ÜBER DIE REDUCTIBLEN ALGEBRAISCHEN CURVEN

VON

M. NOETHER

in ERLANGEN.

Für eine *irreductible* algebraische ebene Curve

$$F(s, z) = 0,$$

von der Gesammtordnung n und dem Geschlecht p, gibt es einige fundamentale Schnittpunktsätze, welche sich auf das Verhalten dieser Curve zu ihren adjungirten Curven φ — d. h. zu den Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche jeden i-fachen Punkt von $F=0$ zum $(i-1)$-fachen Punkt haben — beziehen. Diese Sätze sind nichts anderes, als der geometrische Ausdruck für das Verhalten der zu $F=0$ gehörigen algebraischen Functionen, insbesondere bezüglich ihrer Constantenzahlen, also vor Allem der Zahl p der zugehörigen Integranden erster Gattung, deren Zähler jene Formen φ bilden. Nach den rein algebraischen Beweisen, welche sich in der Abhandlung: *Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* von Herrn BRILL und mir[1] finden, ist die Gültigkeit dieser Sätze durch irgend welche singuläre Stellen von $F=0$ in keiner Weise beschränkt, vielmehr an die *einzige* Bedingung gebunden, dass das Gebilde $F=0$ *irreductibel* sei.

Lässt man nun auch diese Bedingung fallen, so treten, wie ich im Folgenden unter Zugrundelegung der eben bezeichneten Sätze in Abschnitt I zeigen will, bei denselben nur einfache, ebenfalls fest bestimmbare Modificationen ein. Man erhält so auf der einen Seite geometrisch

---

[1] Mathematische Annalen, Bd. 7, 1873.

interessante verschiedenartige *Erweiterungen* der bisher festbegründeten Schnittpunktsätze, als deren einfachste übrigens der sogen. »CAYLEY'sche Satz» erscheint; andrerseits aber in der Zahl der adjungirten Formen φ ein *Kriterium für die Irreductibilität von* $F(s, z) = 0$, ein algebraisch wichtiges Ergebniss, auf welches bereits Herr CHRISTOFFEL aufmerksam gemacht hat.[1] Man kann, wie in I, n° 7 geschehen ist, jene Zahl unmittelbar ableiten; meine Untersuchungen gehen aber viel weiter, indem sie (n° 9—13) die ganze Structur des Systems linearer Gleichungen erforschen, auf welche die Adjunctionsbedingungen der Formen φ führen.

Die erweiterten Schnittpunktsätze verfolge ich in Abschnitt II ganz analog auch für *reductible Raumcurven.* Der speciellste der sich hierbei ergebenden Sätze ist bereits von Herrn VALENTINER mitgetheilt worden;[2] das allgemeinste Resultat dieser Betrachtung aber lässt sich dahin aussprechen, dass für die Schnittpunktbeziehungen zwei Curven einer Fläche nur dann und immer dann als specieller Fall einer irreductiblen Raumcurve anzusehen sind, wenn sie sich in noch wenigstens *einem* Punkte treffen.

I.

Ebene Curven.

1. Ich nehme zunächst an, dass die gegebene Curve n^{ter} Ordnung

$$F = 0$$

in zwei Curven

$$F^{(1)} = 0, \qquad F^{(2)} = 0,$$

bez. von den Ordnungen n_1 und n_2, wo $n_1 + n_2 = n$, zerfalle, welche sich in $n_1 n_2$ *einfachen* Punkten treffen.

Die Curve $F = 0$ hat dann diese $n_1 n_2$ Punkte zu gewöhnlichen Doppelpunkten; die zu $F = 0$ adjungirten Curven φ_{n-3}, von der $(n - 3)^{\text{ten}}$

[1] In seinem Aufsatze: *Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linear-unabhängigen Integrale erster Gattung*, Annali di Matematica, Ser. III, t. IX, p. 95.

[2] *Zur Theorie der Raumcurven*, dieses Journal, Bd. 2, p. 199.

Ordnung, müssen also durch diesen vollständigen Schnitt von $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ einfach hindurchgehen, was bekanntlich [1] zur Relation führt:

$$\varphi_{n-3} \equiv \varphi_{n_2-3} \,.\, F^{(1)} + \varphi_{n_1-3} \,.\, F^{(2)}. \tag{1}$$

In dieser Relation werden die φ_{n_1-3} zu $F^{(1)}$ adjungirte Curven φ, von der $(n_1 - 3)^{\text{ten}}$ Ordnung; die φ_{n_2-3} zu $F^{(2)}$ adjungirte Curven φ, von der $(n_2 - 3)^{\text{ten}}$ Ordnung. Es folgt also aus (1):

(A) *dass die zu F adjungirten Curven φ auch jede der beiden Theilcurven von F in denselben Punktgruppen schneiden, in welchen dieselben von den zu ihnen selbst adjungirten Curven φ getroffen werden.*

Ferner ergibt sich die Zahl der noch willkürlichen Parameter von φ_{n-3} aus (1). Es mögen die vielfachen Punkte von $F^{(1)}$ noch δ_1 Constanten von φ_{n_1-3}, die von $F^{(2)}$ noch δ_2 Constanten von φ_{n_2-3} absorbiren; so bleiben in φ_{n-3} noch

$$\frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) - \delta_1 + \frac{1}{2}(n_2 - 1)(n_2 - 2) - \delta_2$$

$$= \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \delta_1 - \delta_2 - (n_1 n_2 - 1)$$

Constanten, d. h.:

(B) *für die zu F adjungirten Curven φ stellt die Forderung, durch diejenigen $n_1 n_2$ Doppelpunkte von F zu gehen, welche die einfachen Schnittpunkte der beiden Theilcurven von F sind, nur $n_1 n_2 - 1$ linear-unabhängige Bedingungen vor.*

Man kann noch hinzufügen:

(C) *dass* **irgend eine** *der $n_1 n_2$ Bedingungen für die φ eine lineare Folge der $n_1 n_2 - 1$ übrigen Bedingungen wird.*

Denn die Curven φ_{n-3}, welche durch $n_1 n_2 - 1$ der $n_1 n_2$ Punkte gelegt werden, schneiden $F^{(1)} = 0$ in einer Gruppenschaar, unter welchen Gruppen sich nach (1) auch jedenfalls eine solche befindet, die aus dem letzten der $n_1 n_2$ Punkte, a, und aus einer von einer φ_{n_1-3} ausgeschnittenen Gruppe besteht. Diese specielle, a enthaltende Gruppe kann aus $F^{(1)} = 0$ auch durch eine zu $F^{(1)}$ adjungirte Curve $(n_2 - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden, bestehend aus jener φ_{n_1-3} und einer beliebigen Geraden

[1] Vgl. etwa meine Note *Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen* in Mathematischen Annalen, Bd. 6.

durch a, welche $F^{(1)}$ noch in $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1}$ treffen möge. Nach dem bekannten »Restsatze«[1] wird daher die ganze obige Gruppenschaar von den zu $F^{(1)}$ adjungirten durch $a_1, \ldots, a_{n_1-1}$ gehenden Curven $(n_1 - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten. Da diese aber alle die Gerade durch $a_1, \ldots, a_{n_1-1}$, welche auch durch a geht, zur Theilcurve haben, ist a in *allen* Gruppen der Schaar enthalten, wie zu bewiesen war.

Der Satz (C) ist nichts weiter, als ein specieller Fall des sogenannten »CAYLEY'schen Schnittpunktsatzes« für die durch die $n_1 n_2$ Punkte gehenden Curven r^{ter} Ordnung, nämlich für $r = n_1 + n_2 - 3$; also gerade der einzige *ausnahmslos* gültige Fall dieses Satzes.[2]

2. Die Annahme von n° 1 sei nun dahin erweitert, dass die Schnittpunkte der beiden Theilcurven n_1^{ter} und n_2^{ter} Ordnung, $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$, aus denen die gegebene Curve n^{ter} Ordnung, F, besteht, auch *vielfache* Punkte der Theilcurven sein können, ohne dass jedoch F *vielfache* Curven als Theilcurven enthielte; dass nämlich ein solcher Schnittpunkt, der α_1-facher Punkt von $F^{(1)}$ ist, zugleich α_2-facher Punkt von $F^{(2)}$ sei, wo also

$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 = n_1 n_2$$

wird.

Da die Curve F einen solchen Punkt dann zum $(\alpha_1 + \alpha_2)$-fachen Punkt hat, werden die zu F adjungirten Curven denselben zum $(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)$-fachen Punkt haben müssen. Nach dem oben citirten Satze aus Mathematischen Annalen, Bd. 6, besteht dabei die Relation (1) für die zu F adjungirten φ_{n-3} noch immer, und es werden die φ_{n_1-3} und φ_{n_2-3} zu Curven, welche auch jenen Schnittpunkt zum $(\alpha_1 - 1)$-, bez. zum $(\alpha_2 - 1)$-fachen Punkt besitzen, also zu $F^{(1)}$, bez. zu $F^{(2)}$ adjungirte Curven φ. D. h.

(A′) *der Satz* (A), n° 1, *gilt auch hier.*

Wenn ferner die *ausserhalb* der Schnittpunkte von $F^{(1)}$ mit $F^{(2)}$ liegenden vielfachen Punkte von $F^{(1)}$ noch δ_1 Constanten von φ_{n_1-3}, die

---

[1] Vgl. die in der Einleitung citirte Abhandlung, Mathematische Annalen, Bd. 7, p. 271 etc.

[2] Vgl. für den allgemeineren Satz und dessen Beweis: BACHARACH, *Über den Cayley'schen Schnittpunktsatz,* Mathematische Annalen, Bd. 26.

von $F^{(2)}$ noch δ_2 Constanten von φ_{n_2-3} absorbiren, bleiben in φ_{n-3} hier noch, wenn zugleich $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ irreductibel sind:

$$\frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) - \sum \frac{1}{2}(\alpha_1 - 1)\alpha_1 - \delta_1$$

$$+ \frac{1}{2}(n_2 - 1)(n_2 - 2) - \sum \frac{1}{2}(\alpha_2 - 1)\alpha_2 - \delta_2$$

$$= \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \delta_1 - \delta_2 - \sum \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)(\alpha_1 + \alpha_2) + 1$$

willkürliche Constanten; d. h.

(B′) *die* $\sum \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)(\alpha_1 + \alpha_2)$ *linearen Bedingungsgleichungen, welche aussagen, dass die Curven* φ_{n-3} *in den Schnittpunkten der beiden irreductiblen Curven* $F^{(1)}$ *und* $F^{(2)}$ *sich wie zu* F *adjungirte Curven verhalten, stellen für die Coefficienten der* φ_{n-3} *genau*

$$\sum \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)(\alpha_1 + \alpha_2) - 1$$

linear-unabhängige Bedingungen vor.

