LES DÉRIVÉES PREMIÈRES ET SECONDES DU POTENTIEL

PAR

HENRIK PETRINI

À VEXIÖ.

Introduction.

L'équation de POISSON

$$\varDelta V = -4\pi\varrho,$$

où V désigne le potentiel Newtonien dans le point $P(x, y, z)$ d'une masse à trois dimensions dont la densité en ce même point est égale à ϱ, a été déduite par POISSON en 1813 sous la condition que la densité est constante dans le voisinage du point P. Puis GAUSS, en 1840, a déduit la même formule sous la condition plus générale, que ϱ admette les dérivées du premier ordre. Après GAUSS plusieurs géomètres et physiciens, parmi lesquelles nous citons DIRICHLET, RIEMANN, CLAUSIUS, KIRCHHOFF, KRONECKER, ont essayé de déduire la formule de POISSON dans des cas plus généraux.[1] Mais ce n'est qu'en 1882 que M. HÖLDER[2] a réussi à la déduire sans avoir recours à la condition de GAUSS, en supposant seulement la condition

$$|\varrho - \varrho_0| < Ar^{\mu},$$

ϱ_0 étant la densité au point considéré P, ϱ la densité dans un point quelconque Q, situé dans l'intérieur d'un petit espace autour du premier point, r la distance PQ, A et μ des constantes positives. Plus tard, en 1887 M. MORERA[3], a déduit la même formule sous la condition plus générale encore, que l'intégrale

---

[1] Voir M. BACHARACH: «Abriss der Geschichte der Potentialtheorie.» Diss. Würzburg 1883.

[2] O. HÖLDER: «Beiträge zur Potentialtheorie.» Diss. Stuttgart 1882.

[3] G. MORERA: «Sulle derivate seconde della funzione potenziale di spazio.» Rendiconti del R. Instituto Lombardo Serie II, Vol. XX, fasc. VIII. Milano 1887.

$$\int_0^r (\varrho - \varrho_0) \frac{dr}{r}$$

est finie et déterminée le long de chaque rayon vecteur partant du point P, et que ϱ_0 est une constante absolue. Enfin j'ai réussi[1] en 1899 à déduire la formule de POISSON sous la seule condition que la densité ϱ est continue, mais en définissant le symbole ΔV de la manière suivante:

$$\Delta V = \lim_{\substack{h_1=0\\h_2=0\\h_3=0}} \sum_{x,y,z} \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial V(x+h,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial V(x,y,z)}{dx}\right],$$

en supposant que les rapports des incréments h_1, h_2, h_3 ne tendent ni vers zéro ni vers l'infini. Dans ce cas il peut arriver que ΔV existe quoique les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ n'existent pas séparément.

Cependant tous ces développements ont été faits en supposant que la densité ϱ est continue. Ils ne suffisent donc pas pour mettre en évidence, comment se comportent les dérivées secondes dans un point de la surface du corps. Pour cela il faut faire l'analyse des dérivées du potentiel dans le cas plus général encore, où la densité ϱ peut être discontinue.

Une question analogue et d'un intérêt aussi important est celle qui se rapporte à la détermination de la dérivée première du potentiel d'une simple couche pour un point situé dans la surface ou infiniment près d'elle. Cette question a été traitée par MM. HÖLDER[2] et MORERA[3] sous les mêmes conditions que la précédente. Plus récemment M. POINCARÉ[4] a traité cette question d'une manière très générale.

Enfin la théorie du potentiel d'une double couche dépend de l'évaluation des dérivées secondes du potentiel d'une simple couche. Ce dernier problème a aussi été traité par M. POINCARÉ dans des cas très étendus. M. LIAPOUNOFF a démontré un théorème fondamental sur le potentiel d'une double couche.[5] L'application de ce théorème exige qu'on sache si la limite de la dérivée normale ex-

---

[1] «Démonstration générale de l'équation de POISSON $\Delta V = -4\pi\rho$ en ne supposant que ρ soit continue.» K. Vet. Akad. Öfvers. Stockholm 1899.

[2] O. HÖLDER: «Beiträge zur Potentialtheorie.» Diss. Stuttgart 1882.

[3] G. MORERA: «Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie.» Rend. Lomb. S. II V. XX fasc. XIV. Milano 1887.

[4] H. POINCARÉ: «Théorie du potentiel Newtonien.» Paris 1899.

[5] A. LIAPOUNOFF: «Sur certaines questions qui ce rattachent au problème de DIRICHLET.» Journal de Mathématiques IV série V, 1898 pp. 241—311.

térieure du potentiel d'une double couche existe,[1] mais les conditions nécessaires et suffisantes pour que cela ait lieu n'ayant pas été données, il dit (p. 293):

»Il va sans dire qu'il est impossible de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence, la régularité et l'égalité des deux dérivées normales de W. Mais on peut en indiquer des conditions suffisantes plus ou moins générales, etc.»

Dans le présent mémoire j'ai essayé de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des dérivées premières et secondes du potentiel en ne faisant en général sur la densité d'autre hypothèse dispensable que celle qu'elle est finie. Le cas où la densité est infinie en un certain point peut être traité de la même manière, quoique ce cas soit ici exclu. Quelques-uns des principaux résultats de mes recherches ont été publiés dans des mémoires divers.[2]

CHAPITRE I.

Les dérivées secondes du potentiel d'une masse à trois dimensions.

§ 1. *Évaluation de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. Pour l'étude du potentiel et de ses dérivées dans le voisinage du point $P(x, y, z)$ il suffit d'en étudier la partie qui se rapporte à une petite sphère, dont le centre est en ce point P. Soit a le rayon de cette sphère ϱ une fonction qui dans le domaine de cette sphère reste plus petite qu'une constante finie, et posons

$$V = \int \varrho \frac{d\tau}{r}, \tag{1}$$

où $d\tau$ est l'élément de volume dans le point $Q(\xi, \eta, \zeta)$ et r, la distance PQ; l'intégration s'étend sur tous les éléments de la sphère. Soit V_h le potentiel de

---

[1] Voir aussi ERNST RICHARD NEUMANN: «Studien über die Methoden von C. NEUMANN und G. ROBIN zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie.» Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. Leipzig 1905 pp. 38—46.

[2] «Sur l'existence des dérivées secondes du potentiel» Comptes Rendus. Paris 1900.

«Allgemeine Existensbedingungen für die zweiten Differentialquotienten des Potentials.» K. Vet. Akad. Öfvers. Stockholm 1900.

«Études sur les dérivées premières du potentiel d'une couche simple.» Ibid.

«Les limites des dérivées secondes du potentiel d'une couche simple.» Ibid. 1901.

«Continuité et discontinuité des dérivées du potentiel.» Ibid.

la sphère au point $P'(x+h, y, z)$, la quantité h étant assez petite pour que ce point se trouve dans l'intérieur de la sphère; soit de plus R la distance $P'Q$ et posons

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi = x + r\cos\vartheta \\ \eta = y + r\sin\vartheta\cos\psi \\ \zeta = z + r\sin\vartheta\sin\psi \\ \cos\vartheta = u. \end{cases}$$

Nous aurons

$$(3)\qquad \begin{cases} R = \sqrt{r^2 - 2rhu + h^2} \\ V = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} du \int_0^a \varrho r dr \\ V_h = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} du \int_0^a \varrho r^2 \frac{dr}{R} \\ \frac{\partial V}{\partial x} = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} u du \int_0^a \varrho dr \\ \frac{\partial V_h}{\partial x} = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} du \int_0^a \varrho \frac{ru - h}{R^3} r^2 dr, \end{cases}$$

d'où, en posant

$$(4)\qquad \begin{cases} r = ht \\ q = \sqrt{t^2 - 2tu + 1}, \end{cases}$$

on déduit

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} du \int_0^1 \varrho \left(\frac{tu-1}{q^3} t^2 - u\right) dt +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} du \int_1^{\frac{a}{h}} \varrho \left(\frac{tu-1}{q^3} t^2 - u\right) dt \equiv I_h + I'_h,$$

en nommant les deux dernières intégrales I_h et I'_h resp. La quantité $\frac{tu-1}{q^3} t^2$ ne changeant pas de signe entre les limites d'intégration de I_h, on peut écrire

$$I_h = \varrho' \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 t^2 dt \int_{-1}^{1} \frac{\partial \frac{t-u}{q}}{\partial u} du - \int_0^{2\pi} \partial\psi \int_{-1}^{1} u du \int_0^1 \varrho dt,$$

ϱ' étant une valeur moyenne de ϱ. Le premier terme du second membre est $= -\frac{4}{3}\pi\varrho'$, donc $\lim_{h=0} I_h$ est finie. Soit w une constante quelconque choisie de manière que

$$\frac{a}{h} > w > 1,$$

donc on aura

$$I'_h = -\int_0^{2\pi} d\psi \int_1^w t^2 dt \int_{-1}^{\frac{1}{t}} \varrho \frac{1 - tu}{q^3} du + \int_0^{2\pi} d\psi \int_1^w t^2 dt \int_{\frac{1}{t}}^1 \varrho \frac{tu - 1}{q^3} du -$$

$$-\int_1^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 u du \int_1^w \varrho dt + \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 du \int_w^{\frac{a}{h}} \varrho \left(\frac{tu - 1}{q^3} t^2 - u\right) dt,$$

et on trouve comme pour I_h que chacune des trois premières intégrales du second membre a une limite finie, quand h tend vers zéro. La dernière intégrale peut être mise sous la forme

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 du \int_w^{\frac{a}{h}} \varrho \left[\frac{3u^2 - 1}{t} + \frac{1}{t^2} P\left(\frac{1}{t}, u\right)\right] dt,$$

où $\lim_{t=\infty} P\left(\frac{1}{t}, u\right)$ est finie. Par suite elle a une limite finie pour $\lim h = 0$ en même temps que la quantité K_h, définie par l'équation

$$(5)\quad \begin{cases} K_h = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 (3u^2 - 1) du \int_1^{\frac{a}{h}} \varrho \frac{dt}{t} \\ \quad = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 (3u^2 - 1) du \int_h^a \varrho \frac{dr}{r} \\ \quad = \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} d\tau, \end{cases}$$

où l'intégration s'étend sur l'espace qui se trouve entre les deux sphères concentriques de rayons h et a. Les développements donnés conduisent donc au résultat suivant;

Théorème: *Les fonctions V, V_h, et K_h étant définies par les équations* (1), (3) *et* (5), *donc*

$$\lim \left\{ \frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) - K_h \right\} \text{ est finie.}$$

Corollaire. *Si la quantité*

$$K = \lim_{h=0} K_h \tag{6}$$

est finie, la dérivée

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{h=0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) \text{ est finie.} \tag{7}$$

En résumant les formules nous pouvons écrire

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) = K_h + L_h \\ & K_h = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} (3u^2 - 1)\,du \int_h^a \varrho \frac{dr}{r} \\ & L_h = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} du \int_0^1 \varrho\left(\frac{tu-1}{q^3}t^2 - u\right) dt + \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} du \int_1^{\frac{a}{h}} \varrho\left(\frac{tu-1}{q^3}t^2 - u - \frac{3u^2-1}{t}\right) dt \\ & \lim_{h=0} L_h \text{ finie.} \end{aligned}\right. \tag{8}$$

§ 2. *Cas des valeurs déterminées.* La densité ϱ est fonction des coordonnées (x, y, z) du point considéré P et des coordonnées relatives (r, ϑ, ψ) du point Q, de manière qu'on peut écrire

$$\varrho = \varrho(r, \vartheta, \psi) = \varrho(ht, \vartheta, \psi). \tag{9}$$

Restriction imposée à la fonction ϱ. Jusqu'ici nous n'avons fait que supposer que ϱ soit une fonction intégrable des coordonnées (ξ, η, ζ). Dans la suite nous imposerons à la fonction ϱ la condition que *dans le voisinage du point P elle est continue le long de chaque rayon vecteur autour de ce point,* c. à. d. que si l'on pose

$$\varrho_0(u, \psi) = \lim_{h=0} \varrho(ht, \vartheta, \psi), \tag{10}$$

ϱ_0 doit être une fonction de u et de ψ bien déterminée; de plus nous supposerons que *la fonction ϱ_0 est intégrable pour toutes les directions* (u, ψ).

Remarquè. Si la densité ϱ est continue, ϱ_0 est une constante absolue, indépendante de u et de ψ.

Dans ces conditions nous pourrons prendre h assez petite pour que $\varrho - \varrho_0$ soit si petite qu'on le voudra. Soit L_h^0 ce que devient L_h quand on y remplace ϱ par ϱ_0. On trouvera en remplaçant ϱ par $\varrho - \varrho_0$ dans l'équation (1) et en répétant les démonstrations du § 1 que la quantité $L_h - L_h^0$ devient infiniment petite en même temps que $\varrho - \varrho_0$. Par suite la fonction L_h est continue par rapport à la variable h dans le point $h = 0$. On pourra donc écrire

$$\lim_{h=0} L_h = \lim_{h=0} L_h^0,$$

$$(11) \qquad \therefore \lim_{h=0}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) - K_h\right] = \lim_{h=0} L_h \equiv L,$$

où L est une quantité bien déterminée. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème: *Si* $\varrho_0(u, \psi) \equiv \lim_{r=0} \varrho$ *est une fonction bien déterminée et intégrable, la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ *ait une valeur finie et déterminée est que la quantité K, définie par l'égalité* (6), *a une valeur finie et déterminée.*

En effectuant le calcul de L on peut intégrer par rapport à t. A l'aide du tableau I des intégrales à la fin du mémoire on trouvera

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = K + L \\ L = \displaystyle\int_{(\Omega)} \varrho_0 \varphi(u) d\omega \\ \varphi(u) = 1 - 3u - 5u^2 - (3u^2 - 1)\log\dfrac{1-u}{2} \equiv \dfrac{\partial \Phi(u)}{\partial u} \\ \Phi(u) = u - u^2 - \frac{4}{3}u^3 + (u - u^3)\log\dfrac{1-u}{2} \\ u = \cos(r, x), \end{cases}$$

$d\omega$ étant l'élément de surface de la sphère décrite autour du point P comme centre, et dout le rayon est égal à l'unité; l'intégration s'étend sur toute cette surface (Ω). Les quantités K et ϱ_0 sont définies au moyen des égalités (6), (5) et (10).

Corollaire. Si K existe, on aura

$$(13) \qquad \int_{(\Omega)} \varrho_0 (3u^2 - 1) d\omega = 0.$$

Remarque sur la quantité L. Si la densité ϱ est continue, on aura

$$(14) \qquad L = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho(x, y, z),$$

par suite dans ce cas la quantité L est aussi continue. D'autre part, si la fonction ϱ est discontinue, il peut aussi arriver que la quantité L est discontinue. En effet, considérons la surface qui sépare deux corps de densités continues, et supposons que ces densités sont différentes à la surface commune. La fonction L est continue dans l'intérieur de chacun des deux corps, mais se rapproche de deux valeurs différentes, lorsque le point P s'approche d'un même point de la surface, selon qu'il se meut dans un corps ou dans l'autre.

§ 3. *Cas particuliers, où existe la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. D'après les résultats du paragraphe précédent, il faut et il suffit de considérer la quantité K. Cette quantité a une valeur finie et déterminée dans les cas suivants:

$$(15) \quad \alpha) \qquad \int_{-1}^{1} \varrho(3u^2 - 1)\,du = 0.$$

Ce cas aura lieu par. ex. si la densité ϱ est *constante*, si elle est fonction de r et de ψ, mais est indépendante de u, si elle est une fonction impaire par rapport à la variable u, etc.

$$(16) \quad \beta) \qquad \int_{0}^{2\pi} \varrho\,d\psi = 0.$$

Ce cas aura lieu p. e. si à chaque valeur ψ_1 de ψ correspond une valeur ψ_2 de la même variable de manière que

$$\varrho(r, u, \psi_1) = -\varrho(r, u, \psi_2).$$

Exemples: $\varrho(r, u, \psi) = -\varrho(r, u, -\psi)$, ou $= -\varrho(r, u, \pi - \psi)$ ou $= -\varrho(r, u, \pi + \psi)$ etc.

Remarque. Dans ce cas β) K est $= 0$ pour chaque point de l'axe des x; par suite $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe tout le long de cet axe.

$$(17) \quad \gamma) \qquad \varrho = \varrho(ru, \psi).$$

En effet, posons

$$ru = x',$$

$$\therefore K_h = \int_0^{2\pi} d\psi \int_h^a \varrho(x', \psi) \frac{dx'}{x'} \int_{\frac{x'}{a}}^{1} (3u^2 - 1)\, du + \int_0^{2\pi} d\psi \int_a^h \varrho \frac{dx'}{x'} \int_{\frac{x'}{a}}^{\frac{x'}{h}} (3u^2 - 1)\, du +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-h}^{0} \varrho \frac{dx'}{x'} \int_{\frac{x'}{h}}^{\frac{x'}{a}} (3u^2 - 1)\, du + \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-a}^{-h} \varrho \frac{dx'}{x'} \int_{-1}^{\frac{x'}{a}} (3u^2 - 1)\, du.$$

En effectuant la troisième intégration de chacune des quatre intégrales du second membre, on trouvera que $\lim_{h=0} K_h$ est finie et déterminée.

δ) La dérivée $\frac{\partial \varrho}{\partial \xi}$ est finie et intégrable.

En effet, on a

$$(18) \qquad K_h = \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} d\tau = \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} u\, d\omega - \int_{(h)}^{(a)} \frac{\partial \varrho}{\partial \xi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} d\tau,$$

où les intégrales de volume s'étendent sur l'espace qui se trouve entre les deux sphères de rayons h et a, et l'intégrale de surface s'étend sur les surfaces de ces mêmes sphères. Cette dernière intégrale est finie, car on a

$$\int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} u\, d\omega = - \int_{(h)}^{(a)} \varrho u^2 \frac{d\omega}{r^2} = - \tfrac{4}{3}\pi [\varrho_m(a) - \varrho_m(h)],$$

où $\varrho_m(a)$ et $\varrho_m(h)$ sont des valeurs moyennes de ϱ sur les deux sphères resp. Donc la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe.

Exemple. Si ϱ est fonction de η et de ζ, mais non pas de ξ, c. à. d. si

$$\varrho = \varrho(\eta, \zeta),$$

la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe.

(19) ε) $\lim_{h=0} \int_h^a (\varrho - \varrho_0) \frac{dr}{r}$ est finie et déterminée, et $\int_{(\Omega)} \varrho_0 (3u^2 - 1)\, d\omega = 0$.

En effet, on aura

$$\int_{(h)}^{(a)} \varrho_0 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} d\tau = 0,$$

$$\therefore K_h = \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} d\tau = \int_{(h)}^{(a)} (\varrho - \varrho_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} d\tau = \int_{(\Omega)} (3u^2 - 1) d\omega \int_h^a (\varrho - \varrho_0) \frac{dr}{r},$$

$\therefore \lim_{h=0} K_h$ est finie et déterminée.

Remarque. Le cas particulier où ϱ_0 est une constante absolue, coïncide avec celui de M. MORERA. Pour $\varrho - \varrho_0 = r^\alpha \varphi$, $\alpha > 0$, $\lim_{r=0} \varphi$ finie, ϱ_0 une constante absolue, on retrouve le cas de M. HÖLDER.

Exemple. *Soit*

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \varrho = \frac{u^2}{\log \frac{1}{r}}, \quad a < 1, \\ & \therefore K_h = \tfrac{16}{15} \pi \log \frac{\log \frac{1}{h}}{\log \frac{1}{a}}, \quad \therefore \lim_{h=0} K_h \text{ infinie.} \end{aligned} \right.$$

Dans ce cas $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ *n'existe pas, quoique la densité* ϱ *soit continue dans tout l'espace.*

ζ) Plus généralement on trouvera sans peine qu'on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Soit*

$$\varrho(r, u, \psi) = \varrho_0(u, \psi) + \mu_1(r)\varrho_1(u, \psi) + \mu_2(r)\varrho_2(u, \psi) + \cdots + \mu_n(r)[\varrho_n(u, \psi) + \bar{\varrho}(r, u, \psi)],$$

$$\text{où } \lim_{r=0} \bar{\varrho} = 0 \text{ et } \lim_{r=0} \frac{\mu_{\nu+1}}{\mu_\nu} = 0.$$

Supposons de plus que l'intégrale

$$\int_h^a \mu_\nu(r) \frac{dr}{r}$$

devienne infinie pour $\lim h = 0$ *si* $\nu < n$, *mais qu'elle ait une limite finie, lorsque* ν *est* $= n$. *Pour que* $\lim_{h=0} K_h$ *soit finie, il faut et il suffit que*

$$(21) \qquad \int_{\Omega} \varrho_\nu (3u^2 - 1) d\omega = 0 \quad \text{pour} \quad \nu < n.$$

§ 4. *Continuité de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{dx^2}$. *Cas particuliers.* Nous supposerons dans ce paragraphe que la densité ϱ est continue, donc la quantité L est continue, et il reste à examiner la continuité de K. Nous considérerons quelques cas particuliers.

α) *La densité* ϱ *est constante.* Dans ce cas, nous avons trouvé $L = -\frac{4}{3}\pi\varrho$, $K = 0$,

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho(x, y, z). \tag{22}$$

La valeur de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ dans le point voisin (x', y', z') diffère de la quantité $-\frac{4}{3}\pi\varrho(x', y', z')$ d'une quantité qui ne dépend que des masses voisines de la surface de la sphère (a). Donc la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ est continue dans toute direction.

β) $\int_0^{2\pi} \varrho d\psi = 0$. Dans ce cas, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ est évidemment continue le long de l'axe des x, parce que K y est toujours $= 0$.

γ) ϱ *est fonction de* ru *et de* ψ. Dans ce cas, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe pour tout point de l'axe des x (§ 3 γ) et est continue le long de cet axe, si la densité ϱ y est continue.

δ) *La dérivée* $\frac{\partial \varrho}{\partial \xi}$ *est finie et intégrable.* Dans ce cas, la quantité K existe et est continue dans tout l'espace, ce qu'on trouve d'après (18), en observant que la dérivée première du potentiel est toujours continue.

ε) *Si* $\lim_{h=0} \int_h^a (\varrho - \varrho_0)\frac{dr}{r}$ *est finie,* la quantité K n'est pas nécessairement finie en tous les points du voisinage de l'origine. En effet, la fonction ϱ peut être définie, de sorte que, dans une infinité de points de l'axe des x, situés dans le voisinage du centre, la quantité

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} \varrho_0 (3u^2 - 1) du \text{ est } \neq 0.$$

Exemple. Supposons que U soit une fonction harmonique de x et de $r\sqrt{1-u^2}$ dans le demi-plan $\psi = \text{const.}$ et que cette fonction prenne sur l'axe des x des valeurs discontinues aux points

$$x = k_1,\, k_2,\, k_3 \ldots,\; |k_{\nu+1}| < |k_\nu|,\; \lim_{\nu=\infty} k_\nu = 0.$$

On sait que dans le voisinage d'un tel point (k_ν) la fonction U prend des valeurs de la forme $\varphi_1 + \vartheta\varphi_2$, où ϑ est l'angle que fait avec l'axe des x le rayon vecteur qui part de ce point, et où φ_1 et φ_2 tendent vers des constantes a_ν et b_ν, lorsque le point $Q(\xi, \eta, \zeta)$ tend vers ce point. Posons

$$\varrho = U^2 \mu(r), \tag{23}$$

où la fonction $\mu(r)$ est déterminée de manière que

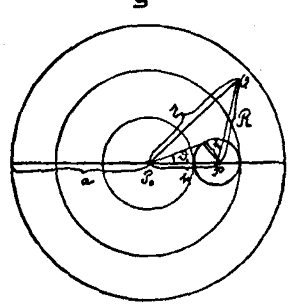
$$\lim_{h=0} \int_h^a \mu(r) \frac{dr}{r} \text{ est finie.}$$

Donc nous aurons en ce point

$$\varrho_k = (a_\nu + b_\nu \vartheta)^2 \mu(k_\nu)$$

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} \varrho_k (3u^2 - 1)\, du = \tfrac{16}{9}\pi b_\nu^2 \mu(k_\nu),$$

Fig.1.



par suite la quantité K ne peut pas être finie (13). Il peut donc arriver — au moins si la densité ϱ est discontinue — que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ devient infinie dans une infinité de points voisins du centre, quoique au centre lui-même

$$\lim_{h=0} \int_h^a (\varrho - \varrho_0) \frac{dr}{r} \text{ soit finie.}$$

ζ) $\varrho = \varrho(r, \psi)$ *à l'origine.* Nous chercherons la valeur de K au point $P(k, 0, 0)$.

Soient $a > k > h$ et R la distance PQ (fig. 1),

$$\therefore R = \sqrt{r^2 - 2rku + k^2}$$

$$\text{et } K_h = \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial \xi^2} d\tau = \int_0^{2\pi} d\psi \int \varrho(r, \psi) r^2 dr \int \left[3\frac{(ru-k)^2}{R^2} - 1\right] \frac{du}{R^3}, \tag{24}$$

les limites de l'intégration étant

r:	1) 0 à $k-h$	2) $k-h$ à $k+h$	3) $k+h$ à a
R:	1) $k-r$ à $k+r$	2) h à $k+r$	3) $r-k$ à $r+k$.

En considérant R comme variable indépendante au lieu de u et en intégrant, on aura

$$K_h = \int_0^{2\pi} d\psi \int \varrho(r,\psi) r dr \int \frac{1}{4k^3}\left[3R + \frac{6r^2 - 2k^2}{R} - \frac{(r^2-k^2)^2}{R^3}\right]$$

$$= \frac{4}{k^3}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{k-h} \varrho r^2 dr + \frac{2}{k^3}\int_0^{2\pi} d\psi \int_{k-h}^{k+h} \varrho r^2 dr - \frac{1}{4k^3}\int_0^{2\pi} d\psi \int_{k-h}^{k+h} \varrho\left[3h + \frac{6r^2-2h^2}{k} - \frac{(r^2-h^2)^2}{k^3}\right] r dr.$$

Posons $r = ks$ dans la première intégrale du dernier membre, $r = k + hs$ dans les deux autres, et $h = k\alpha$, $\therefore\ 0 < \alpha < 1$,

$$\therefore\ K_h = 4\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{1-\alpha} \varrho(ks,\psi) s^2 ds + 2\alpha \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} \varrho(k+k\alpha s,\psi)(1+\alpha s)^2 ds -$$

$$-\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} \varrho(k+k\alpha s,\psi)\left\{1 - s^2 + \alpha s(3-s^2) + \frac{\alpha^2}{4}(3+6s^2-s^4)\right\}(1+\alpha s) ds,$$

(25) $$\therefore\ K = \lim_{\alpha=0} K_h = 4\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 \varrho(ks,\psi) s^2 ds - \tfrac{4}{3}\int_0^{2\pi} \varrho(k,\psi) d\psi.$$

De plus nous trouverons, si la fonction ϱ est continue,

(26) $$\lim_{k=0} K = 0,$$

donc nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si par rapport à l'origine ϱ est fonction de r et de ψ seulement, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ est finie et déterminée en chaque point de l'axe des x; elle est aussi continue le long de cet axe, si la fonction ϱ y est continue.*

Corollaire. *Si ϱ est fonction de r seulement, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe dans tout l'espace; elle est aussi continue dans tous les points où la fonction ϱ est continue.*

En effet, on trouvera (25) que la quantité K est continue et que $\lim_{k=0} K = 0$.

§ **5.** *La dérivée seconde $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ normale, tangentielle et oblique à la surface plane d'un corps.* Nous supposons que le point $P(x, y, z)$ est situé dans une partie plane de la surface qui sépare deux corps dont les densités sont constantes et égales à ϱ_1 et ϱ_2 resp. Menons l'axe des x positifs parallèle à la normale de la surface vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1. Nous aurons

$$\varrho = \varrho_1 \text{ pour } 0 \leq u \leq 1 \text{ et } \varrho = \varrho_2 \text{ pour } -1 \leq u \leq 0,$$

$$\therefore K_h = 0, \quad L = -\tfrac{8}{3}\pi\varrho_1 + \tfrac{4}{3}\pi\varrho_2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\tfrac{8}{3}\pi\varrho_1 + \tfrac{4}{3}\pi\varrho_2. \tag{27}$$

Dans la direction opposée, on aura de même

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\tfrac{8}{3}\pi\varrho_2 + \tfrac{4}{3}\pi\varrho_1. \tag{28}$$

Pour faire le calcul de la dérivée tangentielle, nous mènerons l'axe des x et le plan $\psi = 0$ dans la surface,

$$\therefore \varrho = \varrho_1 \text{ pour } 0 \leq \psi \leq \pi \text{ et } \varrho = \varrho_2 \text{ pour } \pi \leq \psi \leq 2\pi.$$

Nous obtiendrons

$$K_h = 0, \quad L = -\tfrac{2}{3}\pi(\varrho_1 + \varrho_2),$$

$$\therefore \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{2\pi}{3}(\varrho_1 + \varrho_2). \tag{29}$$

Afin de trouver la valeur de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ dans une direction qui fait l'angle aigu w avec la normale laquelle est dirigée vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1, nous tirons l'axe des x dans cette direction de la normale et choisissons comme plan des xy le plan de la normale et de l'élément ds. Soient ϑ l'angle que fait le rayon vecteur r avec l'axe des x, ψ l'angle que fait avec l'axe des y la projection de r dans le plan des yz, et u le cosinus de l'angle que fait l'élément ds avec le rayon vecteur. On aura dans le cas général

$$\left\{\begin{aligned}
u &= \cos w \cos \vartheta + \sin w \cos \psi \sin \vartheta \\
K_h &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} (3u^2 - 1) \sin \vartheta \, d\vartheta \int_h^a \varrho \frac{dr}{r} \\
L &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \varrho_0 \varphi(u) \sin \vartheta \, d\vartheta \\
\varphi(u) &= 1 - 3u - 5u^2 - (3u^2 - 1) \log \frac{1-u}{2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} &= K + L, \\
\text{où } K &= \lim_{h=0} K_h.
\end{aligned}\right. \tag{30}$$

Dans le cas actuel nous trouverons

$$K_h = 0$$

et par suite

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \varrho_1 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(u) \sin \vartheta d\vartheta + \varrho_2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(u) \sin \vartheta d\vartheta .$$

Posons

$$\Phi(\vartheta, \psi) \equiv \int \varphi(u) \sin \vartheta d\vartheta ,$$

$$\therefore \Phi(\vartheta, \psi) = \tfrac{5}{3}(\cos^2 w + \sin^2 w \cos^2 \psi) \cos \vartheta - \tfrac{5}{3} u \cos w - \cos \vartheta + u \cos \vartheta + \tfrac{4}{3} u^2 \cos \vartheta +$$

$$+ \{2(\cos^2 w + \sin^2 w \cos^2 \psi) \cos \vartheta - 2 u \cos w - \cos \vartheta + u^2 \cos \vartheta\} \log \frac{1-u}{2} -$$

$$- 2 \sin^3 w \cos \psi \sin^2 \psi \int \frac{d\vartheta}{1-u},$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \varrho_1 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \varphi(u) \sin \vartheta d\vartheta + (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(u) \sin \vartheta d\vartheta =$$

$$= -\tfrac{4}{3}\pi \varrho_1 + (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} \left\{\Phi(\pi, \psi) - \Phi\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right)\right\} d\psi$$

$$\Phi(\pi, \psi) = 1 + \cos w - \tfrac{4}{3} \cos^2 w - \tfrac{5}{3} \sin^2 w \cos^2 \psi - \sin^2 w \cos 2\psi \log \frac{1 + \cos w}{2} -$$

$$- 2 \sin^3 w \cos \psi \sin^2 \psi \int^{\pi} \frac{d\vartheta}{1-u}$$

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right) = -\tfrac{5}{3} \sin w \cos w \cos \psi - 2 \sin w \cos w \cos \psi \log \frac{1 - \sin w \cos \psi}{2} -$$

$$- 2 \sin^3 w \cos \psi \sin^2 \psi \int^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{1-u},$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \Phi(\pi, \psi) d\psi = 2\pi\left(\tfrac{1}{6} + \cos w - \tfrac{1}{2} \cos^2 w\right) - I(\pi)$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right) d\psi = 4\pi(\cos w - \cos^2 w) - I\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I(\vartheta) \equiv 2\sin^3 w \int d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\cos\psi \sin^2\psi d\psi}{1-u} =$$

$$= 2\pi \int \{2(1-\cos w \cos\vartheta)^2 - \sin^2 w \sin^2\vartheta\} \frac{d\vartheta}{\sin^3\vartheta} -$$

$$-2\int \{(1-\cos w \cos\vartheta)^2 - \sin^2 w \sin^2\vartheta\} \frac{1-\cos w\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1-u}.$$

De plus on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1-u} = \frac{2\pi}{|\cos\vartheta - \cos w|}.$$

Mais

$$0 < w < \frac{\pi}{2}, \text{ et } \frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq \pi,$$

$$\therefore \cos\vartheta - \operatorname{co} w < 0,$$

$$\therefore I(\vartheta) = -2\pi(1-\cos w)^2 \frac{1+\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} + \text{const.},$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \left\{\Phi(\pi, \psi) - \Phi\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right)\right\} d\psi = -\tfrac{8}{3}\pi + 2\pi\cos^2 w,$$

(31) $$\therefore \frac{\partial^2 V}{ds^2} = -\tfrac{4}{3}\pi(\varrho_1+\varrho_2) + 2\pi(\varrho_2-\varrho_1)\cos^2 w, \quad 0 < w < \frac{\pi}{2}.$$

De même on aura

(32) $$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = -\frac{2\pi}{3}(\varrho_1+\varrho_2) + 2\pi(\varrho_1-\varrho_2)\cos^2 w, \quad \frac{\pi}{2} < w < \pi.$$

Remarque. Si la fonction ϱ n'est pas constante, et qu'elle varie d'une manière continue de chaque côté du plan considéré, de sorte que $\lim \varrho = \varrho_1$ et $= \varrho_2$ pour les deux côtés, on retrouvera les mêmes formules pour la quantité L. D'autre part K n'est pas nécessairement $= 0$ dans ce cas. Pour avoir la valeur de $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$, on n'a donc qu'à ajouter la quantité K dans les seconds membres des égalités (31) et (32).

