(d_1 b_3')$, $(d_2 d_2')$, $(d_3 b_2')$, $(b_2 d_3')$, $(b_3 d_1')$ *existirt nicht.*

Uneigentlicher Doppelpunkte gibt es 14, von den 2 eigentlichen ist einer der 8. Basispunkt des invarianten Netzes, der andere reicht für die drei invarianten M_1^4 nicht aus. Überdies lehrt die Parameterrechnung in den M_1^4 mit $u' + iu \equiv \gamma$ und mit Spitze die Behauptung.

LIII. n° 19 erfordert keine Bedingung unter den 7 Punkten zum Bestehen. Sie entsteht, wie ich im Am. Journal 1897 bewiesen, durch die $M_2^4(a_1^2 \dots a_7^2)$, indem alle M_2^4, welche durch einen Raumpunkt P_1 gehen, auch noch durch einen bestimmten Raumpunkt P_1' gehen. $P_1 P_1'$ ist die Verwandtschaft 15. Ordnung.

Theorem XX. *Alle periodischen Transformationen mit einem der gegenwärtigen Fundamentalsysteme sind durch Reciprokaltransformationen äquivalent zu machen mit einer der folgenden Transformationen:*

1. *einer Collineation,*

2. *einer Transformation mit* $(a^{n-1} b^{n-1})$, *unter dessen Stralen einer der 28 ebenen constructibeln Typen herrscht,*

3. *einer Transformation mit* $(a_1^{u-1} b_1^{n-1}), (a_2^{n-1} b_2^{n-1})$, b_i *in* $\dots b_i^h = a_i$, *wo 1 oder 2 der h Null sein können, aber alle übrigen unter einander gleich sind,*

4. *einer Transformation mit* $(a_1^{n-1} b_2^{n-1}), (a_2^{n-1} b_1^{n-1})$, b_i *in* $\dots b_i^h = a_i$ *mit dem in 3. über die h Gesagten,*

5. $(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4), (a_4 b_1)$,	3. Ordnung	Index	$4m$
6. $(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4)$, b_1 in a_4,	3. »	»	6
7. $(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4)$, b_1 in b_1' in a_4,	3. »	»	10
8. $(a_1 b_2), (a_2 b_3), (a_3 b_4)$, b_1 in b_1' in b_1'' in a_4,	3. »	»	18
9. $(a_1 b_2), (a_2 b_3)$, b_4 in a_3, b_1 in b_1' in a_4,	3. »	»	14
10. $(a_1 b_3), (a_3 b_1), (a_2 b_4), (a_4 b_2), (a_5 b_5), (a_6 b_6)$,	5. »	»	4
11. $(a_1 b_3), (a_3 b_2), (a_2 b_4), (a_4 b_1), (a_5 b_5), (a_6 b_6)$,	5. »	»	4
12. $(d_i d_i')$ $i = 1 \dots 6$,	7. »	»	2
13. $(h_i h_i')$ $i = 1 \dots 7$,	15. »	»	2

IV. THEIL.

Theorie der endlichen Gruppen von Characteristiken.

Die Analogie gegenwärtiger Fundamentalsysteme mit den gesammten birationalen Fundamentalsystemen der Ebene erweist sich besonders auch hier und ich werde mich mit Bezug auf mein schon citirtes Buch [1] worin jene Theorie endgiltig begründet ist, kurz fassen, ebenso im V. Theile.

§ 1. *Das Äquivalenztheorem.*

Es wird wie im III. Theil d. Abh. und wie im Buche I. Th. § 2 bewiesen, dass invariante Singularitätencomplexe existiren, auf diese die Verminderung der adjungirten Functionen (Complexe) angewandt und werden dann die Äquivalenztheoreme über die Curvensysteme mit $p=0, 1$ zur Geltung gebracht und wird erhalten:

Theorem I. *Jede endliche Gruppe von Characteristiken gegenwärtiger Fundamentalsysteme ist durch Reciprokaltransformationen äquivalent einer der folgenden typischen Gruppen:*

1. *Gruppen von Collineationen (Vertauschungen über gewöhnlichen Punkten).*
2. *Gruppen mit gemeinsamem* $(a^{n-1}b^{n-1})$: *monoidale Gruppe.*
3. *Gruppen mit* $(a_1^{n-1}b_2^{n-1}), (a_2^{n-1}b_1^{n-1})$ *gemeinsam: dyoidale Gruppe.*
4. *Gruppen cubischer Characteristiken mit 3 gemeinsamen Fundamentalpunkten in Coincidenz* $(a_1b_i), (a_2b_k), (a_3b_l)$, $(i, k, l = 1, 2, 3)$. [2]
5. *Gruppen cubischer Characteristiken mit 4 gemeinsamen coincidirenden Fundamentalpunkten* $(a_1b_i), (a_2b_k), (a_3b_l), (a_4b_m)$.
6. *Gruppen cubischer Characteristiken über 5 gemeinsamen Punkten.*
7. *Gruppen über 6 festen Characteristikpunkten.*
8. *Gruppen über 7 festen Characteristikpunkten.*

---

[1] Berlin, Mayer & Müller, 1895.

[2] Cf. hier folgend § 3.

§ 2. *Die monoidalen und dyoidalen Gruppen.*

Eine Gruppe mit gemeinsamem Punkte $(a^{n-1}b^{n-1})$ ist endlich, wenn die übrigen Fundamentalpunkte nach I. Theil § 4 eine ternäre endliche Gruppe constituiren, die Restgruppe jener. Da nach I. Theil XXXVII. zwei Gruppen mit $(a^{n-1}b^{n-1})$ äquivalent sind, wenn ihre Restgruppen äquivalent sind, so folgt, orthanallagmatisch statt monoidal setzend:

Theorem II. *Jede endliche orthanallagmatische Gruppe ist entweder äquivalent einer Gruppe von Collineationen oder einer dyoidalen Gruppe mit* $(a_1^{n-1}b_1^{n-1}), (a_2^{n-1}b_2^{n-1})$ *gemeinsam oder einer Gruppe, deren Restgruppe einer meiner Typen* $M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8$ [1] *oder eine von deren typischen Untergruppen ist.*

Als Invarianten der Gruppe kann man die Invarianten (das cit. Buch I. Th. § 3) der Restgruppe bezeichnen und die holoedrisch isomorphen Gruppen an ihnen bilden. Bei fest angenommenen $(a_1b_2), (a_2b_1)$ gibt es über gegebenen N einfachen Punkten eine endliche Totalgruppe von dyoidalen Characteristiken und für die Untersuchung dieser und ihrer Untergruppen gilt genau der § 6 meines cit. Buches I. Theil, also auch die noch umfassendere Totalgruppe von Substitutionen 2. Art (p. 31).