Dagegen gilt hier nicht mehr, dass *irgend* eine dieser Bedingungsgleichungen Folge der übrigen wird; wie in n° 3 untersucht werden wird.

Der Satz (B′) soll noch anders ausgesprochen werden. Sei das Geschlecht von $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ bez. mit p_1 und p_2 bezeichnet, so ist

$$p_1 = \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) - \delta_1 - \sum \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 - 1)$$

$$p_2 = \frac{1}{2}(n_2 - 1)(n_2 - 2) - \delta_2 - \sum \frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_2 - 1),$$

wo, nach dem Satze über die Anzahl der zu irreductiblen Curven adjungirten Curven φ, δ_1, bez. δ_2, auch die Anzahl der ausserhalb der Schnittpunkte von $F^{(1)}$ mit $F^{(2)}$ liegenden Doppelpunkte von $F^{(1)}$, bez. $F^{(2)}$, bedeutet. Definirt man jetzt das *Geschlecht* p *der reductiblen Curve* F aus der Ordnung und den Zahlen für die vielfachen Punkte von F mittels der Formel

$$p = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - (\delta_1 + \delta_2) - \sum \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 - 1),$$

so wird die *Anzahl der zu F adjungirten linear-unabhängigen Curven* φ_{n-3} *zu*

$$p_1 + p_2 = p + 1.$$

3. Indem ich dieselbe Annahme, wie in n° 2, noch einmal mache, gehe ist zunächst zu einer anderen Erweiterung von n° 1 über.

Ich betrachte hier nicht sogleich die zu F adjungirten Curven, sondern diejenigen Curven ψ_{n-3} von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche nur die zur Existenz einer Relation

$$\psi_{n-3} \equiv \psi_{n_2-3} . F^{(1)} + \psi_{n_1-3} . F^{(2)} \tag{2}$$

— wo die ψ_{n_1-3} und ψ_{n_2-3} ganze Functionen der Coordinaten werden — *nothwendigen und hinreichenden* Eigenschaften besitzen. Diese Eigenschaften beziehen sich, nach dem allgemeinen Satze, welchen ich in der oben citirten Note, Mathematische Annalen, Bd. 6, aufgestellt habe, allein auf das Verhalten der Curven ψ_{n-3} in den Schnittpunkten von $F^{(1)}$ mit $F^{(2)}$; und zwar liefert dieser Satz im Ganzen

$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 = n_1 n_2$$

lineare Bedingungsgleichungen für die Coefficienten von ψ_{n-3}, also genau ebensoviele, als ob die Schnittpunkte von $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ lauter getrennte einfache wären.

Diese Bedingungsgleichungen sind also nur ein *Theil* der in n° 2, (B′) genannten, und zwar treten in jener Nummer noch

$$\Sigma \frac{1}{2} \alpha_1(\alpha_1 - 1) + \Sigma \frac{1}{2} \alpha_2(\alpha_2 - 1)$$

Gleichungen hinzu, welche nur aussagen, dass die Curve ψ_{n_1-3} in einem Schnittpunkt von $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, der α_1-facher Punkt von $F^{(1)}$ ist, weiter einen $(\alpha_1 - 1)$-fachen Punkt erhalten soll, und das Analoge für ψ_{n_2-3}.

Für die Anzahl der in ψ_{n-3} nach (2) noch willkürlich bleibenden Constanten gilt aber genau die Betrachtung von n° 1, welche zu (B) führte; d. h.

(B″) *die* $\Sigma \alpha_1 \alpha_2 = n_1 n_2$ *Bedingungsgleichungen, welche aussagen, dass für* *die Curven* ψ_{n-3} *die Relation* (2) *besteht, stellen für die Coefficienten der* ψ_{n-3} *nur*

$$n_1 n_2 - 1$$

linear-unabhängige Bedingungen vor.

Der Satz (C) kann dagegen hier natürlich nicht mehr ohne Modification erweitert werden. Da aber (C) bei getrennter Lage der Schnittpunkte ausnahmslos gilt, so hat man nur n° 3 als Grenzfall von n° 1 aufzufassen, um die eintretende Modification sogleich zu erkennen. Wenn nämlich $\alpha_1\alpha_2$ Schnittpunkte von $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ in einen Punkt P zusammenrücken, so erhält man für ψ_{n-3} hiervon herrührend $\alpha_1\alpha_2$ Bedingungen, welche sich auf die Coefficienten der Glieder 0^{ter}, $1^{\text{ter}}, \ldots, \rho^{\text{ter}}$ Dimension von ψ_{n-3} in P vertheilen; *und die letzte der so geordneten* $\alpha_1\alpha_2$ *Bedingungen wird immer eine lineare Folge der* $n_1 n_2 - 1$ *übrigen Bedingungen.*

Der Vergleich der Sätze (B′) und (B″) ergibt daher, dass die *eine* in (B′) angegebene Beziehung zwischen den dortigen Bedingungsgleichungen nur zwischen dem Theil von $\Sigma\alpha_1\alpha_2$ Gleichungen auftritt, der auch in (B″) eingeht; während die übrigen $\frac{1}{2}\Sigma\alpha_1(\alpha_1 - 1) + \frac{1}{2}\Sigma\alpha_2(\alpha_2 - 1)$ Gleichungen in (B′) sowohl unter sich, als von den genannten $\Sigma\alpha_1\alpha_2$ Gleichungen linear-unabhängig sind.

4. Wie in n° 3 der erste Fall des Cayley'schen Satzes, $r = n_1 + n_2 - 3$, (vgl. den Schluss von n° 1) auf Curven $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ mit Schnittpunkten von vielfacher Multiplicität erweitert ist, so kann man auch für die Curven der Ordnung $r = n_1 + n_2 - 2 - h$, $\psi_{n_1+n_2-2-h}$, überhaupt nach der oben citirten Note, Mathematische Annalen, Bd. 6, den Satz aussprechen:

Für die Curven $(n_1 + n_2 - 2 - h)^{ter}$ *Ordnung liefert die Forderung, in der Form*

$$\psi_{n_1+n_2-2-h} \equiv \psi_{n_2-2-h} \cdot F^{(1)} + \psi_{n_1-2-h} \cdot F^{(2)}$$

darstellbar zu sein, bei beliebiger Multiplicität der Schnittpunkte von $F^{(1)}$ *und* $F^{(2)}$, $n_1 n_2$ *Bedingungsgleichungen, von denen aber für*

$$0 \leqq h \leqq n_1 \leqq n_2$$

nur

$$n_1 n_2 - \frac{1}{2} h(h + 1)$$

von einander linear-unabhängig sind.

Da aber schon bei einfachen Schnittpunkten nicht mehr irgend welche $\frac{1}{2}h(h+1)$ der $n_1 n_2$ Gleichungen Folge der übrigen zu sein brauchen,[1] so wird dies auch hier im Allgemeinen nicht eintreten; es ergibt sich das Verhalten nur wieder als Grenzfall des einfachen Falles.

In n° 3 und n° 4 waren die Theilcurven $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ nicht als irreductibel vorausgesetzt. Sollen die Curven $(n_1+n_2-2-h)^{\text{ter}}$ Ordnung auch noch die weitere Eigenschaft haben, zur Curve $F^{(1)}.F^{(2)}$ adjungirt zu sein, so existirt für $h>1$ kein immer gültiger Satz mehr, welcher als Erweiterung von n° 2 (B′) zu betrachten wäre.

5. In dem Satz (B′) von n° 2 war vorausgesetzt, dass die Theilcurven $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ der Curve F irreductibel seien. Wenn man also die Curve $F^{(2)}$ ersetzt durch zwei Curven $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ von den Ordnungen n_2, n_3, so gibt (B′) zunächst nur, dass zwischen den Bedingungsgleichungen (B′), die sich auf den Schnitt von $F^{(1)}$ mit der Curve $(F^{(2)}F^{(3)})$ beziehen, *mindestens eine* Relation besteht. Man kann aber jetzt die Forderung der n° 2 dahin erweitern, dass die Curven φ_{n-3} in allen gegenseitigen Schnittpunkten der *drei* Curven $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ sich zu

$$F=(F^{(1)}F^{(2)}F^{(3)})$$

adjungirt verhalten sollen.

Man hat hier nach n° 2:

$$\varphi_{n-3}\equiv\varphi_{n_2+n_3-3}\,.\,F^{(1)}+\varphi_{n_1-3}\,.\,F^{(2)}F^{(3)},$$

wo die $\varphi_{n_2+n_3-3}$ zunächst nur in den Schnittpunkten von $(F^{(2)}F^{(3)})$ mit $F^{(1)}$ zu $(F^{(2)}F^{(3)})$ adjungirt waren. Sollen nun die φ_{n-3} auch im Schnitt von $F^{(2)}$ mit $F^{(3)}$ zu F adjungirt werden, so überträgt sich diese Forderung auf die $\varphi_{n_2+n_3-3}$.

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn erstens gar kein weiterer Schnittpunkt von $F^{(2)}$ mit $F^{(3)}$ ausserhalb der schon betrachteten Schnittpunkte von $F^{(1)}$ mit $(F^{(2)}F^{(3)})$ liegen sollte, so entsteht auch keine weitere Bedingungsgleichung für die $\varphi_{n_2+n_3-3}$. Wenn zweitens solche weiteren Schnittpunkte existiren, so liefert dies eine Anzahl weiterer Bedingungsgleichungen für die $\varphi_{n_2+n_3-3}$, von denen nach n° 2 und n° 3 wieder

[1] Die genaue Bestimmung findet sich in der oben cit. Abhandlung von H. Bacharach.

wenigstens eine eine lineare Folge aller für die $\varphi_{n_2+n_3-3}$ gegebenen übrigen Bedingungsgleichungen wird.