§ 6. *Les dérivées* $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$. L'étude de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ se fait de la même manière que celle de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. En posant comme précédemment

$$V_h = V(x+h, y, z)$$
$$u = \cos \vartheta$$
$$r = ht$$

nous aurons

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\right) = I_h + I'_h$$

$$I_h \equiv \int_0^{2\pi} \cos\psi d\psi \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta d\vartheta \int_0^1 \varrho(ht, \vartheta, \psi)\left(\frac{t^3}{q^3} - 1\right) dt$$

$$q \equiv \sqrt{t^2 - 2tu + 1}$$

$$I'_h \equiv \int_0^{2\pi} \cos\psi d\psi \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \varrho\left(\frac{t^3}{q^3} - 1\right) dt.$$

L'intégrale I_h peut s'écrire

$$I_h = \int_0^{2\pi} \cos\psi d\psi \int_0^{\pi} \varrho(ht', \vartheta, \psi) \sin^2\vartheta d\vartheta \int_0^1 \frac{t^3}{q^3} dt - \int_0^{2\pi} \cos\psi d\psi \int_0^{\pi} \varrho(ht'', \vartheta, \psi) \sin^2\vartheta d\vartheta,$$

t' et t'' étant des valeurs moyennes de t. De plus on trouvera

$$\int_0^1 \frac{t^3}{q^3} dt = 3(q_1 - 1) - \frac{3+2u}{q_1(1+u)} + \frac{1}{1-u^2} + 3u \log \frac{2+q_1}{q_1}$$

$$q_1 \equiv \sqrt{2(1-u)},$$

$$\therefore \lim_{h=0} I_h \text{ est finie.}$$

$$I'_h = \int_0^{2\pi} \cos\psi d\psi \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \varrho\left(\frac{t^3}{q^3} - 1 - \frac{3\cos\vartheta}{t}\right) dt + 3\int_0^{2\pi} \cos\psi d\psi \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta \cos\vartheta d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \varrho \frac{dt}{t}$$

$$\frac{t^3}{q^3} - 1 - \frac{3\cos\vartheta}{t} = \frac{1}{t^2} P\left(\frac{1}{t}\right), \quad \lim_{t=\infty} P\left(\frac{1}{t}\right) \text{ finie.}$$

Nous obtiendrons le résultat suivant

$$
(33)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \overline{K} + \overline{L} \\
\overline{K} \quad = \lim\limits_{h=0} \overline{K}_h \\
\overline{K}_h \quad = 3\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int\limits_0^{\pi} \sin^2\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta \int\limits_h^{a} \varrho(r,\vartheta,\psi)\frac{dr}{r} = \int\limits_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} d\tau \\
\overline{L} \quad = \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int\limits_0^{\pi} \varrho_0(\vartheta,\psi)\,\overline{\varphi}(u) \sin^2\vartheta\, d\vartheta \\
\overline{\varphi}(u) \; = \dfrac{1}{1-u} - 3 - 5u - 3u\log\dfrac{1-u}{2} \\
\quad u = \cos\vartheta \\
\displaystyle\int \overline{\varphi}(\cos\vartheta)\sin^2\vartheta\, d\vartheta = \sin\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta - \tfrac{4}{3}\sin^3\vartheta - \sin^3\vartheta \log\dfrac{1-\cos\vartheta}{2}.
\end{cases}
$$

D'où le théorème:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ *existe est que la quantité* $\overline{K}$ *existe.*

Cas particuliers. Si la fonction ϱ_0 est indépendante de ψ ou de ϑ, ce qui a lieu par ex. si la densité ϱ est continue,

$$\overline{L} \text{ est } = 0, \;\therefore\; \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \overline{K}.$$

Si la densité ϱ est elle-même indépendante de ψ ou de ϑ, la quantité K_h est $= 0$, et dans ce cas $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = 0$.

Pour la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}$ nous aurons les formules analogues

$$
(34)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x} = \overline{K} + \overline{L'} \\
\overline{L'} \quad = \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \varrho_0(\vartheta,\psi)\,\overline{\varphi}(u') \sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta \\
u' \quad = \sin\vartheta\cos\psi \\
\displaystyle\int \overline{\varphi}(u')\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta = -\left(1 + \tfrac{4}{3}u' + u'\log\dfrac{1-u'}{2}\right)\sin^2\vartheta.
\end{cases}
$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$ *existe dans les mêmes conditions que* $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$, *mais* $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$ *n'est pas en général égale à* $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$.

Remarque. Si la densité ϱ est continue, donc $\overline{L} = \overline{L'} = 0$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \overline{K}.$$

§ 7. *Valeurs des dérivées* $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ *et* $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$ *à la surface plane d'un corps.* Soient ϱ_1 et ϱ_2 les densités de deux corps, dont les surfaces ont une partie plane commune, et soit le point P situé dans ce plan. Nous traiterons dans ce paragraphe trois cas.

1°. Prenons P pour origine et dirigeons l'axe des x suivant la normale vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1. Supposons que les densités ϱ_1 et ϱ_2 soient continues, $\therefore$ la fonction ϱ_0 est indépendante de ψ,

$$\therefore \overline{L} = 0, \quad \therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \overline{K}.$$

La valeur de $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$ s'obtient en prenant l'axe des y comme axe des coordonnées polaires. La fonction ϱ_0 étant indépendante de ϑ, on aura

$$\overline{L'} = 0,$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \overline{K};$$

$\overline{K}$ est $= 0$, si les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes.

2°. Si l'axe des x est dirigé dans la surface et que l'axe des y fasse l'angle w avec la normale, on aura, les densités ϱ_1 et ϱ_2 étant supposées continues, $\overline{L} = \overline{L'} = 0$,

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \overline{K};$$

$\overline{K}$ est $= 0$, si les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes.

3°. Si l'axe des z est situé dans la surface et que l'axe des x fasse l'angle aigu w avec la normale, dirigée vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1, enfin, si l'axe des y fait l'angle $\frac{\pi}{2} - w$ avec cette même normale, on aura en prenant l'axe des z comme axe des coordonnées polaires,

$$(35) \qquad \overline{K}_h = 3\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} u' u'' \sin\vartheta \, d\vartheta \int_h^a \varrho \frac{dr}{r},$$

$u' \equiv \sin\vartheta\cos\psi$ et $u'' \equiv \sin\vartheta\sin\psi$ sont les cosinus des angles que fait le rayon vecteur avec les axes des x et des y.

Si l'on suppose que les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont continues, on trouvera

$$\overline{L} = \int_{(\Omega)} \varrho_0 u'' \overline{\varphi}(u) \, d\omega = \int_0^{2\pi} \varrho_0 \sin\psi \int_0^{\pi} \overline{\Phi} \, d\psi$$

$$\overline{\Phi} \equiv (2\cos^2\psi - 1)\int \frac{d\vartheta}{1 - u'} + 3\cos\psi\cos\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta - \tfrac{4}{3}\cos\psi\cos^3\vartheta + $$
$$+ \cos\psi(3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta)\log\frac{1 - u'}{2};$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \overline{\Phi} = \tfrac{10}{3}\cos\psi + 4\cos\psi\log 2 + (2\cos^2\psi - 1)\int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{1 - \cos\psi\sin\vartheta},$$

$$\therefore \quad \overline{L} = \int_0^{2\pi} \varrho_0 \sin\psi(2\cos^2\psi - 1)\, d\psi \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{1 - \cos\psi\sin\vartheta} =$$

$$= \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} \varrho_0 \frac{2\cos^2\psi - 1}{1 - \cos\psi\sin\vartheta} \sin\psi \, d\psi = (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{\pi} d\vartheta \Big/_{w+\frac{\pi}{2}}^{w+\frac{3\pi}{2}} \Phi_1$$

$$\Phi_1 \equiv \frac{\cos^2\psi}{\sin\vartheta} + \frac{2\cos\psi}{\sin^2\vartheta} + \frac{2 - \sin^2\vartheta}{\sin^3\vartheta}\log(1 - \cos\psi\sin\vartheta),$$

$$\therefore \overline{L} = (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{\pi} \left[\frac{4\sin w}{\sin^2\vartheta} + \frac{2 - \sin^2\vartheta}{\sin^3\vartheta}\log\frac{1 - \sin w \sin\vartheta}{1 + \sin w \sin\vartheta}\right] d\vartheta$$

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial \sin w} = (\varrho_2 - \varrho_1)(1 - 2\sin^2 w)\int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{1 - \sin w \sin\vartheta} = 2\pi(\varrho_2 - \varrho_1)(2\cos^2 w - 1)\frac{1}{\cos w}.$$

$\overline{L}$ étant $=0$ pour $\sin w = 0$, nous aurons

$$\overline{L} = 2\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\int\limits_0^w (2\cos^2 w - 1)\,dw = 2\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\sin w\cos w,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x} = \overline{K} + 2\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\sin w\cos w. \tag{36}$$

Si l'axe des y fait l'angle $\frac{\pi}{2} + w$ avec la normale, c. à. d. si l'axe des x est dirigé vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1, tandis que l'axe des y est mené vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_2, on trouvera.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} &= \overline{K} - 2\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\sin w\cos w. \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x} &= \overline{K} + 2\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\sin w\cos w. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Si les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes, $\overline{K}$ est $=0$.

§ 8. *Existence de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{ds_1\,ds_2}$. Soient ds_1 et ds_2 deux éléments émanant du point $P(x, y, z)$ dans les directions $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ et $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ resp., λ_1, μ_1 etc. étant les cosinus des angles que font ces éléments avec les axes des coordonnées. Soient u_1 et u_2 les cosinus des angles que fait le rayon vecteur PQ avec les directions de ds_1 et de ds_2 resp.,

$$\left\{\begin{aligned} \therefore\ u_1 &\equiv \cos(r, ds_1) = \lambda_1\sin\vartheta\cos\psi + \mu_1\sin\vartheta\sin\psi + \nu_1\cos\vartheta \\ u_2 &\equiv \cos(r, ds_2) = \lambda_2\sin\vartheta\cos\psi + \mu_2\sin\vartheta\sin\psi + \nu_2\cos\vartheta, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

l'axe des z étant choisi comme axe des coordonnées polaires, de manière que

$$\left\{\begin{aligned} \xi - x &= r\sin\vartheta\cos\psi \\ \eta - y &= r\sin\vartheta\sin\psi \\ \zeta - z &= r\cos\vartheta, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Soit V_h la valeur de V au point $P'(x+\lambda_1 h, y+\mu_1 h, z+\nu_1 h)$ c. à. d. au point qui est situé à la distance h du point P dans la direction de ds_1,

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} \therefore\ \frac{\partial V}{\partial s_2} &= \int \varrho u_2 \frac{d\tau}{r^2} \\ \frac{\partial V_h}{\partial s_2} &= \int \varrho \frac{r u_2 - ch}{R^3} d\tau \\ c &\equiv \cos(ds_1, ds_2) = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 \\ R &\equiv \sqrt{r^2 - 2rhu_1 + h^2}. \end{aligned}\right.$$

En posant $r = ht$ comme précédemment, nous trouverons

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s_2} - \frac{\partial V}{\partial s_2}\right) = K_h + L_{1h} \\ &K_h = \int\limits_{(\Omega)} (3u_1u_2 - c)\,d\omega \int\limits_h^a \varrho \frac{dr}{r} = \int\limits_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2} d\tau \\ &L_{1h} = \int\limits_{(\Omega)} u_2\,d\omega \int\limits_0^1 \varrho\left(\frac{t^3}{q^3} - 1\right) dt + \int\limits_{(\Omega)} u_2\,d\omega \int\limits_1^{\frac{a}{h}} \varrho\left(\frac{t^3}{q^3} - 1 - \frac{3M_1}{t}\right) dt - \\ &\qquad - c\int\limits_{(\Omega)} d\omega \int\limits_0^1 \varrho \frac{t^2}{q^3} dt - c\int\limits_{(\Omega)} d\omega \int\limits_1^{\frac{a}{h}} \left(\frac{t^2}{q^3} - \frac{1}{t}\right) dt \\ &\qquad q = \sqrt{t^2 - 2tu_1 + 1}, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} &= K + L_1 \\ K &= \lim_{h=0} K_h \\ L_1 &= \int\limits_{(\Omega)} \varrho_0 [u_2 \bar{\varphi}(u_1) - c\chi(u_1)]\,d\omega \\ \bar{\varphi}(u_1) &= \frac{1}{1-u_1} - 3 - 5u_1 - 3u_1 \log\frac{1-u_1}{2} \\ \chi(u_1) &= \frac{1}{1-u_1} - 2 - \log\frac{1-u_1}{2}. \end{aligned}\right.$$

Pour $\frac{\partial^2 V}{\partial s_2 \partial s_1}$ on obtient la formule analogue

$$(43)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial s_2\,\partial s_1} = K + L_2 \\ L_2 \quad = \displaystyle\int_{(\Omega)} \varrho_0[u_1\overline{\varphi}(u_2) - c\chi(u_2)]\,d\omega. \end{cases}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ *existe est que la quantité* K *existe. Si cette condition est satisfaite, la dérivée* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_2\,\partial s_1}$ *existe, aussi, mais en général ces deux dérivées ne sont pas égales.*

Corollaire. Si la quantité K est finie, on aura

$$(44)\qquad \int_{(\Omega)} \varrho_0(3u_1u_2 - c)\,d\omega = 0.$$

Remarque. Pour $c = 1$ et $u_1 = u_2$, on obtiendra les formules de $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ (30), et pour $c = 0$, $u_1 = \cos\vartheta$, $u_2 = \sin\vartheta\cos\psi$, on obtiendra les formules de $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ (33).

§ **9.** *Valeur de la dérivée* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ *à la surface plane d'un corps.* Soient ϱ_1 et ϱ_2 les densités de deux corps dont les surfaces ont une partie plane commune, et soit le point P situé dans ce plan. Dirigeons les axes des x et des z dans ce plan et l'axe des y vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1. Supposons que les densités ϱ_1 et ϱ_2 soient continues et posons $\varrho_1^0 = \lim\limits_{r=0}\varrho_1$, $\varrho_2^0 = \lim\limits_{r=0}\varrho_2$, donc la fonction ϱ_0 est indépendante de ϑ. Or, on a

$$(45)\qquad (\lambda_1\cos\psi + \mu_1\sin\psi)^2 + \nu_1^2 = 1 - (\lambda_1\sin\psi - \mu_1\cos\psi)^2.$$

On peut donc poser

$$(46)\qquad \begin{cases} \lambda_1\sin\psi - \mu_1\cos\psi = \sin\psi_1 & \text{et de même } \lambda_2\sin\psi - \mu_2\cos\psi = \sin\psi_2 \\ \lambda_1\cos\psi + \mu_1\sin\psi = \cos\psi_1\cos\beta_1 & \lambda_2\cos\psi + \mu_2\sin\psi = \cos\psi_2\cos\beta_2 \\ \nu_1 = \cos\psi_1\sin\beta_1 & \nu_2 = \cos\psi_2\sin\beta_2 \\ \vartheta + \beta_1 = \vartheta_1 & \vartheta + \beta_2 = \vartheta_2 \\ \therefore\ u_1 = \cos\psi_1\sin\vartheta_1 & u_2 = \cos\psi_2\sin\vartheta_2. \end{cases}$$

Nous trouverons

$$L_1 = \int_0^{2\pi} \varrho_0 \cos\psi_2 \cos(\beta_2 - 2\beta_1)\, d\psi \int_{\beta_1}^{\beta_1+\pi} \sin^2\vartheta_1 \overline{\varphi}(u_1)\, d\vartheta_1 +$$

$$+ \int_2^{2\pi} \varrho_0 \cos\psi_2 \sin(\beta_2 - 2\beta_1)\, d\psi \int_{\beta_1}^{\beta_1+\pi} \sin\vartheta \cos\vartheta_1 \overline{\varphi}(u_1)\, d\vartheta_1 -$$

$$- \int_0^{2\pi} \varrho_0 \cos\psi_2 \sin\beta_1 \sin(\beta_2 - \beta_1)\, d\psi \int_{\beta_1}^{\beta_1+\pi} \overline{\varphi}(u_1)\, d\vartheta_1 -$$

$$- c\int_0^{2\pi} \varrho_0 \cos\beta_1\, d\psi \int_{\beta_1}^{\beta_1+\pi} \sin\vartheta_1\, \chi(u_1)\, d\vartheta_1 + c\int_0^{2\pi} \varrho_0 \sin\beta_1\, d\psi \int_{\beta_1}^{\beta_1+\pi} \cos\vartheta_1\, \chi(u_1)\, d\vartheta_1 .$$

De plus on aura

$$\int \sin^2\vartheta_1 \overline{\varphi}(u_1)\, d\vartheta_1 = 3\cos\psi_1 \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_1 - \tfrac{4}{3}\cos\psi_1 \cos^3\vartheta_1 +$$

$$+ \cos\psi_1 \cos\vartheta_1 (3 - \cos^2\vartheta_1) \log\frac{1-u_1}{2} + (2\cos^2\psi_1 - 1)\int \frac{d\vartheta_1}{1-u_1}$$

$$\int \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_1 \overline{\varphi}(u_1)\, d\vartheta_1 = -\left(1 + \tfrac{4}{3}u_1 + u_1 \log\frac{1-u_1}{2}\right) \sin^2\vartheta_1$$

$$\int \overline{\varphi}(u_1)\, d\vartheta_1 = 2\cos\psi_1 \cos\vartheta_1 + 3\cos\psi_1 \cos\vartheta_1 \log\frac{1-u_1}{2} + (3\cos^2\psi_1 - 2)\int \frac{d\vartheta_1}{1-u_1}$$

$$\int \sin\vartheta_1\, \chi(u_1)\, d\vartheta_1 = \cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_1 \log\frac{1-u_1}{2} + \cos\psi_1 \int \frac{d\vartheta_1}{1-u_1}$$

$$\int \cos\vartheta_1\, \chi(u_1)\, d\vartheta_1 = -\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_1 \log\frac{1-u_1}{2},$$

$$\therefore L_1 = \int_0^{2\pi} \varrho_0 A\, d\psi + \int_0^{2\pi} \varrho_0 B \log\frac{1-\nu_1^2}{4}\, d\psi + \int_0^{2\pi} \varrho_0 C\, d\psi \int_{\beta_1}^{\beta_1+\pi} \frac{d\vartheta_1}{1-u_1}$$

$A \equiv -\tfrac{10}{3}\cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\beta_1 \cos\beta_2 - \tfrac{8}{3}\nu_1 \nu_2 + 2c$

$B \equiv -2\cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\beta_1 \cos\beta_2 - \nu_1 \nu_2 + c$

$C \equiv \cos^2\psi_1 \cos\psi_2 \cos^2\beta_1 \cos\beta_2 - \sin^2\psi_1 \cos\psi_2 \cos\beta_2 + \nu_1 \nu_2 \cos\psi_1 \cos\beta_1 - c\cos\psi_1 \cos\beta_1 .$

Mais $\varrho_0 = \varrho_1^0$ pour $0 \leqq \psi \leqq \pi$ et $= \varrho_2^0$ pour $\pi \leqq \psi \leqq 2\pi$,

$$\therefore \int_0^{2\pi} \varrho_0 A\, d\psi = \frac{\pi}{3}(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)(c - 3\nu_1 \nu_2)$$

$$\int_0^{2\pi} \varrho_0 B\, d\psi = 0 .$$

Quant à la troisième intégrale, nous aurons à considérer quatre cas:

1° $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. Dans ce cas ν_1 est $= \pm 1$, et on trouvera $C = 0$. Mais c est dans ce cas $= \nu_1 \nu_2$,

$$\therefore L_1 = -\tfrac{2}{3}\pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)c. \tag{47}$$

Ce cas a lieu lorsque l'élément ds_1' est situé dans la surface.

2° $\lambda_1 \neq 0$, $\mu_1 = 0$. Ce cas se réduit au cas 1°, si l'on dirige l'axe des z dans la direction de l'élément ds_1.

3° $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 \neq 0$. En prenant le plan de ds_1 et de l'axe des y comme plan des yz, on peut toujours réduire le cas $\lambda_1 \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$ à ce cas et inversement. Nous ne distinguerons donc pas ce cas du cas

4° $\lambda_1 \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$. Posons

$$\begin{cases} \lambda_1 = e_1 \cos\alpha_1 & \lambda_2 = e_2 \cos\alpha_2 \\ \mu_1 = e_1 \sin\alpha_1 & \mu_2 = e_2 \sin\alpha_2, \end{cases} \tag{48}$$

$$\therefore \lambda_1 \cos\psi + \mu_1 \sin\psi = e_1 \cos(\psi - \alpha_1), \quad \lambda_2 \cos\psi + \mu_2 \sin\psi = e_2 \cos(\psi - \alpha_2)$$
$$\sin\psi_1 = e_1 \sin(\psi - \alpha_1).$$

D'où il suit

$$C = -e_1^2 e_2 \sin(2\psi - \alpha_1 - \alpha_2)\sin(\psi - \alpha_1).$$

Supposons que l'élément ds_1 soit dirigé vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1, $\therefore \mu_1 > 0$. Nous pourrons choisir la direction positive de l'axe des x de manière que nous ayons aussi $\lambda_1 > 0$, $\therefore 0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$. En employant la formule

$$\int_0^\pi \frac{d\vartheta}{1 - u_1} = \frac{2}{e_1 \sin(\psi - \alpha_1)}(\pi - \overline{\psi - \alpha_1}) \text{ pour } 2\pi > \psi - \alpha_1 > 0, \text{ et}$$
$$= \frac{2}{e_1 \sin(\psi - \alpha_1)}(-\pi - \overline{\psi - \alpha_1}) \text{ pour } 0 > \psi - \alpha_1 \geqq -\frac{\pi}{2},$$

nous trouverons

$$\int_0^{2\pi} \varrho_0 C\, d\psi \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{1 - u_1} = 2\pi\varrho_1^0 e_1 e_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] - \pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)e_1 e_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) =$$
$$= -4\pi\varrho_1^0 \mu_1 \mu_2 - \pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)(\lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2),$$

$$\therefore L_1 = 2\pi(\varrho_2^0 - \varrho_1^0)\mu_1\mu_2 - \tfrac{2}{3}\pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)c, \quad \mu_1 > 0. \tag{49}$$

De même on trouvera, pour $\mu_1 > 0$,

$$(50)\qquad \begin{cases} L_2 = L_1, & \text{si } \mu_2 > 0, \quad \text{mais} \\ L_2 = -2\pi(\varrho_2^0 - \varrho_1^0)\mu_1\mu_2 - \frac{2}{3}\pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)c, & \text{si } \mu_2 < 0. \end{cases}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Soient ϱ_1 et ϱ_2 les densités continues de deux corps qui ont une surface plane commune, et soit le point P situé en un point de ce plan. Soient de plus ds_1 et ds_2 deux éléments pris dans des directions quelconques et qui font avec la normale de la surface au point P des angles, dont les cosinus sont μ_1 et μ_2 resp., la direction positive de la normale étant comptée vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1. Si l'élément ds_1 est dirigé vers l'intérieur de ce même corps, donc*

$$(51)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2} = 2\pi(\varrho_2^0 - \varrho_1^0)\mu_1\mu_2 - \frac{2}{3}\pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)c + K \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial s_2\,\partial s_1} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}, \quad si\ \mu_2 \geqq 0,\ mais \\ \qquad = -2\pi(\varrho_2^0 - \varrho_1^0)\mu_1\mu_2 - \frac{2}{3}\pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)c + K, \quad si\ \mu_2 \leqq 0, \\ c = \cos(ds_1, ds_2) \\ K = \lim\limits_{h=0} K_h \\ K_h = \displaystyle\int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1\,\partial s_2} d\tau, \end{cases}$$

où l'intégration s'étend sur les deux corps, sauf une petite sphère dont le rayon est égal à h et dont le centre se trouve au point P.

Remarque. Les valeurs de L_1 et de L_2 dépendent des angles que font les directions des éléments ds_1 et ds_2 avec la normale et de l'angle qu'ils font entre eux, mais à part cela elles sont indépendantes de l'orientation de ces éléments.

Cas particuliers. 1°. Si les éléments ds_1 et ds_2 font entre eux un angle droit, c est $= 0$, et on aura

$$(52)\qquad L_1 = 2\pi(\varrho_2^0 - \varrho_1^0)\mu_1\mu_2,\ \mu_1 \geqq 0 \quad \text{cfr équ. (36).}$$

2°. Pour $c = 1$ nous retrouverons les formules (31) et (32) à la quantité K près.

3°. Si les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes, nous trouverons

$$(53)\qquad K = 0.$$

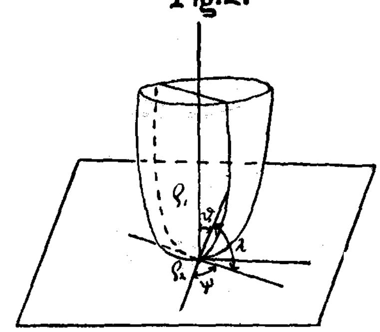
4°. Si $\varrho_1 = \varrho_2$, c. à. d. en un point, où la densité ϱ est continue, on aura

$$\frac{\partial^2 V}{d s_1 d s_2} = \frac{\partial^2 V}{\partial s_2 \partial s_1} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho c + K. \tag{54}$$

5°. Pour $\mu_1 = 0$ ou $\mu_2 = 0$ on retrouvera la formule (47), et dans ce cas on aura toujours $L_2 = L_1$.

§ 10. *La dérivée* $\dfrac{d^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *à la surface courbe d'un corps.* Prenons la normale comme axe des coordonnées polaires (fig. 2), et soit ϑ_1 la valeur limite de ϑ dans le domaine, où la densité est ϱ_1. Si les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes, nous aurons

Fig. 2.



$$K_h = (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} d\psi \int_h^a \frac{dr}{r}\int_{\vartheta_1}^{\frac{\pi}{2}} (3 u_1 u_2 - c)\sin\vartheta d\vartheta. \tag{55}$$

Si nous écrivons

$$u_1 = \lambda_1 \cos\psi \sin\vartheta + \mu_1 \cos\vartheta + \nu_1 \sin\psi\sin\vartheta$$
$$u_2 = \lambda_2 \cos\psi \sin\vartheta + \mu_2 \cos\vartheta + \nu_2 \sin\psi\sin\vartheta,$$

nous aurons

$$K_h = (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} d\psi \int_h^a \frac{dr}{r}\int_{\vartheta_1}^{\frac{\pi}{2}} (l + 3m\sin\vartheta\cos\vartheta + 3n\sin^2\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta,$$

où

$$l = 3\mu_1\mu_2 - c$$
$$m = (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\cos\psi + (\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1)\sin\psi$$
$$n = (\lambda_1\cos\psi + \nu_1\sin\psi)(\lambda_2\cos\psi + \nu_2\sin\psi) - \mu_1\mu_2.$$

En posant

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

et en intégrant, nous trouverons

$$K_h = (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} (l + 3n) d\psi \int_h^a \sin\lambda \frac{dr}{r} + (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} m d\psi \int_h^a (1 - \cos^3\lambda)\frac{dr}{r} -$$
$$- (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} n d\psi \int_h^a \sin^3\lambda \frac{dr}{r}.$$

Cas particuliers. 1°. *Point régulier.* Si P se trouve en un point régulier de la surface, la quantité K est finie. En effet, on a dans ce cas

$$\lambda = rA, \qquad \lim_{r=0} A \text{ finie.}$$

Plus généralement, la quantité K est finie, si

$$(56) \qquad \lim_{h=0} \int_h^a |\lambda| \frac{dr}{r} \text{ est finie.}$$

Remarque I. En un point oú $\lim\limits_{r=0} \lambda = 0$, les quantités L_1 et L_2 restent les mêmes que dans le cas où la surface est plane.

Remarque II. Si les densités ϱ_1 et ϱ_2 ne sont pas constantes, on trouvera de même que la quantité K est finie, si l'égalité (56) est satisfaite.

2°. *Point conique.* Dans ce cas $\lim\limits_{h=0} \lambda$ n'est pas $= 0$, $\therefore$ la quantité K n'est pas finie en général. Dans le cas particulier, où l'angle λ est indépendant de ψ, on trouvera

$$K_h = \pi(\varrho_2 - \varrho_1)(c - 3\mu_1\mu_2) \int_h^a \cos^2\lambda \sin\lambda \frac{dr}{r}.$$

Pour les directions qui satisfont à l'égalité

$$(57) \qquad c = 3\mu_1\mu_2.$$

K_h est $= 0$, $\therefore \dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ existe toujours dans ces directions, mais dans toute autre direction cette dérivée est en général infinie.

3°. *Point de rebroussement.* La dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ est finie dans toutes les directions, si

$$(58) \qquad \lim_{h=0} \int_h^a \vartheta_1^2 \frac{dr}{r} \text{ est finie.}$$

Dans le cas, où les directions de ds_1 et de ds_2 sont définies par l'égalité (57), on trouvera que la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ existe, si

$$(59)\qquad \lim_{h=0}\int_h^a |\vartheta_1^3| \frac{dr}{r} \text{ est finie,}$$

ou si l'angle ϑ_1 est indépendant de ψ.

Remarque III. Tout ce qui est dit dans ce paragraphe sur la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$, s'applique également à la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_2 \partial s_1}$.

§ **11.** *Existence de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *en un point quelconque.* Nous avons trouvé que l'existence de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ dépend seulement de l'existence de la quantité K. Dans ce paragraphe, nous chercherons une formule générale par laquelle on puisse savoir, si, en un point quelconque, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ existe. Soient P_0 (fig. 1) le centre de la sphère considérée, et V le potentiel au point P situé à l'intérieur de la sphère. On a pour le point P

$$(60)\qquad \begin{cases} K_h = \int\limits_{(h)}^{(a)} \varrho \dfrac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial s_1 \partial s_2} d\tau = \int\limits_{(h)}^{(a)} \varrho (3 v_1 v_2 - c) \dfrac{d\tau}{R^3}, \\ \text{où } R = PQ,\ v_1 = \cos(R, ds_1),\ v_2 = \cos(R, ds_2),\ c = \cos(ds_1, ds_2), \end{cases}$$

et où l'intégrale s'étend sur l espace qui se trouve entre la sphère considérée et une petite sphère dont le rayon est égal à h et dont le centre se trouve en P, $h < P_0P$ et $< a - P_0P$. Prenons la droite P_0P pour axe des z et des coordonnées, polaires

$$(61)\qquad \begin{cases} \therefore\ K_h = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_0^{k-h} \varrho(r,\vartheta,\psi)(3 v_1 v_2 - c) \dfrac{r^2 dr}{R^3} + \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_{k+h}^{a} \varrho (3 v_1 v_2 - c) \dfrac{r^2 dr}{R^3} + \\ \qquad + \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{k-h}^{k+h} r^2 dr \int\limits_{\vartheta_1}^{\pi} \varrho (3 v_1 v_2 - c) \sin\vartheta \dfrac{d\vartheta}{R^3} \\ h^2 = r^2 - 2rk\cos\vartheta_1 + k^2, \text{ où } k = P_0P. \end{cases}$$

Posons

$$(62)\qquad \begin{cases} r = ks,\quad h = k\alpha,\quad R = kp,\quad \cos\vartheta = u, \\ \therefore\ p = \sqrt{s^2 - 2su + 1},\quad \alpha^2 = s^2 - 2s\cos\vartheta_1 + 1, \end{cases}$$

et soit $\varkappa$ une constante telle que $1 > \varkappa > \alpha$, donc

$$(63)\begin{cases} K_h = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int\limits_0^{1-\varkappa} \varrho(ks,\vartheta,\psi)(3v_1v_2-c)\frac{s^2ds}{p^3} + \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int\limits_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} \varrho(3v_1v_2-c)\frac{s^2ds}{p^3} + \\ + \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int\limits_{1-\varkappa}^{1-\alpha} \varrho(3v_1v_2-c)\frac{s^2ds}{p^3} + \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int\limits_{1+\alpha}^{1+\varkappa} \varrho(3v_1v_2-c)\frac{s^2ds}{p^3} + \\ + \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha} s^2ds \int\limits_{\vartheta_1}^{\pi} \varrho(3v_1v_2-c)\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{p^3} \equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{cases}$$

Les intégrales I_1 et I_2 sont indépendantes de α, et comme p ne peut s'évanouir que pour $s = u = 1$, elles sont aussi toujours finies. L'intégrale I_5 a une valeur limite finie pour $\lim \alpha = 0$. En effet, on aura

$$(64) \qquad pdp = -sdu,$$

$$\therefore I_5 = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha} sds \int\limits_{\alpha}^{1+s} \varrho(3v_1v_2-c)\frac{dp}{p^2} = 2\int\limits_0^{2\pi} ed\psi - \int\limits_0^{2\pi} ed\psi \int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha} \frac{ds}{1+s},$$

e étant une valeur moyenne de la fonction $s\varrho(3v_1v_2-c)$,

$$(65) \qquad \therefore \lim_{\alpha=0} I_5 \text{ est finie.}$$

De plus on a (cfr § 9)

$$(66)\begin{cases} v_1 = \frac{su_1 - \nu_1}{p} & v_2 = \frac{su_2 - \nu_2}{p} \\ u_1 = \zeta_1 \sin\vartheta + \nu_1\cos\vartheta & u_2 = \zeta_2\sin\vartheta + \nu_2\cos\vartheta \\ \zeta_1 \equiv \lambda_1\cos\psi + \mu_1\sin\psi & \zeta_2 \equiv \lambda_2\cos\psi + \mu_2\sin\psi, \end{cases}$$

$(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ et $(\lambda_2\mu_2\nu_2)$ étant les cosinus directeurs des éléments ds_1 et ds_2 resp. Par suite on peut écrire

$$(67)\begin{cases} (3v_1v_2-c)\frac{1}{p^3} = \frac{1}{p}\boldsymbol{F} + s\boldsymbol{G}\sin\vartheta \\ \boldsymbol{F} = \frac{3}{4}(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\left[1 - \frac{2(s^2+1)}{p^2} + \frac{(s^2-1)^2}{p^4}\right] + (3\nu_1\nu_2 - c)\frac{1}{p^2} \\ \boldsymbol{G} = \frac{3}{2}(\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1)\left(\frac{s^2-1}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right), \\ \therefore \iiint \varrho(3v_1v_2-c)s^2\sin\vartheta d\vartheta d\psi\frac{ds}{p^3} = \int d\psi\int sds\int\varrho\boldsymbol{F}dp + \int d\psi\int\sin^2\vartheta d\vartheta\int\varrho\boldsymbol{G}s^3ds \equiv \\ \equiv F + G, \end{cases}$$

où les parenthèses $\left[1-\frac{2(s^2+1)}{p^2}+\frac{(s^2-1)^2}{p^4}\right]$ et $\left(\frac{s^2-1}{p^5}-\frac{1}{p^3}\right)$ changent de signe pour $p=|s\pm 1|$ et pour $su=1$ resp.