Theorem III. *Bei festen* $(a_1b_2), (a_2b_1)$ *gibt es über einer gegebenen Anzahl* N *einfacher Punkte eine endliche Totalgruppe dyoidaler Characteristiken, welche aus der ebenen Gruppe des cit. § 6 durch Composition mit der Substitution* $(a_1b_2), (a_2b_1), (a_i)$ $(i = 1 \ldots N)$ *gefunden wird.*

Um Untergruppen umzuwandeln, hat man einzelne oder alle Basis-Characteristiken einer Untergruppe aus der Ebene (oder von $(a_1b_1), (a_2b_2)$) zu verdoppeln, indem man bezügliche Characteristiken mit $(a_1b_2), (a_2b_1)$ hinzufügt. Oder:

Theorem IV. *Die Gruppen mit* $(a_1b_2), (a_2b_1)$ *sind zusammengesetzt wie die Gruppen mit* $(a_1b_1), (a_2b_2)$ *über* $N + 1$ *Punkten, deren einer in den Substitutionen 2. Art intransitiv (l. c.) gehalten wird.*

[1] Das cit. Buch: I. Theil §§ 4, 5, 8.

§ 3. *Die typischen Gruppen über* 3, 4, 5, 6, 7 *Punkten.*

Die Gruppe n. 4. des Th. I. kann in eine Gruppe von Collineationen übertragen werden, indem man $(a_1 a_2 a_3 d)^3$ anwendet, wo d einen willkürlich genommenen Doppelpunkt für alle Characteristiken bezeichnet. [1]

Theorem V. *Die Basis der Gruppe n° 5 sind $(a_1 b_1) \ldots (a_4 b_4)$ und die Collineationen a_1 in a_2 in a_3 in a_4 in a_1; a_1 in a_2 in a_1, a_3 in a_3, a_4 in a_4. Die Gruppe enthält 48 Characteristiken.*

Diese Totalgruppe enthält noch typische Untergruppen, das Wort »typisch» im Sinne gegenwärtiger Theorie genommen.

Corollar. Die Gruppe ist holoedrisch isomorph einer Gruppe von Vertauschungen unter 8 Buchstaben. Die Punkte a_i und die Ebenen $a_i a_k a_l$ werden nämlich unter einander vertauscht.

Theorem VI. *Die Gruppe n° 5 ist keiner der vorhergehenden Gruppen birational äquivalent.*

Die entsprechend gebaute Gruppe M_3 in der Ebene war reductibel, weil es ein in sich transformirtes Netz homaloidaler C_3 gab. Das System müsste im R_3 äquimultipel in $a_1 \ldots a_4$ sein, also $3m - 4s = m$, m gerade, während die homaloidalen M_2^m stets ungerades m haben. (I. Th. § 1.)

Theorem VII. *Die Totalgruppe von Characteristiken über 5 Punkten ist holoedrisch isomorph der symmetrischen Gruppe aller Vertauschungen unter 6 Buchstaben.*

Die 3 ersten Beweise auf p. 20 meines Buches lassen sich auch hier geben, entsprechend verallgemeinert. Also z. B. (3. Bew.) die Characteristiken vertauschen die 6 linearen Curvensysteme, welche sind: die Geraden durch a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 resp. und die M_1^3 $(a_1, \ldots, a_5)$, unter ein-

---

[1] In einer willkürlichen Gruppe von Permutationen kann man ein bestimmtes Element 1 als Vertreter der Ebene $a_1 a_2 a_3$ annehmen und jedesmal Vorgänger und Nachfolger als a_4, b_4, um das Bild einer Gruppencharacteristik n° 3 zu haben.

ander und durch eine der 720 Vertauschungen [1] unter ihnen ist die Charakteristik auch vollkommen und eindeutig bestimmt.

Corollar. Die Gruppe wird construirt, indem die Gruppe der Vertauschungen von $a_1 \dots a_5$ (Collineationen) mit den 5 cubischen Characteristiken $(a_i b_i)$ d in d, wo d einer der 5 a_i ist, combinirt wird.

Theorem VIII. *Die Gruppe n° 5 ist keiner der vorhergehenden Gruppen birational äquivalent.*

Die entsprechend gebaute Gruppe (M_4) in der Ebene war reductibel. Für R_3 wird die Irreductibilität wie in Th. V. bewiesen.

Theorem IX. *Die Totalgruppe von Characteristiken über 6 Punkten enthält* $2 \cdot 4^3 \cdot 5^2 \cdot 6^2$ *Characteristiken.*

Sie entstehen, indem die 15 cubischen Ch. $(a_i b_i)$, d_1, d_2 die 15 Characteristiken 5. Ordnung $(a_i b_i)$ und $(d_i d_i')^7$, mit der Collineationsgruppe über 6 Punkten componirt werden, also $\underline{|6} \cdot 32$.