Nach Erfüllung dieser Bedingungsgleichungen schreibt sich nun, da für $\varphi_{n_2+n_3-3}$ in Bezug auf $F^{(2)}$ und $F^{(3)}$ die Form gilt

$$\varphi_{n_2+n_3-3} \equiv \varphi_{n_3-3} \,.\, F^{(2)} + \varphi_{n_2-3} \,.\, F^{(3)},$$

φ_{n-3} in der Form:

$$\varphi_{n-3} \equiv \varphi_{n_1-3} \,.\, F^{(2)}F^{(3)} + \varphi_{n_2-3} \,.\, F^{(1)}F^{(3)} + \varphi_{n_3-3} \,.\, F^{(1)}F^{(2)},$$

wo die φ_{n_i-3} nur die Bedingung zu erfüllen haben, zu $F^{(i)}$ adjungirt zu sein. Waren also $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ *irreductible* Curven, so bleiben in φ_{n-3} noch

$$\frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) + \frac{1}{2}(n_2 - 1)(n_2 - 2) + \frac{1}{2}(n_3 - 1)(n_3 - 2)$$

$$- \frac{1}{2}\Sigma\alpha_1(\alpha_1 - 1) - \frac{1}{2}\Sigma\alpha_2(\alpha_2 - 1) - \frac{1}{2}\Sigma\alpha_3(\alpha_3 - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \frac{1}{2}\Sigma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1) + 2$$

willkürliche Constanten. Dabei beziehen sich die Summen auf alle Punkte der Curven $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$, die für dieselben zugleich bez. α_1-, α_2-, α_3-fach sind, wo aber eine oder zwei der Zahlen α auch $= 0$ sein können; wo also:

$$\Sigma\alpha_2\alpha_3 = n_2n_3, \qquad \Sigma\alpha_1\alpha_3 = n_1n_3, \qquad \Sigma\alpha_1\alpha_2 = n_1n_2.$$

D. h.

(B‴) *Die* $\frac{1}{2}\Sigma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1)$ *Bedingungsgleichungen für die* φ_{n-3}, *welche aussagen, dass diese Curven zu der aus drei irreductiblen Curven bestehenden Curve* F *adjungirt seien, stellen genau*

$$\frac{1}{2}\Sigma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1) - 2$$

linear-unabhängige Bedingungen für die φ_{n-3} *vor.*

Da somit nur *zwei* der Gleichungen lineare Folge der übrigen werden, so bestimmen sich auch die oben unterschiedenen beiden Fälle genauer:

(C‴) *Die Forderung für die* φ_{n-3}, *in den Schnittpunkten von* $F^{(1)}$ *mit*

$(F^{(2)}F^{(3)})$ *sich zu* $F = (F^{(1)}F^{(2)}F^{(3)})$ *adjungirt zu verhalten, liefert ein System von Gleichungen, zwischen welchen, wenn* $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ *irreductibel sind,* ***eine*** *oder* ***zwei*** *lineare Relationen bestehen, je nachdem die Curven* $F^{(2)}$ *und* $F^{(3)}$ *sich* ***ausserhalb*** *des Schnittes von* $F^{(1)}$ *mit* $(F^{(2)}F^{(3)})$ *noch* ***weiter*** *schneiden oder* ***nicht.*** *Im ersteren Falle besteht zwischen diesen Gleichungen und den Gleichungen, welche aussagen, dass* φ_{n-3} *auch in dem weiteren Schnitt von* $F^{(2)}$ *mit* $F^{(3)}$ *zu* F *adjungirt sei, noch* ***eine*** *weitere Relation.*

Waren $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ nicht alle irreductibel, so könnten *mehr als zwei* Relationen zwischen den Bedingungsgleichungen entstehen.

Definirt man wieder das Geschlecht von F durch

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\Sigma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1)$$

so wird, wenn mit p_1, p_2, p_3 das Geschlecht bez. der irreductiblen Curven $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ bezeichnet wird:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 - 2.$$

6. Ich werde jetzt auch n° 3 auf 3 Curven $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ der Ordnungen n_1, n_2, n_3, erweitern, um zu zeigen, dass die in n° 5 aufgefundenen beiden Relationen auch schon zwischen einem gewissen *Theil* der Gleichungen von n° 5 bestehen; wodurch sich übrigens nochmals ein Beweis der Sätze von n° 5 ergibt. Hierbei können $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ zunächst auch reductibel sein.

Wenn man den Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, ψ_{n-3}, nur die Bedingung auferlegen will, in der Form

$$\psi_{n-3} \equiv \psi_{n_1-3} \, . \, F^{(2)}F^{(3)} + \psi_{n_2-3} \, . \, F^{(1)}F^{(3)} + \psi_{n_3-3} \, . \, F^{(1)}F^{(2)}$$

darstellbar zu sein, wo die ψ_{n_i-3} beliebige ganze Functionen $(n_i - 3)^{\text{ter}}$ Dimension sein dürfen, so hat man ψ_{n-3} zunächst in die Form zu setzen

$$\psi_{n-3} \equiv \psi_{n_1-3} \, . \, F^{(2)}F^{(3)} + \psi_{n_2+n_3-3} \, . \, F^{(1)},$$

was nach n° 3 im Ganzen $n_1(n_2 + n_3)$ Bedingungsgleichungen liefert, zwischen welchen genau *eine* lineare Relation besteht. Sodann hat man noch $\psi_{n_2+n_3-3}$ in die Form zu setzen:

$$\psi_{n_2+n_3-3} \equiv \psi_{n_2-3} \, . \, F^{(3)} + \psi_{n_3-3} \, . \, F^{(2)},$$

was nach n° 3 wiederum $n_2 n_3$ Gleichungen mit *einer* linearen Relation liefert.

Um nun von hier den Übergang auf die Forderung von n° 5 zu machen, hat man den Curven ψ_{n_i-3} nur noch die weiteren Bedingungen aufzuerlegen, bez. zu $F^{(i)}$ adjungirt zu sein. Dies letztere führt aber, sobald $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ irreductibel sind, zu ebensovielen linear-unabhängigen Bedingungen, als Bedingungsgleichungen; wodurch der Satz (B''') von n° 5 von Neuem bewiesen ist. Aber während in dieser Nummer die beiden angeführten Schritte zu *je einer* Relation führen, wird, wenn die Schnittpunkte von $F^{(2)}$ und $F^{(3)}$ *alle* in die Schnittpunkte von $F^{(1)}$ mit $(F^{(2)}F^{(3)})$ hineinfallen, der zweite Schritt von n° 6 durch die in n° 5 verlangte Bedingung, dass die $\psi_{n_2+n_3-3}$ in diesen letzteren Punkten zu F adjungirt seien, ersetzt. Dies gibt den Satz (C''').

7. Den Satz (B''') von n° 5 kann man unmittelbar auf den Fall ausdehnen, dass die gegebene Curve n^{ter} Ordnung, F, in s *irreductible* Curven

$$F^{(1)},\ F^{(2)},\ \ldots,\ F^{(s)},$$

bez. der Ordnungen $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_s$, zerfällt.

Die Ordnungen der Vielfachheit desselben Punktes für die verschiedenen Curven $F^{(i)}$ bezeichne ich bez. mit $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$; wobei auch irgend welche dieser Zahlen $= 0$ sein können. Die Summenzeichen in den nachfolgenden Formeln beziehen sich auf *alle* Punkte von $F^{(1)}, \ldots, F^{(s)}$, so dass

$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 = n_1 n_2, \quad \ldots, \quad \Sigma \alpha_{s-1} \alpha_s = n_{s-1} n_s.$$

Die Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche zu

$$F = (F^{(1)} F^{(2)} \ldots F^{(s)})$$

adjungirt sind, also jeden Punkt, der α_i-facher Punkt von $F^{(i)}$ ist $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$, zum $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s - 1)$-fachen Punkt haben, lassen sich in die Form setzen:

$$(3) \qquad \varphi_{n-3} \equiv \varphi_{n_1-3} \cdot \frac{F}{F_1} + \varphi_{n_2-3} \cdot \frac{F}{F_2} + \cdots + \varphi_{n_s-3} \cdot \frac{F}{F_s},$$

wo φ_{n_i-3} eine zu $F^{(i)}$ adjungirte Curve $(n_i - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung vorstellt. Denn sie sind zunächst von der Form

$$\varphi_{n_1-3}\cdot\frac{F}{F_1}+\varphi_{n_2+n_3+\ldots+n_s-3}\cdot F_1,$$

wo φ_{n_1-3} zu F_1, $\varphi_{n_2+\ldots+n_s-3}$ zu $\frac{F}{F_1}\equiv(F_2F_3\ldots F_s)$ adjungirt sind; die letzteren wieder von der Form

$$\varphi_{n_2+n_3+\ldots+n_s-3}=\varphi_{n_2-3}\cdot\frac{F}{F_1F_2}+\varphi_{n_3+\ldots+n_s-3}\cdot F_2$$

etc. etc.

Nun existiren in (3) noch

$$\frac{1}{2}(n_1-1)(n_2-2)-\frac{1}{2}\Sigma\alpha_1(\alpha_1-1)+\frac{1}{2}(n_2-1)(n_2-2)-\frac{1}{2}\Sigma\alpha_2(\alpha_2-1)$$
$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{2}(n_s-1)(n_s-2)-\frac{1}{2}\Sigma\alpha_s(\alpha_s-1)$$
$$=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\frac{1}{2}\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s)(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s-1)+s-1$$

willkürliche Constanten; d. h.

($\mathrm{B^{IV}}$) *die*

$$k=\frac{1}{2}\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s)(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s-1)$$

Bedingungsgleichungen für die φ_{n-3}, welche aussagen, dass diese Curven zu der aus s irreductiblen Curven bestehenden Curve F adjungirt seien, stellen genau

$$k-s+1$$

linear-unabhängige Bedingungen für die φ_{n-3} vor.

Oder es wird, wenn man die Geschlechtszahlen von F, $F^{(i)}$ durch

$$p=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-k,$$

$$p_i=\frac{1}{2}(n_i-1)(n_i-2)-\frac{1}{2}\Sigma\alpha_i(\alpha_i-1)$$

definirt, die Zahl der zu F adjungirten linear-unabhängigen Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung [1]

$$= p_1 + p_2 + \ldots + p_s = p + s - 1.$$

Würden $F^{(1)}, \ldots, F^{(s)}$ nicht an die Bedingung der Irreductibilität gebunden, so könnte die Zahl der unabhängigen Bedingungen für φ_{n_i-3}, zu $F^{(i)}$ adjungirt zu sein, eine kleinere werden, als $\frac{1}{2}\Sigma\alpha_i(\alpha_i - 1)$, also könnten die k Gleichungen von (B^{IV}) dann auch weniger als $k - s + 1$ linear-unabhängige vorstellen.

8. Der Satz von n° 7, in welchem nur vorausgesetzt ist, dass F keinen *mehrfachen* Factor hat, kann als ein *Kriterium der Irreductibilität* für die gegebene Curve F dienen. Denn aus der gegebenen Gleichung $F = 0$ kann man durch nur rationale Operationen sowohl die oben definirte Zahl p, als die Zahl $p + s - 1$ der zu F adjungirten Curven φ_{n-3} finden; [2] also auch s. Den Fall mit mehrfachen Factoren kann man aber auf den hier vorausgesetzten einfach zurückführen.