Application. Soit ϱ une fonction indépendante de ψ. On a

$$\int_0^{2\pi}\zeta_1\zeta_2 d\psi=(c-\nu_1\nu_2)\pi, \tag{68}$$

$$\therefore \iiint\varrho(3v_1v_2-c)s^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\frac{ds}{p^3}=\tfrac{3}{4}\pi(3\nu_1\nu_2-c)\iint\varrho\left[1-\frac{6s^2-2}{3p^2}+\frac{(s^2-1)^2}{p^4}\right]s^2\sin\vartheta\, d\vartheta\frac{ds}{p},$$

$$\therefore \int_{(h)}^{(a)}\varrho\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial s_1\,\partial s_2}d\tau=\tfrac{1}{2}(3\nu_1\nu_2-c)\int_{(h)}^{(a)}\varrho\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial z^2}d\tau, \tag{69}$$

D'où le théorème:

Théorème. *Si la fonction ϱ est indépendante de ψ, toutes les dérivées secondes dans des directions quelconques existent au point P ou bien elles n'y existent point à la même fois, sauf celles pour lesquelles*

$$3\nu_1\nu_2-c=0 \tag{70}$$

qui existent toujours.

Corollaire. *Si, au poiut P_0, ϱ est une fonction de r seulement, toutes les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\partial s_2}$ existent en tous les points P de l'espace.* En effet, le second membre de (69) a une limite finie (§ 4 3)), donc etc.

Si ε est une constante choisie de manière que $\frac{\pi}{2}>\varepsilon>0$, l'intégrale I_3 peut s'écrire

$$I_3=\int_0^{2\pi}d\psi\int_{1-\varkappa}^{1-\alpha}s\,ds\int_{1-s}^{p_\varepsilon}\varrho(3v_1v_2-c)\frac{dp}{p^2}+\int_0^{2\pi}d\psi\int_{1-\varkappa}^{1-\alpha}s\,ds\int_{p_\varepsilon}^{1+s}\varrho(3v_1v_2-c)\frac{dp}{p^2}$$

$$p_\varepsilon^2=s^2-2s\cos\varepsilon+1.$$

La seconde intégrale du second membre a une limite finie pour $\lim\alpha=0$. La première intégrale peut s'écrire

$$I'=\int_0^{2\pi}d\psi\int_{1-\varkappa}^{1-\alpha}3(ks,\vartheta',\psi)(3v_1v_2-c)_{\vartheta=\vartheta'}\left(\frac{1}{1-s}-\frac{1}{p_\varepsilon}\right)s\,ds,$$

ϑ' étant une valeur moyenne de ϑ, $\varepsilon\geqq\vartheta'\geqq 0$. Posons

$$s = 1 - \sigma,$$

donc nous pourrons écrire

$$I' = \int_0^{2\pi} d\psi \int_\alpha^{\varkappa} \varrho(k - k\sigma, \vartheta', \psi)(3 v_1 v_2 - c)_{\vartheta = \vartheta'} \frac{d\sigma}{\sigma} -$$

$$- \int_0^{2\pi} d\psi \int_\alpha^{\varkappa} \varrho(k - k\sigma, \vartheta', \psi)(3 v_1 v_2 - c)_{\vartheta = \vartheta'} \left(1 + \frac{1 - \sigma}{p_\varepsilon}\right) d\sigma.$$

La seconde intégrale du second membre a une valeur limite finie pour $\lim \alpha = 0$. Pour que I_3 ait une valeur limite finie, il faut donc et il suffit que la première intégrale du même membre ait une valeur limite finie pour $\lim \alpha = 0$. Si ϱ conserve toujours le même signe, il suffit que pour chaque valeur de ϑ, $\varepsilon \geqq \vartheta \geqq 0$,

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_\alpha^{\varkappa} \varrho(k - k\sigma, \vartheta, \psi) \frac{d\sigma}{\sigma}$$

ait une valeur limite finie pour $\lim \alpha = 0$.

Quant à l'intégrale I_4 on trouvera de même, en posant

$$s = 1 + \sigma,$$

qu'elle a une limite finie pour $\lim \alpha = 0$ en même temps que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_\alpha^{\varkappa} \varrho(k + k\sigma, \vartheta, \psi) \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Si la densité ϱ est continue, la valeur ϱ_k de ϱ au point P $(r = k, \vartheta = 0)$ est indépendante de ψ. Nous avons trouvé que si la densité est constante, par ex. $= \varrho_k$, $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ existe; par suite, dans les intégrales I_3 et I_4, on peut substituer $\varrho - \varrho_k$ à ϱ. D'où le théorème:

Théorème. *Soient*

$$(71) \qquad \begin{cases} I'' = \displaystyle\int_\alpha^{\varkappa} \left| \varrho(k + k\sigma, \vartheta, \psi) - \varrho_k \right| \frac{d\sigma}{\sigma} \\[2ex] I''' = \displaystyle\int_\alpha^{\varkappa} \left| \varrho(k + k\sigma, \vartheta, \psi) - \varrho_k \right| \frac{d\sigma}{\sigma}, \end{cases}$$

ϱ_k *étant une constante absolue, donc la dérivée* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *est finie au point* P, *si pour toutes les valeurs de* ϑ, *telles que* $\varepsilon \geqq \vartheta \geqq 0$, $\lim\limits_{\alpha=0} (I'' + I''')$ *est finie.*

§ 12. *Calcul de l'intégrale* I_5. Soient F_5 et G_5 les parties de F et de G (67) qui se rapportent à I_5. On peut écrire

$$F = \frac{3}{4}\int \varrho'(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\,d\psi \int s\,ds \Big/ \left[p + \frac{2(s^2+1)}{p} - \frac{(s^2-1)^2}{3p^3}\right] - (3\nu_1\nu_2 - c)\int \varrho''\,d\psi \int s\,ds \Big/ \frac{1}{p},$$

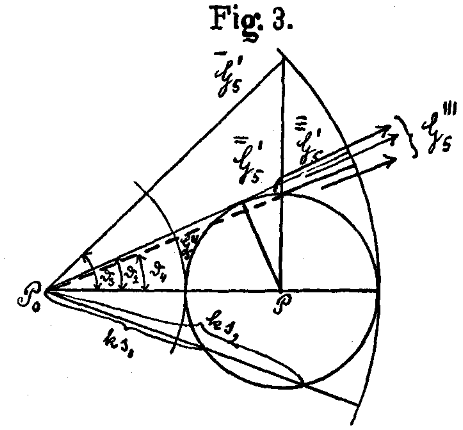
où ϱ' et ϱ'' sont deux valeurs moyennes de ϱ,

$$\therefore\; F_5 = -\left(\frac{16}{3} + 4\alpha^2\right)\int\limits_0^{2\pi} \varrho'(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\,d\psi + 2\int\limits_0^{2\pi} \varrho'(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\,d\psi \int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha} \frac{s(s^2+s+1)}{1+s}\,ds +$$

$$+ 2(3\nu_1\nu_2 - c)\int\limits_0^{2\pi} \varrho''\,d\psi - (3\nu_1\nu_2 - c)\int\limits_0^{2\pi} \varrho''\,d\psi \int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha} \frac{s\,ds}{1+s},$$

$$\therefore\; \lim_{\alpha=0} F_5 = -\frac{16}{3}\int\limits_0^{2\pi} \varrho'(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\,d\psi + 2(3\nu_1\nu_2 - c)\int\limits_0^{2\pi} \varrho''\,d\psi.$$

Fig. 3.



Si la densité ϱ est continue par rapport à r et à ϑ, on aura $\varrho' = \varrho'' = \varrho(k, 0, \psi)$. Si elle est continue aussi par rapport à ψ, les quantités ϱ' et ϱ'' sont indépendantes de ψ, et on trouvera

$$\lim_{\alpha=0} F_5 = -\tfrac{4}{3}\pi(3\nu_1\nu_2 - c)\varrho_k,$$

où ϱ_k est la densité au point P.

L'intégrale G_5 peut s'écrire (figg. 1 et 3)

$$G_5 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\vartheta_2}^{\pi} \sin^2\vartheta d\vartheta \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \varrho G s^3 ds + \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\vartheta_2} \sin^2\vartheta d\vartheta \int_{1-\alpha}^{s_1} \varrho G s^3 ds +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\vartheta_2} \sin^2\vartheta d\vartheta \int_{s_2}^{1+\alpha} \varrho G s^3 ds \equiv \int_0^{2\pi} (\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1) G'_5 d\psi + \int_0^{2\pi} (\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1) G''_5 d\psi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} (\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1) G'''_5 d\psi,$$

$$\sin\vartheta_2 = \alpha, \quad s_1 = \cos\vartheta - \sqrt{\alpha^2 - \sin^2\vartheta}, \quad s_2 = \cos\vartheta + \sqrt{\alpha^2 - \sin^2\vartheta}.$$

Or, on aura

$$G'_5 = \tfrac{3}{2}\bar{s}_1^3 \varrho_1 \int_{\vartheta_3}^{\pi} \sin^2\vartheta d\vartheta \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \left(\frac{s^2-1}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) ds + \tfrac{3}{2}\bar{s}_2^3 \varrho_2 \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \sin^2\vartheta d\vartheta \int_{1-\alpha}^{\frac{1}{u}} \left(\frac{s^2-1}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) ds +$$

$$+ \tfrac{3}{2}\bar{s}_3^3 \varrho_3 \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \sin^2\vartheta d\vartheta \int_{\frac{1}{u}}^{1+\alpha} \left(\frac{s^2-1}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) ds \equiv \overline{G'_5} + \overline{\overline{G'_5}} + \overline{\overline{\overline{G'_5}}},$$

où $\bar{s}_1$, ϱ_1, $\bar{s}_2$, ϱ_2, $\bar{s}_3$ et ϱ_3 sont des valeurs moyennes de s et de ϱ, et $\cos\vartheta_3 = \frac{1}{1+\alpha}$. De plus, on a

$$\tfrac{3}{2}\sin^2\vartheta \int \left(\frac{s^2-1}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) ds = -2\frac{s-u}{p} - \frac{s\sin^2\vartheta}{p^3},$$

$$\therefore\ \overline{G'_5} = \tfrac{3}{2}\bar{s}_1^3 \varrho_1 \int_{\varepsilon}^{\pi} \sin^2\vartheta d\vartheta \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \left(\frac{s^2-1}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) ds + \bar{s}_1^3 \varrho_1 \int_{\vartheta_3}^{\varepsilon} \left[\frac{2(1-u-\alpha)}{p_1} - \frac{2(1-u+\alpha)}{p_2}\right] d\vartheta -$$

$$- \bar{s}_1^3 \varrho_1 \alpha \int_{\vartheta_3}^{\varepsilon} \sin^2\vartheta \left(\frac{1}{p_1^3} + \frac{1}{p_2^3}\right) d\vartheta + \bar{s}_1^3 \varrho_1 \int_{\vartheta_3}^{\varepsilon} \sin^2\vartheta \left(\frac{1}{p_1^3} - \frac{1}{p_2^3}\right) d\vartheta,$$

où ε est une constante telle que $\frac{\pi}{2} > \varepsilon > \vartheta_3$, et où p_1 et p_2 sont les valeurs de p pour $s = 1 - \alpha$ et $s = 1 + \alpha$ resp., c. à. d.

$$(72)\quad \left\{\begin{array}{l} p_1 = \sqrt{2(1-u)(1-\alpha)+\alpha^2},\ p_2 = \sqrt{2(1-u)(1+\alpha)+\alpha^2}, \\ \therefore \text{ les quantités } \dfrac{\alpha}{p_1},\ \dfrac{\alpha}{p_2},\ \dfrac{1-u}{p_1^2} \text{ et } \dfrac{1-u}{p_2^2} \text{ sont} \leqq 1, \text{ et } p_1 < p_2. \\ \qquad \text{De plus on a} \\ p = \sqrt{(s-u)^2+\sin^2\vartheta} = \sqrt{(s-1)^2+2s(1-u)}, \\ \therefore \dfrac{\sin\vartheta}{p} \leqq 1,\ \dfrac{|s-u|}{p} \leqq 1 \text{ et } \dfrac{|s-1|}{p} \leqq 1. \end{array}\right.$$

Cela posé, la première intégrale du second membre a une limite nulle pour lim $\alpha = 0$. La seconde et la troisième ont chacune une limite pour lim $\alpha = 0$ qui est plus petite qu'une constante finie multipliée par ε; mais la quantité ε peut être choisie est arbitrairement petite, $\therefore$ les limites de la seconde et de la troisième intégrale sont nulles. Quant à la quatrième intégrale, on a

$$\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{p_1^3}-\frac{1}{p_2^3}\right) = \sin^2\vartheta\left(\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_1 p_2}+\frac{1}{p_2^2}\right)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right) < 3\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right).$$

Posons

$$(73)\quad \left\{\begin{array}{l} \Gamma \equiv \displaystyle\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)d\vartheta \\ 2(1-u) = \vartheta^2\lambda(\vartheta),\ 0 < \lambda(\vartheta) \leqq \lambda(0) = 1,\ \lambda'(\vartheta) < 0 \text{ pour } \varepsilon \geqq \vartheta \geqq 0, \\ \therefore\ p_1 > \sqrt{\lambda(\vartheta)(1-\alpha)}\sqrt{\vartheta^2+\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}} \\ \qquad p_2 < \sqrt{\lambda(\vartheta)(1+\alpha)}\sqrt{\vartheta^2+\dfrac{\alpha^2}{(1+\alpha)\lambda(\varepsilon)}}, \end{array}\right.$$

$$\therefore\ \Gamma < \frac{1}{\sqrt{\lambda(\vartheta')}}\int_0^{\varepsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}}}-\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\dfrac{\alpha^2}{(1+\alpha)\lambda(\varepsilon)}}}\right]d\vartheta + g,$$

où ϑ' est une valeur moyenne de ϑ, et $\lim\limits_{\alpha=0} g = 0$,

$$\therefore\ \Gamma < \frac{1}{\sqrt{\lambda(\vartheta')}}\left[\log\frac{\sqrt{\varepsilon^2+\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}}+\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\dfrac{\alpha^2}{(1+\alpha)\lambda(\varepsilon)}}+\varepsilon}+\log\frac{\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{(1+\alpha)\lambda(\varepsilon)}}}{\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}}}\right]+g,$$

(74) $$\therefore \lim_{\alpha=0} \Gamma \leqq \frac{1}{2\sqrt{\lambda(\varepsilon)}} \log \frac{1}{\lambda(\varepsilon)} \overline{\overline{<}}\, e\varepsilon, \lim_{\varepsilon=0} e \text{ finie},$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} G'_5 = 0.$$

Pour $s = \frac{1}{u}$ on a $p = \operatorname{tg} \vartheta$,

$$\therefore \overline{\overline{G}}'_5 = \bar{s}_2^3 \varrho_2 \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \left[\frac{2(1-u-\alpha)}{p_1} - 2\sin\vartheta - \frac{\alpha \sin^3\vartheta}{p_1^3} - \frac{1-u}{u} \cdot \frac{\sin^2\vartheta}{\operatorname{tg}^3\vartheta} + \sin^2\vartheta \left(\frac{1}{p_1^3} - \frac{1}{\operatorname{tg}^3\vartheta}\right)\right] d\vartheta,$$

et comme dans le cas précédent on trouvera que la limite de $\overline{\overline{G}}''_5$ pour $\lim \alpha = 0$ devient la même que celle de l'intégrale

$$\bar{s}_2^3 \varrho_2 \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \sin^2\vartheta \left(\frac{1}{p_1^3} - \frac{1}{\operatorname{tg}^3\vartheta}\right) d\vartheta = \bar{s}_2^3 \varrho_2 \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \left\{\frac{\vartheta^2}{\left[\vartheta^2 + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta)}\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\vartheta}\right\} d\vartheta + g_1,$$

où $\lim_{\alpha=0} g_1 = 0$. Posons

(75) $$\Gamma' \equiv \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \left\{\frac{1}{\vartheta} - \frac{\vartheta^2}{\left[\vartheta^2 + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta)}\right]^{\frac{3}{2}}}\right\} d\vartheta,$$

$$\therefore 0 < \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \left\{\frac{1}{\vartheta} - \frac{\vartheta^2}{\left[\vartheta^2 + \frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right]^{\frac{3}{2}}}\right\} d\vartheta < \Gamma' < \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \left\{\frac{1}{\vartheta} - \frac{\vartheta^2}{\left[\vartheta^2 + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta_3)}\right]^{\frac{3}{2}}}\right\} d\vartheta.$$

En effectuant les intégrations, on trouvera

$$\Gamma' < \log \frac{\vartheta_3}{\sqrt{\vartheta_3^2 + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta_3)}} + \vartheta_3} + \log \frac{\sqrt{\vartheta_2^2 + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta_3)}} + \vartheta_2}{\vartheta_2} +$$

$$+ \frac{\vartheta_3}{\sqrt{\vartheta_3^2 + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta_3)}}} - \frac{\vartheta_2}{\sqrt{\vartheta_2^2 + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta_3)}}}$$

et une formule analogue pour la limite inférieure.

En observant que

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\alpha}{\vartheta_3} = 0 \text{ et } \lim_{\alpha=0} \frac{\alpha}{\vartheta_2} = 1$$

on trouvera enfin

(76)
$$\lim_{\alpha=0} \Gamma' = \log \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1) + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En supposant la densité ϱ continue par rapport à r et à ϑ, on aura

$$\lim_{\alpha=0} \bar{\bar{G}}'_5 = -\left[\log \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1) + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\varrho_k,$$

où $\varrho_k = \varrho(k, 0, \psi)$.

Par un calcul identique on trouvera

$$\lim_{\alpha=0} \bar{\bar{\bar{G}}}'_5 = -\lim_{\alpha=0} \bar{\bar{G}}'_5,$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} G'_5 = 0.$$

Dans l'intégrale G''_5 la fonction G ne change pas de signe, par conséquent nous pourrons écrire

$$G''_5 = -s_4^3 \varrho_4 \int_0^{\vartheta_2} d\vartheta \Big/_{1-\alpha}^{s_1} \left[\frac{2(s-u)}{p} + \frac{s \sin^2\vartheta}{p^3}\right],$$

où s_4 et ϱ_4 sont des valeurs moyennes de s et de ϱ. Comme $\dfrac{|s-u|}{p}$ est toujours $\leqq 1$, la limite pour $\lim \alpha = 0$ de G''_5 est la même que la limite de l'intégrale

$$-s_4^3 \varrho_4 \int_0^{\vartheta_2} \left(\frac{\vartheta^2}{\alpha^3} - \frac{\vartheta^2}{p_1^3}\right) d\vartheta,$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} G''_5 = -\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} - \log(\sqrt{2}+1)\right]\varrho_k.$$

Comme la fonction G change de signe dans l'intégrale G'''_5, il faut diviser G'''_5 en trois parties et écrire

$$G'''_5 = -s_5^3 \varrho_5 \int_{\vartheta_4}^{\vartheta_2} d\vartheta \Big/_{s_2}^{\frac{1}{u}} \left[\frac{2(s-u)}{p} + \frac{s \sin^2\vartheta}{p^3}\right] - s_6^3 \varrho_6 \int_{\vartheta_4}^{\vartheta_2} d\vartheta \Big/_{\frac{1}{u}}^{1+\alpha} \left[\frac{2(s-u)}{p} + \frac{s \sin^2\vartheta}{p^3}\right] -$$

$$- s_7^3 \varrho_7 \int_0^{\vartheta_4} d\vartheta \Big/_{s_2}^{1+\alpha} \left[\frac{2(s-u)}{p} + \frac{s \sin^2\vartheta}{p^3}\right],$$

où tg $\vartheta_4 = \alpha$, et où s_5, ϱ_5, s_6, ϱ_6, s_7 et ϱ_7 sont des valeurs moyennes de s et de ϱ. La différence $\vartheta_2 - \vartheta_4$ étant de l'ordre $\frac{\alpha^3}{2}$, on voit immédiatement que les deux premiers termes du second membre ont des limites nulles pour $\lim \alpha = 0$. La limite du troisième terme s'obtient de la même manière que pour G_5'', et on trouve ainsi

$$\lim_{\alpha=0} G_5''' = -\lim_{\alpha=0} G_5'',$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} G_5 = 0.$$

Mais

$$I_5 = F_5 + G_5,$$

$$(77) \qquad \therefore \lim_{\alpha=0} I_5 = \int_0^{2\pi} \varrho(k, 0, \psi)\left[2(3\nu_1\nu_2 - c) - \frac{16}{3}(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\right] d\psi,$$

où nous avons supposé que la fonction ϱ est continue par rapport à r et à ϑ au point P $(r = k,\ \vartheta = 0)$. Si la valeur de ϱ y est indépendante de ψ, on aura

$$(78) \qquad \lim_{\alpha=0} I_5 = -\tfrac{4}{3}\pi(3\nu_1\nu_2 - c)\varrho_k.$$

§ **13.** *Les intégrales I_3 et I_4.* L'intégrale I_3 peut s'écrire (63 et 67)

$$I_3 = F_3 + G_3$$

$$F_3 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{1-\varkappa}^{1-\alpha} s\,ds \int_{1-s}^{1+s} \varrho F dp = \int_0^{2\pi} d\psi \int_\alpha^{\varkappa} (1-\sigma)\, d\sigma \int_\sigma^{2-\sigma} \varrho F dp \text{ pour } s = 1 - \sigma.$$

Si l'on développe le dernier membre, on peut intégrer chaque terme par rapport à p pour une valeur moyenne de ϱ; puis on trouvera, en employant la relation $\sigma \leq p$, que tous les termes ont des limites finies pour $\lim \alpha = 0$, sauf peut-être la somme des termes qui proviennent de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_\alpha^{\varkappa} d\sigma \int_\sigma^{2-\sigma} \varrho \left[3\zeta_1\zeta_2 - c + 3(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\frac{\sigma^2}{p^2}\right]\frac{dp}{p^2}.$$

De même, on peut écrire

$$I_4 = F_4 + G_4,$$

et, en posant $s = 1 + \sigma$, on aura un résultat analogue pour F_4. Par soite, on peut écrire

$$(79)\quad \left\{ \begin{aligned} & F_3 + F_4 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \Big\{ \varrho_- \left[\frac{3\zeta_1\zeta_2 - c}{p_-^3} + \frac{3(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\sigma^2}{p_-^5} \right] + \\ & \qquad\qquad + \varrho_+ \left[\frac{3\zeta_1\zeta_2 - c}{p_+^3} + \frac{3(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\sigma^2}{p_+^5} \right] \Big\} d\sigma + f, \\ & \text{où } \lim_{\alpha=0} f \text{ est finie, et} \\ & \qquad \varrho_- \equiv \varrho(k - k\sigma, \vartheta, \psi), \qquad \varrho_+ \equiv \varrho(k + k\sigma, \vartheta, \psi) \\ & \qquad p_- \equiv \sqrt{2(1-u)(1-\sigma) + \sigma^2} \qquad p_+ \equiv \sqrt{2(1-u)(1+\sigma) + \sigma^2} \end{aligned} \right.$$

D'une manière analogue on trouvera qu'on peut écrire

$$(80)\quad \left\{ \begin{aligned} & G_3 + G_4 = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1) d\psi \int_0^{\varepsilon} \sin^2\vartheta d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \left[\varrho_- \frac{7\sigma^2 - 2\sigma}{p_-^5} + \varrho_+ \frac{7\sigma^2 + 2\sigma}{p_+^5} \right] d\sigma + g, \\ & \text{où } \lim_{\alpha=0} g \text{ est finie.} \end{aligned} \right.$$

Mais on a

$$u = \cos\vartheta = \frac{s^2 + 1 - p^2}{2s},$$

$$\therefore\ \sin^2\vartheta d\vartheta = \sqrt{(p^2 - 1 - s^2)(1 + s^2 - p^2)} \frac{p\,dp}{2s^2},$$

$$\therefore\ S \equiv \int_0^{\varepsilon} \sin^2\vartheta d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \varrho \frac{\sigma^2}{p_-^5} d\sigma = \frac{1}{2} \int_\alpha^\varkappa \frac{\sigma^2}{(1-\sigma)^2} d\sigma \int_\sigma^{p_\varepsilon} \varrho \sqrt{(p^2 - \sigma^2)(2 - \sigma^2 - p^2)} \frac{dp}{p^4},$$

$$p_\varepsilon \equiv \sqrt{2(1 - \cos\varepsilon)(1-\sigma) + \sigma^2};$$

pour $p = \sigma q$ et $p_-^2 = \vartheta^2 \lambda(\vartheta)(1-\sigma) + \sigma^2$ on trouvera

$$S = \varrho(k - k\sigma', \vartheta', \psi) \sqrt{1 - \frac{\vartheta'^2 \lambda(\vartheta')}{4}} \int_\alpha^\varkappa \frac{d\sigma}{(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}} \int_1^{\frac{1}{\sigma}p_\varepsilon} \sqrt{q^2 - 1} \frac{dq}{q^4},$$

σ' et ϑ' étant des valeurs moyennes de σ et de ϑ, $\varepsilon \geqq \vartheta \geqq 0$.

En effectuant les intégrations on aura

$$S = \tfrac{1}{3} \varrho(k - k\sigma', \vartheta', \psi) \sqrt{1 - \frac{\vartheta'^2 \lambda(\vartheta')}{4}} \cdot \frac{\varepsilon \sqrt{\lambda(\varepsilon)}}{\cos^2 \frac{1}{2}\varepsilon} \left[\frac{\varkappa}{p_\varkappa} - \frac{\alpha}{p_\alpha} + (1 - \cos\varepsilon) \left(\frac{1}{p_\alpha} - \frac{1}{p_\varkappa} \right) \right],$$

où $p_\varkappa = \sqrt{2(1-\cos\varepsilon)(1-\varkappa)+\varkappa^2}$, $p_\alpha = \sqrt{2(1-\cos\varepsilon)(1-\alpha)+\alpha^2}$,

$$\therefore |S| < \tfrac{2}{3}|\varrho|_{\max} \cdot \frac{\varepsilon}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \tag{81}$$

On trouvera donc facilement qu'on peut écrire

$$G_3 + G_4 = 3\int_0^{2\pi} (\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1)d\psi \int_0^{\varepsilon} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^{\varkappa} \left(\frac{\varrho_+}{p_+^5} - \frac{\varrho_-}{p_-^5}\right)\sigma d\sigma + g + \varepsilon g', \tag{82}$$

où $\lim\limits_{\alpha=0} g'$ est une quantité finie. Or cette formule (82) peut être simplifiée. En effet, on a identiquement

$$\frac{\varrho_+}{p_+^5} - \frac{\varrho_-}{p_-^5} = (\varrho_+ - \varrho_-)\frac{1}{p'^5} - \varrho_+\left(\frac{1}{p'^5} - \frac{1}{p_+^5}\right) - \varrho_-\left(\frac{1}{p_-^5} - \frac{1}{p'^5}\right).$$

Posons

$$p' = \sqrt{2(1-u)+\sigma^2},$$

$$\therefore \int_0^{\varepsilon} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^{\varkappa} \left(\frac{1}{p'^5} - \frac{1}{p_+^5}\right)\sigma d\sigma = \tfrac{1}{3}\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1}{p_0^3} - \frac{1}{p_2^3}\right)\sin^2\vartheta\, d\vartheta + S',$$

où $\lim\limits_{\alpha=0} S'$ est finie, et $p_0 \equiv \sqrt{2(1-u)+\alpha^2}$. De plus on a

$$\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1}{p_1^3} - \frac{1}{p_2^3}\right)\sin^2\vartheta\, d\vartheta = \int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)\left(\frac{\sin^2\vartheta}{p_1^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{p_1 p_2} + \frac{\sin^2\vartheta}{p_2^2}\right)d\vartheta < 3\Gamma,$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0}\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1}{p_1^3} - \frac{1}{p_2^3}\right)\sin^2\vartheta\, d\vartheta \text{ finie.} \tag{83}$$

D'où il suit que

$$\lim_{\alpha=0}\int_0^{\varepsilon}\sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^{\varkappa}\left(\frac{1}{p'^5} - \frac{1}{p_+^5}\right)\sigma d\sigma = \text{une quantité finie.} \tag{84}$$

De même on trouvera

$$\lim_{\alpha=0}\int_0^{\varepsilon}\sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^{\varkappa}\left(\frac{1}{p_-^5} - \frac{1}{p'^5}\right)\sigma d\sigma = \text{une quantité finie.} \tag{85}$$

Si l'on pose

(86) $$\bar{p} = \sqrt{\vartheta^2 + \sigma^2},$$

on aura

$$\int_0^\varepsilon \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^\chi \left(\frac{1}{p'^5} - \frac{1}{\bar{p}^5}\right)\sigma\, d\sigma = \tfrac{1}{3}\int_0 \left(\frac{1}{p_0^3} - \frac{1}{\bar{p}_0^3}\right)\sin^2\vartheta\, d\vartheta + S'' < \Gamma'' + S'',$$

où $\lim\limits_{\alpha=0} S''$ est finie, $\bar{p}_0 = \sqrt{\vartheta^2 + \alpha^2}$ et

$$\Gamma'' \equiv \int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\bar{p}_0}\right) d\vartheta.$$

$\lim\limits_{\alpha=0} \Gamma''$ est finie. En effet, posons $2(1-u) = \vartheta^2\lambda(\vartheta)$, $\vartheta = \alpha\varphi$, $1 \leqq w < \frac{\varepsilon}{\alpha}$,

$$\therefore\ \Gamma'' = \int_0^w \left[\frac{1}{\sqrt{\varphi^2\lambda(\alpha\varphi) + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}\right] d\varphi + \int_w^{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda(\vartheta)}\sqrt{1 + \frac{1}{\varphi^2\lambda}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varphi^2}}}\right]\frac{d\varphi}{\varphi}.$$

La limite pour $\alpha = 0$ de la première intégrale du second membre est $= 0$. La seconde intégrale peut s'écrire

$$\int_{w\alpha}^\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2\lambda(\vartheta)}} - \frac{1}{\vartheta}\right] d\vartheta + a, \quad \lim_{\alpha=0} a = 0,$$

$$\therefore\ \lim_{\alpha=0} \Gamma'' = \int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} - \frac{1}{\vartheta}\right) d\vartheta = \log\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon}{\frac{1}{4}\varepsilon} = \beta\varepsilon, \quad \lim_{\varepsilon=0}\beta \text{ finie, donc etc.}$$

En substituant

$$\frac{1}{p'^5} = \left(\frac{1}{p'^5} - \frac{1}{\bar{p}^5}\right) + \frac{1}{\bar{p}^5},$$

nous pourrons donc écrire (82)

(87) $$\begin{cases} G_3 + G_4 = 3\int_0^{2\pi} (\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1)\, d\psi \int_0^\varepsilon \vartheta^2 d\vartheta \int_\alpha^\chi P_- \frac{\sigma\, d\sigma}{\bar{p}^5} + g_3, \quad \lim\limits_{\alpha=0} g_3 \text{ finie,} \\ P_- \equiv \varrho(k + k\sigma, \vartheta, \psi) - \varrho(k - k\sigma, \vartheta, \psi), \quad \bar{p} \equiv \sqrt{\vartheta^2 + \sigma^2}. \end{cases}$$

La formule (79) peut être simplifiée de la même manière. On aura

$$o < \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \left(\frac{1}{p_-^3} - \frac{1}{p_+^3}\right) d\sigma = -\alpha \int_0^\pi \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} + f'' < f'',$$

où $\lim\limits_{\alpha=0} f''$ est finie, $\therefore$ la limite pour $\alpha = o$ de la première intégrale est finie.