Theorem X. *Die Totalgruppe n° 7 ist isomorph zur Gruppe von Substitutionen, welche die Kummersche Configuration ungeändert lassen, aber mit Meriedrie des Grades 2.*

Die Gruppe ist holoedrisch isomorph zur Gruppe von Vertauschungen, hervorgebracht unter diesen 32 Elementen: den 6 Punkten, den 20 Ebenen $a_i a_k a_l$ und den 6 Quadrikegeln $a_i^2 a_{i+1} \dots a_{i+5}$ oder dem ∞^3-Systeme von M_2^1, den 15 ∞^3-Systemen von $M_2^3 a_i^2 a_k^2 a_l^2 a_m^2$, den 15 ∞^3-Systemen von $M_2^5 a_i^4 a_k^4 a_l^2 a_m^2 a_n^2 a_o^2$, dem ∞^3 Systeme $M_2^7 a_1^4 \dots a_6^4$. Diese sondern sich in 16 Paare, so dass je zwei eines Paares sich zu $a_1^4 \dots a_6^4$ summiren. Sie können nun den 16 Punkten einer Kummerschen Fläche entsprechend gemacht werden, etwa durch (ideelle) Anwendung der bekannten Reyeschen 1, 2-deutigen Transformation (Crelles Journal Bd. 86).

Bedingung für eine Vertauschung unter den 32 Elementen, damit sie durch eine Characteristik hervorgerufen sei, ist einzig die, dass 2 Ele-

[1] Bildet man, was ja sehr nahe liegt, durch die M_2^2, welche $a_1 \dots a_5$ enthalten, die ebenen Schnitte einer M_3^3 im R_4 ab, so wird diese ersichtlich 10 Doppelpunkte haben und es gilt für sie das *Theorem: Eine M_3^3 mit 10 Doppelpunkten im R_4 wird durch 720 Collineationen des R_4 in sich selbst transformirt,* welches Theorem neu sein dürfte.

mente, welche sich in einer Fundamentalcurve 2. Art (resp. wenn 2 Punkte, gar nicht) oder in einer Curve mit $p = 0$, $u = 2$ (siehe Beweis zu Theorem VI.) oder in einer Curve mit $p = 0$, $u = 4$ schneiden, wieder in 2 Elemente gleichen gegenseitigen Verhaltens übergeführt werden.[1]

Bildet man nun die 16 Sextupel unter den 16 Elementarpaaren, welche den conischen Sextupeln der Kummerschen Configuration entsprechen, so überblickt man, dass die eben beschriebene Bedingung das Erhaltenbleiben dieser Sextupelvertheilung zur Folge hat, mit ihm identisch ist.

Corollar I. In der Isomorphie entsprechen jeder Substitution der Kummerschen Configuration zwei Characteristiken, von denen die eine durch Zusammensetzung mit $[(d_i d_i')]^7$ aus der anderen entsteht.

Corollar II. Die Totalgruppe n° 7 enthält $[(d_i d_i')]^7$ *als mit allen Characteristiken vertauschbare Characteristik.*

Corollar III. Die Gruppe der Kummerschen Configuration ist zu keiner Gruppe von einem Grade < 16 holoedrisch isomorph, und da sie einfach ist, auch nicht meriedrisch.

Theorem XI. *Die Totalgruppe der Characteristiken über 7 Punkten ist endlich und enthält* $\underline{|7} \cdot 436$ *Characteristiken.*

Die Endlichkeit ist sicher, da es mit 7 Punkten nur endlich viele Fundamentalsysteme und aus diesen nur endlich viele Characteristiken gibt. Es gibt 35 cubische, 105 von 5. Ordnung, 7 von 7., 70 andere von 7., 7 von 9., 70 andere von 9., 105 von 11., 35 von 13., 1 von 15. Ordnung, also 436 Fundamentalsysteme.

Theorem XII. *Die Gruppe n° 8 ist holoedrisch isomorph einer Gruppe von Vertauschungen unter 126 Elementen, welche 63 Paare der Imprimitivität besitzt.*

Denn die 7 Punkte $a_1 \ldots a_7$, die 35 Ebenen $a_i a_k a_l$, die 42 Quadrikegel $a_i^2 a_{i+1} \ldots a_{i+6}$, die 35 $M_2^3 a_i^2 a_k^2 a_l^2 a_m^2 a_n a_o a_p$, die 7 $M_2^4 a_i^3 a_k^2 \ldots a_p^2$ werden

[1] In der Ebene war diese Bedingung so formulirt, dass die fundamentalen linearen Substitutionen die Form $F_{12} = nn' - \Sigma xx'$ ungeändert lassen mussten. Cf. mein Buch § 1.

unter einander transformirt, aber so, dass die Paare, welche sich zu $(a_1^8 \ldots a_7^8)^{15}$ summiren, erhalten bleiben.

Theorem XIII. *Die Totalgruppe n° 8 ist keiner Gruppe unter weniger als 126 Buchstaben holoedrisch isomorph.*

Die einzigen Invarianten der Gruppe sind die Singularitätencomplexe der Flächen mit gegebenem p, u (in Folge der Singularitäten in $a_1 \ldots a_7$ allein) und die niedrigste Anzahl ist eben die im Theoreme XI. gebildete Anzahl für $p = 0$, $u = 0$.

Wendet man auf den Raum R_3 die im V. Theil § 5 beschriebene 2, 1-deutige Transposition an, so werden den Vertauschungen der Flächen mit $p = 0$, $u = 0$ Vertauschungen gewisser Berührungsebenen einer merkwürdigen Übergangsfläche 12. Ordnung mit 9-fachem Punkte (und 3 an ihm unendlich nahen) entsprechend gemacht. Die gegenwärtige Gruppe steht also gewiss mit einem Zweitheilungsprobleme gewisser überall endlicher Doppelintegrale, wie sie nach Jacobi von Nöther kurz erwähnt worden sind (Math. Ann. Bd. 2), in Verbindung.