9. Der »*Riemann-Roch'sche Satz*» für eine irreductible Curve F, von der Ordnung n und Geschlecht p — nach welchem eine auf F liegende lineare Schaar von Gruppen von je Q Punkten eine Mannigfaltigkeit $q = Q - p + r + 1$ hat, wenn $r + 1$ linear-unabhängige zu F adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch jede Gruppe der Schaar gehen (auch für $r = -1$ gültig) — lässt sich auch auf die reductible Curve $F \equiv (F^{(1)} \ldots F^{(s)})$ von n° 7 erweitern.

Jede der ∞^{p+s-2} zu F adjungirten Curven φ_{n-3} schneidet die Curve $F = 0$, wenn man von den unendlich viele Punkte, nämlich Theilcurven von F, enthaltenden Gruppen absieht, in einem System von s Theilgruppen von je $2p_i - 2$ Punkten, also in einem System von

$$2(p_1 - 1) + 2(p_2 - 1) + \ldots + 2(p_s - 1) = 2p - 2$$

Punkten. Aber die ganze Schaar dieser Gruppensysteme erhält man, indem man aus jeder der s linearen ∞^{p_i-1}-Theilschaaren je *eine* Gruppe

[1] Diesen Satz hat H. Christoffel in der in der Einleitung citirten Arbeit entwickelt.

[2] Siehe meine Abhandlung: *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen,* Mathematische Annalen, Bd. 23.

nimmt; die Systemschaar selbst ist also *nicht* linear und hat nur die Mannigfaltigkeit

$$(p_1 - 1) + (p_2 - 1) + \dots + (p_s - 1) = p - 1.$$

Es möge eine zu F adjungirte φ_{n-3} die Curven $F^{(1)}, \dots, F^{(s)}$ in Punktgruppen von bez. $2p_1 - 2, \dots, 2p_s - 2$ Punkten treffen, welche man alle in je zwei Theile, von bez.

$$Q_1 \text{ und } R_1, \quad \dots, \quad Q_s \text{ und } R_s$$

Punkten getheilt habe; so dass

$$Q_i + R_i = 2p_i - 2.$$

Die Gesammtheit der Curven φ_{n-3}, an Zahl ∞^q, welche durch $R_1, R_2, \dots, R_s$ gelegt werden, mögen ferner $F^{(i)}$ in einer ∞^{q_i}-Schaar von Gruppen von je Q_i Punkten treffen; die Curven φ_{n-3}, an Zahl ∞^r, welche durch $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ gelegt werden, ebenso $F^{(i)}$ in einer ∞^{r_i}-Schaar von Gruppen von je R_i Punkten treffen. Aber die Curven φ_{n-3} treffen, nach Gleichung (3), die Theilcurve $F^{(i)}$ so wie die zu $F^{(i)}$ adjungirten Curven φ_{n_i-3}; daher gibt der genannte Riemann-Roch'sche Satz für die $F^{(i)}$:

$$q_i = Q_i - p_i + r_i + 1,$$

oder

$$Q_i - R_i = 2(q_i - r_i).$$

Ferner sind nach (3):

$$q + 1 = (q_1 + 1) + (q_2 + 1) + \dots + (q_s + 1),$$

$$r + 1 = (r_1 + 1) + (r_2 + 1) + \dots + (r_s + 1);$$

somit, indem man

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_s = Q,$$

$$R_1 + R_2 + \dots + R_s = R$$

also

$$Q + R = 2p - 2$$

setzt:

$$Q - R = 2(q - r)$$

$$q = Q - p + r + 1.$$

Dies ist genau die Form, welche der RIEMANN-ROCH'sche Satz auch für $s = 1$ hat; nur beziehen sich hier q und r auf die adjungirten Curven φ_{n-3}, nicht auf die Mannigfaltigkeit der von denselben ausgeschnittenen Punktsysteme. Diese Mannigfaltigkeit ergibt sich, wenn nur die aus einer *endlichen* Zahl von Punkten bestehenden Systeme beachtet werden sollen, bez. zu

$$q - s + 1 = q', \qquad r - s + 1 = r',$$

und auch dafür gilt:

$$q' = Q - p + r' + 1.$$

10. Um die gegenseitige Abhängigkeit der k linearen Gleichungen von (B^{IV}), n° 7, vollständiger zu erforschen, mögen nun auch die Betrachtungen von n° 3 und n° 6 auf eine aus s Curven

$$F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(s)},$$

welche auch reductibel sein dürfen, bestehende Curve F ausgedehnt werden.

Sollen die Curven ψ_{n-3}, von der $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die Form annehmen:

$$\psi_{n-3} \equiv \psi_{n_1-3} \cdot \frac{F}{F^{(1)}} + \psi_{n_2-3} \cdot \frac{F}{F^{(2)}} + \ldots + \psi_{n_s-3} \cdot \frac{F}{F^{(s)}},$$

so hat man nur die Bedingungen aufzustellen, dass der Reihe nach die Gleichungen stattfinden:

$$\psi_{n-3} = \psi_{n_1-3} \cdot F^{(2)}F^{(3)} \ldots F^{(s)} + \psi_{n_2+n_3+\ldots+n_s-3} \cdot F^{(1)},$$

$$\psi_{n_2+\ldots+n_s-3} = \psi_{n_2-3} \cdot F^{(3)}F^{(4)} \ldots F^{(s)} + \psi_{n_3+n_4+\ldots+n_s-3} \cdot F^{(2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_{n_{s-1}+n_s-3} = \psi_{n_s-3} \cdot F^{(s)} \qquad\qquad + \psi_{n_s-3} \cdot F^{(s-1)}.$$

Diese $s - 1$ Schritte führen der Reihe nach zu

$$n_1(n_2 + n_3 + \ldots + n_s),\ n_2(n_3 + n_4 + \ldots + n_s),\ \ldots,\ n_{s-1}n_s$$

Bedingungsgleichungen; und zwischen den Gleichungen *jedes* dieser $s-1$ Systeme herrscht immer *eine* Relation. Nach n° 3 sind ferner, wenn man in einem System die auf einen *beliebigen* Schnittpunkt bezüglichen Gleichungen weglässt, die übrigbleibenden Gleichungen des Systems linear-unabhängig.

Die $s-1$ Relationen in (B^{IV}), n° 7, treten also schon bei den hier angegebenen $\Sigma n_i n_k$ $(k > i)$ Gleichungen auf; und zwar je eine in jedem der $s-1$ Systeme. Die in (B^{IV}) noch hinzutretenden Gleichungen, welche aussagen, dass die ψ_{n_i-3} bez. zu $F^{(i)}$ adjungirt seien, führen bei irreductiblen $F^{(i)}$ keine neuen Relationen zwischen allen Gleichungen ein. Aber die zu einer Reihe von Systemen hinzugesetzten Adjunctionsbedingungen können bewirken, dass die Gleichungen eines *folgenden* Systems schon identisch befriedigt sind; dann nämlich, wenn dieses folgende System sich nur auf Schnittpunkte bezieht, welche in die Schnittpunkte der vorhergehenden Systeme hineinfallen.

Man schliesst hieraus: *zwischen denjenigen Gleichungen von* (B^{IV}), n° 7, *welche aussagen, dass die* φ_{n-3} *in den Schnittpunkten* (S) *von*

$$\begin{array}{lll} F^{(1)} & \text{mit} & (F^{(2)}F^{(3)} \quad \ldots F^{(s)}), \\ F^{(2)} & \text{mit} & (F^{(3)}F^{(4)} \quad \ldots F^{(s)}), \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F^{(h)} & \text{mit} & (F^{(h+1)}F^{(h+2)} \ldots F^{(s)}) \end{array}$$

zu F *adjungirt sein sollen, finden* $h+\alpha$ *lineare Relationen statt, wenn es unter den* $s-h-1$ *weiteren Schnittpunktsystemen von*

$$\begin{array}{lll} F^{(h+1)} & \text{mit} & (F^{(h+2)} \ldots F^{(s)}), \\ F^{(h+2)} & \text{mit} & (F^{(h+3)} \ldots F^{(s)}), \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F^{(s-1)} & \text{mit} & F^{(s)} \end{array}$$

α *Systeme gibt, deren Schnittpunkte alle in die Punkte* (S) *hineinfallen.*

11. Die im Vorhergehenden ermittelte Gruppirung wird noch etwas übersichtlicher, wenn man sich eines einfachen Satzes bedient, den man der *Analysis situs* zurechnen kann.

Ich führe die *Definition* ein: Theilt man ein System Σ von Curven in zwei Systeme Σ_0 und Σ', so soll Σ' *nicht zerfallend bezüglich* Σ_0 genannt werden, wenn Σ' sich nicht selbst wieder in zwei derartige Systeme Σ'_1 und Σ'_2 zerlegen lässt, dass alle Schnittpunkte von Σ'_1 mit Σ'_2 in die von Σ_0 mit $\Sigma' = (\Sigma'_1\Sigma'_2)$ hineinfallen. Existiren aber solche zwei Systeme Σ'_1 und Σ'_2, so soll Σ' als *bezüglich* Σ_0 *zerfallend*, Σ'_1 als *unzusammenhängend* mit Σ'_2 bez. Σ_0 bezeichnet werden.

Man hat dann den Satz:

Ein System Σ bestehe aus t Curven, welche man in beliebiger Weise in eine Reihenfolge

$$C_1, \quad C_2, \quad . \; . \; . \; . \; , \quad C_t$$

gebracht hat. Wenn man nun alle diejenigen Systeme nimmt, in welche $(C_2C_3\ldots C_t)$ bez. C_1 zerfällt (so dass also diese Systeme *unter einander* bezüglich C_1 unzusammenhängend sind, jedes für sich aber bez. C_1 nicht mehr zerfällt); sodann alle von den schon erhaltenen verschiedenen Systeme, in welche $(C_3C_4\ldots C_t)$ bez. (C_1C_2) zerfällt; sodann alle von den vorher schon gezählten verschiedenen Systeme, in welche $(C_4C_5\ldots C_t)$ bez. $(C_1C_2C_3)$ zerfällt; etc.; so erhält man im Ganzen immer genau $t-1$ von einander verschiedene Systeme aus Σ, oder besser t solche, wenn man Σ selbst mitzählt.