De plus on a

$$\frac{1}{p_-^3} - \frac{1}{p_+^3} > \frac{1}{p_-^3} - \frac{1}{p'^3},$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \varrho \left(\frac{1}{p_-^3} - \frac{1}{p'^3}\right) d\sigma \text{ est finie.}$$

De même nous trouverons

$$o < \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \left(\frac{1}{p'^3} - \frac{1}{p^3}\right) d\sigma = -\alpha \int_0^\pi \left(\frac{1}{p'_0} - \frac{1}{p_0}\right) \frac{d\vartheta}{\vartheta} + f''' < f''',$$

où $\lim\limits_{\alpha=0} f'''$ est finie, $\therefore$ la limite pour $\alpha = o$ de la première intégrale est finie.

En intégrant par rapport à σ nous trouverons

$$\lim_{\alpha=0} \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \left(\frac{1}{p_-^5} - \frac{1}{p_+^5}\right) \sigma^2 d\sigma = \text{une quantité finie,}$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \varrho \left(\frac{1}{p_-^5} - \frac{1}{p'^5}\right) \sigma^2 d\sigma = \text{une quantité finie.}$$

Enfin nous aurons

$$o < \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \left(\frac{1}{p'^5} - \frac{1}{p^5}\right) \sigma^2 d\sigma = \int_\alpha^\varkappa \sigma^2 d\sigma \int_0^\varepsilon \left(\frac{\sin\vartheta}{p'^5} - \frac{\vartheta}{p^5}\right) d\vartheta + m, \text{ où } \lim_{\alpha=0} m \text{ est finie.}$$

En intégrant par rapport à ϑ, on trouvera que le second membre est $< m$, $\therefore$ la première intégrale a une limite finie pour $\lim \alpha = o$.

Des considérations analogues s'appliquent à l'intégrale F_4. D'où le résultat:

$$
(88) \qquad \begin{cases} F_3 + F_4 = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int\limits_{\alpha}^{\chi} P_+ \left\{ 3\zeta_1\zeta_2 - c + 3(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\dfrac{\sigma^2}{\bar{p}^2} \right\} \dfrac{d\sigma}{\bar{p}^3} + f_3 \\ P_+ \equiv \varrho(k + k\sigma, \vartheta, \psi) - \varrho(k - k\sigma, \vartheta, \psi), \end{cases}
$$

où $\lim\limits_{\alpha=0} f_3$ est finie. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant $\alpha = 0$:

Théorème. *Soient*

$$
(89) \qquad \begin{cases} H_1 \equiv \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int\limits_{\alpha}^{\chi} P_+ \left[3\zeta_1\zeta_2 - c + 3(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\dfrac{\sigma^2}{\bar{p}^2} \right] \dfrac{d\sigma}{\bar{p}^3} \\ H_2 \equiv 3\int\limits_0^{2\pi} (\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1)\, d\psi \int\limits_0^{\varepsilon} \vartheta^2 d\vartheta \int\limits_{\alpha}^{\chi} P_- \sigma \dfrac{d\sigma}{\bar{p}^5}, \end{cases}
$$

où les quantités ζ_1 et ζ_2 sont données par les équations (66), *et les quantités $\bar{p}$, P_+ et P_- par les équations* (87), (79) *et* (89) *resp.; donc la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ ait une valeur finie au point $P(r = k,\ \vartheta = 0)$, est que*

$$
(90) \qquad H \equiv \lim_{\alpha=0} (H_1 + H_2) \text{ est finie.}
$$

Remarque. Posons

$$
\sigma = \bar{p} \cos\gamma, \qquad \vartheta = \bar{p} \sin\gamma, \qquad \cos\gamma = \tau,
$$

donc nous pourrons mettre les fonctions H_1 et H_2 sous les formes

$$
(91) \qquad \begin{cases} H_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{\frac{\alpha}{\varepsilon}}^{1} \{3\zeta_1\zeta_2 - c + 3(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\tau^2\}\, d\tau \int\limits_{\frac{\alpha}{\tau}}^{\varepsilon} P_+ \dfrac{d\bar{p}}{\bar{p}} + a_1 \\ H_2 = 3\int\limits_0^{2\pi} (\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1)\, d\psi \int\limits_0^{\gamma_1} \sin^2\gamma \cos\gamma\, d\gamma \int\limits_{\frac{\alpha}{\tau}}^{\varepsilon} P_- \dfrac{d\bar{p}}{\bar{p}} + a_2, \\ \text{où } \lim\limits_{\alpha=0} a_1 \text{ et } \lim\limits_{\alpha=0} a_2 \text{ sont finies, } \cos\gamma_1 = \dfrac{\alpha}{\varepsilon}. \end{cases}
$$

Cas particulier. Soit ϱ une fonction indépendante de r, c. à. d. soit

$$
\varrho = \varrho(\vartheta, \psi),
$$

$$\therefore\ H_1 + H_2 = 2\int_0^{2\pi}(3\zeta_1\zeta_2 - c)\,d\psi\int_0^{\varepsilon}\varrho\left[\frac{\varkappa}{(\vartheta^2+\varkappa^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\alpha}{(\vartheta^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{d\vartheta}{\vartheta} +$$

$$+ 2\int_0^{2\pi}(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\,d\psi\int_0^{\varepsilon}\varrho\left[\frac{\varkappa^3}{(\vartheta^2+\varkappa^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha^3}{(\vartheta^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

En intégrant pas rapport à ϑ pour des valeurs moyennes de ϱ, on trouvera qu'on peut écrire

$$H_1 + H_2 = 2\int_0^{2\pi}(\nu_1\nu_2 - c + 2\zeta_1\zeta_2)\,d\psi\int_\alpha^{\varepsilon}[\varrho(\vartheta,\psi) - \varrho(0,0)]\frac{d\vartheta}{\vartheta} + \bar{a}, \tag{92}$$

où $\lim\limits_{\alpha=0}\bar{a}$ est finie.

Corollaires. *La dérivée* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ *est finie, 1° si pour toutes les valeurs de* σ

$$\lim_{\alpha=0}\int_0^{\varepsilon}|\varrho(k+k\sigma,\vartheta,\psi) - \varrho(k,0,0)|\,\frac{d\vartheta}{\vartheta}\ \textit{est finie},\ -\varkappa\leqq\sigma\leqq\varkappa, \tag{93}$$

ou 2° si pour toutes les valeurs de γ

$$\lim_{\alpha=0}\int_\alpha^{\varepsilon}[\varrho(k+k\bar{p}\cos\gamma,\ \bar{p}\sin\gamma,\ \psi) - \varrho(k,0\,0)]\frac{d\bar{p}}{\bar{p}}\ \text{est finie},\ 0\leqq\gamma\leqq\pi, \tag{94}$$

ou enfin 3° si pour toutes les valeurs de $\bar{p}$

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{\alpha=0}\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\gamma_1}|P_+\{3\zeta_1\zeta_2 - c + 3(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\cos^2\gamma\}\sin\gamma\ + \\ &\qquad + 3P_-(\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1)\sin^2\gamma\cos\gamma|\log\frac{\cos\gamma}{\alpha}\,d\gamma\ \textit{est finie}, \\ &\qquad\qquad \alpha\leqq\bar{p}\leqq\varepsilon,\ \cos\gamma_1 = \frac{\alpha}{\varepsilon}. \end{aligned}\right. \tag{95}$$

§ 14. *Continuité de la dérivée* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$. Si la densité ϱ est continue, la fonction L_1 est continue (54), par suite la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ est aussi continue pour tous les points $(k > 0)$ où la fonction K est finie et continue (42); elle est continue à l'origine, si $\lim\limits_{k=0} K = K_0$, où K_0 est la valeur de K à l'origine. Dans ce paragraphe, nous supposerons que la densité ϱ est toujours continue. Donc nous trouverons que pour $k > 0$ les quantités I_1, I_2 et $\lim\limits_{\alpha=0} I_5$ (63) sont continues par rapport à k. De plus nous trouverons que les limites pour $\alpha = 0$ de toutes les intégrales dont la somme est égale à

$$I_3 + I_4 - (H_1 + H_2);$$

sont continues par rapport à k pour $k \geqq 0$ (§ 13). D'où l'on conclut que la fonction K est continue par rapport à k pour $k > 0$, si $\lim\limits_{\alpha=0} (H_1 + H_2)$ est finie et continue. Soient maintenant I_1^0, I_3^0, I_4^0 et I_5^0 ce que deviennent les intégrales I_1, I_3, I_4 et I_5, lorsqu'on y remplace ϱ par ϱ_0, et soit $I_2^0 = \lim\limits_{k=0} I_2$. Nous trouverons

$$(96) \qquad \begin{cases} I_1^0 = \frac{4}{3}\pi \varrho_0 (3\,\nu_1 \nu_2 - c)(1 - \varkappa)^3 \\ \lim\limits_{\alpha=0} I_3^0 = \frac{4}{3}\pi \varrho_0 (3\,\nu_1 \nu_2 - c)[1 - \overline{1 - \varkappa}^3] \\ I_4^0 = 0 \\ \lim\limits_{\alpha=0} I_5^0 = -\frac{4}{3}\pi \varrho_0 (3\,\nu_1 \nu_3 - c). \end{cases}$$

De plus nous aurons

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} \varrho (3\,v_1 v_2 - c)\, s^2 \frac{ds}{p^3}$$

$$(3\,v_1 v_2 - c)\frac{s^2}{p^3} = (3\,u_1 u_2 - c)\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} Q, \ \lim_{s=\infty} Q \text{ finie},$$

et identiquement [(69) et § 4 ζ)]

$$\varrho_0 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} (3\,v_1 v_2 - c)\, s^2 \frac{ds}{p^3} = 0\,.$$

D'où il suit qu'on peut écrire

$$(97) \qquad I_3^0 = \lim_{k=0} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} (3\, u_1 u_2 - c) \sin \vartheta\, d\, \vartheta \int_k^a \varrho \frac{dr}{r} = K_0,$$

$$\therefore \lim_{a=0} (I_1^0 + I_2^0 + I_3^0 + I_4^0 + I_5^0) = K_0.$$

Mais

$\lim\limits_{a=0} (I_1 + I_2 + I_5)$ est finie et continue pour $k = 0$, si la quantité K_0 est finie, et
$\lim\limits_{a=0} (I_3 + I_4)$ » » » » » $k = 0$ » » » $\lim\limits_{a=0} (H_1 + H_2)$ est
finie et continue,

$$\therefore \lim_{k=0} \lim_{a=0} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) = \lim_{a=0} (I_1^0 + I_2^0 + I_3^0 + I_4^0 + I_5^0) = K_0$$

sous les mêmes conditions. Donc nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si la densité ϱ est continue, la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ soit continue au point $P(r = k,\ \vartheta = 0,\ k > 0)$ pour un déplacement suivant l'axe $\vartheta = 0$ est que la quantité* (89)

$$(98) \qquad H \equiv \lim_{a=0} (H_1 + H_2)$$

est finie et continue en ce même point pour le même déplacement. Pour que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ soit continue à l'origine il faut et il suffit qu'elle y soit finie, et de plus que

$$(99) \qquad \lim_{k=0} H = H^0,$$

où H^0 est la valeur de H à l'origine.

§ **15.** *Changement brusque de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ à la surface d'un corps. Surface plane.* Soient ϱ_1 et ϱ_2 les densités supposées continues de deux corps, et

$$(42) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} = K + L_1.$$

Quand le point P se meut du corps dont la densité est ϱ_1 au corps dont la densité est ϱ_2, la quantité L_1 subit d'après (54) un changement brusque, dont la valeur est

$$(100)\qquad -\tfrac{4}{3}\pi(\varrho_2-\varrho_1)c.$$

Calculons la valeur de K dans le cas où la surface de séparation est plane, et où les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes.

1:o. Le point P est situé dans le plan de séparation des deux corps. Dirigeons l'axe des y suivant la normale du plan vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1, et prenons cet axe pour axe des coordonnées polaires. Dans ce cas la fonction ϱ est indépendante de ψ; elle est $=\varrho_1$ pour $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$, et $=\varrho_2$ pour $\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq \pi$,

$$(101)\ \therefore\ K_h = \varrho_1 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\,u_1 u_2 - c)\,\sin\vartheta\, d\vartheta \int_h^a \frac{dr}{r} + \varrho_2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (3\,u_1 u_2 - c)\,\sin\vartheta\, d\vartheta \int_h^a \frac{dr}{r} = 0.$$

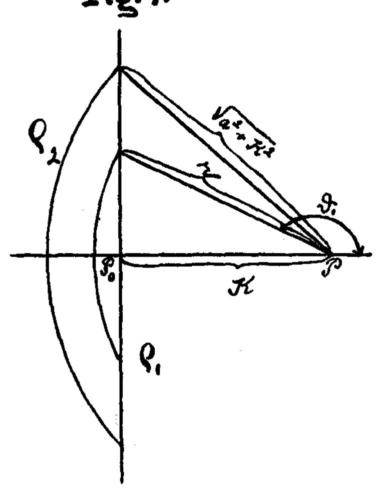
2:o. Si le point P est situé dans l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1 à la distance k du plan de séparation, nous prenons ce point comme origine des coordonnées polaires (fig. 4) et nous trouverons, en supposant $h<k$, cfr. (69)

$$K = \pi(3\,\mu_1\mu_2 - c)(\varrho_2-\varrho_1)\int_k^{\sqrt{a^2+k^2}} \frac{dr}{r}\int_{\vartheta_1}^{\pi} (3\cos^2\vartheta - 1)\sin\vartheta\, d\vartheta + e,\ \ \cos\vartheta_1 = -\frac{k}{r},\ \lim_{k=0} e = 0,$$

$$\therefore\ K = \tfrac{2}{3}\pi(3\,\mu_1\mu_2 - c)(\varrho_2-\varrho_1) + e_1,\ \lim_{k=0} e_1 = 0,$$

$$(102)\qquad \therefore\ K_1 \equiv \lim_{k=0} K = \tfrac{2}{3}\pi(3\,\mu_1\mu_2 - c)(\varrho_2-\varrho_1).$$

Fig. 4.



De même on aura pour la limite de K de l'autre côté du plan de séparation

$$(103)\qquad K_2 = \tfrac{2}{3}\pi(3\,\mu_1\mu_2 - c)(\varrho_1-\varrho_2).$$

La quantité K subit donc un changement brusque de

$$(104)\qquad -\tfrac{4}{3}\pi(3\,\mu_1\mu_2 - c)(\varrho_2-\varrho_1).$$

D'où le

Thèorème. *Lorsque le point P traverse la surface depuis le corps dont la densité est ϱ_1 jusqu'au corps dont la densité est ϱ_2, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ éprouve un changement brusque, dont la valeur est*

$$(105) \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\rho_1} = -4\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\mu_1\mu_2 .$$

Remarque I. *Ce changement est évidemment indépendant de la direction dans laquelle le point P s'approche de la surface.*

Remarque II. *Lorsque le point P se meut en partant du corps dont la densité est ϱ_1 et arrive dans la surface, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ n'éprouve aucun changement brusque, si μ_1 est* > 0 (49), *tout le changement* (105) *ayant lieu lorsque le point P part de la surface et arrive dans le corps dont la densité est ϱ_2.*

§ 16. *Changement brusque de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ à la surface d'un corps. Surface courbe.* Calculons maintenant la valeur de K dans le cas où la surface de séparation est courbe, les densités ϱ_1 et ϱ_2 étant toujours supposées constantes.

3:o. Le point P se trouve dans la surface elle-même. La valeur de K_h est donnée par les équations (cfr § 10)

$$(106) \quad \left\{ \begin{aligned} & K = \lim_{h=0} K_h \\ & K_h = (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi}(l + 3n)\,d\psi\int_h^a \sin\lambda \frac{dr}{r} + (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} m\,d\psi \int_h^a (1 - \cos^3\lambda)\frac{dr}{r} - \\ & \qquad\qquad - (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} n\,d\psi \int_h^a \sin^3\lambda \frac{dr}{r} \\ & l = 3\mu_1\mu_2 - c \\ & m = (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\cos\psi + (\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1)\sin\psi \\ & n = (\lambda_1\cos\psi + \nu_1\sin\psi)(\lambda_2\cos\psi + \nu_2\sin\psi) - \mu_1\mu_2 . \end{aligned} \right.$$

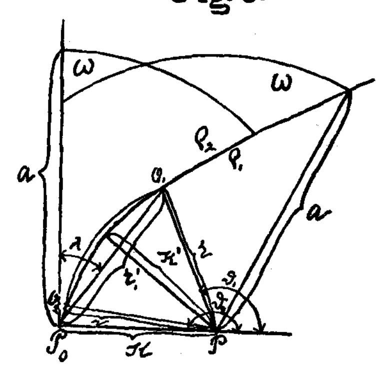
4:o. Le point P se trouve à l'intérieur du corps dont la densité est égale à ϱ_1 et s'approche indéfiniment du point P_0 de la surface (fig. 5). Prenons le point P comme origine et la droite P_0P comme axe des coordonnées polaires (r, ϑ, ψ). Posons $P_0P = k$, et soit k' la valeur minimum de r, $\therefore$ $k' \leqq k$. Dans ce cas il faut ajouter à l'expression de la quantité K du cas 2° le terme

$$
(107)\quad \left\{
\begin{aligned}
I &= (\varrho_2-\varrho_1)\int_0^{2\pi} d\psi \int_{k'}^{k} \frac{dr}{r} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (3\,u_1 u_2 - c)\,\sin\,\vartheta\, d\vartheta\, + \\
&\quad + (\varrho_2-\varrho_1)\int_0^{2\pi} d\psi \int_{k}^{a} \frac{dr}{r} \int_{u'}^{\frac{k}{r}} (3\,u_1 u_2 - c)\,du + e_2 \equiv I_1 + I_2 + e_2,\ \lim_{k=0} e_2 = 0\,,
\end{aligned}
\right.
$$

où e_2 se rapporte au domaine ω (fig. 5), et où

$$
u = -\cos\vartheta, \qquad u' = \frac{k - r'\sin\lambda}{r}, \qquad r^2 = r'^2 - 2\,kr'\sin\lambda + k^2, \qquad \sin\vartheta_1 = \frac{r'}{r}\cos\lambda,
$$

Fig. 5.



où $r' = P_0 Q$, Q étant un point de la surface, $\sin\lambda = \cos\,(P_0 Q,\ P_0 P)$, ϑ_1 et ϑ_2 sont les valeurs de ϑ qui correspondent aux points — supposés deux pour fixer les idées — où le cercle de rayon $r\,(k' < r \leqq k)$ coupe la section de la surface avec le plan $\psi = \text{const}$. Nous supposerons

$$
(108)\qquad \lim_{k=0} \frac{k'}{k} > 0\,,
$$

c. à. d. que le point P ne s'approche d'aucun autre point de la surface infiniment plus près que du point P_0. Dans ce cas

$$
\lim_{k=0} I_1 \text{ est toujours finie } (107).
$$

Pour l'étude de l'intégrale I_2 (107) nous posons

$$
(109)\quad \left\{
\begin{aligned}
& r = kt,\ r' = kt' \\
& \therefore\ t^2 = t'^2 - 2\,t'\sin\lambda + 1 \\
& I_2 = (\varrho_2-\varrho_1)\int_0^{2\pi} d\psi \int_1^{\frac{a}{k}} F\,\frac{dt}{t}\,,\ \text{où} \\
& F = (l + 3\,n)\frac{t'}{t}\sin\lambda + m\left[\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{t'^3}{t^3}\cos^3\lambda\right] - n\left[\frac{1}{t^3} - \left(\frac{1 - t'\sin\lambda}{t}\right)^3\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Décrivons dans le demi-plan $\psi = \text{const.}$ un demi-cercle sur P_0P comme diamètre, et soit Q_0 le point où la section de la surface coupe la circonférence du demi-cercle. De l'égalité

$$t^2 = t'^2 - 2\,t'\sin\lambda + 1$$

on trouvera pour tous les points de la courbe P_0Q_0

$$t' = \sin\lambda - \sqrt{t^2 - \cos^2\lambda}\,,$$

et pour tous les points de la courbe au delà de Q_0

$$t' = \sin\lambda + \sqrt{t^2 - \cos^2\lambda}\,.$$

Pour $t > 1$ il faut toujours employer la dernière formule. Soit w une constante > 2, $\therefore$ pour

$$t^2 > w^2 - 2\,w\sin\lambda + 1 \equiv t_0^2$$

on aura $t' > w$. Nous écrivons, t_0 étant > 1,

$$(109^*)\qquad I_2 = (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} d\psi \int_1^{t_0} \frac{F\,dt}{t} + (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} d\psi \int_{t_0}^{\frac{a}{k}} \frac{F\,dt}{t} \equiv I'_2 + I''_2\,,$$

où $\lim\limits_{k=0} I'_2$ est finie. Pour des grandes valeurs de t nous pourrons écrire

$$F = D + \frac{1}{t}P,\ \text{où} \lim_{t=\infty} P \text{ est finie, et}$$

$$(110)\qquad D = (l + 3n)\sin\lambda + m(1 - \cos^3\lambda) - n\sin^3\lambda.$$

De plus nous aurons

$$\frac{dt}{t} = \frac{(t' - \sin\lambda)\,dt' - t'\cos\lambda\,d\lambda}{t'^2 - 2\,t'\sin\lambda + 1} = \frac{dt'}{t'}\left[1 + \frac{1}{t'}P_1\right] - \cos\lambda\frac{d\lambda}{t'}\left[1 + \frac{1}{t'}P_2\right],$$

$\lim\limits_{t'=\infty} P_1$ finie, $\lim\limits_{t'=\infty} P_2$ finie.

D'où il suit

$$I''_2 = (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} d\psi \int_w^{\frac{a}{k}} D\frac{dt'}{t'} - k(\varrho_2 - \varrho_1)\int_{r'=wk}^{r'=a} D\cos\lambda\frac{d\lambda}{r'} + e_3,\ \lim_{k=0} e_3 \text{ finie.}$$

Nous faisons sur la surface l'hypothèse suivante

$$(111) \qquad \int_{r'=0}^{r'=a} |\lambda d\lambda| = \text{une quantité finie,}$$

$\therefore$ le second terme de l'expression de I''_2 reste finie pour lim $k = 0$. La limite de la première intégrale est finie ou infinie, selon que la quantité K (106) est finie ou infinie. D'où le théorème:

Théorème. *Si le point P s'approche indéfiniment du point P_0 de la surface commune de deux corps dont les densités sont constantes, la limite vers laquelle tend la dérivée $\frac{d^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ au point P est finie ou infinie, en même temps que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ au point P_0 indépendamment de la direction de la droite P_0P, pourvu qu'au point P_0 la surface jouisse de la propriété (111) et que le point P ne s'approche pas infiniment plus près d'aucun autre point de la surface que du point P_0 (108).*

En supposant que cette limite soit finie, nous en examinerons maintenant la valeur. Posons

$$\frac{k'}{k} = \cos\lambda',$$

$$\therefore I_1 = -(\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} d\psi \int_{\cos\lambda'}^{1} \frac{dt}{t} \Big/_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [(l + 3n)\cos\vartheta - m\sin^3\vartheta - n\cos^3\vartheta].$$

En supposant qu'au point P_0 la section de la surface ait une tangente bien déterminée, et en posant

$$\lim_{k=0} \lambda = \lambda_0, \ \lim_{k=0} \vartheta_1 = \vartheta_1^0 \text{ et } \lim_{k=0} \vartheta_2 = \vartheta_2^0,$$

nous trouverons

$$\lim_{k=0} \lambda' = \lambda_0, \ (\vartheta_1^0 + \lambda_0) + (\vartheta_2^0 + \lambda_0) = 2\pi$$

$$\cos(\vartheta_1^0 + \lambda_0) = \cos(\vartheta_2^0 + \lambda_0) = -\frac{\cos\lambda_0}{t}.$$

D'où l'on déduit en intégrant

$$
(112)\quad \begin{cases}
I_1^0 \equiv \lim\limits_{k=0} I_1 = 2(\varrho_2-\varrho_1)\displaystyle\int_0^{2\pi}[(l+3n)A_1+mB_1+nC_1]\,d\psi \\[2ex]
A_1 = -\sin^2\lambda_0+\sin\lambda_0\log\dfrac{1+\sin\lambda_0}{\cos\lambda_0} \\[2ex]
B_1 = -\tfrac{1}{3}\sin\lambda_0\cos\lambda_0[4\cos^4\lambda_0-10\cos^2\lambda_0+3]-\cos^3\lambda_0\log\dfrac{1+\sin\lambda_0}{\cos\lambda_0} \\[2ex]
C_1 = \tfrac{4}{3}\sin^6\lambda_0-\sin^3\lambda_0\log\dfrac{1+\sin\lambda_0}{\cos\lambda_0}\,.
\end{cases}
$$

L'intégrale I_2 peut s'écrire

$$I_2=(\varrho_2-\varrho_1)\int_0^{2\pi}d\psi\int_1^{\frac{a}{k}}D\frac{dt}{t}+(\varrho_2-\varrho_1)\int_0^{2\pi}d\psi\int_1^{\frac{a}{k}}(F-D)\frac{dt}{t}\equiv\bar{I}_2+\bar{\bar{I}}_2,$$

$$\therefore\ \bar{I}_2=(\varrho_2-\varrho_1)\int_0^{2\pi}d\psi\int_1^{t_0}D\frac{dt}{t}+(\varrho_2-\varrho_1)\int_0^{2\pi}d\psi\int_{t_0}^{\frac{a}{k}}D\frac{dt}{t}.$$

La limite pour $k=0$ de la première intégrale du second membre est $=$

$$=(\varrho_2-\varrho_1)\int_0^{2\pi}D_0\log t_0\,d\psi,$$

où $D_0=\lim\limits_{k=0}D$. Quant à la seconde intégrale, nous écrivons

$$\int_{t_0}^{\frac{a}{k}}D\frac{dt}{t}=\int_{w}^{\frac{a}{k}}D\frac{t'-\sin\lambda}{t'^2-2t'\sin\lambda+1}\,dt'-\int_{r'=wk}^{r'=a}D\cos\lambda\frac{t'}{t^2}\,d\lambda+e',\ \lim_{k=0}e'=0\,.$$

La première intégrale du second membre peut s'écrire

$$\int_{w}^{\frac{a}{k}}D\left(\frac{t'-\sin\lambda}{t'^2-2t'\sin\lambda+1}-\frac{1}{t'}\right)dt'+\int_{w}^{\frac{a}{k}}D\frac{dt'}{t'}\,.$$

La limite pour $k = 0$ du premier terme est =

$$= - D_0 \log \frac{t_0}{w},$$

et celle du second terme est (106) =

$$= K - D_0 \log w.$$

De plus on aura

$$\int\limits_{r'=wk}^{r'=a} D \cos\lambda \frac{t'}{t^2} d\lambda = \int\limits_{r'=wk}^{r'=w'k} D \cos\lambda \frac{t'}{t^2} d\lambda + \int\limits_{t'=w'}^{t'=\frac{a}{k}} D \cos\lambda \frac{t'}{t^2} d\lambda,$$

où w' est une constante qui peut être supposée assez grande pour que la limite pour $k = 0$ du dernier terme soit plus petite qu'une quantité donnée d'avance. Dans le premier terme du second membre, la quantité $\frac{D}{\lambda} \cos\lambda \frac{t'}{t^2}$ est toujours finie et aura, pour $k = 0$, une limite finie $< \left| \left(\frac{D}{\lambda}\right)_0 \right| \frac{w'}{t_0^2}$, mais les limites de l'intégration pour $d\lambda$ sont infiniment petites, par suite, d'après la condition (111),

$$\lim_{k=0} \int\limits_{r'=wk}^{r'=a} D \cos\lambda \frac{t'}{t^2} d\lambda = 0,$$

$$\therefore\ \bar{I}_2^0 \equiv \lim_{k=0} \bar{I}_2 = K.$$

Pour l'évaluation de $\lim\limits_{k=0} \bar{\bar{I}}_2$, on n'a qu'à faire $k = 0$ dans cette intégrale, et nous trouverons après l'intégration

$$(113) \begin{cases} \bar{\bar{I}}_2^0 \equiv \lim\limits_{k=0} \bar{\bar{I}}_2 = (\varrho_2 - \varrho_1) \int\limits_0^{2\pi} [(l + 3n) A_2 + m B_2 + n C_2] d\psi \\ A_2 = -\left[1 - 2\sin\lambda_0 + \log \frac{1 + \sin\lambda_0}{2}\right] \sin\lambda_0 \\ B_2 = -\frac{4}{3} + \log 2 + 2\frac{1}{3}\cos^3\lambda_0 - \cos\lambda_0 + \cos\lambda_0 \sin\lambda_0 - \frac{20}{3}\sin\lambda_0 \cos^3\lambda_0 + \\ \qquad + \frac{8}{3}\sin\lambda_0 \cos^5\lambda_0 + \cos^3\lambda_0 \log\frac{1 + \sin\lambda_0}{2} \\ C_2 = -\sin\lambda_0 + \sin^2\lambda_0 + 2\frac{1}{3}\sin^3\lambda_0 - \frac{8}{3}\sin^6\lambda_0 + \sin^3\lambda_0 \log\frac{1 + \sin\lambda_0}{2}. \end{cases}$$

D'où le résultat:

$$I^0 \equiv \lim_{k=0} I = I_1^0 + \bar{\bar{I}}_2^0 + K, \tag{114}$$

où il faut supprimer le terme I_1^0 du second membre, si λ_0 est < 0. Pour $\lambda_0 = 0$ nous trouverons $I_1^0 = \bar{\bar{I}}_2^0 = 0$,

$$\therefore\ I^0 = K. \tag{114*}$$

L'égalité (114*) indique que dans le cas considéré $\lim\limits_{k=0} \dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ diffère de la valeur de la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ au point P_0 de la même quantité que si la surface avait été plane au point P_0, pourvu que la droite P_0P soit normale au plan tangent au même point P_0. Mais les quantités I_1^0 et $\bar{\bar{I}}_2^0$ de l'égalité (114) ne dépendent que des directions de ds_1 et ds_2 et de la fonction $\lambda_0(\psi)$ qui restent les mêmes, si la surface est remplacée par le plan tangent. Par suite, la quantité $I^0 - K$ est la même pour la surface actuelle que pour un plan, même dans le cas où la droite P_0P a une direction quelconque oblique au plan tangent. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si le point P s'approche indéfiniment du point P_0 de la surface commune de deux corps dont les densités sont constantes, suivant une droite qui ne touche par la surface, et si au point P_0 la surface jouit de la propriété* (111), *enfin, si elle y admet un plan tangent bien déterminée, donc* (§ 15 2° *Rem. II*)

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{P_0} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1} &= 0, \text{ si } \mu_1 \geqq 0, \\ &= -4\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\mu_1\mu_2, \text{ si } \mu_1 \leqq 0, \text{ et} \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1} &= -4\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\mu_1\mu_2, \end{aligned}\right. \tag{105*}$$

μ_1 et μ_2 étant les cosinus des angles que font les directions ds_1 et ds_2 avec la normale au point P_0 dirigée vers l'interieur du corps dont la densité est $= \varrho_1$

Remarque I. Si dans la quantité K_h rapportée au point P_0 (106) on pose $h = k$, on trouvera, en passant à la limite, que la quantité

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{P_0} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1}$$

est finie, même dans le cas où ces deux termes deviennent infinis séparément. Sa valeur est donnée par les seconds membres des égalités (105*), augmentés dans le cas général par la quantité

$$-(I_1^0 + \overline{\overline{I}}_2^0),\ \text{équ. (112, 113)}.$$

Remarque II. Soit la densité ϱ une fonction qui est continue dans chacun des deux corps, et soient ϱ_1 et ϱ_2 les limites vers lesquelles tend la fonction ϱ des deux côtés de leur surface commune au point P_0. Si ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes, et si ϱ' est une fonction qui est $= \varrho - \varrho_1$ et $= \varrho - \varrho_2$ dans les deux corps resp., cette fonction est continue le long de la droite $P_0 P$ jusqu'au point P_0. Soit K' ce que déviendra la quantité K quand on y remplace ϱ par ϱ'. *Si la fonction ϱ' satisfait à la condition de continuité de K'* (99), donc le changement brusque de la quantité K au point P_0 reste le même que si les densités des deux corps avaient été ϱ_1 et ϱ_2 resp. Par suite, *le changement brusque de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ dans ce cas est le même que si les densités des deux corps avaient été constantes.*

§ **17.** *Équation de Poisson généralisée.* Si les trois dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ existent, nous pourrons écrire

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = K_x + L_x$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = K_y + L_y$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = K_z + L_z\,,$$

les quantités K_x, L_x etc. ayant des significations analogues à celles des K et des L des paragraphes précédents. On peut écrire

$$K_x = K_{hx} + \varepsilon_{hx}\,,$$

où

$$K_{hx} = \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} d\tau$$

$$\lim_{h=0} \varepsilon_{hx} = 0$$

et des équations analogues pour K_y et K_z,

$$\therefore\ K_x + K_y + K_z = \int_{(h)}^{a} \varrho \Delta \frac{1}{r} d\tau + \varepsilon_{hx} + \varepsilon_{hy} + \varepsilon_{hz} = \varepsilon_{hx} + \varepsilon_{hy} + \varepsilon_{hz}\,.$$

Le premier membre étant indépendent de h, il faut que

$$\varepsilon_{hx} + \varepsilon_{hy} + \varepsilon_{hz} = 0$$

(115) $$\therefore\ K_x + K_y + K_z = 0,$$

d'où il suit (12)

(116) $$\begin{cases} \varDelta V = L_x + L_y + L_z = \displaystyle\int_{(\Omega)} \varrho_0 [\varphi(u_x) + \varphi(u_y) + \varphi(u_z)] d\omega \\ \varphi(u) = 1 - 3u - 5u^2 - (3u^2 - 1)\log \dfrac{1-u}{2} \\ u_x = \cos(r, x),\ u_y = \cos(r, y),\ u_z = \cos(r, z), \end{cases}$$

$d\omega$ étant l'élément de surface de la sphère de rayon unité décrite autour du point P comme centre; l'intégration s'étend sur toute cette surface (Ω).