Aber die Gruppe unter 63 Elementen hat gewiss auch zu den Abelschen Integralen $p = 3$ Beziehung. Dafür spricht die Existenz der Jacobischen Curve 6. Ordnung mit $p = 3$ des Netzes der $M_2^2(a_1, \ldots, a_7)$.[1]

[1] **Theorem XIII′.** *Die Gruppe M_6 in Substitutionen enthält 36 nicht ähnliche Substitutionen.* Dieselben sind: 11 Collineationen; $(a_1b_1), (a_2b_2), (a_3b_4), (a_4b_3)$, mit i_1, i_2; 5 andere mit (a_1b_1); $(a_1b_2), (a_2b_1), (a_3b_4), (a_4b_3)$, i_1, i_2; 2 andere mit $(a_1b_2), (a_2b_1)$; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_1)$, d_1, d_2 oder i_1, i_2; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4)$, b_1 in a_4 mit d_1; $(a_1b_2), (a_2b_3)$, b_4 in a_3, b_1 in a_4; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4)$, b_1 in b_1' in a_4; $(a_1b_2), (a_2b_3)$, b_1 in b_1' in a_3, (a_4b_4); (a_1b_2), b_3 in a_2, b_1 in a_3, (a_4b_4); $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_1)$, b_4 in b_4' in a_4; $(a_1b_1), (a_2b_2), (a_3b_4)$, b_3 in b_3' in a_4; $(a_1b_2), (a_2b_1), (a_3b_4)$, b_3 in b_3' in a_4; $(a_1b_1), (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4), (a_5b_5), (a_6b_6)$ oder dies mit $(a_1b_2), (a_2b_1)$; zwei Typen 5. O. Index 4; 3 mit (a_1b_1), 1 mit $(a_1b_2), (a_1b_1)$; Typus 7. O. $(d_i d_i')$.

Theorem XIII″. *Die Gruppe M_7 in Substitutionen enthält 64 nicht ähnliche Substitutionen.* Dieselben sind: 14 Collineationen; $Q^3: (a_ib_i)$ mit Tripel; $(a_1b_1), (a_2b_2), (a_3b_4), (a_4b_3)$ mit d_1, d_2, d_3 oder d_1, i_1, i_2 oder Tripel; 5 andere mit $(a_1b_1), (a_2b_2)$; 4 andere mit (a_1b_1); $(a_1b_2), (a_2b_1), (a_3b_4), (a_4b_3)$ ebenso 5 andere mit $(a_1b_2), (a_2b_1)$; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_1)$ ebenso; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_1), (a_4b_4)$ mit Tripel; $(a_1b_2), (v_2b_3), (a_3b_4)$, b_1 in a_4 mit d_1, d_2 oder i_1, i_2; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_1)$, b_4 in a_4 mit i_1, i_2; $(a_1b_2), (a_2b_3), (a_3b_1)$ b_4 in b_4' in b_4'' in a_4, 5 Typen; Q^5: 1 mit (a_1b_1), 2 Typen Index 4, 2 Typen Index 8, 1 Typus Index 10; 2 mit $(a_1b_1), (a_2b_2)$ 2 mit $(a_1b_2), (a_2b_1)$; Q^7: 4 Typen Indices 6, 4, 2, 6, 1 mit (a_1b_1); Q^{15}: 1 Typus Index 2.

V. THEIL.

Theorie der endlichen Gruppen von Transformationen ohne Fundamentalcurven I. Art.

§ 1. *Das Äquivalenztheorem.*

Um Raum zu sparen, erwähne ich kurz, dass sich die IV Beweise des § 1, II. Theiles hieher für die Gruppen existirender Transformationen adaptiren lassen, wie es für die Ebene in meinem Buche geschehen ist und liefern.

Theorem I. *Jede endliche Gruppe von Transformationen gegenwärtiger Fundamentalsysteme lässt sich durch Reciprokaltransformationen äquivalent machen einem der folgenden Typen:*

1. *einer Gruppe von Collineationen,*
2. *einer Gruppe von Transformationen mit gemeinsamem* $(a^{n-1} b^{n-1})$,
3. *einer Gruppe von Transformationen mit gemeinsamen* $(a_1^{n-1} b_2^{n-1})$, $(a_2^{n-1} b_1^{n-1})$,
4. *einer Gruppe cubischer Transformationen mit zwei coincidenten Hauptpunktetripeln,*
5. *einer Gruppe cubischer Transformationen mit gemeinsamen Hauptpunktequadrupel,*
6. *der Gruppe von* 720 *Transformationen über* 5 *festen Punkten oder einer Untergruppe,*
7. *einer Gruppe von Transformationen über* 6 *festen Punkten,*
8. *einer Gruppe von Transformationen über* 7 *festen Punkten.*

Hier ist die Gruppe n° 4 über 3 Punkten typisch, weil man für die Transformationen nicht mehr wie für die fundamentalen linearen Substitutionen einen allen gemeinsamen Doppelpunkt willkürlich annehmen kann.

Die Gruppen von Collineationen im R_3 (Classe n° 1) hat C. JORDAN nicht vollständig bestimmt.

§ 2. *Die orthanallagmatischen und dyoidalen Gruppen.*

Aus II. Theil § 3 folgt:

Theorem II. *Jede endliche Gruppe von Transformationen mit gemeinsamen $(a^{n-1}b^{n-1})$ ist äquivalent entweder: 1. einer Gruppe von Collineationen oder 2. einer Gruppe mit $(a_1^{n-1}b_1^{n-1}), (a_2^{n-1}b_2^{n-1})$ oder 3. einer Gruppe mit $(a^{n-1}b^{n-1})$, deren Restgruppe eine der von mir entdeckten ternären 34 Gruppen mit 7, 8 Punkten (XXVIII. bis LXI. der Tafel in meinem Buche) ist.*

Die Gruppen, wo die Restgruppe einer der Typen XV. bis XXVII. meiner Tafel ist, sind nicht vollständig, sondern lassen sich ohne Änderung ihrer Figur zu Gruppen der Art n° 7 und n° 8 des obigen Theoremes I. ergänzen (durch Verbindung $[(h_i h_i')]^{15}$), ebenso wo die Restgruppe XII., XIII., XIV. jener Tafel ist, erscheint die Gruppe sofort als Untergruppe einer Gruppe der Arten n° 4., n° 5., n° 6. des Theoremes I.

Theorem III. *Die 34 isolirten Typen von Gruppen mit $(a^{n-1}b^{n-1})$ sind construirbar mit einer invarianten irreductibeln M_2^2 oder einer M_1^4.*

Denn die Characteristik der Gruppe enthält für XXVIII. bis LXI. der Tafel 7 oder 8 Punkte, also für den R_3 8 oder 9 Punkte. Dass ein invariantes Ebenenpaar nicht möglich ist, beweist die Discussion von XLII. bis LXI. Die Discussion von XXVIII. bis XLI. beweist, dass die invariante M_1^4 nicht zerfallen kann, ausgenommen bei den cyclischen Gruppen, welche aber wiederum stets eine invariante M_2^2 besitzen.