Zum Beweise braucht man nur zu bemerken, dass diese letzteren Systeme bestehen:

1) aus dem *einen* System Σ;

2) aus denjenigen Systemen, in welche $(C_2C_3\ldots C_t)$ direkt zerfällt und denen, welche aus $(C_2C_3\ldots C_t)$ durch successive Wegnahme von $C_2, C_3, \ldots, C_{t-1}$ nach dem im Satze angegebenen Processe erhalten werden, wenn man die auf C_1 fallenden Schnittpunkte der Curven $C_2, \ldots, C_t$ als gar nicht vorhanden betrachtet.

Diese Systeme 2) bestehen nun wieder:

1') aus *einem* der Systeme, in die $(C_2C_3\ldots C_t)$ in 2) direkt zerfiel; nämlich dem, in welchem C_2 vorkommt;

2') aus den Systemen, in welche $(C_3C_4\ldots C_t)$ direkt zerfällt und den Systemen, welche aus $(C_3C_4\ldots C_t)$ durch successive Wegnahme von

$C_3, C_4, \ldots, C_{t-1}$ erhalten werden, wenn man hier die auf C_1 und C_2 fallenden Schnittpunkte der Curven $C_3, C_4, \ldots, C_t$ ganz ausser Acht lässt.

Die Fortsetzung dieses Schlusses auf 2') etc. liefert also unmittelbar den Satz. Man sieht sogar, dass man aus Σ auf die im Satze angegebene Weise immer t verschiedene Systeme erhält, wenn man in $\Sigma = (C_1 C_2 \ldots C_t)$ irgend einen in festangenommenen Punkten befindlichen Theil der Schnittpunkte von $C_1, C_2, \ldots, C_t$, z. B. alle auf einer gegebenen Curve C_0 befindlichen, als nicht vorhanden ansieht; nur muss die Definition des »Zerfallens» dementsprechend gegeben und es müssen die verschiedenen Systeme, in die dann Σ direkt zerfallen könnte, mitgezählt werden.

12. Mit der Definition von n° 11 spricht sich der Satz von n° 10 so aus:

Zwischen den Gleichungen, welche aussagen, dass die φ_{n-3} in den gegenseitigen Schnittpunkten der Curven des Systems

$$(F^{(1)} F^{(2)} \ldots F^{(h)})$$

und in den Schnittpunkten dieses Systems mit den Curven des Systems

$$(F^{(h+1)} F^{(h+2)} \ldots F^{(s)})$$

zu F adjungirt sein sollen, finden $h - 1 + \beta$ lineare Relationen statt, wenn das zweite System bezüglich des ersten in β (gegenseitig unzusammenhängende, für sich aber nicht mehr zerfallende) Systeme zerfällt.

13. Dieser Satz lässt nun nach n° 7, n° 10 und n° 11 eine Erweiterung zu.

Nach n° 10 leitet man, wenn man in

$$\Sigma = (F^{(1)} F^{(2)} \ldots F^{(s)}),$$

erst die Eintheilung

$$\Sigma_1 = (F^{(1)} F^{(2)} \ldots F^{(h)}), \qquad \Sigma_2 = (F^{(h+1)} F^{(h+2)} \ldots F^{(s)})$$

vornimmt, aus Σ_2 in Bezug auf Σ_1 noch $s - h$ verschiedene Systeme, und aus Σ_1 in Bezug auf Σ_2 noch h verschiedene Systeme ab. Ferner hat man auch, um die Gleichung für die ψ_{n-3} in n° 10 herzustellen, zuerst eine Reihe von Gleichungen mit *einer* Relation, damit ψ_{n-3} von der Form wird:

$$\psi_{n-3} = \psi_{n_{h+1}+\ldots+n_s-3} \, . \, F^{(1)} \ldots F^{(h)} + \psi_{n_1+\ldots+n_h-3} \, . \, F^{(h+1)} \ldots F^{(s)};$$

sodann wieder eine Reihe von Gleichungen mit *einer* Relation, damit wird:

$$\psi_{n_{h+1}+\dots+n_s-3} = \psi_{n_{h+2}+\dots+n_s-3} \cdot F^{(h+1)} + \psi_{n_{h+1}} \cdot F^{(h+2)} \dots F^{(s)};$$

etc. Nimmt man noch die Gleichungen für die Adjunction der φ_{n-3} hinzu, so ergibt sich genau wie in n° 10 und n° 12 der allgemeinere Satz:

Zwischen dem Theil der Gleichungen von (B^{IV}), *n° 7, welcher aussagt, dass die φ_{n-3} in den Schnittpunkten der Curven des Systems*

$$\Sigma_1 = (F^{(1)}F^{(2)} \dots F^{(h)})$$

mit den Curven des Systems

$$\Sigma_2 = (F^{(h+1)}F^{(h+2)} \dots F^{(s)})$$

zu F adjungirt sein sollen, finden $\lambda + \mu - 1$ lineare Relationen statt, wenn Σ_2 bezüglich Σ_1 direkt in λ und zugleich Σ_1 bezüglich Σ_2 direkt in μ Systeme zerfällt.

14. Vermöge n° 4 kann der *erste* Theil von n° 10 auch auf die Curven ψ_{n-2-h}, von einer Ordnung $n-2-h < n-3$, erweitert werden:

Sollen die Curven $(n-2-h)^{ter}$ Ordnung, ψ_{n-2-h}, die Form annehmen:

$$\psi_{n-2-h} \equiv \psi_{n_1-2-h} \cdot \frac{F}{F^{(1)}} + \psi_{n_2-2-h} \cdot \frac{F}{F^{(2)}} + \dots + \psi_{n_s-2-h} \cdot \frac{F}{F^{(s)}},$$

so erhält man hierfür bei beliebiger Multiplicität der Schnittpunkte der Curven $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(s)}$ wie in n° 10 $s-1$ Systeme von bez.

$$n_1(n_2 + \dots + n_s), \qquad n_2(n_3 + \dots + n_s), \quad \dots, \quad n_{s-1}n_s$$

Gleichungen, und in jedem dieser Systeme herrschen, für

$$0 \leqq h \leqq n_1 \leqq n_2 \leqq \dots \leqq n_s$$

noch je $\frac{1}{2}h(h+1)$ lineare Relationen. Auch gibt es noch andere Eintheilungen der Gleichungen in Systeme mit je $\frac{1}{2}h(h+1)$ Relationen; immer aber erhält man im Ganzen $\sum_{k>i} n_i n_k$ Gleichungen mit

$$\frac{1}{2}h(h+1)(s-1)$$

linearen Relationen.

Für $h > n_1$ kann man analoge Sätze, mit modificirter Anzahl der Relationen, aussprechen.

Auf adjungirte Curven $(n - 2 - h)^{\text{ter}}$ Ordnung, $h > 1$, ist dieser Satz nicht allgemein zu erweitern.

II.

Raumcurven.

15. Für eine irreductible *Raumcurve* R_{n_1}, von der Ordnung n_1 und dem Geschlecht p_1, welche immer ohne wirkliche vielfache Punkte gedacht sei, erhält man eine lineare Vollschaar von Punktgruppen bekanntlich [1] auf folgende Weise:

Man lege durch R_{n_1} zwei Flächen μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung, F_μ und F_ν, welche sich noch in einer einfachen Restcurve R_{n_2}, von der n_2^{ten} Ordnung, wo

$$n_1 + n_2 = \mu\nu,$$

schneiden mögen; die durch R_{n_2} gehenden Flächen heissen dann »*zu R_{n_1} adjungirt*». Die zu R_{n_1} adjungirten Flächen *einer* Ordnung ρ schneiden aus R_{n_1} *Vollschaaren* aus; um also auf R_{n_1} die ganze zu einer Gruppe G_Q von Q Punkten corresiduale lineare Schaar von Gruppen von je Q Punkten zu erhalten, hat man nur eine zu R_{n_1} adjungirte Fläche ρ^{ter} Ordnung durch G_Q zu legen, deren Restschnitt $G_{Q'}$ auf R_{n_1} zu suchen und R_{n_1} dann mit allen durch $G_{Q'}$ gehenden zu R_{n_1} adjungirten Flächen ρ^{ter} Ordnung zu schneiden.

Insbesondere erhält man auf R_{n_1} die ∞^{p_1-1}-Schaar von Gruppen von je $2p_1 - 2$ Punkten (deren entsprechende Schaar auf einer der R_{n_1} eindeutig entsprechenden ebenen Curve C_n von der n^{ten} Ordnung, durch die zu C_n adjungirten Curven $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung, φ_{n-3}, ausgeschnitten wird), indem man R_{n_1} durch die zu R_{n_1} adjungirten Flächen $\varphi_{\mu+\nu-4}$, von der $(\mu + \nu - 4)^{\text{ten}}$ Ordnung, schneidet.

[1] S. meine Abhandlung: *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde.* 2^{ter} Aufsatz. Mathematische Annalen, Bd. 8.

16. Die in n° 15 definirten Flächen χ_ρ, von der ρ^{ten} Ordnung, welche zur Raumcurve R_{n_1} adjungirt sein sollen, kann man bezüglich des beweglichen Schnittes mit R_{n_1} noch durch andere Flächen ersetzen:

Wenn R_{n_1}, R_{n_2} zusammen den vollständigen Schnitt der beiden Flächen F_μ und F_ν bilden, so treffen die Flächen ψ_ρ, von der ρ^{ten} Ordnung, welche nur der Bedingung genügen, durch die t Schnittpunkte von R_{n_2} mit R_{n_1} zu gehen, die Curve R_{n_1} in derselben Vollschaar von Punktgruppen, wie die zu R_{n_1} adjungirten (durch R_{n_2} gehenden) Flächen χ_ρ.

In der That bilden die Flächen χ_ρ selbst einen *Theil* der Flächen ψ_ρ; aber da die χ_ρ die Curve R_{n_1} schon in einer Vollschaar schneiden, können die ψ_ρ die Curve R_{n_1} nicht in einer beweglichen Gruppenschaar von grösserer Mannigfaltigkeit treffen; es wird nur unter den ψ_ρ ein grösserer Theil durch die ganze Curve R_{n_1} selbst gehen, als unter den χ_ρ.

Dies lässt sich, nach demselben Schlusse, noch erweitern: Der vollständige Schnitt von F_μ und F_ν bestehe aus s Curven $R_{n_1}, R_{n_2}, \ldots, R_{n_s}$; alsdann wird die Raumcurve R_{n_1} von denjenigen Flächen ψ_ρ der ρ^{ten} Ordnung, welche durch die t_1 Schnittpunkte von

$$R_{n_1} \quad \text{mit} \quad (R_{n_2} . R_{n_3} \ldots R_{n_s}),$$

und durch irgend einen Theil der weiteren gegenseitigen Schnittpunkte der Curven des Systems

$$(R_{n_2} . R_{n_3} \ldots R_{n_s})$$

gehen, in derselben Vollschaar getroffen, wie von den zu R_{n_1} adjungirten (also durch R_{n_2}, $R_{n_3} \ldots$ und R_{n_s} gehenden) Flächen ρ^{ter} Ordnung.