L'égalité (116) *est la forme la plus générale de l'équation de Poisson.*

Si la densité ϱ est continue, on retrouve l'équation de Poisson ordinaire

(117) $$\varDelta V = -4\pi\varrho.$$

Corollaire. *La fonction $\varDelta V$ existe toujours, même si les dérivées* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ *n'existent pas séparément, si on définit le symbole $\varDelta$ de la manière suivante*

(118) $$\begin{cases} \varDelta V = \lim\limits_{\substack{h_1=0\\h_2=0\\h_3=0}} \displaystyle\sum_{xyz} \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial V(x+h_1, x, z)}{\partial x} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}\right], \\ \text{où } \lim \dfrac{h_\lambda}{h_\mu} \neq 0 \text{ et déterminée.} \end{cases}$$

En effet posons

(119) $$\begin{cases} \lim \dfrac{h}{h_1} = c_x,\ \lim \dfrac{h}{h_2} = c_y,\ \lim \dfrac{h}{h_3} = c_z \\ \therefore\ \varDelta V = \displaystyle\sum_{xyz} L_x + \lim \sum_{xyz} \int_{(\Omega)} (3u_x^2 - 1) d\omega \int_{h_1}^{h} \varrho \frac{dr}{r} = \sum_{xyz} L_x + \sum_{xyz} \log c_x \int_{(\Omega)} \varrho_0 (3u_x^2 - 1) d\omega. \end{cases}$$

Si la densité ϱ est continue, le second terme du second membre s'évanouit, et on retrouve l'égalité (117).

Exemple. Soit

$$\varrho = \frac{(\xi - x)^2}{r^2 \log \frac{1}{r}},$$

$$\therefore \varrho_0 = 0,$$

$$\therefore \Delta V = \sum L_x = 0,$$

quoique la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ soit infinie (20).

Cas particuliers. 1°. Si une des dérivées, par ex. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, existe, la fonction ΔV est indépendante de la constante c_x à cause de l'égalité (13).

2°. Si la somme $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ existe, donc $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe. En effet, dans ce cas la définition (118) de la fonction ΔV se réduit à

$$\Delta V = \lim_{h_1=0} \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial V(x+h_1, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}\right] + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right),$$

$\therefore$ la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ n'est pas infinie,

$$\therefore \int_{(\Omega)} \varrho_0 (3u_x^2 - 1)\, d\omega = 0,$$

$\therefore$ la fonction ΔV est indépendante de la quantité c_x,

$\therefore$ la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ est finie et bien déterminée.

Valeur de ΔV à la surface d'un corps. Soit le point $P(x, y, z)$ un point de la surface de séparation de deux corps à densités constantes ϱ_1 et ϱ_2, où la surface a un plan tangent bien déterminé, et soient μ_x, μ_y et μ_z les cosinus des angles ϑ_x, ϑ_y et ϑ_z que font respectivement les axes des coordonnées avec la normale, dirigée vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1. Nous aurons (49)

$$(120) \quad \left\{\begin{aligned} &\Delta V = -4\pi\varrho_1, \text{ si } \mu_x > 0,\ \mu_y > 0,\ \mu_z > 0; \\ &\Delta V = -4\pi\varrho_1 - 4\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\mu_z^2, \text{ si } \mu_x > 0,\ \mu_y > 0,\ \mu_z < 0; \\ &\quad = -4\pi(\varrho_1 \sin^2\vartheta_z + \varrho_2 \cos^2\vartheta_z),\ \pi \geqq \vartheta_z \geqq \frac{\pi}{2}; \\ &\Delta V = -4\pi\varrho_2 - 4\pi(\varrho_1 - \varrho_2)\mu_x^2, \text{ si } \mu_x > 0,\ \mu_y < 0,\ \mu_z < 0; \\ &\quad = -4\pi(\varrho_2 \sin^2\vartheta_x + \varrho_1 \cos^2\vartheta_x),\ 0 \leqq \vartheta_x \leqq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right.$$

Lorsque le point P traverse la surface en partant du côté où la densité est ϱ_1, la fonction ΔV éprouve un changement brusque, dont la valeur est

$$(\Delta V)_{\rho_2} - (\Delta V)_{\rho_1} = -4\pi(\varrho_2 - \varrho_1). \tag{121}$$

Remarque. Lorsque le point P se meut en partant du corps dont la densité est ϱ_1 et arrive dans la surface, la fonction ΔV n'éprouve 1° aucun changement brusque, si μ_x, μ_y et μ_z sont tous >0; elle éprouve 2° un changement brusque de $-4\pi(\varrho_2-\varrho_1)\mu_z^2$, si μ_x et μ_y sont >0, mais $\mu_z<0$, et 3° de $-4\pi(\varrho_2-\varrho_1)(\mu_y^2+\mu_z^2)$, si μ_x est >0, mais μ_y et μ_z sont <0.

§ 18. **Application**: *Intégration de l'équation de Poisson.* Soit, ou point P, $d\tau'$ l'élément d'un volume T' quelconque, nous disons que

$$\lim_{h=0} \int\limits_{(T')} K_h d\tau' \textit{ est toujours finie.}$$

En effet

$$\int\limits_{(T')} K_h d\tau' = \int\limits_{(T')} d\tau' \int\limits_{(h)}^{(a)} \varrho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2} d\tau = \int^{(a)} \varrho(\xi,\eta,\zeta) d\tau \int\limits_{(h)}^{(T')} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2} d\tau' = \int^{(a)} \varrho(\xi,\eta,\zeta) K'_h d\tau,$$

où

$$K'_h = \int\limits_{(h)}^{T'} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2} d\tau'.$$

Pour K'_h la densité est constante et $=1$,

$$\therefore\ K' \equiv \lim_{h=0} K'_h \text{ est finie,}$$

$$\therefore\ \lim_{h=0} \int\limits_{(T')} K_h d\tau' = \int \varrho K' d\tau = \text{une quantité finie, c. q. f. d.}$$

Pour les trois coordonnées on a

$$\sum_{xyz} K_{xh} = 0,$$

$$\therefore\ \sum_{xyz} \lim_{h=0} \int\limits_{(T')} K_{xh} d\tau' = 0.$$

D'autre part on a (42)

$$\int\limits_{(T')} L d\tau' = \int\limits_{(T')} d\tau' \int\limits_{(\Omega)} \varrho_0[u_2\bar{\varphi}(u_1) - c\chi(u_1)] d\omega = \int\limits_{(\Omega)} [u_2\bar{\varphi}(u_1) - c\chi(u_1)] d\omega \int\limits_{(T')} \varrho_0 d\tau'.$$

Mais la fonction ϱ est supposée intégrable,

$$\therefore \int_{(T')} \varrho_0 d\tau' = \int_{(T')} \varrho d\tau' \equiv m,$$

où m est une quantité qui est indépendante des directions (ϑ, ψ) et qui m peut être considérée comme la partie de la masse de la sphère (a) qui se trouve dans l'intérieur de l'espace T''; d'où l'on tire (54)

$$\int_{(T')} L d\tau' = -\tfrac{4}{3}\pi c m. \tag{122}$$

Remarque I. Si l'on pose

$$\delta_x V = \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial V(x+h_1, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}\right]$$

et deux expressions analogues pour y et z, on peut énoncer le théorème suivant:

La quantité $\sum\limits_{xyz} lim \int\limits_{(T')} \delta_x V d\tau'$ *existe toujours et est* $= -4\pi m$. C'est le théorème de KRONECKER.[1]

Si l'on pose

$$\sum_{xyz} L_x = -4\pi\varrho + \Theta,$$

on trouve d'après (122) pour chaque domaine T''

$$\int_{(T')} \Theta d\tau' = 0. \tag{123}$$

Définition. Une fonction $\Theta(x, y, z)$ qui pour chaque domaine T'' jouit de la propriété

$$\int_{(T')} \Theta d\tau' = 0$$

nous nommerons dans la suite *une fonction à intégrale nulle.*

Corollaire. L'équation de Poisson généralisée (116) peut s'écrire de la manière suivante

---

[1] KRONECKER: «Zur Potential-Theorie» Journal de Crelle LXX, p. 246—8, 1869.

$$\varDelta V = -4\pi\varrho + \Theta,$$

où Θ est une fonction à intégrale nulle.

Inversement, on voit immédiatement qu'ou peut énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si on se donne l'équation*

$$\varDelta V = -4\pi\varrho,$$

où ϱ est une fonction quelconque finie et intégrable, cette équation n'a en général aucune solution. Mais on peut toujours trouver une fonction $\bar{\Theta}$ à intégrale nulle de manière que l'équation

$$\varDelta V = -4\pi\varrho + \bar{\Theta} \tag{124}$$

ait des solutions, si le symbole $\varDelta$ est défini par l'égalité (118). *La solution la plus générale se trouve, si l'on pose* (119)

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{\Theta} = 4\pi\varrho + \sum_{xyz} L_x + \sum_{xyz} \log c_x \int\limits_{(\Omega)} \varrho_0 (3 u_x^2 - 1)\,\partial\omega \\ &V = \int \varrho \frac{d\tau}{r} + U, \end{aligned}\right. \tag{125}$$

où U est une fonction quelconque qui satisfait à l'équation

$$\varDelta U = 0.$$

On peut ajouter.

La fonction complémentaire $\bar{\Theta}$ à intégrale nulle ne peut être choisie que d'une seule manière.

En effet, soit Θ_1 une fonction inconnue à intégrale nulle, et supposons qu'elle soit déterminée de sorte qu'il existe une fonction V_1 qui satisfait à l'équation

$$\varDelta V_1 = -4\pi\varrho + \Theta_1$$

et qu'elle est finie et continue ainsi que ses premières dérivées dans un certain domaine T_1. Considérons la fonction

$$v = V - V_1 + U_1,$$

où U_1 satisfait à l'équation

$$\varDelta U_1 = 0,$$

et est déterminée de manière que $v=0$ à la surface d'un domaine T'' qui fait partie de T_1. La fonction v et ses premières dérivées sont finies et continues dans l'intérieur du domaine T''. Soit dn l'élément de la normale dirigée vers l'intérieur du domaine, on aura d'après le théorème de Green

$$\int\limits_{(T'')} v\Delta v d\tau' = -\int\limits_{(\Omega')} v\frac{\partial v}{\partial n}d\omega' - \int\limits_{(T'')}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]d\tau',$$

$d\omega'$ étant l'élément de la surface Ω' du domaine T''. Mais

$$\Delta v = \overline{\Theta} - \Theta_1$$

$$\therefore \int\limits_{(T'')} v\Delta v d\tau' = \int\limits_{(T')} v\overline{\Theta} d\tau' - \int\limits_{(T')} v\Theta_1 d\tau' = 0,$$

parce que $\overline{\Theta}$ et Θ_1 sont des fonctions à intégrale nulle. Nous imposons à V et V_1 la condition que $\frac{\partial V}{\partial n}$ et $\frac{\partial V_1}{\partial n}$ ne deviennent pas infinies sur la surface, ce qui est toujours permis, parce que le domaine T'' peut être choisi de sorte qu'il n'ait aucune partie de sa surface commune à celle de T_1. Nous voulons de plus choisir la surface de T'' telle que la quantité $\frac{dU_1}{dn}$ ne soit pas infinie, ce qui est toujours possible, parce que la fonction U_1 y est égale à la fonction continue $V_1 - V$. D'où il suit

$$\int\limits_{(\Omega')} v\frac{\partial v}{\partial n}d\omega' = 0$$

à cause de la condition $v=0$ sur la surface,

$$\therefore \int\limits_{(T'')}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]d\tau' = 0.$$

Les dérivées $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial z}$ étant continues, il faut que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$\therefore\ v = \text{constante} = 0,$$

$$\therefore\ \Delta v = \overline{\Theta} - \Theta_1 = 0,$$

$$\therefore\ \Theta_1 = \overline{\Theta},\ \text{c. q. f. d.}$$

Remarque II. En général la fonction $\bar{\Theta}$ dépend de la manière de laquelle le symbole Δ est défini. Si la fonction ϱ_0 est telle qu'en chaque point

$$\int_{(\Omega)} \varrho_0 (3 u_x^2 - 1) d\omega = 0,$$

et si l'on a deux équations analogues pour y et z, $\bar{\Theta}$ ne dépend pas des constantes c_x, c_y et c_z.

Corollaires. Posons

$$\varrho' = \varrho - \frac{\bar{\Theta}}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{xyz} L_x - \frac{1}{4\pi}\sum_{xyz} \log c_x \int_{(\Omega)} \varrho_0 (3u_x^2 - 1) d\omega \equiv -\frac{1}{4\pi}\sum_{xyz} L_x - \frac{1}{4\pi} C,$$

$$\therefore \; \Delta V = -4\pi\varrho'$$

$$V = \int \varrho' \frac{d\tau}{r} + U, \text{ où } \Delta U = 0,$$

$$\therefore \; \Delta V = \sum_{xyz} L'_x + \sum_{xyz} \log c_x \int_{(\Omega)} \varrho'_0 (3u_x^2 - 1) d\omega \equiv \sum_{xyz} L'_x + C',$$

où

$$L'_x = \int_{(\Omega)} \varrho'_0 \varphi(u_x) d\omega = -\frac{1}{4\pi} \int_{(\Omega)} \left(\sum_{xyz} L_{0x} + C \right) \varphi(u_x) d\omega$$

$$L_{0x} \equiv \lim_{r=0} L_x.$$

I
$$\begin{cases} \therefore \; \sum_{xyz} L'_x + C' = -4\pi\varrho' = \sum_{xyz} L_x + C, \\ \therefore \; \sum_{xyz} L_x = -\frac{1}{4\pi} \int_{(\Omega)} \left(\sum_{xyz} L_{0x} + C \right) \left(\sum \varphi(u_x) \right) d\omega + C' - C. \end{cases}$$

De plus on aura

$$\sum_{xyz} L'_x = \int_{(\Omega)} \varrho_0 \sum \varphi(u_x) d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_{(\Omega)} \bar{\Theta} \sum_{xyz} \varphi(u_x) d\omega$$

$$\sum_{xyz} L_x = \int_{(\Omega)} \varrho_0 \sum \varphi(u_x) d\omega,$$

II
$$\therefore \; \int_{(\Omega)} \bar{\Theta} \sum_{xyz} \varphi(u_x) d\omega = 0.$$

CHAPITRE II.

La dérivée première du potentiel d'une simple couche. Surface plane.

§ 19. *Préliminaires.* On sait que les dérivées premières du potentiel d'une simple couche sont finies et continues tant qu'on ne s'approche pas indéfiniment de la surface. Pour étudier comment elles se comportent dans le voisinage de la surface et dans la surface elle-même, il suffit évidemment de considérer la partie d'elles qui se rapporte à une petite partie de la surface qui dans son intérieur renferme le point vers lequel on se rapproche indéfiniment, pourvu que ce point ne soit pas situé sur le bord de la surface. Ce dernier cas peut être traité de la même manière, en supposant la couche prolongée à l'autre côté du bord, mais y ayant une densité nulle. Pris dans toute sa généralité, le problème qui nous occupe à présent est le suivant:

Soit P_0 un point donné sur une surface, dont nous pouvons choisir une partie quelconque qui entoure le point P_0, et soit P_0PP_1 une courbe quelconque qui ne rencontre pas la surface, ni ne s'approche infiniment près d'elle qu'au point P_0; soit enfin

$$V = \int \frac{d\mu}{R},$$

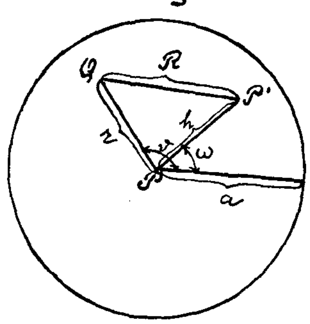
$d\mu$ étant, au point Q, l'élément de masse répandue sur la surface, R la distance PQ. L'intégrale est prise sur toute la masse de la partie considérée de la surface donnée. Si, au point P, ds est l'élément d'une courbe quelconque qui passe par ce point, nous voulons étudier ce que deviendra la limite

$$\lim_{P=P_0} \frac{\partial V}{\partial s}.$$

Cependant il faut étudier séparément le cas, où la courbe P_0PP_1 se réduit à un point, c. à. d. le cas où le point P est fixe et situé dans la surface. Nous commençerons l'étude par le cas, où la partie considérée de la surface est plane.

§ **20.** *Le point P est situé dans la surface. Dérivée tangentielle.* Considérons (fig. 6) un cercle de rayon a décrit autour du point P comme centre. Le potentiel V_h de ce cercle au point P', situé dans le plan et ayant les coordonnées polaires (h, ω), s'obtient par l'équation

Fig. 6.



$$V_h = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \frac{\sigma\, r dr}{\sqrt{r^2 - 2rhu + h^2}}, \quad u = \cos(\vartheta - \omega),$$

σ étant la densité de la masse, c. à d. une fonction donnée quelconque que nous voulons supposer finie; r et ϑ étant les coordonnées polaires du point Q, où la densité est σ. Le potentiel au point P est

$$V = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma dr$$

$\therefore$ pour $r = ht$

$$\frac{1}{h}(V_h - V) = \frac{1}{h}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma(r, \vartheta)\left[\frac{r}{\sqrt{r^2 - 2rhu + h^2}} - 1\right] dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht, \vartheta)\left[\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2tu + 1}} - 1\right] dt.$$

L'intégrale du dernier membre reste finie, quoique t devienne $= 1$ sous le signe $\int$, car on sait que le potentiel V_h est fini et déterminé dans tout point P' de la surface; elle ne peut donc devenir infinie, ni indéterminée, que pour $\lim h = 0$. Pour $t > 1$ on a

$$\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2tu + 1}} - 1 = \frac{u}{t} + \frac{1}{t^2}P, \ \lim_{t=\infty} P \text{ finie;}$$

par suite on conclut que la quantité

$$\frac{1}{h}(V_h - V) - \int_0^{2\pi} u d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \sigma \frac{dt}{t}$$

a une valeur limite finie pour $\lim h = 0$. Donc nous pourrons écrire

$$(126)\begin{cases} \frac{1}{h}(V_h - V) = T_h + M_h \\ T_h = \int\limits_0^{2\pi} u\,d\vartheta \int\limits_h^a \sigma(r,\vartheta)\frac{dr}{r} \\ M_h = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_0^1 \sigma(ht,\vartheta)\left[\frac{t}{\sqrt{t^2-2tu+1}} - 1\right]dt + \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_1^{\frac{a}{h}} \sigma(ht,\vartheta)\left[\frac{t}{\sqrt{t^2-2tu+1}} - 1 - \frac{u}{t}\right]dt. \end{cases}$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si $\lim\limits_{h=0} T_h$ est finie, donc la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ dans la direction ω est finie.*

Supposons que pour chaque direction ϑ la fonction $\sigma(r,\vartheta)$ ait une valeur limite déterminée pour $\lim r = 0$, et posons

$$(127) \qquad \sigma_0(\vartheta) = \lim_{r=0} \sigma(r,\vartheta).$$

Si nous supposons de plus que $\sigma_0(\vartheta)$ est une fonction intégrable de ϑ, nous trouverons en passant à la limite

$$(128)\begin{cases} \frac{dV}{ds} = T + M \\ T = \lim\limits_{h=0} \int\limits_0^{2\pi} u\,d\vartheta \int\limits_h^a \sigma(r,\vartheta)\frac{dr}{r} \\ M = \int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\,\chi(u)\,d\vartheta \\ \chi(u) = -\left[1 + u + u\log\frac{1-u}{2}\right] \equiv \frac{\partial X(\vartheta)}{\partial \vartheta} \\ X(\vartheta) = -\sin(\vartheta-\omega)\log\frac{1-u}{2} \\ u = \cos(\vartheta-\omega). \end{cases}$$

Remarque. Si la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ existe pour deux directions ω_1 et ω_2 ($\omega_1 \neq \omega_2$, $\omega_1 + \omega_2 \neq \pi$), elle existe pour toutes.

Cas particulier. Si la densité σ est continue, la fonction σ_0 est constante, et on trouvera

$$(129) \qquad M = 0.$$

Corollaire. Si T existe, on trouvera

(130) $$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, u\, d\vartheta = 0.$$

§ **21.** *Le point P est situé dans la surface. Dérivée oblique à la surface.* Nous supposerons maintenant que le point P' est situé au dessus du plan. Soient $PP' = h$, l'angle que fait PP' avec le plan $= \psi$ et l'angle que fait la projection de PP' dans le plan avec une direction fixe dans le plan $= \omega$. Nous retrouverons les formules du § précédent seulement avec la modification qui se rapporte à l'expression de

$$u = \cos(PQ, PP');$$

(131) $$\left\{\begin{aligned} &\therefore\ u = \cos\psi\cos(\vartheta - \omega)\\ &\frac{\partial V}{\partial s} = T' + M'\\ &T' = \lim_{h=0}\int_0^{2\pi} u\, d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\frac{dr}{r}\\ &M' = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\,\chi(u)\, d\vartheta\\ &\chi(u) = -\left[1 + u + u\log\frac{1-u}{2}\right] \equiv \frac{\partial X_1(\vartheta)}{\partial \vartheta}\\ &X_1(\vartheta) = -\cos\psi\sin(\vartheta-\omega)\log\frac{1-u}{2} - \sin^2\psi\int\frac{d\vartheta}{1-u}. \end{aligned}\right.$$

Remarque I. La quantité M' contenant l'angle ψ sous le signe $\int$, on voit qu'en général il n'y a pas de relation simple entre les dérivées dans des directions différentes. Pour $\psi = 0$ les formules (131) deviennent identiques aux formules (128).

Remarque II. La quantité T' diffère seulement d'un facteur constant de la quantité correspondante T du paragraphe précédent, par suite, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ dans une direction quelconque est la même que pour la dérivée, prise suivant la projection de l'élément ds. Seulement la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ existe toujours, et on a

(132) $$\frac{dV}{\partial n} = -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Cas particulier. Si la densité σ est continue, on trouvera

(133) $$\frac{\partial V}{\partial s} = -2\pi\sigma \sin\psi + T'', \quad \frac{\pi}{2} \geqq \psi \geqq 0.$$

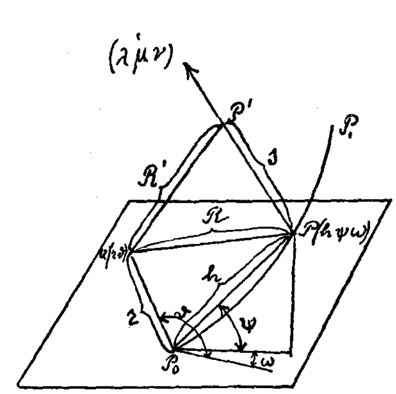
Dérivée curviligne. Si le point P' se meut vers P suivant une courbe quelconque, on aura les mêmes formules que précédemment, si on y suppose que ψ et ω sont les valeurs limites de ces quantités. Par ex., si la courbe PP' est tangente au plan, la valeur limite de ψ devient $= 0$, et on retrouve les formules du § 20. D'autre part, si

$$\lim_{h=0} \psi = \frac{\pi}{2}$$

la dérivée curviligne $\frac{\partial V}{\partial n}$ n'existe pas toujours. Mais elle existe dans tous les cas où la courbe PP' a un contact avec la normale d'un tel ordre que

(134) $\lim\limits_{h=0} \cos\psi \log h$ n'est pas infinie ni indéterminée.

Fig. 7.



§ 22. *Le point P partant au dessus du plan, s'approche de la surface suivant une courbe P_0PP_1 qui ne la rencontre qu'au point P_0 sans l'y toucher.* Soient (fig. 7) h, ψ et ω les coordonnées du point P, de manière que $h =$ la droite P_0P, $\psi =$ l'angle que fait P_0P avec le plan, et $\omega =$ l'angle que fait la projection de P_0P dans le plan avec une droite fixe dans le plan. Si les coordonnées du point Q de la couche sont r et ϑ, on aura

$$R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rhu + h^2}$$
$$u = \cos\psi \cos(\vartheta - \omega).$$

Soit P' un point pris dans le voisinage de P et posons

$$s = PP'.$$

Soient de plus λ, μ et $\nu =$ les cosinus directeurs de PP',

$$\therefore\ R' = P'Q = \sqrt{R^2 - 2Rsv + s^2}$$

$$(135)\quad \begin{cases} v \equiv \cos(PQ,\ PP') \\ \quad = -\dfrac{1}{R}\{\lambda(h\cos\psi\cos\omega - r\cos\vartheta) + \mu(h\cos\psi\sin\omega - r\sin\vartheta) + \nu h\sin\psi\} \end{cases}$$

$$\therefore\ R'\frac{\partial R'}{\partial s} = s - Rv.$$

En posant $s = 0$ on trouvera

$$(136)\qquad \frac{\partial R}{\partial s} = -v.$$

Soit V_h la valeur du potentiel V dans le point P, on aura

$$\frac{\partial V_h}{\partial s} = -\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma \frac{r}{R^2}\frac{\partial R}{\partial s}dr = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma r v \frac{dr}{R^2}.$$

On peut écrire

$$(137)\quad \begin{cases} r \ = ht,\ \sqrt{t^2 - 2tu + 1} = q \\ v \ = -\dfrac{\beta_1}{q} + \beta_2\dfrac{t}{q} \\ \beta_1 = \lambda\cos\psi\cos\omega + \mu\cos\psi\sin\omega + \nu\sin\psi \\ \beta_2 = \lambda\cos\vartheta + \mu\sin\vartheta \\ \therefore\ \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = -\beta_1\displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht,\vartheta)\frac{t\,dt}{q^3} + \int_0^{2\pi}\beta_2 d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht,\vartheta)\frac{t^2dt}{q^3}. \end{cases}$$

L'angle ψ ayant une valeur limite > 0, la quantité q ne peut pas devenir infiniment petite; la première des intégrales du second membre a donc une limite finie pour $\lim h = 0$. Quant à la deuxième, on a pour $t > 1$

$$\frac{t^2}{q^3} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}P,\ \lim_{t=\infty} P \text{ finie.}$$

Nous pourrons donc écrire

$$(138)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = U_h + N_h \\ U_h = \displaystyle\int_0^{2\pi} \beta_2 d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} \\ N_h = -\beta_1 \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht, \vartheta) \frac{t\,dt}{q^3} + \int_0^{2\pi} \beta_2 d\vartheta \int_0^1 \sigma t^2 \frac{dt}{q^3} + \int_0^{2\pi} \beta_2 d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \sigma\left(\frac{t^2}{q^3} - \frac{1}{t}\right) dt, \\ \text{où } \lim\limits_{h=0} N_h \text{ est finie.} \end{cases}$$

D'où le théorème:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V}{\partial s}$ *soit finie, est que la quantité*

$$U \equiv \lim_{h=0} U_h \text{ est finie (138).}$$

Supposons que pour chaque direction ϑ la fonction $\sigma(r, \vartheta)$ ait une valeur limite déterminée pour $\lim r = 0$, et posons

$$(127)\qquad \sigma_0(\vartheta) = \lim_{r=0} \sigma(r, \vartheta).$$

Si nous supposons de plus que $\sigma_0(\vartheta)$ est une fonction intégrable de ϑ, nous trouverons, en passant à la limite,

$$(139)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V}{\partial s} = U + N \\ U = \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} \beta_2 d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} \\ N = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \Theta(u_0) d\vartheta \\ \Theta(u_0) \equiv -\dfrac{\beta_{10}}{1 - u_0} + \beta_2 \left[\dfrac{1}{1 - u_0} - 2 - \log \dfrac{1 - u_0}{2}\right] = \dfrac{dG(\vartheta)}{d\vartheta} \\ G(\vartheta) \equiv (-\lambda \sin\vartheta + \mu \cos\vartheta)\left[1 + \log \dfrac{1 - u_0}{2}\right] - \nu \sin\psi_0 \displaystyle\int \frac{d\vartheta}{1 - u_0}, \end{cases}$$

$$
(140) \quad \begin{cases} \text{où } u_0 = \cos\psi_0 \cos(\vartheta - \omega_0) \\ \beta_{10} = \lambda \cos\psi_0 \cos\omega_0 + \mu \cos\psi_0 \sin\omega_0 + \nu \sin\psi_0 \\ \beta_2 = \lambda \cos\vartheta + \mu \sin\vartheta \\ \psi_0 = \lim\limits_{h=0} \psi, \quad \omega_0 = \lim\limits_{h=0} \omega . \end{cases}
$$

Si nous prenons l'axe des z normal au plan, nous pourrons écrire

$$
(141) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = \lambda \dfrac{\partial V_h}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial V_h}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial V_h}{\partial z} \\ G(\vartheta) = \lambda G_x(\vartheta) + \mu G_y(\vartheta) + \nu G_z(\vartheta) \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial x} = U_x + N_x \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial y} = U_y + N_y \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial z} = N_z \\ U_x \equiv \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \, d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} \\ U_y \equiv \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} \\ N_x \equiv \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \frac{dG_x(\vartheta)}{d\vartheta} d\vartheta \\ N_y \equiv \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \frac{dG_y(\vartheta)}{d\vartheta} d\vartheta \\ N_z \equiv \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \frac{dG_z(\vartheta)}{d\vartheta} d\vartheta \\ G_x \equiv -\sin\vartheta \left\{ 1 + \log \dfrac{1 - u_0}{2} \right\} \\ G_y \equiv \cos\vartheta \left\{ 1 + \log \dfrac{1 - u_0}{2} \right\} \\ G_z \equiv -\sin\psi_0 \displaystyle\int \frac{d\vartheta}{1 - u_0} . \end{cases}
$$

D'où le théorème

Théorème. $\operatorname*{Lim}_{h=0} \dfrac{d V_h}{d z}$ *existe toujours.*

Corollaires. On trouvera

$$(142)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\beta_2 d\vartheta = 0, & \text{si } U \text{ existe,} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\cos\vartheta d\vartheta = 0, & \text{si } U_x \text{ existe,} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta = 0, & \text{si } U_y \text{ existe.} \end{cases}$$

Cas particuliers. 1°. Si la densité σ est continue, on aura

$$(143)\quad \begin{cases} N_x = N_y = 0 \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial x} = U_x \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial y} = U_y \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial z} = -2\pi\sigma. \end{cases}$$

Remarque I. On trouvera que les formules (143) sont identiques à la formule (133) pour $\psi = 0, 0$ et $\frac{\pi}{2}$ resp.

2°. Si $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$, on trouvera

$$(144)\quad \begin{cases} N_x = N_y = 0 \text{ d'après (142) et} \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial z} = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) d\vartheta. \end{cases}$$

3°. La limite de la dérivée $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ prise dans la direction de la tangente au point P_0 de la courbe P_0PP_1 s'obtient en posant

$$\lambda = \cos\psi_0\cos\omega_0, \quad \mu = \cos\psi_0\sin\omega_0, \quad \nu = \sin\psi_0,$$

$$\therefore\ \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = u_0,$$

$$(145)\quad \begin{cases} \therefore\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} u_0 d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\frac{dr}{r} - \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[1 + 2u_0 + u_0\log\frac{1-u_0}{2}\right] d\vartheta \\ u_0 = \cos\psi_0\cos(\vartheta - \omega_0). \end{cases}$$

Remarque II. Si $\lim\limits_{h=0}\int\limits_{u_0}^{2\pi} u_0 d\vartheta \int\limits_h^a \sigma \frac{dr}{r}$ existe, les formules (145) deviennent identiques aux formules (131) en vertu des formules (142).

On pourra donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si la dérivée dans une certaine direction extérieure existe pour un point P_0 situé dans la surface, donc la dérivée dans la même direction pour un point P en dehors de la surface prend la même valeur limite, c. à. d.*

$$\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial s}$$

dans les deux cas suivants:

1° *si la densité σ est continue au point P_0,*

2° *si la dérivée est prise dans la direction de la tangente au point P_0 à la courbe P_0PP_1.*

Remarque III. Dans le cas général $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ (139) n'est pas $= \frac{\partial V}{\partial s}$ (131), car la première quantité dépend non seulement de la direction (λ, μ, ν) de l'élément ds, mais aussi de la direction (ψ_0, ω_0) de la tangente au point P_0 de la courbe P_0PP_1.