Theorem IV. *Jede dyoidale Gruppe mit $(a_1^{m-1}b_1^{m-1}), (a_2^{m-1}b_2^{m-1})$ oder mit $(a_1^{m-1}b_2^{m-1}), (a_2^{m-1}b_1^{m-1})$ ist construirbar wenigstens in der particulären Form, wo eine invariante M_2^2 existirt, sofern die Ebenen durch $a_1 a_2$ nach einer der 5 binären Gruppen projicirt werden.*

Der Beweis folgt aus III. Theil § 3 Theorem VII. und aus dem Theoreme für die Ebene (l. c. p. 47).

Theorem V. *Die allgemeine dyoidale Gruppe mit $(a_1^{m-1}b_1^{m-1}), (a_2^{m-1}b_2^{m-1})$ oder mit $(a_1^{m-1}b_2^{m-1}), (a_2^{m-1}b_1^{m-1})$ ist mit einer invarianten M_2^n $(a_1^{n-2}a_2^{n-2})$ construirbar.*

Die Construction ist genaue Nachbildung der von mir oben im III. Theile § 3, Theoreme X., XI. gegebenen.

§ 3. *Die typischen Gruppen über* 3, 4, 5, 6 *Punkten.*

Gruppen n° 4. α) Werden die Ebenenbüschel a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2 jedes in sich transformirt, so genügt es, in ihnen drei Gruppen willkürlich anzunehmen, dieselben durch Isomorphieen unter einander zu beziehen und je drei zusammengehörige Projectivitäten zu einer Reciprokaltransformation zu combiniren, wobei die a_4, b_4 von selbst entstehen. β) Werden die Ebenenbüschel a_1a_3, a_3a_1 vertauscht, a_1a_2 erhalten, so hat man in einer Gruppe der Art α) aus der ganzen Gruppe oder aus der Untergruppe diejenigen Q^2, welche in a_1a_3, a_3a_1 ähnliche Projectivitäten haben, durch Einfügung einer (noch auf ∞^1 Arten variabeln) Projectivität von a_1a_3 nach a_3a_1 zu einer Q^2: (a_1b_1), (a_2b_2), (a_3b_1) zu ergänzen. γ) Werden die Ebenenbüschel a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2 cyclisch vertauscht, so müssen die zu ergänzenden Q^2 in α) drei ähnliche Projectivitäten besitzen. δ) Werden beide Processe aus β) und γ) angewendet, so entsteht eine Gruppe, durch welche die drei Ebenenbüschel in allen 6 Arten vertauscht werden.

Gruppen n° 5. Je nachdem die 4 Stralbündel a_1, a_2, a_3, a_4 unter einander vertauscht werden, entstehen verschiedene Classen. Es gibt 8 verschiedene Gruppen von Vertauschungen unter 4 Buchstaben und wie in der Ebene (cf. mein Buch 49—51) wird bewiesen:

Jede dieser 8 Classen von n° 5 wird construirt, indem man eine Transformation (a_ib_i) mit einer endlichen Gruppe von Collineationen, die a_i zu Doppelpunkten haben und mit je 1 Collineation combinirt, welche unter den a_i die Substitutionen der Characteristik hervorbringen.

Gruppe n° 6. Da alle Characteristiken über 4 Punkten construirbar sind, so stimmt die Gruppe mit der Characteristikengruppe überein und enthält auch nur 720 Transformationen.

Gruppe n° 7. **Theorem VI.** *Über 6 willkürlichen Punkten des R_3 gibt es eine Gruppe von 32 (involutorischen) Transformationen, welche auch in jeder anderen über irgend 6 besonderen Punkten bestehenden Gruppe als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist.*

Diese Transformationen sind $15[(a_i b_i)]^3$ mit je einem involutorischen Paare im 5. und 6. Punkte, $15[(a_i b_i)]^5$, die $[(d_i d_i')]^7$ und die Identität. Dass sie ausgezeichnet ist, folgt, weil eine Transformation, welche den 6 Punkten keine Bedingung auferlegt, durch jede andere Transformation über den 6 Punkten in eine eben solche Transformation übertragen werden muss.

Theorem VII. *Jede vollständige Gruppe über 6 Punkten ist abhängig von und vollständig bestimmt durch eine etwaige Gruppe von Collineationen, welche unter den 6 Punkten im Raume bestehen.*

Denn die Collineation, welche unter den Hauptpunktepaaren einer $[a_i, b_i]^3$ und zwei gewöhnlichen Punktepaaren pp', qq' herrscht,[1] absorbirt hier alle 6 Punkte, ebenso gewiss die Collineation des Theoremes XIII. im III. Theil und wenn $T = [d_i d_k']^7$ eine Directrixsubstitution verschieden von der Identität hat, muss diese als Collineation wirklich unter den 6 Punkten bestehen, da T^2 diese Collineation selbst ist.

Theorem VIII. *Wenn drei Punkte in einer Geraden sind, ist die Gruppe übertragbar in eine Gruppe von Collineationen und wenn 4 Punkte in einer Ebene, ist sie dyoidal.*

Denn die M_2^2 durch die Gerade und die übrigen 3 Punkte bilden ein homaloidales System und die M_2^2, welche in jene Ebene und eine variable Ebene durch die übrigen beiden Punkte zerfallen, müssen unter einander transformirt werden.

Theorem IX. *Es gibt also 7 typische Gruppen über 6 Punkten.*

Denn nun sind die 6 Punkte in einer Raumcurve 3. Ordnung, welche durch die Collineationsgruppe aus VII. in sich transformirt wird, also eine binäre Gruppe trägt, deren es unter 6 Punkten nur 7 verschiedene gibt: 1. die Identität allein, 2. drei Paare einer Involution, 3. die Doppelpunkte und zwei involutorische Paare einer Involution, 4. ein Cyclus und ein Doppelpunkt einer Projectivität des Index 5, 5. die Gruppe über der Form T, 6. ein Cyclus vom Index 6, 7. zwei willkürliche Tripel einer Projectivität des Index 3.