Wir schliessen noch daraus und aus n° 15:

Für die Flächen $\varphi_{\mu+\nu-4}$, der Ordnung $\mu + \nu - 4$, welche durch die t_1 Schnittpunkte von R_{n_1} mit den Restschnitt $(R_{n_2} R_{n_3} \ldots R_{n_s})$ von F_μ und F_ν und durch irgend einen Theil der gegenseitigen Schnittpunkte von $(R_{n_2} \ldots R_{n_s})$ oder durch irgend welche dieser Curven selbst gehen, liefert die Forderung, auch durch R_{n_1} selbst zu gehen, noch p_1 weitere von den vorhergehenden linear-unabhängige Bedingungen, wenn R_{n_1} irreductibel ist und das Geschlecht p_1 hat.

Der einfacheren Ausdrucksweise halber wurde hierbei, woran auch im Folgenden festgehalten werden soll, angenommen, dass die gegenseitigen Schnittpunkte der Curven $R_{n_1}, R_{n_2}, \ldots, R_{n_s}$ nur einfache und getrennte Punkte der Curven sein sollen.

17. Die für eine irreductible Curve bestehende Definition der Geschlechtszahl soll zunächst für eine reductible Curve hier dahin erweitert werden:

Wenn eine Raumcurve R_m, der Ordnung m, aus k Curven $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, ..., $R^{(k)}$, bez. von der Ordnung m_i und dem Geschlecht p_i, besteht, so sei immer noch, wenn h die Anzahl der *scheinbaren* Doppelpunkte von R_m bezeichnet, als *Geschlecht von* R_m die Zahl definirt:

$$p = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - h.$$

Hat $R^{(i)}$ also h_i scheinbare Doppelpunkte und treffen sich $R^{(i)}$ und $R^{(j)}$ in t_{ij} Punkten, so wird:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{1}{2}(m_i-1)(m_i-2) - h_i \\ h &= \textstyle\sum_i h_i + \sum\limits_{j>i}(m_i m_j - t_{ij}) \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,k \\ j=1,2,\ldots,k \end{pmatrix}$$

also: [1]

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_k - (k-1) + \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} t_{ij}.$$

Da die vollständige Schnittcurve zweier Flächen F_μ, F_ν das Geschlecht

$$p = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu+\nu-4) + 1$$

hat, so folgt für den Fall von n° 16, dass diese Curve aus s Curven R_{n_1}, R_{n_2}, ..., R_{n_s}, bez. vom Geschlecht p_1, ..., p_s, besteht, wobei sich R_{n_i} und R_{n_j} in t_{ij} Punkten treffen mögen:

die Gesammtzahl der gegenseitigen Schnittpunkte wird

$$t = \sum_{j>i} t_{ij} = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu+\nu-4) - \sum_i p_i + s.$$

Theilt man insbesondere das Gesammtschnittsystem von F_μ und F_ν in nur zwei Theile Σ und Σ', wo Σ die Ordnung m und das Geschlecht

[1] Man hätte auch $p - \Sigma t_{ij} = p_1 + p_2 + \ldots + p_k - (k-1)$ als das Geschlecht von R_m definiren können, in etwas grösserer Übereinstimmung mit dem Abschnitt I. Indessen scheint die obige Definition für Raumcurven hier bequemer.

p, Σ' die Ordnung m' und das Geschlecht p' hat, so hat man für die τ Schnittpunkte von Σ mit Σ' bekanntlich:

$$\tau = m(\mu + \nu - 4) - 2p + 2 = m'(\mu + \nu - 4) - 2p' + 2$$
$$= \frac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu - 4) - p - p' + 2.$$

18. Aus dem Satze von n° 16 und der Definition von n° 17 folgert man sogleich:

Besteht der Schnitt von F_μ und F_ν aus dem System $(R_{n_1} R_{n_2} \ldots R_{n_s})$ und bezeichnet p' das Geschlecht des Systems $(R_{n_2} R_{n_3} \ldots R_{n_s})$, so liefert die Forderung für die Flächen $\varphi_{\mu+\nu-4}$, durch dieses System $(R_{n_2} R_{n_3} \ldots R_{n_s})$ zu gehen

$$(n_2 + n_3 + \ldots + n_s)(\mu + \nu - 4) - p' + 1$$

linear-unabhängige Bedingungen, sobald R_{n_1} irreductibel ist.

Denn da vermöge p_1 weiterer Bedingungen die $\varphi_{\mu+\nu-4}$ durch die ganze Schnittcurve von F_μ und F_ν gehen, diese Forderung aber

$$\frac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu - 4) + 1$$

Bedingungen stellt, so wird die Zahl jener Bedingungen zu

$$\frac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu - 4) + 1 - p_1 = (n_2 + n_3 + \ldots + n_s)(\mu + \nu - 4) - p' + 1.$$

19. Ebenso leicht beweist man folgenden, dem Satze von n° 7 des I. Abschnitts analogen Satz:

Wenn der Schnitt von F_μ und F_ν aus s irreductiblen Curven R_{n_1}, R_{n_2}, ..., R_{n_s} besteht, so ist die Forderung für die Flächen $\varphi_{\mu+\nu-4}$, durch alle t gegenseitigen Schnittpunkte der Curven dieses Systems zu gehen, mit

$$t - s + 1$$

linear-unabhängigen Bedingungen äquivalent.

Denn die Curve n_i^{ter} Ordnung, R_{n_i}, habe das Geschlecht p_i, und R_{n_i} treffe R_{n_j} in t_{ij} Punkten; dann ist nach n° 17

$$t = \sum_{j>i} t_{ij} = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu - 4) - \sum_i p_i + s.$$

Sei aber A die Zahl der im Satze geforderten Bedingungen. Nach ihrer Erfüllung hat man, nach dem Satze von n° 16, noch je p_i davon unabhängige Bedingungen, wenn die $\varphi_{\mu+\nu-4}$ noch bez. durch R_{n_i} gehen sollen; und da es überhaupt $\frac{1}{2}\mu\nu(\mu+\nu-4)+1$ Bedingungen ausmacht, wenn die $\varphi_{\mu+\nu-4}$ durch das ganze System der s Curven gehen sollen, so wird

$$A+\sum_i p_i = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu+\nu-4)+1,$$

also

$$A = t - s + 1$$

(auch für $s = 1$, $t = 0$ gültig).

20. Sei insbesondere im Satze von n° 19 $s = 2$ angenommen.[1] Zwischen den t Gleichungen $[t = n_1(\mu+\nu-4)-2p_1+2]$, welche aussagen, dass die $\varphi_{\mu+\nu-4}$ durch die t Schnittpunkte der beiden irreductiblen Curven R_{n_1}, R_{n_2} gehen, die zusammen den Schnitt von F_μ mit F_ν bilden, herrscht dann *eine* und *nur eine* Relation. Aber man kann noch genauer sagen:

Jede der t Gleichungen wird eine lineare Folge der $t-1$ übrigen Gleichungen.

In der That schneiden die Flächen $\varphi_{\mu+\nu-4}$, welche durch $t-1$ der t Punkte gehen, die Curve R_{n_1} in einer Schaar von Gruppen von $2p_1-1$ Punkten. Da aber eine dieser Gruppen besteht aus $2p_1-2$ Punkten, die auch von einer zu R_{n_1} adjungirten Fläche $\varphi_{\mu+\nu-4}$ ausgeschnitten werden können, und aus dem letzten jener t Punkte, so schliesst man, indem man die R_{n_1} auf die Ebene projicirt, genau wie beim Satze (C) von n° 1 des I. Abschnitts, dass dieser letzte Punkt in *allen* Gruppen der Schaar enthalten sein muss.

Aus diesem Satze schliesst man weiter:

die Flächen der $(\mu+\nu-4)^{ten}$ Ordnung treffen R_{n_1} in einer Vollschaar von Gruppen von je $n_1(\mu+\nu-4) = 2p_1-2+t$ Punkten, nämlich mit der Mannigfaltigkeit ∞^{p_1-2+t}.

Denn erst nach Erfüllung der $t-1+p_1$ unabhängigen Bedingungen, zunächst durch die t Schnittpunkte von R_{n_2} mit R_{n_1}, dann durch p_1 will-

[1] Dieser Fall ist schon von Hrn. Valentiner ausgesprochen, wie in der Einleitung citirt ist.

kürliche Punkte von R_{n_1} zu gehen, wird die Fläche $(\mu + \nu - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung die ganze Curve R_{n_1} enthalten. Von den p_1 Punkten, die hier durch die übrigen im Schnitt von R_{n_1} mit einer Fläche $(\mu + \nu - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmt sind, ist also *einer* der durch die übrigen $t - 1$ Schnittpunkte von R_{n_1}, R_{n_2} bestimmte letzte Schnittpunkt; die $p_1 - 1$ weiteren sind als Schnittpunkte einer zu R_{n_1} adjungirten durch $p_1 - 1$ Punkte von R_{n_1} gehenden Fläche $\varphi_{\mu+\nu-4}$ bestimmt.

Für $s > 2$ gilt dieser Satz im Allgemeinen nicht mehr.

21. Auch für $s > 2$ bleibt der Beweis des Satzes bestehen: dass jede der t Gleichungen, welche aussagen, dass die $\varphi_{\mu+\nu-4}$ durch alle t Schnittpunkte der Curven $R_{n_1}, R_{n_2}, \ldots, R_{n_s}$ gehen, eine lineare Folge der $t - 1$ übrigen wird. Aber da nach n° 19 zwischen diesen t Gleichungen $s - 1$ Relationen existiren, so könnte hier jede der Gleichungen auch schon aus weniger als $t - 1$ der übrigen folgen. Dass dies in der That für $s > 2$ immer der Fall ist, ersieht man aus folgendem Satze:

Sobald im Satze von n° 19 die Zahl t_{12} der Schnittpunkte von R_{n_1} mit $R_{n_2} > 0$ ist, gehen alle Flächen $(\mu + \nu - 4)^{ter}$ Ordnung, welche durch alle Schnittpunkte von R_{n_1} mit dem System $(R_{n_3} R_{n_4} \ldots R_{n_s})$ und durch irgend $t_{12} - 1$ der Schnittpunkte von R_{n_1} mit R_{n_2} gelegt werden, auch durch den letzten dieser t_{12} Punkte. Die Forderung für die $\varphi_{\mu+\nu-4}$, durch die

$$t_1 = t_{12} + t_{13} + \ldots + t_{1s}$$

Schnittpunkte von R_{n_1} mit $(R_{n_2} R_{n_3} \ldots R_{n_s})$ zu gehen, stellt also **höchstens** *$t_1 - 1$ unabhängige Bedingungen vor.*

Die Richtigkeit des Satzes folgt genau, wie in n° 20, indem die Flächen $(\mu + \nu - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung durch irgend $t_1 - 1$ der t_1 Schnittpunkte von R_{n_1} mit $(R_{n_2} R_{n_3} \ldots R_{n_s})$ die Curve R_{n_1} wieder in einer $\infty^{p_1 - 1}$-Schaar von Gruppen von je $2p_1 - 1$ Punkten treffen müssten, wonach der t_1^{te} Punkt in allen Gruppen enthalten sein muss.