§ **23.** *La courbe P_0PP_1 touche le plan au point P_0.* Dans ce cas $\lim\limits_{h=0} \psi = 0$; par conséquent la quantité q des formules (137) devient infiniment petite sous le signe $\int$ pour $h = 0$, $\vartheta = \omega$ et $t = 1$. Nous supposerons pour plus de simplicité que l'angle ω est constant. Posons $\omega = 0$, $\therefore$ $u = \cos\psi \cos\vartheta$. Les formules (138) peuvent s'écrire

$$(146) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = \lambda \dfrac{\partial V_h}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial V_h}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial V_h}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_h}{\partial x} = U_{xh} + N_{xh} \\ \dfrac{\partial V_h}{\partial y} = U_{yh} + N_{yh} \\ \dfrac{\partial V_h}{\partial z} = N_{zh}, \end{cases}$$

où nous aurons à discuter les quantités N_{xh}, N_{yh} et N_{zh}.

1° N_{xh}. On peut écrire (138)

$$N_{xh} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int\limits_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht, \vartheta)[t\cos\vartheta - \cos\psi] t \frac{dt}{q^3} + N'_x, \ \lim_{h=0} N'_x \text{ finie,}$$

où ε et ε' sont des quantités positives $< \frac{\pi}{2}$, $0 < \varkappa < 1$, et où $\sigma(r, -\vartheta)$ est écrite pour $\sigma(r, 2\pi - \vartheta)$. De plus, on aura

$$\frac{t^2 \cos\vartheta - t\cos\psi}{q^3} = \frac{t}{\cos\psi}\cdot\frac{\sin^2\psi}{q^3} - \frac{t^2}{\cos\psi}\frac{1-u}{q^3} + \frac{1}{\cos\psi}\frac{(t-1)^2}{q^3} + \frac{1}{\cos\psi}\frac{t-1}{q^3},$$

$\frac{1-u}{q^2} < 1$ et $\frac{\sin\psi}{q} < 1$, parce que

$$q = \sqrt{(t-1)^2 + 2t(1-u)} = \sqrt{(t-u)^2 + 1 - u^2} = \sqrt{(t-u)^2 + \sin^2\psi + \sin^2\vartheta\cos^2\psi},$$

$$\therefore N_{xh} = \frac{1}{\cos\psi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht, \vartheta)(t-1)\frac{dt}{q^3} + N''_x, \lim_{h=0.} N''_x \text{ finie.}$$

Pour que $\lim\limits_{h=0} N_{xh}$ soit finie, il faut donc que le premier terme du second membre ait une limite finie pour $\lim h = 0$. Soit

$$O'_{xh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht, \vartheta)(t-1)\frac{dt}{q^3},$$

et posons d'une part $t = 1 - \tau$, $q_1 = \sqrt{2(1-u)(1-\tau) + \tau^2}$,

et de l'autre $t = 1 + \tau$, $q_2 = \sqrt{2(1-u)(1+\tau) + \tau^2}$,

$$\therefore O'_{xh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_0^{\varkappa} \left[\frac{\sigma(h + h\tau, \vartheta)}{q_2^3} - \frac{\sigma(h - h\tau, \vartheta)}{q_1^3}\right]\tau\, d\tau.$$

Si nous posons

$$q' = \sqrt{2(1-u) + \tau^2}, \quad \therefore q_1 \leqq q' \leqq q_2,$$

nous trouverons en intégrant

$$\int_0^{\varkappa}\left(\frac{1}{q_1^3} - \frac{1}{q'^3}\right)\tau\, d\tau = \text{une quantité toujours finie, même pour } \psi = \vartheta = 0,$$

et nous aurons un résultat analogue pour q_2. Dans l'expression de O_{xh} on pourra donc remplacer q_1 et q_2 par q'.

Posons

$$u = \cos\delta,$$

donc nous pourrons de même remplacer q' par

$$\bar{q} = \sqrt{\delta^2 + \tau^2}.$$

D'où le résultat:

Théorème: *La condition nécessaire et suffisante pour que la quantité* $\lim\limits_{h=0} N_{xh}$ *soit finie, est que la quantité* $O_x \equiv \lim\limits_{h=0} O_{xh}$ *est finie, où*

$$(147)\qquad \begin{cases} O_{xh} = \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_0^{\varkappa} \frac{\bar{\sigma}\tau\, d\tau}{(\delta^2 + \tau^2)^{3/2}} \\ \bar{\sigma} = \sigma(h + h\tau, \vartheta) - \sigma(h - h\tau, \vartheta). \end{cases}$$

Cas particulier. Si la fonction σ est indépendante de r, on aura $O_x = 0$.

2°. N_{yh}. On peut écrire

$$N_{yh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht, \vartheta)\, t^2 \frac{dt}{q^3} + N'_y, \quad \lim_{h=0} N'_y \text{ finie},$$

$$\frac{t^2}{q^3} = \frac{(t-1)^2}{q^3} + \frac{2(t-1)}{q^3} + \frac{1}{q^3},$$

et nous trouverons comme dans le cas précédent, en posant

$$\sigma_2(r, \vartheta) = \sigma(r, \vartheta) - \sigma(r, 2\pi - \vartheta),$$

le résultat suivant:

Théorème: *La condition nécessaire et suffisante pour que la quantité* $\lim\limits_{h=0}$ N_{yh} *soit finie, est que la quantité* $O_y \equiv \lim\limits_{h=0} O_{yh}$ *est finie, où*

$$(148)\qquad \begin{cases} O_{yh} = \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int_0^{\varkappa} \bar{\sigma}_1 \frac{d\tau}{(\delta^2 + \tau^2)^{3/2}} \\ \bar{\sigma}_2 = \sigma_2(h + h\tau, \vartheta) + \sigma_2(h - h\tau, \vartheta). \end{cases}$$

Cas particulier. Si $\sigma(r, \vartheta) = \sigma(r, 2\pi - \vartheta)$, on aura $O_y = 0$.

3°. N_{zh}. On a

$$N_{zh} = -\sin\psi \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht, \vartheta)\frac{t\,dt}{q^3} = -\sin\psi \int_0^{2\pi} \sigma_m d\vartheta \int_0^{w} \frac{t\,dt}{q^3} - \sin\psi \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_w^{\frac{a}{h}} \frac{\sigma t\,dt}{q^3}, \quad w > 1,$$

σ_m étant une valeur moyenne de σ pour $0 \leq r \leq wh$, et de plus on aura

$$\lim_{h=0} \sin\psi \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_w^{\infty} \frac{t\,dt}{q^3} = \lim_{h=0} \sin\psi \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_w^{\infty} \frac{t\,dt}{q^3} = \pi\left[1 - \frac{w - 1}{\sqrt{w^2 - 2w\cos\vartheta' + 1}}\right] \equiv E(w),$$

où ϑ' est une valeur moyenne de $\vartheta, -\varepsilon \leqq \vartheta' \leqq \varepsilon'$. Mais ε et ε' sont arbitraires, $\therefore$ ϑ' est si près de zéro qu'on voudra,

$$\therefore\ \vartheta' = 0,\ \therefore\ E(w) = 0 \text{ pour } w > 1,$$

$$\therefore\ N_{zh} = -\sin\psi \int_0^{2\pi} \sigma_m d\vartheta \int_0^{\infty} \frac{t\,dt}{q^3} + \eta_h,\ \lim \eta_h = 0.$$

Mais

$$\lim_{h=0}\,[\sigma_m - \sigma_0(\vartheta)] = 0,$$

$$\therefore\ N_{zh} = -\sin\psi_0 \int_0^{\varepsilon'} \frac{\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta}{1 - \cos\psi\cos\vartheta} - \sin\psi \int_0^{\varepsilon} \frac{\sigma_0(-\vartheta)\,d\vartheta}{1 - \cos\psi\cos\vartheta} + \eta'_h,\ \lim_{h=0} \eta'_h = 0,$$

$$\therefore\ \lim_{h=0} N_{zh} = -\pi(\sigma_+ + \sigma_-),$$

où σ_+ et σ_- sont deux valeurs moyennes de σ pour des valeurs infiniment petites positives, resp. négatives, de ϑ.

D'où le théorème:

Théorème. $\displaystyle Lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z}$ *existe toujours et*

(149) $$\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z} = -\pi(\sigma_+ + \sigma_-).$$

Dans le cas général on peut écrire

(150) $$\begin{cases} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = U_{sh} + N_{sh} \\ U_{sh} = \lambda U_{xh} + \mu U_{yh} \\ N_{sh} = \lambda N_{xh} + \mu N_{yh} + \nu N_{zh} \\ O_{sh} = \lambda O_{xh} + \mu O_{yh} \\ U_s = \lim\limits_{h=0} U_{sh},\ N_s = \lim\limits_{h=0} N_{sh},\ O_s = \lim\limits_{h=0} O_{sh}. \end{cases}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si U_s existe, donc la condition nécessaire et suffisante pour que $\displaystyle lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ existe, est que la quantité O_s existe.*

Remarque I. Dans les formules (147) et (148), on peut remplacer

(151) $$\delta^2 \text{ par } \vartheta^2 + \psi^2.$$

En effet, on a

$$\sin^2\delta = \sin^2\vartheta + \sin^2\psi\cos^2\vartheta$$

$$\lim_{\psi=0}\int_0^{\varkappa}\left[\frac{1}{(\delta^2+\tau^2)^{3/2}} - \frac{1}{(\vartheta^2+\psi^2+\tau^2)^{3/2}}\right]d\tau = 0 \text{ etc.}$$

D'où il suit qu'on peut remplacer O_{xh} et O_{yh} par $\bar{O}_{xh}$ et $\bar{O}_{yh}$ resp., où

$$(152)\qquad \begin{cases} \bar{O}_{xh} = \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} [\sigma(h+h\tau',\vartheta) - \sigma(h-h\tau',\vartheta)]\frac{d\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2+\psi^2}} \\ \bar{O}_{yh} = \displaystyle\int_0^{\varkappa} [\sigma_1(h+h\tau,\vartheta') + \sigma_1(h-h\tau,\vartheta')]\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+\psi^2}} \text{ etc.,} \end{cases}$$

τ' et ϑ' étant des valeurs moyennes de τ et de ϑ resp.

Remarque II. Posons dans l'expression de N_{xh}

$$\sigma = \sigma_0 + (\sigma - \sigma_0),$$

et nommons N_{xh}^0 et N'_{xh} les parties correspondantes de N_{xh}. On trouvera $\lim\limits_{h=0} N'_{xh} = 0$ si O_x est $= 0$, et inversement. Par suite on aura le résultat suivant: *Si $O_x = 0$, donc*

$$(153)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial V_h}{\partial x} = \lim\limits_{h=0}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\, d\vartheta\int_h^a \sigma(r,\vartheta)\frac{dr}{r} + \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\frac{dG_{0x}(\vartheta)}{d\vartheta}d\vartheta \\ G_{0x} = -\sin\vartheta\left[1 + \log\dfrac{1-\cos\vartheta}{2}\right]. \end{cases}$$

En comparant les formules (153) aux formules (128) nous pourrons énoncer le théorème suivant en vertu de l'égalité (130).

Théorème. *Si $O_x = 0$, $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial V_h}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial x}$, c.-à-d. la limite de la dérivée prise dans la direction de la tangente est la même que la dérivée au point P_0 prise dans la même direction.*

Remarque III. Nommons O_y^0 et O'_y ce que deviendra O_y, lorsqu'on y remplace σ par σ_0 et $\sigma - \sigma_0$ resp. Nous trouverons

$$(154)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial y} = \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} + \lim\limits_{h=0} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \frac{\partial \bar{G}_y}{\partial \vartheta} d\vartheta \\ \bar{G}_y = \cos \vartheta \left[1 + \log \dfrac{1 - \cos \psi \cos \vartheta}{2} \right], \end{cases}$$

pourvu que la quantité O'_y soit nulle. Pour que la seconde intégrale soit finie, il faut que la quantité O°_y soit finie ou, ce qui revient au même, que la quantité

$$(155)\quad \bar{O}^\circ_y = \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{1 - \cos \psi \cos \vartheta}$$

soit finie.

Cas particuliers. La quantité $\bar{O}^\circ_y$ est finie,

1° si $\dfrac{d\sigma_0(\vartheta)}{d\vartheta}$ existe,et $\sigma_0(\vartheta)$ est continue pour $-\varepsilon \leqq \vartheta \leqq \varepsilon'$;

2° si $\sigma_0(\vartheta) = \bar{\sigma}_0 + \sigma_1(\vartheta)$, où $\bar{\sigma}_0$ est une constante, et l'intégrale

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} \sigma_1(\vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

est finie, etc.

Remarque IV. Nous avons supposé que la courbe P_0PP_1 est contenue dans le plan des xz. Dans le cas général l'angle ω n'est pas $= 0$, mais $\lim\limits_{h=0} \omega = 0$; dans ce cas nous retrouverons les mêmes formules pour $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s}$, pourvu que

$$(156)\quad \lim_{h=0} \left[\sin \omega \frac{\partial V^\circ_h}{\partial x} \right] = \lim_{h=0} \left[\sin \omega \frac{\partial V^\circ_h}{\partial y} \right] = 0,$$

où $\dfrac{\partial V^\circ_h}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial V^\circ_h}{\partial y}$ sont les valeurs trouvées pour $\omega = 0$, si l'on y remplace $\sigma(r, \vartheta)$ par $\sigma(r, \vartheta + \omega)$.

§ 24. $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ *et* $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s}$ *sur le bord du plan.*

Supposons que σ ait des valeurs constantes mais différentes σ_1 et σ_2 des deux côtés d'une ligne.

1°. *Ligne droite.* Pour la dérivée tangentielle dans la surface nous trouverons (126), ω étant l'angle que fait PP' avec la droite de séparation,

$$T_h = 2(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \omega \log \frac{a}{h},$$

où l'on suppose que la droite PP' est dirigée vers l'intérieur du domaine de densité σ_1 et que $0 \leq \omega \leq \pi$. De plus on aura (128)

$$M = 2(\sigma_2 - \sigma_1)\sin\omega\log\frac{\sin\omega}{2},$$

(157) $$\therefore \frac{\partial V}{\partial s} = 0 \text{ pour } \omega = 0 \text{ et } \omega = \pi, \text{ mais} = \infty \text{ pour toute autre valeur de } \omega.$$

De même la dérivée oblique (131) n'existe que pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$, auquel cas on trouvera

(158) $$\frac{\partial V}{\partial s} = -\pi(\sigma_1 + \sigma_2)\sin\psi.$$

La dérivée normale existe toujours et s'obtient de la formule (158) pour $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Afin de calculer $\frac{\partial V_h}{\partial s}$, nous prenons la droite de séparation pour axe des x et dirigeons l'axe des y vers l'intérieur du domaine de densité σ_1. Les équations (141) donnent

(159) $$\begin{cases} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = \lambda\dfrac{\partial V_h}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial V_h}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial V_h}{\partial z} \\ \lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial V_h}{\partial x} = 0 \\ \lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial V_h}{\partial y} \quad \text{infinie} \\ \lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial V_h}{\partial z} = -\pi(\sigma_1 + \sigma_2) - 2(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mathrm{tg}^{-1}(\sin\omega_0\cot\psi_0)\,. \end{cases}$$

Si la courbe P_0PP_1 touche le plan, on aura les mêmes formules (159) dans le cas où l'angle ω est constant. En y posant $\psi = 0$, on aura

(160) $$\begin{cases} \lim\dfrac{\partial V_h}{\partial z} = -\pi(\sigma_1 + \sigma_2) & \text{pour } \omega = 0 \text{ ou } \omega = \pi \\ \qquad = -2\pi\sigma_1 & \text{pour } 0 < \omega < \pi \\ \qquad = -2\pi\sigma_2 & \text{pour } \pi < \omega < 2\pi\,. \end{cases}$$

Si l'angle ω n'est pas constant, on retrouvera les formules (159) et (160) pour le cas, où $\lim\limits_{h=0}\omega$ n'est pas $= 0$ ni $= \pi$. Si $\lim\limits_{h=0}\omega = 0$ on retrouvera les formules (159) pour $\lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial x}$ et $\lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial y}$, si

(161) $$\lim_{h=0}\sin\omega\log h = 0,$$

et on peut écrire, en supposant l'angle ω positif,

(162) $$\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z} = -\pi(\sigma_1+\sigma_2) - 2(\sigma_1-\sigma_2)\lim_{h=0} \operatorname{tg}^{-1}\frac{\omega}{\psi}.$$

Le cas $\lim\limits_{h=0} \omega = \pi$ se réduit au cas précédent.

2°. *Courbe à tangente déterminée et unique.* On trouvera les mêmes résultats (159) pour $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial y}$ et $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z}$, et on aura

(163) $$\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial x} = (\sigma_2-\sigma_1)\lim_{h=0}\int\limits_h^a (\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2)\frac{dr}{r},$$

l'axe des x étant dirigé suivant la tangente, et ϑ_1 et ϑ_2 étant les valeurs limites de ϑ. Pour un point régulier $\frac{\vartheta_1}{r}$ et $\frac{\pi-\vartheta_2}{r}$ ont des limites finies, $\therefore \lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial x}$ *existe en un point régulier.* Si la courbe P_0PP_1 touche le plan, on aura les mêmes résultats, et dans le cas où ω_0 est $\neq 0$ et $\neq \pi$, et dans le cas où l'angle ω est constant et $= 0$ ou $= \pi$. Cela aura même lieu dans le cas où l'angle ω est variable et $\lim\limits_{h=0} \omega = 0$ ou $= \pi$, pourvu que la projection de la courbe P_0PP_1 dans le plan ne tombe pas entre la tangente et la courbe de discontinuité.

Supposons maintenant $\omega < \vartheta_1$ pour $r > h$. La partie de N_{xh} qui pourrait devenir infinie peut s'écrire (138)

$$H_x = (\sigma_2-\sigma_1)\int\limits_0^{\bar\vartheta} d\vartheta \int\limits_{t_1}^{w}(-\cos\psi\cos\omega + t\cos\vartheta)\frac{tdt}{q^3},\quad w > 1,$$

$\bar\vartheta = \vartheta_1(w)$, $t_1 =$ la valeur de t en un point du bord. Posons $\vartheta - \omega = \vartheta'$,

$$\therefore\ H_h = -\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_1)\int\limits_{-\omega}^{\bar\vartheta-\omega}\frac{(\cos\psi-\cos\vartheta')\cos\omega + \sin\omega\sin\vartheta'}{1-u}d\vartheta'\Big|_{t_1}^{w}\frac{t-1}{q} + H',\ \lim_{h=0} H' = 0.$$

De plus on aura

$$\Big|_{t_1}^{w}\frac{t-1}{q} \leq 2$$

$$\frac{\cos\psi-\cos\vartheta'}{1-u} = \frac{1}{\cos\psi} - \frac{\sin^2\psi}{\cos\psi\,(1-u)}$$

$$\sin\omega\int\limits_{-\omega}^{\bar\vartheta-\omega}\frac{\sin\vartheta' d\vartheta'}{1-\cos\psi\cos\vartheta'} = \frac{\sin\omega}{\cos\psi}\log\frac{1-\cos\psi\cos(\bar\vartheta-\omega)}{1-\cos\psi\cos\omega},$$

$\therefore \lim\limits_{h=0} H_x$ est finie ou infinie, si $\lim\limits_{h=0} \omega \log [\psi^2 + (\bar{\vartheta} - \omega)^2]$ est finie ou infinie.

On retrouvera la formule (163) aussi dans ce cas, pourvu que

$$\lim_{h=0} \omega \log [\psi^2 + (\bar{\vartheta} - \omega)^2] = 0. \tag{164}$$

Enfin on aura

$$\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z} = -\pi(\sigma_1 + \sigma_2) - 2(\sigma_2 - \sigma_1) \lim_{h=0} \left[\mathrm{tg}^{-1} \frac{\vartheta_1 - \omega}{\psi} + \mathrm{tg}^{-1} \frac{\omega}{\psi} \right].$$

Remarque. Soient Q_1 le point $(w, \bar{\vartheta})$ et $\delta =$ l'angle (P_0Q_1, P_0P), donc la condition (164) peut s'écrire

$$\lim_{h=0} \omega \log \delta = 0. \tag{164*}$$

3°. *Point saillant.* Supposons que les deux densités sont séparées par deux droites qui se rencontrent au point P_0, et soit $\pi - 2\lambda'$ leur angle, concave du côté où la densité est $= \sigma_1$, $0 < \lambda' < \frac{\pi}{2}$. Prenons la bissectrice de cet angle pour axe des y. Nous trouverons (141)

$$\left\{ \begin{aligned} & \lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial x} = (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \lambda' \log \frac{1 + \cos \psi_0 \cos(\lambda' + \omega_0)}{1 - \cos \psi_0 \cos(\lambda' - \omega_0)} \\ & \lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial y} \text{ infinie} \\ & \lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z} = -\pi(\sigma_1 + \sigma_2) + 2(\sigma_2 - \sigma_1) \mathrm{tg}^{-1} \frac{\sin \omega_0 \cos \psi_0 - \sin \lambda'}{\sin \psi_0 \cos \lambda'}. \end{aligned} \right. \tag{165}$$

Pour $\lim\limits_{h=0} \psi = 0$ on aura des valeurs finies de $\lim \frac{\partial V_h}{\partial x}$, excepté les cas où $\omega_0 = \lambda'$ et $\omega_0 = \pi - \lambda'$, c.-à-d. les cas où les lignes de séparation sont tangentes à la courbe P_0PP_1. Enfin on aura

$$\left\{ \begin{aligned} \lim \frac{\partial V_h}{\partial z} & = -2\pi\sigma_1 \text{ dans le domaine } \sigma_1 \\ & = -2\pi\sigma_2 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \sigma_2 \\ & = -\pi(\sigma_1 + \sigma_2) \text{ suivant les lignes de séparation,} \end{aligned} \right. \tag{166}$$

l'angle ω étant supposé constant.

On trouvera facilement comment on peut généraliser ces résultats au cas que le point P_0 se trouve sur le bord en un point saillant d'une courbe quelconque.

4°. *Point de rebroussement.* Prenons la tangente commune des deux branches pour axe des y et soit-elle dirigée vers l'intérieur du domaine σ_1. La formule

(163) donne,

(167)
$$\begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial x} = (\sigma_2 - \sigma_1) \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_h^a (\cos \varepsilon_1 - \cos \varepsilon_2) \frac{dr}{r}, \text{ pour} \\ \vartheta_1 = \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon_1, \ \vartheta_2 = \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon_2, \ \therefore \lim\limits_{h=0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{h=0} \varepsilon_2 = 0. \end{cases}$$

De plus, les formules (141) donnent

(168)
$$\begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial y} = (\sigma_1 - \sigma_2) \displaystyle\int_h^a (\sin \varepsilon_1 + \sin \varepsilon_2) \frac{dr}{r}, \text{ et} \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial z} = -2\pi\sigma_2, \end{cases}$$

$\therefore \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial y}$ n'est pas nécessairement infinie dans ce cas.

Si la courbe P_0PP_1 touche le plan, mais si ω est $\neq \frac{\pi}{2}$, les quantités $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial x}$ et $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial y}$ existent, si elles existent pour $\psi_0 \neq 0$. Dans le cas où $\omega = \frac{\pi}{2}$, on aura $u = \cos\psi \sin\vartheta$, et on trouvera que la partie de N_h (138) qui pourrait devenir infinie peut s'écrire

$$I = (\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^w t\,dt \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [-\mu\cos\psi + (\lambda\cos\vartheta + \mu\sin\vartheta)\,t] \frac{d\vartheta}{q^3} \equiv \lambda I_x + \mu I_y.$$

1°. $\operatorname{Lim}\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial x}$. On aura

$$I_x = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\cos\psi} \int_0^w \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right) t\,dt,$$

q_1 et q_2 étant les valeurs que prend q pour $\vartheta = \vartheta_1$ et $\vartheta = \vartheta_2$ resp. Soit q_0 la valeur de q pour $\vartheta = \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore q_0 = \sqrt{t^2 - 2t\cos\psi + 1} < q_1 = \sqrt{t^2 - 2t\cos\psi\cos\varepsilon_1 + 1} < \sqrt{t^2 - 2t\cos\psi\cos\bar\varepsilon + 1} \equiv \bar q_1,$$

$\bar\varepsilon$ étant la valeur maximum de ε_1 pour $r \leq wh$,

$$\therefore I_x = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\cos\psi} \int_0^w \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}\right) t\,dt - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\cos\psi} \int_0^w \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_2}\right) t\,dt = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\cos\psi} [t' I' - t'' I'']$$

$$I' \equiv \int_0^w \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}\right) dt, \quad I'' \equiv \int_0^w \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_2}\right) dt,$$

t' et t'' étant des valeurs moyennes de t. On aura

$$I' < \int_0^w \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q}\right) dt = \Big/^{t=w} \log \frac{q_0 + t - \cos\psi}{q + t - \cos\psi \cos\bar{\varepsilon}} - \log \frac{1 - \cos\psi}{1 - \cos\psi \cos\bar{\varepsilon}}.$$

Le premier terme du dernier membre a une limite finie pour $\lim h = 0$, et le second terme aura une limite finie, si

(169) $$\lim_{h=0} \frac{\bar{\varepsilon}}{\psi} \text{ est finie.}$$

On peut traiter l'intégrale I'' de la même manière.

2°. $\operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial y}$. On peut écrire

$$I_y = (\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^w t\,dt \int_0^{\varepsilon_1} (t \cos\varepsilon - \cos\psi) \frac{d\varepsilon}{q^3} + (\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^w t\,dt \int_0^{\varepsilon_2} (t \cos\varepsilon - \cos\psi) \frac{d\varepsilon}{q^3}.$$

Or on a

$$\int_0^{\varepsilon_1} (t\cos\varepsilon - \cos\psi) \frac{d\varepsilon}{q^3} = -\frac{1}{2\cos\psi} \int_0^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{q} + A \frac{\sin\varepsilon_1}{q_1} + \frac{A}{4t\cos\psi} \int_0^{\varepsilon_1} q\,d\varepsilon$$

$$A \equiv \frac{2t}{(t^2 + 2t\cos\psi + 1)} \left[1 + \frac{2(t - \cos\psi)\cos\psi}{t^2 - 2t\cos\psi + 1}\right].$$

Par suite, le premier terme de l'expression de I_y a une valeur limite finie, si les deux quantités

$$I'_y \equiv \int_0^w dt \int_0^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{q} \quad \text{et} \quad I''_y \equiv \int_0^w \sin\varepsilon_1 \frac{|t - \cos\psi|\, t\,dt}{q_1 q_0^2}$$

ont des limites finies. On a

$$I'_y < \bar{\varepsilon} \int_0^w \frac{dt}{q_0}, \quad \therefore \lim_{h=0} I'_y \text{ est finie, si } \lim_{h=0} \bar{\varepsilon} \log\psi \text{ est finie,}$$

$$I''_y < \bar{\varepsilon} w \int_0^w \frac{dt}{q_0}, \quad \therefore \lim_{h=0} I''_y \text{ est finie, si } \lim_{h=0} \frac{\bar{\varepsilon}}{\psi} \text{ est finie.}$$

Le second terme de l'expression de I_y peut être traité de la même manière.

3°. $\operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z}$ existe toujours.

En résumé nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si le point P_0 se trouve en un point de rebroussement du bord, $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ existe toujours où la courbe $P_0 P P_1$ n'a pas un contact avec la tangente qui est d'un ordre plus élevé que ceux qu'ont les branches du bord avec la même tangente.*

§ 25. **Cas particuliers.** Les considérations précédentes ont conduit à ce résultat que l'existence des dérivées dans la surface et des limites des dérivées extérieures dépend en général de l'existence des quantités

$$(170) \qquad \begin{cases} U_x = \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} = \lim_{h=0} \int_{(h)}^{(a)} \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\omega \\ U_y = \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} = \lim_{h=0} \int_{(h)}^{(a)} \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\omega, \end{cases}$$

où $d\omega$ est l'élément de surface, et où le signe $\int_{(h)}^{(a)}$ désigne que l'intégration doit être prise sur le domaine qui est compris entre les deux cercles, dont les rayons sont a et h resp., et dont le centre commun se trouve au point P_0 de la surface. Nous examinerons dans ce paragraphe quelques cas particuliers, où ces limites existent.

1°. Soit $\sigma(r, \vartheta)$ une telle fonction de ϑ que

$$\int_0^{2\pi} \sigma \cos \vartheta d\vartheta = 0, \quad \therefore \int_0^a \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} \sigma \cos \vartheta d\vartheta = 0, \quad \therefore U_x \text{ existe,}$$

ou que

$$\int_0^{2\pi} \sigma \sin \vartheta d\vartheta = 0, \quad \therefore U_y \text{ existe.}$$

Ce cas a lieu par ex. si σ est α) une constante ou β) une fonction de r seulement. γ) Si $\sigma(2\pi-\vartheta)=\sigma(\vartheta)$, U_y existe; et si $\sigma(\pi-\vartheta)=\sigma(\vartheta)$, U_x existe. δ) Si σ est une fonction de x seulement, U_y existe, et si σ est une fonction de y seulement U_x existe. ε) Soit σ une fonction de $r\cos\vartheta$ seulement. On aura, en posant $r\cos\vartheta=\bar{x}$,

$$U_{xh}=\int_0^{2\pi}\cos\vartheta d\vartheta\int_h^a\sigma(\bar{x})\frac{dr}{r}=\iint\sigma(\bar{x})\cos\vartheta\frac{d\bar{x}d\vartheta}{\bar{x}}=$$

$$=2\int_{-h}^{h}\sigma(\bar{x})\left(\sqrt{1-\frac{\bar{x}^2}{a^2}}-\sqrt{1-\frac{\bar{x}^2}{h^2}}\right)\frac{d\bar{x}}{\bar{x}}+2\int_h^a\frac{\sigma(\bar{x})-\sigma(-\bar{x})}{\bar{x}}\sqrt{1-\frac{\bar{x}^2}{a^2}}\,d\bar{x}.$$

La première intégrale du dernier membre a une valeur limite finie pour $\lim h=0$. La seconde intégrale a une limite finie, si $\lim\limits_{h=0}\int_h^a\frac{\sigma(\bar{x})-\sigma(-\bar{x})}{\bar{x}}d\bar{x}$ est finie. D'où le théorème:

Théorème. *Si σ est une fonction de $\bar{x}$ seulement, donc U_x existe, si*

$$\lim_{h=0}\int_h^a\frac{u(\bar{x})-u(-\bar{x})}{\bar{x}}d\bar{x}\ \textit{est finie.}\tag{171}$$

ζ) Si $\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}$ existe pour tout point dans le cercle (a), donc U_x existe. En effet, on aura

$$\int_{(h)}^{(a)}\sigma(\xi,\eta)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\omega=-\int_{(h)}^{(a)}\sigma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\xi\,d\eta=-\int_0^{2\pi}[\sigma(a,\vartheta)-\sigma(h,\vartheta)]\cos\vartheta d\vartheta+\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_h^a\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}dr\ \text{etc.}$$

η) U_x et U_y existent, si

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0\cos\vartheta d\vartheta=0,\int_0^{2\pi}\sigma_0\sin\vartheta d\vartheta=0,\ \text{et}\\ \displaystyle\lim_{h=0}\int_h^a\frac{\sigma-\sigma_0}{r}dr\ \text{est finie et déterminée pour chaque valeur de }\vartheta.\end{cases}\tag{172}$$

§ 26. *Existence de la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *en un point quelconque du plan attirant.* L'existence de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ en un point situé dans le plan ou de la limite de la dérivée extérieure dépend essentiellement de l'existence de la quantité $U_s = \lim_{h=0} U_{sh}$, où

$$U_{sh} = \lambda U_{xh} + \mu U_{yh}, \tag{173}$$

le point considéré P_0 étant pris pour origine et comme centre de la partie circulaire considérée du plan. Nous chercherons maintenant une formule, où la condition de l'existence de U_s soit exprimée en fonction des coordonnées du point P, situé sur l'axe des x positifs à la distance k de l'origine P_0, $k > 0$. Nous aurons pour le point P (fig. 1), en prenant l'axe des x dans la direction $P_0 P$,

$$\left\{\begin{aligned} & U_{sh} = \int \sigma \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial s} d\omega = \int_{(h)}^{(a)} \sigma v \frac{r\,dr\,d\vartheta}{R^2} \\ & v = \cos(ds, PQ) = \lambda \frac{r\cos\vartheta - k}{R} + \mu \frac{r\sin\vartheta}{R} \\ & R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rk\cos\vartheta + k^2} \\ & k = P_0 P, \end{aligned}\right. \tag{174}$$

l'intégrale étant prise sur le domaine qui est compris entre le cercle (P_0) et un cercle de rayon $h\,(h < k)$, dont le centre se trouve au point P. Posons (62)

$$\left\{\begin{aligned} & r = ks, h = k\alpha, R = kp, \cos\vartheta = u, \\ & \therefore\; p = \sqrt{s^2 - 2su + 1} \\ & v = \frac{\lambda(su - 1)}{p} + \mu \frac{s}{p} \sin\vartheta = \frac{\beta_2 s - \lambda}{p},\; \beta_2 \equiv \lambda\cos\vartheta + \mu \sin\vartheta. \end{aligned}\right. \tag{175}$$