Corollar. Die Ordnungen dieser Gruppen sind bezüglich $32, 2.32, 4 \cdot 32, 5 \cdot 32, 24 . 32, 9 . 32, 3 . 32$.

[1] Am. Journ. of Math. Vol. 19.

§ 4. *Die Anwendung der Kummer'schen Fläche.*

Herr REYE und nach ihm W. STAHL haben für die Untersuchung der Strahlencongruenzen 2. O. und Cl. eine (1, 2)-deutige Verwandtschaft untersucht, welche den Ebenen des Raumes R_3' die M_2^2 durch 6 feste Punkte $p_1 \dots p_6$ in R_3, den Punkten der hierbei entstehenden Kummerschen Fläche K_4 in R_3' die Punkte der Kernfläche Φ_4 in R_3, den 16 Doppelpunkten von K_4 die 15 Geraden $p_i p_k$ und die $M_1^3(p_1 \dots p_6)$ und den 16 Doppelebenen die 6 Punkte p_i und die 10 Ebenenpaare $(p_i p_k p_l, p_m p_n p_o)$ entsprechen macht.

Ist nun über 6 Punkten eine gegenwärtiger Characteristiken construirt, so transformirt sie die $\infty^3 M_2^2$ durch $p_1 \dots p_6$ unter einander, also auch die Punktepaare, in denen sie sich schneiden, und wird also durch die Reyesche Abbildung in eine Collineation des R_3' übertragen, welche, da in R_3 die Φ_4 invariant war, die K_4 in sich transformiren wird. Da durch die eindeutige Correspondenz in Φ_4 die Raumtransformation bestimmt ist, folgt:

Theorem X. *Die Gruppen über* 6 *Punkten können durch* (1, 2)*-deutige Abbildung aus den Collineationsgruppen gewonnen werden, welche eine Kummer'sche Fläche in sich transformiren.*

Ich habe im Am. Journ. 1897 [1] die aussergewöhnlichen Collineationsgruppen bestimmt, welche eine K_4 reproduciren und bewiesen, dass sie nur von dem projectiven Character einer der 16 conischen Sextupel abhängen, woraus wieder das Theorem VII. geschlossen wird, ebenso VIII. Am selben Orte habe ich auch die Characteristiken angegeben, in welche sich die einzelnen Collineationen umsetzen.

§ 5. *Die Gruppen über* 7 *Punkten durch Anwendung zweier neuen* (1 — 2)*-deutigen Transformationen.*

1. Alle $M_1^4 p = 1$ durch 7 Punkte $p_1 \dots p_7$ gehen durch einen 8. Punkt a_8. An diese ∞^2 Curven knüpft sich eine ganze Reihe von Trans-

[1] Meine Note: »Über Collineationsgruppen an Kummer'schen Flächen».

formationen, indem man nach dem Verfahren für die Ebene[1] auf jeder M_1^4 oder unter je zwei M_1^4 gleichen Moduls eine eindeutig zu bestimmende eindeutige Correspondenz einrichtet. Insbesondere (l. c. Th. 117.): »Wird auf jeder M_1^4 die Correspondenz $u' + u \equiv \gamma$ mit a_8 als Doppelpunkt bestimmt, so entsteht $(8, \ldots, 8)^{15}$ mit $p_1 \ldots p_7$ als 8-fachen Fundamentalpunkten und $M_2^4(p_i^3 p_{i+1}^2 \ldots p_{i+6}^2)$ als Fundamentalflächen». (l. c. Th. 118) »Die $(8, \ldots, 8)^{15}$ transformirt die $M_2^2(p_1^2 \ldots p_7^2)$ unter einander, jede in sich». »Der Ort der Doppelpunkte von $(8,\ldots,8)^{15}$ ist eine $M_2^6(p_1^3 \ldots p_6^3)$, welche die 28 Geraden $p_i p_k$ $(i, k = 1 \ldots 7)$ einfach und die Kegelspitzencurve des Netzes $M_2^2(p_1 \ldots p_7)$ als einfache Curve enthält, D_6.»

Eine (1 ; 2)-deutige Beziehung von R_3 nach R_3' kann nun durch ein lineares ∞^3-System M_2^4 abgeleitet werden, welche durch 3 fernere einfache Punktepaare $q_1 q_1', q_2 q_2', q_3 q_3'$ gehen. »(l. c. 120.) In der Transformation, welche 4. O. in R_3 und 16. O. in R_3' und den Ebenen von R_3' die $M_2^4(p_1^2 \ldots p_7^2 q_1 \ldots q_3')$ entsprechen macht, entspricht der D_6 eine Fläche Z_{12} der 12. O., welche einen 9-fachen Punkt A besitzt, an den 3 andere in 3 verschiedenen Richtungen unendlich nahe gerückt sind und nach diesen Richtungen drei 6-fache Gerade durch A hat.» »Durch diese Transposition werden die Gruppen über $p_1 \ldots p_7$ in Gruppen birationaler Transformationen 4. O. (Q^4) übertragen, welche in jenen Geraden 3 doppelte Fundamentalgeraden und sonst 3 einfache Fundamentalpunkte besitzen.» Also:

Theorem XI. *Die 7-punktigen Gruppen (n° 8) des Th. I. werden gefunden, indem man die Gruppen erwähnter Q^4, welche die Z_{12} reproduciren, durch die 2 — 1-deutige Transposition überträgt.*

2. Eine einfachere Transposition ist die folgende.

Lemma. *Die $M_2^4(a_1^2 \ldots a_7^2)$, welche durch den Schnitt A_1^8 einer unter ihnen mit einer festen $M_2^2(a_1 \ldots a_7)$ hindurchgehen, bilden ein lineares ∞^3-System.*

Die Jacobiana derselben ist wieder jene D_6 (wie überhaupt aller im ∞^6-Systeme enthaltenen ∞^3-Systeme). Wird nun unter den Ebenen von R_3' und diesen ∞^3 M_2^4 eine Collineation hergestellt, so hat man eine

[1] Acta Math. Bd. 19, § 12. B.