Schneiden sich nun R_{n_2} und $(R_{n_3} R_{n_4} \ldots R_{n_s})$, so kommen die auf diese Schnittpunkte bezüglichen Gleichungen unter den t_1 genannten gar nicht vor; wenn aber R_{n_2} und $(R_{n_3} R_{n_4} \ldots R_{n_s})$ sich nicht treffen, so muss $(R_{n_3} R_{n_4} \ldots R_{n_s})$ die Curve R_{n_1} treffen, $t_{13} + t_{14} + \ldots + t_{1s}$ ist also von 0 verschieden, aber schon aus den t_{12} auf den Schnitt von R_{n_1} mit R_{n_2} bezüglichen Gleichungen folgt dann, nach dem obigen auf R_{n_2} angewandten

Satze, jede aus den $t_{12} - 1$ übrigen. Jede der t Gleichungen von n° 19 folgt also für $s > 2$ immer aus weniger als $t - 1$ der übrigen Gleichungen.

22. Den Satz von n° 21 kann man zu folgendem erweitern:

Wenn der Schnitt von F_μ und F_ν irgend wie in zwei Systeme Σ und Σ' von h und $s-h$ Curven getheilt wird, so gehen alle Flächen $(\mu + \nu - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\phi_{\mu+\nu-4}$, welche durch irgend $\tau - 1$ der τ Schnittpunkte von Σ mit Σ' gelegt werden, immer auch durch den letzten dieser Schnittpunkte; so dass diese Forderung für die $\phi_{\mu+\nu-4}$ **höchstens** *$\tau - 1$ unabhängige Bedingungen liefert.*

Man kann diesen Satz einfach auf den von n° 21 zurückführen. Seien m, m' bez. die Ordnung von Σ, Σ'. Kann man nun durch das System Σ' eine Fläche ν^{ter} Ordnung, F'_ν, legen, welche die Fläche F_μ noch in einer *irreductiblen* Curve R_m schneidet, so gilt der Satz von n° 21 für den Schnitt (Σ', R_m) von F_μ mit F'_ν; d. h. alle Flächen $\phi'_{\mu+\nu-4}$, welche durch irgend $\tau - 1$ der τ Schnittpunkte von Σ' mit R_m gelegt werden, gehen immer durch den letzten dieser τ Punkte. Diese Thatsache, dass jede der τ Gleichungen aus den $\tau - 1$ übrigen folgt, bleibt bei Variation der Parameter von F'_ν hier fortbestehen; also auch wenn F'_ν in F_ν, d. h. R_m in Σ, übergeht.

Wenn aber durch Σ' keine Fläche ν^{ter} Ordnung geht, welche F_μ weiter in einer irreductiblen Curve schnitte, so lege man durch Σ' eine Fläche $F'_{\nu+\alpha}$, von genügend hoher Ordnung $\nu + \alpha$, welche F_μ ausser in Σ' in einer irreductiblen Curve $R_{m+\mu\alpha}$ treffe. Dann gehen nach n° 21 alle Flächen $\phi_{\mu+\nu+\alpha-4}$, welche durch irgend $\tau + \alpha m' - 1$ der $\tau + \alpha m'$ Schnittpunkte von Σ' mit $R_{m+\mu\alpha}$ gelegt werden, auch durch den letzten. Dies bleibt auch bei Variation der Parameter von $F'_{\nu+\alpha}$ bestehen, und gilt insbesondere dann noch, wenn man $F'_{\nu+\alpha}$ spezialisirt in $F_\nu . F_\alpha$, wo F_α eine ganze beliebige Fläche α^{ter} Ordnung vorstellt. Um so mehr gilt dies, wenn die $\phi_{\mu+\nu+\alpha-4}$ zugleich durch die ganze Schnittcurve von F_α mit F_μ gelegt werden. Für diese ist aber:

$$\phi_{\mu+\nu+\alpha-4} = \phi_{\nu+\alpha-4} . F_\mu + \phi_{\mu+\nu-4} . F_\alpha,$$

woraus folgt, dass auch die Flächen $F_\alpha . \phi_{\mu+\nu-4}$ jene Eigenschaft haben, d. h. die $\phi_{\mu+\nu-4}$ in Bezug auf den Schnitt von F_μ mit F_ν.

23. Um den Satz von n° 22 in eine bestimmtere Fassung zu bringen, hat man nur wieder die Betrachtung aus der Analysis situs anzuwenden,

welche in n° 11 des ersten Abschnitts angestellt worden ist. Und zwar kann man hier bei den Raumcurven noch einfacher definiren:

Ein System Σ von k Curven soll *nicht zerfallend* genannt werden, wenn es sich nicht in zwei einander gar nicht schneidende Systeme Σ_1 und Σ_2 zerlegen lässt. Im andern Falle heisst Σ ein *zerfallendes* System.

Besteht dann Σ aus k Curven $R_1, R_2, \ldots, R_k$ und zählt man alle nicht zerfallenden Systeme, in welche $(R_1 R_2 \ldots R_k)$ direkt zerfällt; sodann alle davon verschiedenen nicht zerfallenden Systeme, in welche $(R_2 R_3 \ldots R_k)$ zerfällt; etc.; so erhält man im Ganzen k von einander verschiedene nicht zerfallende Systeme.

24. Es möge nun zunächst der Schnitt von F_μ mit F_ν aus zwei Systemen von Curven, Σ und Σ' bestehen, und Σ selbst mag wieder in k Systeme $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ zerfallen, die einander nicht treffen. Σ_i soll Σ' in τ_i Punkten schneiden. Da das System Σ_i das Restsystem $(\Sigma', \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{i-1}, \Sigma_{i+1}, \ldots, \Sigma_k)$ in τ_i Punkten trifft, gehen nach n° 22 alle $\psi_{\mu+\nu-4}$, welche durch $\tau_i - 1$ dieser Punkte gehen, auch durch den letzten derselben; so dass man hat:

Wenn im Schnittsystem Σ, Σ' von F_μ mit F_ν das System Σ in k, einander nicht treffende, Systeme zerfällt, so ist die Forderung für die $\psi_{\mu+\nu-4}$, durch die τ Schnittpunkte von Σ' mit Σ zu gehen, mit höchstens $\tau - k$ Bedingungen äquivalent.

Jetzt zerlege man das ganze Schnittsystem von F_μ, F_ν, das aus den s irreductiblen Curven $R_{n_1}, R_{n_2}, \ldots, R_{n_s}$ besteht, in folgender Weise:

Man nehme irgend eine der Curven, R_1. Die übrigen $s - 1$ Curven mögen dadurch in die k_1 nicht zerfallenden Systeme $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{k_1}$ sich zerlegen (wo die Σ_i einander nicht schneiden). Dann herrscht zwischen den t_{11} Bedingungsgleichungen, welche aussagen, dass die Flächen $(\mu+\nu-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $\psi_{\mu+\nu-4}$, durch die t_{11} Schnittpunkte von R_1 mit Σ_1 gehen sollen, *mindestens eine* Relation, indem alle $\psi_{\mu+\nu-4}$ durch irgend $t_{11} - 1$ der t_{11} Punkte jedenfalls auch durch den letzten derselben gehen.

Sodann nehme man aus Σ_1 eine R_1 treffende Curve, R_2. Dadurch mögen die übrigen Curven von Σ_1 sich in k_2 nicht zerfallende Systeme $\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \ldots, \Sigma_{1k_2}$ zerlegen. Dann herrscht zwischen den obigen t_{11} Gleichungen und den t_{21} Gleichungen, welche aussagen, dass die $\psi_{\mu+\nu-4}$ auch durch die t_{21} Schnittpunkte von R_2 mit Σ_{11} gehen sollen, *mindestens eine weitere* Relation, indem alle $\psi_{\mu+\nu-4}$ durch die obigen t_{11} Punkte und durch irgend $t_{21} - 1$ der t_{21} Punkte durch den letzten dieser t_{21} Punkte gehen müssen.

Nun nimmt man aus Σ_{11} eine R_2 treffende Curve, R_3, wodurch die übrigen Curven von Σ_{11} sich in k_3 nicht zerfallende Systeme $\Sigma_{111}, \ldots, \Sigma_{11k_3}$ zerlegen. Dann herrscht zwischen den obigen $t_{11} + t_{21}$ Gleichungen und denjenigen, welche aussagen, dass die $\psi_{\mu+\nu-4}$ auch durch die Schnittpunkte von R_3 mit Σ_{111} gehen sollen, *mindestens eine weitere* Relation.

Indem man so fortfährt, also nach Erschöpfung von Σ_{11} zu Σ_{12}, dann zu Σ_{13}, etc., nach Erschöpfung von Σ_1 zu Σ_2, Σ_3 etc. übergeht, ergibt sich sogleich aus dem Satze von n° 23:

dass die Forderung für die $\psi_{\mu+\nu-4}$, durch alle t gegenseitigen Schnittpunkte der s irreductiblen Curven $R_{n_1}, R_{n_2}, \ldots, R_{n_s}$ zu gehen, auf t Gleichungen mit **mindestens** *$t - (s - 1)$ Relationen führt.*

Aber nach n° 19 existiren zwischen diesen t Gleichungen genau $t - s + 1$ Relationen. Daraus folgt, dass keiner der in obiger Entwicklung genannten $s - 1$ Schritte *mehr als eine* Relation mit sich führen kann.