Soit $\varkappa$ une constante telle que $1 > \varkappa > \alpha$,

$$\left\{\begin{aligned} & \therefore\; U_{sh} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{1-\varkappa} \sigma(ks, \vartheta) v \frac{s\,ds}{p^2} + \int_0^{2\pi} \partial\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} \sigma \frac{vs\,ds}{p^2} + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1-\varkappa}^{1-\alpha} \sigma \frac{vs\,ds}{p^2} + \\ & + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+\alpha}^{1+\varkappa} \sigma \frac{vs\,ds}{p^2} + \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} s\,ds \int_{\vartheta_1}^{2\pi - \vartheta_1} \sigma v \frac{d\vartheta}{p^2} \equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \\ & \alpha^2 = s^2 - 2s\cos\vartheta_1 + 1. \end{aligned}\right. \tag{176}$$

Les intégrales I_1 et I_2 sont indépendantes de α, et comme p ne peut s'évanouir que pour $s=u=\text{I}$, elles sont aussi toujours finies. Quant à I_5 on aura

$$\int\limits_{\text{I}-\alpha}^{1+\alpha} s^2 ds \int\limits_{\vartheta_1}^{2\pi-\vartheta_1} \sigma \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{p^3} = \sigma' \int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha} s ds \int\limits_{\vartheta=\vartheta_1}^{\pi} d\left(-\frac{\text{I}}{p}\right) + \sigma'' \int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha} s ds \int\limits_{\vartheta=\pi}^{2\pi-\vartheta_1} d\left(-\frac{\text{I}}{p}\right) = 2(\sigma'-\sigma'') + (\sigma''-\sigma') \int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha} \frac{s ds}{s+\text{I}},$$

σ' et σ'' étant deux valeurs moyennes de σ. Si la fonction σ est continue, la limite pour $\alpha=\text{o}$ du dernier membre est $=\text{o}$. D'autre part on peut écrire (cfr fig. 3)

$$\int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha} s ds \int\limits_{\vartheta_1}^{2\pi-\vartheta_1} \sigma(su-\text{I}) \frac{d\vartheta}{p^3} = \int\limits_{\vartheta_2}^{2\pi-\vartheta_2} d\vartheta \int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha} \sigma(su-\text{I}) \frac{s ds}{p^3} + \int\limits_{-\vartheta_2}^{\vartheta_2} d\vartheta \int\limits_{1-\alpha}^{s_1} \sigma(su-\text{I}) \frac{s ds}{p^3} +$$

$$+ \int\limits_{-\vartheta_2}^{\vartheta_2} d\vartheta \int\limits_{s_2}^{1+\alpha} \sigma(su-\text{I}) \frac{s ds}{p^3} \equiv F' + F'' + F''',$$

$$\sin\vartheta_2 = \alpha,\ s_1 = \cos\vartheta - \sqrt{\alpha^2 - \sin^2\vartheta},\ s_2 = \cos\vartheta + \sqrt{\alpha^2 - \sin^2\vartheta}$$

$$F' = \sigma' s' \int\limits_{\vartheta_3}^{2\pi-\vartheta_3} d\vartheta \Big/_{1-\alpha}^{1+\alpha} - \frac{s}{p} + \sigma' s' \int\limits_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} d\vartheta \Big/_{1-\alpha}^{\frac{1}{\cos\vartheta}} - \frac{s}{p} + \sigma'' s'' \int\limits_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} d\vartheta \Big/_{\frac{1}{\cos\vartheta}}^{1+\alpha} - \frac{s}{p} +$$

$$+ \sigma' s' \int\limits_{-\vartheta_3}^{-\vartheta_2} d\vartheta \Big/_{1-\alpha}^{\frac{1}{\cos\vartheta}} - \frac{s}{p} + \sigma'' s'' \int\limits_{-\vartheta_3}^{-\vartheta_2} d\vartheta \Big/_{\frac{1}{\cos\vartheta}}^{1+\alpha} - \frac{s}{p},\ \cos\vartheta_3 = \frac{\text{I}}{\text{I}+\alpha},$$

σ', σ'', s' et s'' étant des valeurs moyennes de σ et de s. Posons

$$p_1 = \sqrt{2(\text{I}-u)(\text{I}-\alpha)+\alpha^2},\ p_2 = \sqrt{2(\text{I}-u)(\text{I}+\alpha)+\alpha^2},\ \Gamma = \int\limits_0^{\varepsilon} \left(\frac{\text{I}}{p_1} - \frac{\text{I}}{p_2}\right) d\vartheta.$$

Nous avons trouvé (74) $\lim\limits_{\alpha=0} \Gamma \leqq e\varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon=0} e$ finie,

$$\therefore \lim_{\alpha=0} \int\limits_{\vartheta_3}^{2\pi-\vartheta_3} d\vartheta \Big/_{1-\alpha}^{1+\alpha} - \frac{s}{p} = \text{o}.$$

Posons de plus

$$2(1-u)=\vartheta^2\lambda(\vartheta),\ \therefore\ p_1=\sqrt{\lambda(\vartheta)(1-\alpha)}\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta)}},$$

$$\therefore \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left(\frac{1-\alpha}{p_1}-\frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\right)d\vartheta=-\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left[\frac{1}{\vartheta}-\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta)}}}\right]d\vartheta+g,\ \lim_{\alpha=0}g=0,$$

$$\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left[\frac{1}{\vartheta}-\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta_3)}}}\right]d\vartheta>\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left[\frac{1}{\vartheta}-\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta)}}}\right]d\vartheta>$$

$$\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left[\frac{1}{\vartheta}-\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}}\right]d\vartheta.$$

En effectuant les intégrations, on trouvera

$$\lim_{\alpha=0}\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left(\frac{1-\alpha}{p_1}-\frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\right)d\vartheta=-\lim_{\alpha=0}\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left[\frac{1}{\vartheta}-\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta)}}}\right]d\vartheta=-\log\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1).$$

Les autres termes de F' peuvent être traités de la même manière, et on trouvera

$$\lim_{\alpha=0}F'=0.$$

De même on peut écrire

$$F''=-\sigma's'\int_{-\vartheta_2}^{\vartheta_2}\left(\frac{s_1}{\alpha}-\frac{1-\alpha}{p_1}\right)d\vartheta=-\sigma's'\int_{-\vartheta_2}^{\vartheta_2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1}\right)d\vartheta+g',\ \lim_{\alpha=0}g'=0,$$

$$\therefore\ \lim_{\alpha=0}F''=-2\sigma_k[1-\log(\sqrt{2}+1)],$$

σ_k étant la valeur de σ au point P. Enfin on aura

$$F'''=2\sigma's'\int_{\vartheta_4}^{\vartheta_2}d\vartheta\Big/_{s_2}^{\frac{1}{\cos\vartheta}}-\frac{s}{p}+2\sigma''s''\int_{\vartheta_4}^{\vartheta_2}d\vartheta\Big/_{\frac{1}{\cos\vartheta}}^{1+\alpha}-\frac{s}{p}+2\sigma''s''\int_{0}^{\vartheta_4}d\vartheta\Big/_{s_2}^{1+\alpha}-\frac{s}{p},\ \operatorname{tg}\vartheta_4\equiv\alpha,$$

et on trouvera que les deux premiers termes du second membre ont des limites nulles,

$$\therefore \lim_{\alpha=0} F'''' = 2\sigma_k[1-\log(\sqrt{2}+1)],$$

$$(177) \qquad \because \lim_{\alpha=0} S_5 = 0.$$

L'intégrale I_3 peut s'écrire

$$I_3 = \lambda F_3 + \mu G_3$$

$$F_3 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1-\varkappa}^{1-\varkappa} \sigma(su-1)s\frac{ds}{p^3}.$$

On peut écrire

$$(178) \quad \frac{s(su-1)}{p^3} = (s+1)\frac{\partial}{\partial s}\frac{1-s}{p} + \frac{1}{1+u}\frac{\partial}{\partial s}\frac{s-u}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1-s}{p^3}, \; \frac{\partial}{\partial s}\frac{1-s}{p} < 0.$$

Si on fait l'intégration de F_3 en y substituant l'expression (178) de $\frac{s(su-1)}{p^3}$, on peut intégrer chacun des trois premiers termes du second membre pour des valeurs moyennes de σ. En posant dans le dernier terme

$$s = 1-\tau, \quad p_- = \sqrt{2(1-u)(1-\tau)+\tau^2},$$

on aura

$$F_3 = -\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \sigma(k-k\tau, \vartheta)\,\tau\frac{d\tau}{p_-^3} + f_3, \; \lim_{\alpha=0} f_3 \text{ finie.}$$

On trouvera de même, en posant $s = 1+\tau$,

$$I_4 = \lambda F_4 + \mu G_4$$

$$F_4 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \sigma(k+k\tau, \vartheta)\,\tau\frac{d\tau}{p_+^3} + f_4, \; \lim_{\alpha=0} f_4 \text{ finie,}$$

$$p_+ = \sqrt{2(1-u)(1+\tau)+\tau^2},$$

$$(179) \quad \therefore F_3 + F_4 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \left[\frac{\sigma(k+k\tau,\vartheta)}{p_+^3} - \frac{\sigma(k-k\tau,\vartheta)}{p_-^3}\right]\tau\, d\tau + f, \lim_{\alpha-0} f \text{ finie.}$$

Posons

$$p' = \sqrt{2(1-u)+\tau^2}, \; \therefore p' > p_-.$$

Nous trouverous en intégrant

$$\lim_{\alpha=0}\int\limits_{\alpha}^{\varkappa}\left(\frac{1}{p_-^3}-\frac{1}{p'^3}\right)\tau\, d\tau = \text{une quantité toujours finie, même pour } \vartheta = 0,$$

et nous aurons un résultat analogue pour p_+. Dans l'équation (179) on pourra donc remplacer p_- et p_+ par p'. De même on peut remplacer p' par $\bar{p}\equiv\sqrt{\vartheta^2+\tau^2}$. D'où le théorème.

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial x}$ *ou la limite* $\lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial x}$ *existe au point* P $(r=k>0,\ \vartheta=0)$, *est que la quantité* $H_x\equiv\lim\limits_{\alpha=0} H_{x\alpha}$ *existe, où*

$$H_{x\alpha}=\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta\int\limits_{\alpha}^{\varkappa}[\sigma(k+k\tau,\vartheta)-\sigma(k-k\tau,\vartheta)]\frac{\tau\, d\tau}{(\tau^2+\vartheta^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{180}$$

pourvu que la courbe PP_1 *ne touche pas la surface.*

Si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned}&\sigma_1(r,\vartheta)=\sigma(r,\vartheta)+\sigma(r,2\pi-\vartheta)\\&\tau=p\cos\gamma \qquad\qquad \vartheta=p\sin\gamma\\&\sigma_1(k+k\tau,\vartheta)=\sigma_+ \qquad \sigma_1(k-k\tau,\vartheta)=\sigma_-,\end{aligned}\right. \tag{181}$$

on peut mettre la quantité $H_{x\alpha}$ sous la forme

$$\left\{\begin{aligned}&H_{x\alpha}=\int\limits_0^{\cos^{-1}\frac{\alpha}{\varkappa}}\cos\gamma\, d\gamma\int\limits_{\frac{\alpha}{\cos\gamma}}^{\varkappa}(\sigma_+-\sigma_-)\frac{dp}{p}+h'=\int\limits_{\alpha}^{\varkappa}\frac{dp}{p}\int\limits_0^{\cos^{-1}\frac{\alpha}{p}}(\sigma_+-\sigma_-)\cos\gamma\, d\gamma+h',\ \lim_{\alpha=0}h'\ \text{finie},\\&\qquad\qquad \sigma_+\equiv\sigma_1(k+k\tau,\vartheta),\ \sigma_-\equiv\sigma_1(k-k\tau,\vartheta).\end{aligned}\right. \tag{182}$$

Posons

$$\sigma_+-\sigma_-=\bar{\sigma}_1(\tau,\vartheta)=\bar{\bar{\sigma}}_1(p,\gamma), \tag{183}$$

donc la quantité $H_{x\alpha}$ peut être remplacée par une des fonctions

$$(184)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \bar{\sigma}_1(\tau', \vartheta) \frac{d\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2 + \alpha^2}} \\ \displaystyle\int_{\alpha}^{\varkappa} \bar{\sigma}_1(\tau, \vartheta') \frac{d\tau}{\tau} \\ \displaystyle\int_0^{\cos^{-1}\frac{\alpha}{\varkappa}} \bar{\bar{\sigma}}_1(p', \gamma) \cos\gamma \log\frac{\cos\gamma}{\alpha} d\gamma, \\ \displaystyle\int_{\alpha}^{\varkappa} \bar{\bar{\sigma}}_1(p, \gamma') \frac{dp}{p} \end{cases}$$

τ', ϑ', p' et γ' étant des valeurs moyennes des variables τ, ϑ, γ et p resp.

Cas particulier. Si $\sigma_1(k + k\tau, \vartheta)$ est une fonction paire de τ, la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ existe.

Si nous posons

$$(185)\qquad \sigma_2(r, \vartheta) = \sigma(r, \vartheta) - \sigma(r, 2\pi - \vartheta),$$

nous trouverons de la même manière

$$(186)\qquad G_3 + G_4 = \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_{\alpha}^{\varkappa} \left[\frac{\sigma_2(k + k\tau, \vartheta)}{p_+^3} + \frac{\sigma_2(k - k\tau, \vartheta)}{p_-^3}\right] d\tau + g, \ \lim_{\alpha=0} g \text{ finie,}$$

et nous aurons le théorème suivant:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial y}$ *ou la limite* $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial y}$ *existe au point* $P(r = k,\ \vartheta = 0)$, *est que la quantité* $H_y \equiv \lim\limits_{\alpha=0} H_{y\alpha}$ *existe, où*

$$(187)\qquad H_{y\alpha} = \int_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int_{\alpha}^{\varkappa} [\sigma_2(k + k\tau, \vartheta) + \sigma_2(k - k\tau, \vartheta)] \frac{d\tau}{[\tau^2 + \vartheta^2]^{\frac{3}{2}}},$$

pourvu que la courbe $P_0 P P_1$ *ne touche pas la surface.*

Posons

(188) $$\cos\gamma = \bar{v},\ \sigma_2(k + k\tau, \vartheta) + \sigma_2(k - k\tau, \vartheta) = \bar{\sigma}_2(\tau, \vartheta) = \bar{\bar{\sigma}}_2(p, \bar{v}),$$

donc la quantité $H_{y\alpha}$ peut être remplacée par une des fonctions

(189) $$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int\limits_{\frac{\alpha}{\varkappa}}^{1} d\bar{v} \int\limits_{\frac{\alpha}{\bar{v}}}^{\varkappa} \bar{\bar{\sigma}}_2 \frac{dp}{p} \text{ et} \\ \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\varkappa} \frac{dp}{p} \int\limits_{\frac{\alpha}{p}}^{1} \bar{\bar{\sigma}}_2 d\bar{v} \end{array}\right.$$

ou encore par une des fonctions

(190) $$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\varepsilon} \bar{\sigma}_2(\tau'', \vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta} \\ \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\varepsilon} \bar{\sigma}_2(\tau, \vartheta'') \frac{d\tau}{\tau} \\ \displaystyle\int\limits_{\frac{\alpha}{\varkappa}}^{1} \bar{\bar{\sigma}}_2(p'', \bar{v}) \log \frac{\bar{v}}{\alpha} d\bar{v}, \\ \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\varkappa} \bar{\bar{\sigma}}_2(p, \bar{v}'') \frac{dp}{p} \end{array}\right.$$

τ'', ϑ'', p'' et $\bar{v}''$ étant des valeurs moyennes des variables τ, ϑ, p et $\bar{v}$ resp.

Cas particulier. Si $\sigma(r, \vartheta)$ est une fonction paire de ϑ, la dérivée $\frac{\partial V}{\partial y}$ existe.

Corollaires. 1°. Soit

$\iota \equiv 0$ pour $1 - \alpha < s < 1 + \alpha$, et $\equiv 1$ pour les autres valeurs de s.

Donc l'égalité (186) peut s'écrire (176)

$$G_3 + G_4 = \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \iota\, \sigma_2(ks, \vartheta) \frac{s^2 ds}{p^3} = \int\limits_0^{\pi} \sigma_2(ks', \vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \iota\, s^2 \frac{ds}{p^3},$$

s' étant une valeur moyenne de s. En substituant la valeur de ι et en intégrant par rapport à s, on trouvera que la quantité $H_{y\alpha}$ peut être remplacée aussi par la quantité

$$(191)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \sigma_2(ks', \vartheta)\left[1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\vartheta^2}}\right]\frac{d\vartheta}{\vartheta}, \text{ ou encore} \\ \displaystyle\eta\int_0^{\varepsilon} \sigma_2(ks', \vartheta)\frac{\vartheta\, d\vartheta}{\alpha^2+\vartheta^2}, \quad 1 < \eta \leq 2. \end{cases}$$

2°. **Théorème.** *La condition nécessaire et suffisante pour que* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *existe, est que* $H_s = \lim\limits_{\alpha=0} H_{s\alpha}$ *existe, où*

$$(192)\qquad H_{s\alpha} = \lambda H_{x\alpha} + \mu H_{y\alpha}.$$

§ 27. *Continuité de la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *et de* $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$. Dans ce paragraphe nous supposerons que la densité $\sigma(r, \vartheta)$ est continue par rapport à r et à ϑ. D'où il suit que les quantités $\frac{\partial V}{\partial s}$ et $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ — si la courbe PP_1 ne touche pas le plan, ce que nous supposerons dans ce paragraphe — sont continues en même temps que la quantité U_s, $k > 0$. Mais U_s est continue en même temps que $\lim\limits_{\alpha=0}(I_3 + I_4)$, et nous trouverons que cette dernière quantité est continue en même temps que H_s, d'où le théorème:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *ou* $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ *soit continue au point* $P(r = k > 0,\ \vartheta = 0)$ *pour un déplacement suivant l'axe des* x, *est que la quantité* $H_s = \lim\limits_{\alpha=0} H_{s\alpha}$ (192) *est continue par rapport à* k.

Quant à l'origine, nous trouverons pour $\sigma = \sigma_0$ (176 et 175)

$$I_1^0 + I_3^0 + I_4^0 = \sigma_0 \int_0^{2\pi} [A(1-\alpha) - A(0) + A(1+\varkappa) - A(1+\alpha)]\, d\vartheta$$

$$A(s) = \int (\beta_2 s - \lambda)\, s \frac{ds}{p^3} = \lambda\left[u \log(p + s - u) + \frac{1 - 2su}{p}\right] + \mu \sin\vartheta \int s^2 \frac{ds}{p^3}.$$

En intégrant le terme logarithmique par partie, on trouvera

$$(193) \qquad \int_0^{2\pi} A(s)\,d\vartheta = -\lambda s \int_0^{2\pi} u \frac{d\vartheta}{p},$$

$$\therefore\; I_1^0 + I_3^0 + I_4^0 = -\lambda\sigma_0 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1-\alpha}{p_1} - \frac{1+\alpha}{p_2} + \frac{1+\varkappa}{p_\varkappa}\right] u\,d\vartheta$$

$$p_\varkappa = \sqrt{2(1-u)(1+\varkappa)+\varkappa^2}.$$

De plus, on aura

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\frac{\alpha}{k}} \sigma(\beta_2 s - \lambda) s \frac{ds}{p^3} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\frac{\alpha}{k}} \sigma\left(\frac{\beta_2 s^2}{p^3} - \frac{\beta_2}{s} - \frac{\lambda s}{p^3}\right) ds + \int_0^{2\pi} \beta_2 d\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\frac{\alpha}{k}} \sigma \frac{ds}{s} \equiv I'_2 + I''_2$$

$$I'_2 = \sigma_0 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\infty} \left(\frac{\beta_2 s^2}{p^3} - \frac{\beta_2}{s} - \frac{\lambda s}{p^3}\right) ds + j \equiv I_2^0 + j,\; \lim_{k=0} j = 0$$

$$I_2^0 = \sigma_0 \lambda (1+\varkappa) \int_0^{2\pi} u \frac{d\vartheta}{p_\varkappa},$$

$$\therefore\; I_1^0 + I_2^0 + I_3^0 + I_4^0 = -\lambda\sigma_0 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\alpha}{p_1} - \frac{1+\alpha}{p_2}\right) u\,d\vartheta,$$

et nous trouverons que la limite pour $\alpha = 0$ du second membre est $= 0$,

$$\therefore\; \lim_{\alpha=0} (I_1^0 + I_2^0 + I_3^0 + I_4^0 + I_5^0) = 0,$$

parce que $\lim\limits_{\alpha=0} I_5 = 0$. Mais on a

$$\lim_{k=0} \lim_{\alpha=0} (I_1 + I'_2 + I_5) = \lim_{\alpha=0} (I_1^0 + I_2^0 + I_5^0),$$

et on trouvera que la quantité

$$\lim_{\alpha=0} (I_3 + I_4 - H_3\alpha)$$

est continue par rapport à k. Enfin on aura

$$I''_2 = \int_0^{2\pi} \beta_2 d\vartheta \int_k^{\alpha} \sigma(r,\vartheta) \frac{dr}{r} - \int_0^{2\pi} \beta_2 d\vartheta \int_1^{1+\varkappa} \sigma \frac{ds}{s},$$

où le second terme du second membre a une limite nulle pour $\lim k = 0$, si le premier terme du même membre a une limite finie. Cette dernière limite est égale à la valeur T de U_s dans l'origine,

$$\therefore \lim_{k=0} U_s = \lim_{k=0} \lim_{\alpha=0} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) = \lim_{\alpha=0} (I_1^\circ + I_2^\circ + I_5^\circ) + T +$$
$$+ \lim_{k=0} \lim_{\alpha=0} (I_3 + I_4 - H_{sa}) + \lim_{k=0} H_s.$$

Si $\lim\limits_{k=0} H_s = \lim\limits_{\alpha=0} H_{s\alpha}^\circ$, $H_{s\alpha}^\circ$ étant ce que deviendra $H_{s\alpha}$, si l'on y remplace σ par σ_0, donc on trouvera que $\lim\limits_{k=0} \lim\limits_{\alpha=0} (I_3 + I_4 - H_{sa}) + \lim\limits_{k=0} H_s = \lim\limits_{\alpha=0} (I_3^\circ + I_4^\circ)$. D'où le théorème:

Théorème. *Si U_s existe dans l'origine, donc la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ et $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ sont continues dans l'origine, si*

$$\lim_{k=0} H_s = H_s^\circ. \tag{194}$$

Remarque. La quantité $\lim\limits_{k=0} H_s$ est identique à ce que deviendra la quantité O_s (150) pour $\psi = 0$. Par suite la condition, $\lim\limits_{k=0} H_x = 0$, pour que la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ soit continue au point P_0 dans la direction de l'axe des x, est identique à la condition $O_x = 0$ (p. 202) pour que $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial x}$ soit égale à $\frac{\partial V}{\partial x}$ au point P_0.

Application. *Variation de la dérivée au bord de la surface.* Soient σ_1 et σ_2 deux densités constantes des deux côtés d'une droite. Nous avons vu que la dérivée dans la surface n'est finie que dans la direction de la droite et qu'elle y est $= 0$. En un point situé dans le domaine σ_1 à la distance k de la droite, on trouvera que la valeur de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial y}$ — prise parallèlement à la droite par rapport à un cercle de rayon a dont le centre se trouve en ce point — est (128)

$$\frac{\partial V}{\partial y} = T = (\sigma_2 - \sigma_1) \int\limits_{-\cos^{-1}\frac{k}{a}}^{\cos^{-1}\frac{k}{a}} \sin \vartheta d\vartheta \int\limits_{\frac{k}{\cos\vartheta}}^{a} \frac{dr}{r} = 0, \tag{195}$$

$\therefore$ la dérivée $\frac{\partial V}{\partial y}$ est continue.

§ 28. *Changement de la valeur de la dérivée en traversant le plan.* On trouve facilement qu'en un point de la surface la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ varie continuellement quand la direction de dérivation varie continuellement. Au contraire, si l'on change brusquement la direction en la direction opposée, la dérivée pourra changer brusquement de valeur. Soient ds_+ et ds_- deux élements émanants du point P de la surface dans deux directions opposées. Les formules pour $\frac{\partial V}{d s_-}$ s'obtiennent de ceux qui existent pour $\frac{\partial V}{\partial s_+}$, si on y change ω en $\omega + \pi$. Par suite T'' (131) change en $-T''$, et on obtient

$$\frac{\partial V}{\partial s_+} + \frac{\partial V}{\partial s_-} = -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{ 2 + u \log \frac{1-u}{1+u} \right\} d\vartheta. \tag{196}$$

Si la densité σ est continue, on aura

$$\frac{\partial V}{\partial s_+} + \frac{\partial V}{\partial s_-} = -4\pi\sigma \sin\psi. \tag{197}$$

Remarque I. Si la direction (ω, ψ) de ds change brusquement en la direction correspondante $(\omega, -\psi)$ de l'autre côté du plan, la valeur de $\frac{\partial V}{\partial s}$ ne change point.

Supposons maintenant que le point P se meut suivant une courbe qui traverse le plan au point P_0. Nous trouverons que $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ prend la valeur qu'aura la limite de $\frac{\partial V_h}{\partial s}$, lorsqu'on y substitue $\omega + \pi$ et $-\nu$ à ω et à ν resp. En marquant les deux côtés par les signes + et —, nous trouverons (139)

$$\lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)_+ - \lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)_- = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[\frac{-2\beta_{10}}{1-u_0^2} + \beta_2 \left(\frac{2u_0}{1-u_0^2} - \log \frac{1-u_0}{1+u_0} \right) \right] d\vartheta, \tag{198}$$

parce que β_{10} change en $-\beta_{10}$, et u_0 en $-u_0$, tandis que β_2 et U ne changent point. Pour les dérivées suivant les trois axes nous aurons

$$\tag{199} \left\{ \begin{aligned} &\lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_h}{\partial x}\right)_+ - \lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_h}{\partial x}\right)_- = -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[\frac{2\cos\psi_0 \sin\vartheta \sin(\vartheta-\omega_0)}{1-u_0^2} + \cos\vartheta \log \frac{1-u_0}{1+u_0} \right] d\vartheta \\ &\lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_h}{\partial y}\right)_+ - \lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_h}{\partial y}\right)_- = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[\frac{2\cos\psi_0 \cos\vartheta \sin(\vartheta-\omega_0)}{1-u_0^2} - \sin\vartheta \log \frac{1-u_0}{1+u_0} \right] d\vartheta \end{aligned} \right.$$

$$(199)\quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial z}\right)_+ - \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial z}\right)_- = -2\sin\psi_0\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\frac{d\vartheta}{1-u_0^2} \\ \qquad\qquad u_0 = \cos\psi_0\cos(\vartheta-\omega_0). \end{array}\right.$$

Cas particuliers. 1°. Si la densité σ est continue, on trouvera que les dérivées par rapport aux axes des x et des y n'éprouvent pas de changement brusque, lorsque le point P traverse le plan, mais que la dérivée par rapport à l'axe des z éprouve un changement brusque de $-4\pi\sigma$.

2°. Pour $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ on trouvera

$$(200)\qquad \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial z}\right)_+ - \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial z}\right)_- = -2\int_0^{2\pi}\sigma_0 d\vartheta.$$

3°. Si l'on considère un point sur la ligne de séparation de deux couches homogènes de densités σ_1 et σ_2, on trouvera (159), en supposant que le point P se meut toujours dans le plan normal passant par la ligne de séparation,

$$(201)\qquad \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)_+ - \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)_- = -2\pi(\sigma_1+\sigma_2)\sin\psi,$$

l'élément ds étant dirigé dans une direction quelconque qui fait l'angle ψ avec la surface, l'angle ψ étant compté positif du côté positif du plan.

Remarque II. Le changement de la dérivée quand le point P traverse le plan est toujours fini, même dans le cas où les dérivées $\lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial x}$ et $\lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial y}$ n'existent point, pourvu qu'on définisse le premier membre de l'égalité (198) de la manière suivante

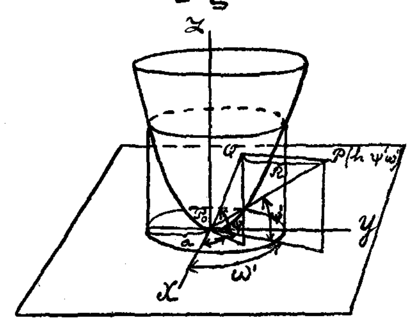
$$(202)\quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial V_h}{d s}\right)_+ - \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial s}\right)_- = \lim\limits_{\substack{h=0\\h'=0}}\left[\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial s}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial V_{h'}}{\partial h'}\right)_-\right] \\ \qquad \lim\dfrac{h'}{h} \text{ finie et} \neq 0 \text{ (cfr. § 16. Rem. I).} \end{array}\right.$$

CHAPITRE III.

La dérivée première du potentiel d'une simple couche. Surface courbe.

§ **29.** *Surface physiquement régulière.* Nous nommerons dans la suite une surface «physiquement régulière» au point P_0 (fig. 8), si par ce point on peut mener une ligne à tangente déterminée qui ne la rencontre qu'en ce point P_0, et dont tous les points qui n'appartiennent pas au voisinage de P_0 sont à une distance finie de la surface. Nous supposerons de plus qu'on peut faire passer par le point P_0 un plan, de manière que la normale de ce plan qui passe par un point quelconque du plan dans le voisinage du point P_0 ne rencontre la surface considérée que dans un nombre fini de points.

Fig. 8.



Décrivons autour du point P_0 comme centre un cercle de rayon a sur ledit plan, et faisons passer par sa circonférence un cylindre droit. Ce cylindre intercepte une certaine partie de la surface considérée, et nous pourrons nous borner à considérer seulement la portion du potentiel qui se rapporte à cette portion de la surface, supposée physiquement régulière au point P_0. Posons

$$V = \int \frac{d\mu}{R}, \tag{203}$$

où $d\mu$ est l'élément de masse répandue sur la surface considérée, et R la distance PQ du point $P(x, y, z)$ au point $Q(\xi, \eta, \zeta)$, où se trouve cet élément de masse.

Nous voulons maintenant faire une troisième supposition, c'est qu'on aura pu choisir le plan, de manière qu'on pourra écrire

$$V = \int \frac{\sigma\, d\omega}{R}, \tag{203*}$$

où $d\omega$ est l'élément du cercle considéré, sans que la fonction σ ne devienne infinie ni indéterminée. L'intégrale est prise autant de fois sur la surface du cercle qu'il y a de points différents de la surface qui correspondent au même point du cercle. Pour fixer les idées nous supposerons dans la suite — ce qui n'est pas indispensable — qu'à chaque point du cercle correspond un, et un seul, point de la portion considérée de la surface.

Prenons le point P_0 comme origine et les axes des x et des y dans ce plan lui-même.

30. *Le point P est situé dans la surface.* Dans ce cas nous pouvons supposer que le point P coïncide avec le point P_0, et nous trouverons comme dans le § 20 pour les potentiels V et V_h qui se rapportent aux points P_0 et P' les formules

$$(204)\quad \begin{cases} \frac{1}{h}(V_h - V) = \frac{1}{h}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma(r, \vartheta)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) r\,dr \\ R = P_0 Q = \frac{r}{\cos\psi} \\ R' = P'Q = \sqrt{R^2 - 2Rhu + h^2} \\ h = P_0 P' \\ u = \cos(P_0Q, P_0P') = \cos\psi'\cos\psi\cos(\vartheta - \omega') + \sin\psi'\sin\psi, \end{cases}$$

ψ' et ω' étant les coordonnées polaires du point $P'(x', y', z')$, de manière que $x' = h\cos\psi'\cos\omega'$ etc., l'angle ω' peut être supposé $= 0$.; ψ et ω sont des coordonnées analogues pour le point $Q(\xi, \eta, \zeta)$.

Posons

$$r = ht$$

$$\therefore \frac{1}{h}(V_h - V) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht, \vartheta)\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q}\right) t\,dt$$

$$(205)\quad \begin{cases} q = \frac{t}{\cos\psi} \\ q' = \sqrt{q^2 - 2qu + 1} = q\left[1 - \frac{u}{q} + \frac{1}{q^2} P\left(\frac{1}{q}\right)\right], \quad \lim_{q=\infty} P\left(\frac{1}{q}\right) \text{ finie,} \end{cases}$$

$$(206)\quad \begin{cases} \therefore \frac{1}{h}(V_h - V) = W_{sh} + Q_{sh} \\ W_{sh} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta)\, u\cos^2\psi \frac{dr}{r} \\ Q_{sh} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sigma(ht, \vartheta)\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q}\right) t\,dt + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \sigma(ht, \vartheta)\left[\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} - \frac{u}{q^2}\right] t\,dt. \end{cases}$$

Le potentiel V_h étant toujours fini, quand la fonction σ est finie, on conclut, en posant $\sigma = 1$, qu'on aura toujours

$$(207)\qquad \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{q=w} \frac{t\,dt}{q'} = \text{une quantité finie, } w > 1,$$

$$\therefore \lim_{h=0} Q_{sh} \text{ est toujours finie.}$$

$$(208)\left\{\begin{aligned} &\therefore \frac{\partial V}{\partial s} = W_s + Q_s \\ &W_s = \lim_{h=0} W_{sh} \\ &W_{sh} = \cos\psi' W_{xh} + \sin\psi' W_{zh} \\ &W_{xh} = \int_0^{2\pi} \cos\vartheta\, d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\cos^3\psi \frac{dr}{r} \\ &W_{zh} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\sin\psi\cos^2\psi \frac{dr}{r} \\ &Q_s = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\cos^2\psi_0\, d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\cos\psi_0}} \left(\frac{1}{q_0'} - \frac{1}{q_0}\right) q_0\, dq_0 + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\cos^2\psi_0\, d\vartheta \int_{\frac{1}{\cos\psi_0}}^{\infty} \left[\frac{q_0}{q_0'} - 1 - \frac{u_0}{q_0}\right] dq_0 = \\ &\quad = -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[1 + u_0 + u_0 \log\left(\frac{1-u_0}{2}\cos\psi_0\right)\right]\cos^2\psi_0\, d\vartheta \end{aligned}\right.$$

$$t = q_0 \cos\psi_0,\quad q_0' = \sqrt{q_0^2 - 2q_0u_0 + 1}$$

$$(209)\qquad u_0 = \cos\psi_0' \cos\psi_0 \cos\vartheta + \sin\psi_0' \sin\psi_0$$

$$(210)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sigma_0(\vartheta) = \lim_{r=0} \sigma(r,\vartheta) \\ &\psi_0(\vartheta) = \lim_{r=0} \psi(r,\vartheta) \\ &\psi_0' = \lim_{h=0} \psi'(h,\omega') \\ &\psi = \psi(r,\vartheta) \text{ étant l'équation de la surface.} \end{aligned}\right.$$

D'où le théorème:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *est que la quantité* W_s *existe* (208).