1 — 2-deutige Transformationen von R'_3 nach R_3, die von den Ordnungen 4, 8 in R_3, R'_3 ist und welche die D_6 nur in eine Z_6 mit einem 3-fachen Punkte A überträgt. Der Osculationskegel des 3-fachen Punktes entspricht dem Schnitte der D_6 mit der festen M_2^2. In der Transposition entsprechen den $a_1 \dots a_7$ Flächen 2. O., der A_1^8 eine Ebene. Den Transformationen über $a_1 \dots a_7$ als Characteristikpunkten entsprechen quadratische Transformationen Q^2 in R'_3, weil eine willkürliche $M_2^4(a_1^2 \dots a_7^2)$ in R'_3 einer M_2^2 entspricht. Den $M_2^2(a_1 \dots a_7)$ entsprechen in R'_3 Ebenen des Bündels um A, und da jene, also auch diese unter einander transformirt werden, ist A der Fundamentalpunkt von Q^2. Der Fundamentalkegelschnitt geht an A unendlich nahe.

Theorem XIII. *Die 7-punktigen Gruppen (n° 8) des Th. I. werden gefunden, indem man die Gruppen quadratischer Transformationen, welche die* $Z_6(A^3)$ *reproduciren, durch die 2 — 1-deutige Transposition überträgt.*

In dieser Form ist das Problem nun so einfach wie es nach der Methode meines Buches das parallele in der Ebene ist.[1]

§ 6. *Andere Methoden für die 7-punktigen Gruppen.*

1. Die $M_2^4(a_1^2 \dots a_7^2)$ bilden einen R_6, in dem eine endliche Gruppe von Collineationen entsteht. In diesem bilden die M_2^4, welche durch d_8 gehen, und zwar von selbst zweifach, einen R_5, der invariant sein muss, daher jede Gruppe auch einen Punkt invariant lässt; also:[2]

Theorem XIII. *Jede Gruppe über 7 Punkten lässt eine* $M_2^4(a_1^2 \dots a_7^2)$ *invariant.*

Jener R_5 ist gleichzeitig repräsentirender Raum derjenigen M_2^4, welche sich als quadratische Functionen der M_2^2 darstellen lassen. In dem R_5 ist eine invariante M_2^4, die doppelt gezählten M_2^2, und eine invariante M_4^3, die Paare von M_2^2 überhaupt.

---

[1] Acta Math. Bd. 19, p. 160—168 und das cit. Buch. III. Th. § 8.
[2] Cit. Buch. II. Th. § 2.

2. Gegenüber meinen vorhergehenden 3 Methoden gebe ich als diejenige Methode, welche am wenigsten neue Untersuchung erfordert, die folgende.

Theorem XIV. *Jede Transformation einer Gruppe über* $(a_1 \dots a_7)$ *muss die Kegelspitzencurve* L_6 *des Netzes* $M_2^2(a_1 \dots a_7)$ *in sich transformiren und ist ihrerseits durch die Correspondenz in dieser Curve zweideutig bestimmt.*

Der 2. Theil des Satzes folgt daraus, dass die von den M_2^2 auf der L_6 ausgeschnittene Involution G_{12}^2 in sich transformirt wird und durch eine Schnittpunktgruppe g_{12} derselben die M_2^2 des Netzes bestimmt ist.

Ferner habe ich Am. Journ. 1897 bewiesen: »Wenn eine Kegelspitzencurve L_6 eine eindeutige Correspondenz enthält, so ist dieselbe in einer Collineation enthalten.»

Die Kegelspitzencurve kann aber auch auf eine L_4 abgebildet werden und es handelt sich also um die Collineationsgruppen, welche eine L_4 in der Ebene reproduciren können. Diese habe ich in Acta Math. Bd. 19, p. 157 und meinem Buche p. 89 endgiltig abgeleitet. Es handelt sich also, zu einer L_4 eine auf sie eindeutig bezogene Kegelspitzencurve zu construiren. Dies geschieht durch die Abbildung einer M_2^3. Man nimmt auf der L_4 6 Punkte derart, dass ihr auf der M_2^3, welche sich mittelst dieser 6 Punkte abbildet, eine Kegelspitzencurve c_6 entspricht. Dies ist nach einem Theoreme von mir der Fall, wenn [1] die 6 Punkte die Berührungspunkte der L_4 mit einer Curve 3. O. sind. Da es nun 14 verschiedene L_4 mit Gruppen von Correspondenzen gegeben hat (l. c.), so folgt:

Theorem XV. *Es gibt* 14 *verschiedene vollständige Gruppen von Transformationen ohne Fundamentalcurven* 1. *Art über* 7 *Punkten. Die Lage der* 7 *Punkte bestimmt sich jedesmal mit Hilfe einer ebenen* L_4 $p = 3$.

Meine bisherigen Resultate zusammengefasst liefern jetzt:

Theorem XVI. *Jede endliche Gruppe von Transformationen ohne Fundamentalcurven* 1. *Art ist äquivalent einem der folgenden Typen:*

I. einer Gruppe von Collineationen des R_3,

II. bis XXXV. einer Gruppe von Transformationen mit gemeinsamem $(a^{n-1}b^{n-1})$, *wo die Restgruppe einer meiner ebenen Typen XXVIII. bis LXV. ist,*

[1] Am. Journ. of Mathem. 1897, *Theorie der period. cubischen Transformationen im* R_3, Cap. I., Theorem VIII.