Dasselbe Schlussverfahren kann man auf eine noch allgemeinere Zerlegung anwenden. Den Schnitt von F_μ und F_ν zerlege man erst in zwei Theile Σ und Σ', von bez. h und $s - h$ Curven; wobei Σ in k, Σ' in k' nicht zerfallende Systeme

$$(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k) \quad \text{und} \quad (\Sigma'_1, \Sigma'_2, \ldots, \Sigma'_{k'})$$

zerfallen mögen. Für die $\psi_{\mu+\nu-4}$ stelle es $\tau - \alpha$ unabhängige Bedingungen vor, durch die τ Schnittpunkte von Σ mit Σ' zu gehen, wo

$$\alpha \geqq k + k' - 1.$$

Man lege nun weiter nach dem vorhergehenden Verfahren die $\psi_{\mu+\nu-4}$ successive durch die Schnittpunkte, in welchen sich die h_1 Curven von Σ_1 treffen; dann durch die Schnittpunkte der h_2 Curven von Σ_2; etc. dann durch die der h'_1 Curven von $\Sigma'_1, \ldots,$ endlich durch die der $h'_{k'}$ Curven von $\Sigma'_{k'}$. So erhält man noch eine Reihe weiterer Gleichungen mit mindestens

$$(h_1 - 1) + (h_2 - 1) + \ldots + (h_k - 1) + (h'_1 - 1) + (h'_2 - 1) + \ldots + (h'_{k'} - 1)$$
$$= (h - k) + (s - h - k') = s - k - k'$$

weiteren Relationen. Die t Gleichungen für die $\phi_{\mu+\nu-4}$ enthalten hiernach mindestens $\alpha + s - k - k'$ Relationen, so dass also nach n° 19 α auch nicht grösser als $k + k' - 1$ werden kann.

25. Nach n° 24 hat man somit die Sätze:

Theilt man den Schnitt von F_μ und F_ν irgend wie in zwei **nicht zerfallende** *Systeme Σ und Σ', so gehen alle Flächen $(\mu + \nu - 4)^{ter}$ Ordnung, $\phi_{\mu+\nu-4}$, welche durch irgend $\tau - 1$ der τ Schnittpunkte von Σ mit Σ' gelegt werden, auch durch den letzten der τ Punkte; und diese Forderung liefert für die $\phi_{\mu+\nu-4}$ genau $\tau - 1$ linear-unabhängige Bedingungen.*

War ferner Σ' ein nicht zerfallendes, Σ aber ein in k nicht zerfallende Systeme $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ sich zerlegendes System (wo die Σ_i einander nicht treffen), so liefert die Forderung für die $\phi_{\mu+\nu-4}$, durch die τ Schnittpunkte von Σ mit Σ' zu gehen, $\tau - k$ unabhängige Bedingungen; nämlich je $\tau_i - 1$ Bedingungen für die τ_i Schnittpunkte von Σ_i mit Σ'.

Besteht sowohl Σ aus k, als Σ' aus k' nicht zerfallenden Systemen, so liefert die Forderung für die $\phi_{\mu+\nu-4}$, durch die τ Schnittpunkte von Σ mit Σ' zu gehen, $\tau - k - k' + 1$ linear-unabhängige Bedingungen.

26. Mit Hülfe des Satzes von n° 25 kann man auch den Satz von n° 18 und den zweiten von n° 20 erweitern:

Der Schnitt von F_μ und F_ν bestehe aus einer irreductiblen Curve R_{n_1}, von der Ordnung n_1 und dem Geschlecht p_1, und aus einem Restsystem Σ, das in k nicht zerfallende Systeme $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ sich zerlege; dann liefert die Forderung für die Flächen $(\mu + \nu - 4)^{ter}$ Ordnung, $\phi_{\mu+\nu-4}$, durch die Curve R_{n_1} zu gehen:

$$n_1(\mu + \nu - 4) + 1 - (p_1 + k - 1)$$

unabhängige Bedingungen. Die Flächen $(\mu + \nu - 4)^{ter}$ Ordnung treffen R_{n_1} für $k > 1$ in keiner Vollschaar, wohl aber für $k = 1$ (und auch für $k = 0$, wobei R_{n_1} die vollständige Schnittcurve von F_μ und F_ν wird und alle Flächen $(\mu + \nu - 4)^{ter}$ Ordnung schon zu R_{n_1} adjungirt sind); dagegen treffen für $k > 1$ die $\phi_{\mu+\nu-4}$, welche durch die Schnittpunkte von $k - 1$ der k Systeme $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ mit R_{n_1} gehen, diese Curve in einer Vollschaar.

Denn für die $\phi_{\mu+\nu-4}$ stellt es nach n° 25 noch $t_1 - k$ Bedingungen vor, durch die t_1 Schnittpunkte von R_{n_1} mit Σ zu gehen, wo

$$t_1 = n_1(\mu + \nu - 4) - 2p_1 + 2;$$

sodann, nach n° 16 noch p_1 weitere Bedingungen, um durch die ganze Curve R_{n_1} zu gehen; im Ganzen also $t_1 - k + p_1$, wie es der Satz aussagt. Daraus folgt weiter, dass die Flächen $(\mu + \nu - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung die Curve R_{n_1} in einer $\infty^{t_1-k+p_1-1}$-Schaar von Gruppen von je $2p_1 - 2 + t_1$ Punkten treffen; also in *keiner* Vollschaar für $k > 1$, weil eine solche $t_1 + p_1 - 2$ Parameter hat. Dagegen treffen die $\psi_{\mu+\nu-4}$, welche durch $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_k$ gelegt werden, die Curve R_{n_1} in einer $\infty^{t_{11}+p_1-2}$-Schaar von Gruppen von je $2p_1 - 2 + t_{11}$ Punkten, wenn t_{11} die Zahl der Schnittpunkte von R_{n_1} mit Σ_1 bezeichnet; also in einer Vollschaar.

27. Den Satz von n° 26 kann man endlich noch dahin erweitern:

Der Schnitt von F_μ und F_ν bestehe aus zwei beliebigen Systemen Σ und Σ'; Σ zerlege sich in k nicht zerfallende Systeme, Σ' in k' solche. Σ sei von der Ordnung m und dem Geschlecht p, Σ' von der Ordnung m' und dem Geschlecht p' (nach der Definition von n° 17). Dann liefert die Forderung für die Flächen $\psi_{\mu+\nu-4}$, durch das System Σ zu gehen,

$$m(\mu + \nu - 4) - p - k' + 2$$

unabhängige Bedingungen; und ebenso die Forderung, durch Σ' zu gehen,

$$m'(\mu + \nu - 4) - p' - k + 2$$

Bedingungen.

Man kann diesen Satz durch einen Schluss, wie in n° 22, auf den vorigen von n° 26 zurückführen; oder auch so:

Man hat für die $\psi_{\mu+\nu-4}$ zunächst $\tau - k - k' + 1$ Bedingungen, durch die τ Schnittpunkte von Σ mit Σ' zu gehen, wo

$$\tau = m(\mu + \nu - 4) - 2p + 2.$$

Sodann nehme man an, dass es noch $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ weitere Bedingungen ausmacht, durch Σ selbst zu gehen, wenn $p_1, p_2, \ldots, p_k$ bez. das Geschlecht der k Theilsysteme $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ von Σ bezeichnet; so ergeben sich im Ganzen $\tau - k - k' + 1 + \sum p_i$ Bedingungen. Aber nach n° 17 ist hier

$$\sum p_i = p + k - 1,$$

so dass man hier in der That $m(\mu + \nu - 4) - p - k' + 2$ Bedingungen erhält.

Man hat also nur noch zu zeigen, dass es nach dem Durchlegen durch die τ Schnittpunkte von Σ' mit Σ für die $\psi_{\mu+\nu-4}$ noch p_1 Bedingungen ausmachte, durch das nicht zerfallende System Σ_1 zu gehen.

Nun bestehe Σ_1 aus einer irreductiblen Curve R_0 und den übrigen Curven von Σ_1, die sich dann in k_1 nicht zerfallende Systeme $\Sigma_{11}, \ldots, \Sigma_{1k_1}$ zertheilen mögen. Das Geschlecht von $R_0, \Sigma_{11}, \ldots, \Sigma_{1k_1}$ sei bezüglich $p_{10}, p_{11}, \ldots, p_{1k_1}$. Ferner habe R_0 mit Σ_{1i} bez. τ_{1i} Schnittpunkte. Da die Systeme Σ_{1i} alle aus weniger Curven bestehen, als Σ_1, so kann man den Satz für diese Systeme Σ_{1i} als bewiesen ansehen; dann folgt aber, dass die Zahl der unabhängigen Bedingungen, damit die $\psi_{\mu+\nu-4}$ durch die τ Schnittpunkte von Σ' mit Σ und durch die

$$\tau_{11} + \tau_{12} + \ldots + \tau_{1k_1}$$

Schnittpunkte von R_0 mit $\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \ldots, \Sigma_{1k_1}$ gehen, wird zu

$$(\tau - k - k' + 1) + (\tau_{11} + \tau_{12} + \ldots + \tau_{1k_1} - k_1) + p_{10} + p_{11} + \ldots + p_{1k_1},$$

also nach n° 17 zu

$$(\tau - k - k' + 1) + p_1,$$

womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Nachschrift.

Ich benutze diese Gelegenheit zu einer Bemerkung über die o. c. wertvolle Arbeit von Herrn Valentiner *Zur Theorie der Raumcurven,* dieses Journal, Bd. 2, p. 136. Einige der meinem vorstehenden Aufsatze zu Grunde liegenden algebraischen Sätze finden sich auch in jener Arbeit. Aber während ich hier, wie in meiner Abhandlung *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven,* Abhandl. der Berliner Akad. vom Jahre 1882, mich überall auf meinen o. c. Satz *Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen,* Mathematische Annalen, Bd. 6, stütze, um ausnahmslos gültige oder genau zu begrenzende Resultate zu erhalten, geht Herr Valentiner in seinen Beweisen von der

Constantenzählung aus, welche zahlreiche, im Voraus nicht zu erkennende Ausnahmefälle zulässt, zu deren Ergründung eben jener Satz in Bd. 6 der Mathematischen Annalen von mir aufgestellt worden ist. So untersucht er in keiner Weise, ob die Σst linearen Bedingungsgleichungen, welchen er in n° 4 seine φ_n unterwirft, von einander unabhängig sind, was doch wesentliche Voraussetzung für seine Schlüsse wäre. Seine in der Einleitung gegebenen Resultate sind also nur desshalb als richtig anzusehen, weil sie von anderer Seite her bewiesen sind.

Dagegen habe ich das Bedenken, welches ich in meiner oben genannten Abhandlung gegen den Beweis von Herrn VALENTINER's Dissertation über die Minimalzahl der scheinbaren Doppelpunkte einer Raumcurve geäussert, nach der Ausführung in seiner Arbeit, n° 26, zurückzunehmen.

Erlangen, Januar 1886.