XXXVI. bis *XL.* *einer Gruppe von Transformationen mit gemeinsamen* $(a_1^{n-1} b_1^{n-1}), (a_2^{n-1} b_2^{n-1})$, *wo die Ebenen durch* $a_1 a_3$ *zu einer der* 5 *binären Gruppen zusammentreten (eingeschlossen die Gruppen höherer Homologieen dyoidaler Natur),*

XLI. *bis* *XLV.* *einer Gruppe von Transformationen mit gemeinsamen* $(a_1^{n-1} b_2^{n-1}), (a_2^{n-1} b_1^{n-1})$, *wo die Ebenen durch* $a_1 a_2$ *zu einer der* 5 *binären Gruppen zusammentreten,*

XLVI. einer Gruppe cubischer Transformationen mit drei gemeinsamen Hauptpunktcoincidenzen, die nur cyclisch vertauscht werden,

XLVII. einer Gruppe cubischer Transformationen mit drei gemeinsamen Hauptpunktcoincidenzen, die auf alle Arten vertauscht werden,

XLVIII. bis L. einer Gruppe cubischer Transformationen mit vier gemeinsamen Hauptpunktcoincidenzen, die nur cyclisch oder nach der Tetraedergruppe oder nach der Octaedergruppe permutirt werden,

LI. einer Gruppe von 720 *Transformationen über* 5 *festen Punkten* $r = 720$,

LII. einer Gruppe über 6 *Punkten, welche willkürlich sind* $r = 32$,

LIII. welche drei Paare einer collinearen Involution sind, $r = 64$,

LIV. welche zwei Tripel einer cyclischen Collineation sind, $r = 96$,

LV. welche die Doppelpunkte und 2 *Paare einer Involution sind,* $r = 128$,

LVI. welche ein Cyclus vom Index 6 *einer Collineation sind,* $r = 192$,

LVII. oder ein Doppelpunkt und ein Cyclus vom Index 5, $r = 160$,

LVIII. welche eine Form T *in einer* M_1^3 *sind,* $r = 768$,

LIX. bis LXXI. einer aus 14 *Gruppen über je* 7 *Punkten,* $r = 18$, 336, 96, 192, 6, 6, 12, 32, 12, 96, 16, 8, 4, 2.

Von diesen können die ersten 50 als typische Classen, die übrigen 21 als isolirte Gruppentypen bezeichnet werden.

Anmerkung. Der grösste Theil dieser Gruppen bleibt (während die einzelnen Typen durch Projectionen in dyoidale Gruppen übergeführt werden) auch in der *allgemeinen* Theorie der Gruppen birationaler Transformationen im R_3 *typisch,* d. h., wenn zur Transposition nicht nur Transformationen gegenwärtiger Art, sondern birationale Transformationen überhaupt verwendet werden.

Calais, London, Auer, 1896.

Berichtigung.

In Folge eines von mir nicht verschuldeten Versehens während des Druckes kann ich eine notwendige Correction der Form 3) des Textes erst hier nachtragen. Die cubische Form 3) ist nicht invariant durch die Substitution 1) (überhaupt durch keine anderen als welche die Variabeln unter einander vertauschen).

Dagegen können allerdings andere irreductibele cubische Formen durch Combination der quadratischen und linearen Formen gewonnen werden. Zu den letzteren ist die Form $3n - \Sigma y_i$ hinzuzufügen.

Ausserdem bleibt für jede Substitution 1) eine cubische Form invariant, welche aber nicht für alle in gleicher Weise aufgeschrieben werden kann. Denn da für die einzelne $(a_i; b_i)^3$ die Form

$$n^3 - 2n\Sigma y_{ik}^2 - \Sigma x^3 + 3\Sigma(x_i + x_k) y_{ik}^2 - 2\Sigma y_{ik}^3$$

invariant bleiben soll (Amer. J., T. 19), so wird für jede Transformation, welche sich aus solchen zusammengesetzt, eine Form

$$n^3 - \Sigma x^3 + 3\Sigma L_i y_i^3 - 2\Sigma y_i^3 \tag{3}$$

wo die L_i gewisse von der Transformation abhängige lineare Functionen von n, x_i sind, invariant bleiben.

Die Tragweite dieser Resultate mag man daran ermessen, dass bisher überhaupt die ganzzahligen Transformationen nur von ternären und quaternären Formen untersucht worden sind, nämlich durch Herrn Poincaré (Journ. de l'Ecole Polyt. 1880). Die obige Form 3) liefert cubische Formen von irgend wie hoher Anzahl Variabeln und sofort eine ganzzahlige Substitution, welche sie in sich transformirt.

Die Wichtigkeit dieses Resultates wird noch dadurch erhöht, dass man über σ Fundamentalpunkten ($\sigma > 7$) unendlich viele Transformationen gegenwärtiger Art construiren kann. Stellt man nun zu jeder meine fundamentale lineare Substitution und zwar zunächst nur die unvollständige auf, so erhält man eine merkwürdige discontinuirliche Gruppe ganzzahliger linearer Substitutionen in $\sigma + 1$ homogenen Variabeln. Man erwäge, dass bisher überhaupt nur discontinuirliche Gruppen von Substitutionen in 3 Variabeln aufgestellt worden.

Schreibt man aber die vollständigen linearen Substitutionen 1) oder 2), so erhält man Gruppen von einer Art, wie sie überhaupt bisher noch nicht angetroffen worden sind. Durch die Zusammensetzung der Transformationen über den σ Fundamentalpunkten wird sich nämlich die Anzahl der Fundamentalcurven 2. Art und damit die Anzahl der Variabeln in den Substitutionen 1) fortwährend vermehren, und man erhält daher eine discontinuirliche Gruppe in einer unendlichen Anzahl von Variabeln. Dem entsprechend erhält man auch eine isomorphe Gruppe von Permutationen, welche durch diese Gruppe hervorgerufen werden, unter unendlich vielen Elementen, nämlich den σ Punkten und allen M_2^n $p = 0$, $u = 0$, welche sich über diesen σ Punkten construiren lassen.

Eine weitere Correctur ist in Folge der vorigen zu p. 13 anzugeben. Zu der dortigen Form muss $3\Sigma L_i y_i^2 - 3\Sigma y_i^3$ addirt werden. Jedoch sind die Zeilen 2 bis 7 p. 14 dann nicht auf diese neue (wirklich invariante) Form zu beziehen, sondern auf die alte Form, die aber eben aus dem in diesen Zeilen enthaltenen Grunde nicht invariant sein muss.