Corollaire. Si W_s existe, donc

$$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) u_0 \cos^2 \psi_0 \, d\vartheta = 0. \tag{211}$$

Remarque I. Si la fonction σ est continue et l'angle ψ_0 constant $\neq 0$, il faut, pour que W_s existe, que $\psi'_0 = 0$ (211). On trouvera dans ce cas (cfr. 133)

$$Q_s = -2\pi\sigma \sin \psi_0 \cos^2 \psi'_0. \tag{212}$$

Remarque II. On peut remplacer h (208) par $h\varphi(h, \vartheta)$, si l'on ajoute dans l'expression de Q_s le terme

$$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \cos^2 \psi_0 \log \varphi_0(\vartheta) d\vartheta, \quad \varphi_0(\vartheta) \equiv \lim_{h=0} \varphi(h, \vartheta). \tag{213}$$

§ 31. **Cas particuliers.** I. $\psi_0 = 0$ (*point régulier*). On retrouvera pour Q_s a valeur correspondante du cas du plan (131), c.-à-d. $Q_s = M'$.

II. $\psi_0 =$ *une constante* $\neq \frac{\pi}{2}$ (*point conique*). Nous trouverons pour Q_z l'expression

$$Q_z = -\left[1 + \sin \psi_0 + \sin \psi_0 \log \left(\frac{1 - \sin \psi_0}{2} \cos \psi_0\right)\right] \cos^2 \psi_0 \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) d\vartheta. \tag{214}$$

Pour que W_z soit finie, il faut que σ_0 soit $= 0$.

Remarque. Si la fonction σ est constante, nous trouverons pour une direction perpendiculaire à l'axe du cône

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \tag{215}$$

pour toute autre direction ($\psi'_0 \neq 0$) la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ est infinie, si σ_0 est $\neq 0$.

III. $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ (*point de rebroussement*). Posons

$$\begin{cases} \psi = \frac{\pi}{2} - \gamma \\ W_{xh} = \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \, d\vartheta \int_h^{a} \sigma(r, \vartheta) \sin^3 \gamma \frac{dr}{r} \end{cases} \tag{216}$$

(216)
$$\begin{cases} W_{zh} = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_h^a \sigma(r, \vartheta) \cos\gamma \sin^2\gamma \frac{dr}{r} \\ Q_s \;\; = 0. \end{cases}$$

Le cas où $\lim\limits_{r=0} \sigma$ est infinie, a un intérêt particulier. Car dans les cas pratiques σ représente la densité divisée par le cosinus de l'angle que fait la normale de la surface avec la normale du plan de projection. Soient $\frac{\pi}{2} - \gamma_1$ cet angle et μ_1 la densité,

(217)
$$\therefore \; \sigma = \frac{\mu_1}{\sin\gamma_1}.$$

Si l'on suppose $\lim \frac{\gamma}{\gamma_1}$ finie, on trouvera qu'en général la quantité Q_s est finie, même dans le cas grande où la densité μ_1 est infiniment grande comme $\frac{1}{\gamma}$. Pour

(218)
$$\sigma = \frac{\nu}{\sin^2\gamma}$$

nous aurons

(219)
$$\begin{cases} W_{xh} = \int\limits_0^{2\pi} \cos\vartheta \, d\vartheta \int\limits_h^a \nu \sin\gamma \frac{dr}{r} \\ W_{zh} = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_h^a \nu \cos\gamma \frac{dr}{r}. \end{cases}$$

§ 32. $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$, *lorsque la courbe P_0PP_1 ne touche pas la surface.* Nous supposerons maintenant que le point P part au dessus du plan et s'approche de la surface suivant une courbe P_0PP_1 qui ne la rencontre qu'au point P_0 et ne l'y touche pas. Nous trouverons (cfr. 137 et 204)

$$\frac{\partial V_h}{\partial s} = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht, \vartheta) \frac{-\beta'_1 + \beta'_2 q}{q'^3} t \, dt$$

$$q' = \sqrt{q^2 - 2qu + 1}, \; q = \frac{t}{\cos\psi}, \; P_0P = h,$$

$$\therefore \frac{-\beta'_1 + \beta'_2 q}{q'^3} t = \frac{\beta_2}{t} \cos^2\psi + \frac{1}{t^2} P\left(\frac{1}{t}\right), \; \lim_{t=\infty} P\left(\frac{1}{t}\right) \text{ finie,}$$

$$
(220)\quad\begin{cases}
\therefore \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = W'_{sh} + Q'_{sh} \\[2mm]
W'_{sh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\,\beta'_2 \cos^2\psi \frac{dr}{r} \\[2mm]
Q'_{sh} = -\beta'_1 \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht,\vartheta)\cos\psi \frac{q\,dt}{q'^3} + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sigma(ht,\vartheta)\,\beta'_2 \cos\psi \frac{q^2 dt}{q'^3} + \\
\qquad + \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \sigma(ht,\vartheta)\,\beta'_2 \cos\psi \left[\frac{q^2}{q'^3} - \frac{1}{q}\right] dt \\[2mm]
\qquad \equiv \lambda Q'_{xh} + \mu Q'_{yh} + \nu Q'_{zh}
\end{cases}
$$

$$
(221)\quad\begin{cases}
u = \cos\psi' \cos\psi \cos(\vartheta - \omega') + \sin\psi' \sin\psi \\
\beta'_1 = \lambda \cos\psi' \cos\omega' + \mu \cos\psi' \sin\omega' + \nu \sin\psi' \\
\beta'_2 = \lambda \cos\psi\ \cos\vartheta\ + \mu \cos\psi\ \sin\vartheta\ + \nu \sin\psi.
\end{cases}
$$

En passant à la limite, nous trouverons

$$
(222)\quad\begin{cases}
\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = W_s + Q'_s \\[2mm]
W_s = \lim\limits_{h=0} W_{sh} \\[2mm]
W_{sh} = \lambda W_{xh} + \mu W_{yh} + \nu W_{zh} \\[2mm]
W_{xh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\vartheta\, d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\cos^3\psi \frac{dr}{r} \\[2mm]
W_{yh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\cos^3\psi \frac{dr}{r} \\[2mm]
W_{zh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\sin\psi\cos^2\psi \frac{dr}{r} \\[2mm]
Q'_s = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left\{\frac{-\beta'_{10}}{1-u_0} + \frac{\beta'_{20}}{1-u_0} - 2\beta'_{20} - \beta'_{20}\log\frac{(1-u_0)\cos\psi_0}{2}\right\}\cos^2\psi_0\, d\vartheta \\[2mm]
\psi_0 = \lim\limits_{r=0} \psi \ \text{etc.}
\end{cases}
$$

Si la courbe P_0PP_1 ne touche pas la surface, ψ'_0 est $\neq \psi_0$ $\therefore$ u_0 ne peut pas devenir $= 1$, $\therefore$ la quantité Q'_s est toujours finie. Dans ce cas $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ existe en même temps que la quantité W_s (cfr. (208)). D'où le théorème:

Théorème. *Si la courbe P_0PP_1 ne touche pas la surface, donc $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ existe en même temps que la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$.*

Corollaire. $\operatorname{Lim}\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ existe en même temps pour les deux côtés de la surface.

Remarque I. Pour la dérivée, prise dans la direction de la tangente au point P_0 de la courbe P_0PP_1, on trouvera

$$\beta'_{10} = 1, \quad \beta'_{20} = u_0$$

$$(223) \qquad \begin{cases} W_s = \lim\limits_{h=0} \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_h^a \sigma(r, \vartheta)\, u \cos^2\psi \, \frac{dr}{r} \\ Q'_s = -\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{ 1 + 2u_0 + u_0 \log \frac{(1-u_0)\cos\psi_0}{2} \right\} \cos^2\psi_0 \, d\vartheta, \end{cases}$$

par suite, si W_s existe, $Q'_s = Q_s$ (208, 211).

Remarque II. *Soit* $\psi_0 = 0$. Nous retrouverons pour Q'_s les formules du cas du plan (139) c.-à-d.

$$Q'_s = N.$$

Corollaire. Si la quantité σ est continue, on trouvera (cfr. (143)) pour $\psi_0 = 0$

$$Q'_s = Q_s.$$

D'où le théorème (cfr. § 22 Remarque II):

Théorème. *Si $\frac{\partial V}{\partial s}$ existe,*

$$(224) \qquad \lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s} \text{ est } = \frac{\partial V}{\partial s},$$

1° *si la dérivée est prise dans la direction de la tangente au point P_0 de la courbe P_0PP_1;*

2° *si la fonction σ est continue au point P_0, et si la surface y a un plan tangent bien déterminé.*

§ 33. *$\operatorname{Lim}\limits_{h=0} \frac{dV_h}{ds}$, lorsque la courbe P_0PP_1 touche la surface.* Dans ce cas $\lim\limits_{h=0} \psi' = \psi_0(\omega'_0)$. Supposons $\omega' = 0$. Comme dans le § 23 nous écrivons (220)

$$(225)\qquad Q'_{xh}=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta\int_{t_1}^{t_2}\sigma(ht,\vartheta)\cos\psi[q\cos\psi\cos\vartheta-\cos\psi']\frac{q\,dt}{q'^3}+\overline{Q}_x,\ \lim_{h=0}\overline{Q}_x \text{ finie,}$$

t_1 et t_2 étant les valeurs de t qui correspondent aux valeurs limites $1-\varkappa$ et $1+\varkappa$ de $q=\dfrac{t}{\cos\psi}$ (205), $1>\varkappa>0$. Posons

$$(226)\quad\begin{cases}\cos\delta\equiv u=\cos\psi'\cos\psi\cos\vartheta+\sin\psi'\sin\psi,\\ \therefore\ 1-u^2=\sin^2\vartheta\cos^2\psi+[\sin(\psi-\psi')+\sin\psi'\cos\psi(1-\cos\vartheta)]^2=\\ \qquad\qquad=\sin^2\vartheta\cos^2\psi'+[\sin(\psi'-\psi)+\cos\psi'\sin\psi(1-\cos\vartheta)]^2\\ q'=\sqrt{(q-1)^2+2q(1-u)}=\sqrt{(q-u)^2+1-u^2}\\ 2(1-u)\geqq 1-u^2,\\ \therefore\ q'\geqq\sin\delta\\ \dfrac{|q-1|}{q'}\leqq 1,\quad \dfrac{1-u}{q'^2}\leqq 1\ (u\geqq 0),\quad \dfrac{\cos\psi'\sin\vartheta}{q'}\leqq 1,\quad \dfrac{\cos\psi\sin\vartheta}{q'}\leqq 1.\end{cases}$$

Pour des valeurs assez petites de $|\psi'-\psi|$ et de ϑ nous aurons de plus

$$(227)\qquad \frac{|\sin(\psi'-\psi)|}{q'}\leqq 1.$$

Enfin nous tirons de l'égalité (207)

$$(228)\qquad \lim_{h=0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta\int_{t_1}^{t_2}\cos\psi\frac{dt}{q'}=\text{une quantité finie.}$$

Si nous écrivons l'idéntité

$$(229)\quad\begin{cases}\dfrac{q^2\cos^2\psi\cos\vartheta-q\cos\psi'\cos\psi}{q'^3}=\cos^2\psi\cos\vartheta\dfrac{(q-1)^2}{q'^3}-2\cos^2\psi\dfrac{(q-1)(1-\cos\vartheta)}{q'^3}+\\ +\cos\psi\dfrac{(\cos\psi-\cos\psi')(q-1)}{q'^3}-\cos^2\psi\dfrac{1-\cos\vartheta}{q'^3}+\cos^2\psi\dfrac{q-1}{q'^3}+\cos\psi\dfrac{\cos\psi-\cos\psi'}{q'^3},\end{cases}$$

nous trouverons qu'en vertu des égalités (226), (227) et (228) les trois premiers termes du second membre fourniront des termes à limites finies dans le second membre de l'égalité (225). Si nous posons de plus

$$q'_0=\sqrt{(q-1)^2+2(1-u)},$$

nous trouverons pour $q>1$

$$0 < \frac{1}{q_0'^3} - \frac{1}{q'^3} = \left(\frac{1}{q_0'} - \frac{1}{q'}\right)\left(\frac{1}{q_0'} + \frac{1}{q'}\right)^2 - \left(\frac{1}{q_0'} - \frac{1}{q'}\right)\frac{1}{q_0' q'} < \left(\frac{1}{q_0'^2} - \frac{1}{q'^2}\right)\frac{2}{q_0'} < \frac{4}{q'^2},$$

$$(230) \qquad \therefore \; \frac{q-1}{q_0'^3} - \frac{q-1}{q'^3} < \frac{4}{q'} \text{ etc.,}$$

et nous trouverons aussi un résultat analogue pour $q < 1$. D'où il suit qu'on pourra remplacer q' par q_0' dans les termes de l'égalité (225) que fourniront les trois derniers termes du second membre de l'égalité (229). Enfin on pourra remplacer q_0' par

$$(231) \qquad \begin{cases} \bar{q} = \sqrt{(q-1)^2 + \delta^2} \\ \delta^2 \equiv \vartheta^2 \cos^2\psi' + [\psi' - \psi + \cos\psi' \sin\psi\,(1 - \cos\vartheta)]^2. \end{cases}$$

Par suite la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité $\lim\limits_{h=0} Q'_{xh}$ soit finie, est que la quantité

$$S_x = \lim_{h=0} S_{xh}$$

est finie, où

$$(232) \; S_{xh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta)\{\cos^2\psi\,(q-1) + \cos\psi\,(\cos\psi - \cos\psi') - \cos^2\psi\,(1 - \cos\vartheta)\}\frac{dt}{\bar{q}^3}.$$

De même nous pourrons écrire

$$Q'_{yh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta)\cos^2\psi\, q^2 \frac{dt}{q'^3} + \overline{Q}_y, \; \lim_{h=0} \overline{Q}_y \text{ finie.}$$

En posant

$$q = (q-1) + 1 \text{ etc.}$$

nous trouverons que la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité $\lim\limits_{h=0} Q'_{yh}$ soit finie, est que la quantité

$$S_y = \lim_{h=0} S_{yh}$$

est finie, où

$$(233) \qquad S_{yh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta)\cos^2\psi \frac{dt}{\bar{q}^3}.$$

Enfin nous écrirons

$$Q'_{zh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta) \cos\psi\,(q^2 \sin\psi - q \sin\psi') \frac{dt}{q'^3} + \overline{Q}_z, \ \lim_{h=0} \overline{Q}_z \text{ finie,}$$

et

$$q^2 \sin\psi \cos\psi - q \sin\psi' \cos\psi = \sin\psi\cos\psi\,(q-1)^2 + \cos\psi\,(q-1)(\sin\psi - \sin\psi') +$$
$$+ \sin\psi\cos\psi\,(q-1) + \cos\psi\,(\sin\psi - \sin\psi'), \text{ etc.,}$$

et nous trouverons que la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité $\lim\limits_{h=0} Q_{zh}$ soit finie, est que la quantité

$$S_z = \lim_{h=0} S_{zh}$$

est finie, où

$$(234) \qquad S_{zh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta) \{\sin\psi\cos\psi\,(q-1) + \cos\psi\,(\sin\psi - \sin\psi')\} \frac{dt}{q^3}.$$

Soient

$$(235) \qquad \begin{cases} S_{sh} = \lambda S_{xh} + \mu S_{yh} + \nu S_{zh} \\ S_s = \lim\limits_{h=0} S_{sh}, \end{cases}$$

donc nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *existe au point* P_0, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ *soit finie et déterminée, lorsque la courbe* P_0PP_1 *touche la surface, est que la quantité* S_s (235) *est finie et déterminée.*

§ 34. $\mathit{Lim}_{h=0}\ \psi' \neq \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$(236) \qquad \begin{cases} S_{xh} = \cos^2\psi'\, J_1 + \sin\psi'\cos\psi'\, J_2 \\ S_{yh} = \cos^2\psi'\, J_3 \\ S_{zh} = \sin\psi'\cos\psi'\, J_1 - \cos^2\psi'\, J_2 \\ J_1 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta)(q-1) \frac{dt}{q^3} \\ J_2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta)(\psi' - \psi) \frac{dt}{q^3} \end{cases}$$

$$(236)\quad \begin{cases} J_3 = \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma_2(ht, \vartheta) \frac{dt}{\bar{q}^3} \\ \bar{q} = \sqrt{(q-1)^2 + \delta^2}, \quad q = \dfrac{t}{\cos\psi} \\ \delta^2 = \vartheta^2 \cos^2\psi' + (\psi' - \psi)^2 \\ \sigma_2(r, \vartheta) = \sigma(r, \vartheta) - \sigma(r, 2\pi - \vartheta). \end{cases}$$

1°. **Point conique.** Soit l'angle ψ indépendant de r. Pour

$$t = q \cos\psi, \quad |q - 1| = \tau$$

nous trouverons, aux quantités à limites finies ou infiniment petites près,

$$(237)\quad \begin{cases} J_1 = \cos\psi' \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_0^{\varkappa} (\sigma_+ - \sigma_-) \frac{\tau\, d\tau}{(\tau^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ J_2 = \cos\psi' \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} (\psi' - \psi)\, d\vartheta \int_0^{\varkappa} (\sigma_+ + \sigma_-) \frac{d\tau}{(\tau^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ J_3 = \cos\psi' \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int_0^{\varkappa} (\sigma_{2+} + \sigma_{2-}) \frac{d\tau}{(\tau^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \sigma_+ = \sigma(\overline{1 + \tau}\, h \cos\psi, \vartheta) \\ \sigma_- = \sigma(\overline{1 - \tau}\, h \cos\psi, \vartheta). \end{cases}$$

Remarque. Pour $\psi = 0$ on retrouvera le cas du plan (150).

2°. **Point analytique.** Supposons que la fonction $\psi(r, \vartheta)$ admet une dérivée par rapport à r, et posons

$$t = q \cos\psi$$

$$\therefore\ dt = \cos\psi\, dq - q \sin\psi \frac{\partial\psi}{\partial r} h\, dt = \cos\psi \left[1 - q \sin\psi \,.\, h \frac{\partial\psi}{\partial r}\right] dq +$$

des quantités d'ordres supérieurs. Nous supposerons de plus

$$(238)\quad \lim_{h=0} h \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0.$$

Donc nous retrouverons les formules (237) à quelques termes près, qui sont en général infiniment petits par rapport aux termes des seconds membres. Mais dans ce cas il faut écrire

$$J_2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_0^{x} (\sigma_+ + \sigma_-)(\psi' - \psi) \frac{d\tau}{(\tau^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3°. $\lim\limits_{r=0} \psi = 0$, $\lim \frac{\psi'}{\psi} \neq 1$. Dans ce cas nous pourrons remplacer, dans $\bar{q}$, $\cos\psi$ par unité. En effet, soient

$$\bar{q}' = \sqrt{(t-1)^2 + \delta'^2},\ \delta'^2 = \vartheta^2 + (\psi' - \psi)^2,\ \psi = c\psi',\ \therefore\ \frac{\psi'}{q} < \frac{1}{|c-1|},\ \bar{q}' \geqq \bar{q},$$

$$\therefore\ 0 < \frac{1}{q^3} - \frac{1}{q'^3} < \left(\frac{1}{q'^2} - \frac{1}{q^2}\right)\left(\frac{1}{q'} + \frac{1}{q}\right) \leqq \frac{2}{(c-1)^2} \cdot \frac{1}{q'},\ \text{etc.}$$

Nous trouverons donc, aux quantités près dont les limites sont finies ou infiniment petites,

$$(239)\quad \begin{cases} S_{xh} = J_1 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{1-x}^{1+x} \sigma(ht, \vartheta)(t-1) \frac{dt}{(\overline{t-1}^2 + \delta'^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ S_{yh} = J_3 = \int_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int_{1-x}^{1+x} \sigma_2(ht_1 \vartheta) \frac{dt}{(\overline{t-1}^2 + \delta'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ S_{zh} = -J_2 = -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{1-x}^{1+x} \sigma(ht_1 \vartheta)(\psi' - \psi) \frac{dt}{(\overline{t-1}^2 + \delta'^2)^{\frac{3}{2}}}. \\ \delta'^2 = \vartheta^2 + (\psi' - \psi)^2. \end{cases}$$

§ 35. *Point de rebroussement.* Soit $\lim\limits_{h=0} \psi' = \frac{\pi}{2}$. Posons

$$(240)\quad \psi = \frac{\pi}{2} - \gamma,\ \psi' = \frac{\pi}{2} - \gamma',\ \therefore\ \lim_{h=0} \gamma = 0 \text{ pour } \vartheta = 0, \text{ et } \lim_{h=0} \psi' = 0.$$

Dans ce cas les limites de t_1 et t_2 de t deviennent infiniment petites; pourtant, dans la discussion de la quantité Q'_{zh}, il suffit de considérer la partie de l'intégrale qui se rapporte à ces mêmes limites. En effet, soit $F(t)$ une fonction de t, telle que

$$|F(t)| < M \text{ pour } 0 \leqq t \leqq 1,\ M \text{ étant une constante finie.}$$

Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 F(t) \frac{dt}{\bar{q}^n} = \int_0^{t_1} F(t) \frac{dt}{\bar{q}^n} + \int_{t_1}^{t_2} F(t) \frac{dt}{\bar{q}^n} + \int_{t_2}^{1} F(t) \frac{dt}{\bar{q}^n}.$$

La valeur absolue de la première intégrale du second membre est $< \frac{t_1}{\varkappa^n} M$, et celle de la troisième intégrale $< \frac{1-t_2}{\varkappa^n} M$, donc etc.

Soient γ_1 et γ_2 les valeurs de γ qui correspondent aux valeurs $1-\varkappa$ et $1+\varkappa$ de q, et soit $\bar{\gamma}$ la valeur minimum de γ pour $t_1 \leqq t \leqq t_2$. Nous faisons la supposition que

$$(241) \qquad \lim_{h=0} \frac{\gamma_2}{\bar{\gamma}} \text{ est finie,}$$

ce qui aura lieu par ex., si la section de la surface qui passe par la tangente a une courbure finie et déterminée au point P_0. Nous disons que, si $\lim_{h=0} \frac{\gamma}{\gamma'} = c_0 \neq 1$,

$$(242) \quad \lim_{h=0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{q''} \text{ est finie, } q'' = \sqrt{(q-1)^2 + \gamma'^2 \sin^2 \vartheta + [\gamma - \gamma' + \gamma'(1-\cos\vartheta)]^2}.$$

En effet, soit

$$(243) \qquad \begin{cases} \frac{\gamma}{\gamma'} = c \\ \therefore\ q'' = \sqrt{(q-1)^2 + \lambda^2 \gamma'^2} \\ \lambda^2 = c^2 - 2c\cos\vartheta + 1 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{q''} < \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\lambda\gamma'} = \frac{(1+\varkappa)\gamma_2 - (1-\varkappa)\gamma_1}{\lambda'\gamma'} < \frac{1+\varkappa}{\lambda'} \frac{\gamma_2}{\bar{\gamma}} \cdot \frac{\bar{\gamma}}{\gamma'},$$

λ' étant une valeur moyenne de λ, donc etc.

Nous trouverons que les limites pour $h=0$ des trois quantités S_{xh} (232), S_{yh} (233) et S_{zh} (234) sont toutes finies.

$$\therefore \lim_{h=0} Q'_{sh} \text{ est toujours finie.}$$

Si nous supposons $\lim_{h=0} \sigma = \infty$, nous pourrons écrire

$$(244) \qquad \sigma = \frac{\mu}{\gamma},$$

où nous supposerons que $\lim_{h=0} \mu$ est finie. Posons

$$(245)\quad \begin{cases} S'_{sh} = \lambda S'_{xh} + \mu S'_{yh} + \nu S'_{zh} \\ S'_{xh} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu(ht, \vartheta)\,[\gamma - \gamma' - \gamma'(1 - \cos\vartheta)]\,\frac{dt}{q''^3} \\ S'_{yh} = \int\limits_{0}^{\varepsilon} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu_2(ht, \vartheta)\,\gamma\,\frac{dt}{q''^3}, \quad \mu_2(ht, \vartheta) \equiv \mu(ht, \vartheta) - \mu(ht, 2\pi - \vartheta) \\ S'_{zh} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\vartheta \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu_1(ht, \vartheta)\,(q - 1)\,\frac{dt}{q''^3} \\ q = \frac{t}{\gamma}, \quad t_1 = (1 - \varkappa)\gamma_1, \quad t_2 = (1 + \varkappa)\gamma_2, \end{cases}$$

donc nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si les branches de la section de la surface par la tangente au point P_0 ont des courbures finies et déterminées* (*cfr.* (241)), *et si P_0PP_1 n'a pas de contact avec la surface d'un ordre plus élevé que celui qu'a la tangente au point P_0, enfin si en ce même point $\frac{\partial V}{\partial s}$ existe, donc $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ est finie:*

1° *si la fonction σ est toujours finie;*

2° *si, la fonction μ* (244) *étant toujours finie, la quantité*

$$(246)\qquad S'_s \equiv \lim_{h=0} S'_{sh} \text{ est finie.}$$

Remarque. Si $\gamma' = 0$ il faut écrire

$$(247)\qquad q'' = \sqrt{(q-1)^2 + \gamma^2}.$$

Cas particulier. Si $\lim\limits_{r=0} \frac{r}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial r}$ est finie et $\neq 1$, donc la quantité S'_s est finie pour $\lambda \neq 0$.

§ **36.** *Existence et continuité de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ et de $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ en un point quelconque.* L'existence de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ en un point situé dans la surface ou celle de la limite de la dérivée extérieure dépend essentiellement de l'existence de la quantité $W_s = \lim\limits_{h=0} W_{sh}$ (222). Cette quantité W_{sh} peut s'écrire pour le point $P(r = k > 0,\ \omega' = 0)$

(248)
$$\begin{cases} W'_{sh} = \int\limits_{(h)}^{(a)} \sigma \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial s} d\omega = \int\limits_{(h)}^{(a)} \sigma v \frac{d\omega}{R^2} \\ R = PQ = \sqrt{\left(\frac{r}{\cos\psi}\right)^2 - 2\frac{r}{\cos\psi}\cdot\frac{ku}{\cos\psi'} + \left(\frac{k}{\cos\psi'}\right)^2} \\ k = P_0 P \cos\psi' \\ u = \cos\psi'\cos\psi\cos\vartheta + \sin\psi'\sin\psi \\ v = \cos(ds,\ PQ) = \lambda v_x + \mu v_y + \nu v_z \\ v_x = \frac{r\cos\vartheta - k}{R},\ v_y = \frac{r\sin\vartheta}{R},\ v_z = \frac{r\,\mathrm{tg}\,\psi - k\,\mathrm{tg}\,\psi'}{R}. \end{cases}$$

L'intégration peut être prise sur la portion considérée de la surface, excepté la partie du voisinage de P pour laquelle

$$1 - \varkappa \leqq \frac{r\cos\psi'}{\cos\psi} \leqq 1 + \varkappa,$$

$0 < \varkappa < 1$ (cfr. § 30 Rem. II). En posant comme dans le § 26

$$W_{sh} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,$$

nous pourrons traiter l'intégrale I_5 d'une manière analogue à celle du § 11. En effet, soient P' et Q' les projections de P et de Q sur le plan des xy,

$$\therefore\ R = PQ \geqq P'Q' = \sqrt{r^2 - 2rk\cos\vartheta + k^2} \equiv R'$$
$$\therefore\ \int \frac{d\omega}{R^2} \leqq \int \frac{d\omega}{R'^2},$$

$d\omega$ étant l'élément de surface du plan des xy. La partie de cette dernière intégrale qui correspond à l'intégrale I_5 peut s'écrire

$$2\int\limits_{k-h}^{k+h} r\,dr \int\limits_{R'=h}^{R'=\overline{R}} \frac{d\vartheta}{R'^2} + 2\int\limits_{k-h}^{k+h} r\,dr \int\limits_{R'=\overline{R}}^{R'=k+r} \frac{d\vartheta}{R'^2},\ \overline{R} \text{ étant une constante finie} > 0,$$

et en prenant R' comme variable indépendante au lieu de ϑ nous trouverons que la première intégrale a une valeur limite finie pour $\lim h = 0$, tandis que la limite pour $h = 0$ de la seconde intégrale est $= 0$. Supposons que σ soit continue, et soit σ_k la valeur de σ au point P. Posons

$$I_5 = I'_5 + I^k_5,$$

où I'_5 et I'_5 sont les valeurs que prend I_5 lorsqu'on y substitue à σ les quantités $\sigma - \sigma_k$ et σ_k resp. En prenant la constante $\overline{R}$ suffisamment petite, nous trouverons que $\lim\limits_{h=0} I'_5$ est $<$ une quantité donnée quelque petite qu'elle soit,

(249) $$\therefore \lim_{\alpha=0} I_5 = \lim_{\alpha=0} I_5^k,$$

I_5^k étant ce que deviendra I_5 lorsqu'on y substitue à σ la constante σ_k. Les intégrales I_1 et I_2 sont finies, et il nous reste à considérer les intégrales I_3 et I_4. On peut écrire

(250) $$\begin{cases} I_3 = \lambda I_{x3} + \mu I_{y3} + \nu I_{z3} \\ I_{x3} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{s_1=1-\varkappa}^{s_1=1-\alpha} \sigma(ks,\vartheta)\cos\psi\,(s_1^2\cos\psi'\cos\psi\cos\vartheta - s_1\cos^2\psi')\frac{ds}{p_1^3} \\ I_{y3} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_{s_1=1-\varkappa}^{s_1=1-\alpha} \sigma(ks,\vartheta)\cos\psi'\cos^2\psi\, s_1^2\frac{ds}{p_1^3} \\ I_{z3} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{s_1=1-\varkappa}^{s_1=1-\alpha} \sigma(ks,\vartheta)\cos\psi\,(s_1^2\cos\psi'\sin\psi - s_1\sin\psi'\cos\psi')\frac{ds}{p_1^3} \\ s_1 = \dfrac{\cos\psi'}{\cos\psi}s \\ p_1 = \sqrt{s_1^2 - 2s_1u + 1}, \end{cases}$$

et on aura une expression analogue pour I_4. Si nous employons les méthodes du § 33, nous trouverons, en posant

(251) $$\begin{cases} \bar{J}_1 = \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{s_1=1+\alpha}^{s_1=1+\varkappa} \sigma(ks,\vartheta)(s_1-1)\frac{ds}{\bar{p}_1^3} - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{s_1=1-\varkappa}^{s_1=1-\alpha} \sigma(ks,\vartheta)(1-s_1)\frac{ds}{\bar{p}_1^3} \\ \bar{J}_2 = \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{s_1=1+\alpha}^{s_1=1+\varkappa} \sigma(ks,\vartheta)(\psi'-\psi)\frac{ds}{\bar{p}_1^3} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{s_1=1-\varkappa}^{s_1=1-\alpha} \sigma(ks,\vartheta)(\psi'-\psi)\frac{ds}{\bar{p}_1^3} \\ \bar{J}_3 = \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int_{s_1=1+\alpha}^{s_1=1+\varkappa} \sigma_2(ks,\vartheta)\frac{ds}{\bar{p}_1^3} + \int_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int_{s_1=1-\varkappa}^{s_1=1-\alpha} \sigma_2(ks,\vartheta)\frac{ds}{\bar{p}_1^3} \\ \bar{p}_1 = \sqrt{(s_1-1)^2 + \vartheta^2\cos^2\psi' + (\psi'-\psi)^2}, \quad \sigma_2(r,\vartheta) = \sigma(r,\vartheta) - \sigma(r, 2\pi-\vartheta), \end{cases}$$

que nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *et* $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ — *lorsque la courbe* P_0PP_1 *ne touche pas la surface* — *existent au point* $P(x=k>0,\ y=0)$, *est que la quantité* (251)

$$(252)\qquad \begin{cases} \bar{J}_s \equiv \lim\limits_{h=0} \bar{J}_{sh} \text{ est finie où} \\ \bar{J}_{sh} = \lambda \bar{J}_{xh} + \mu \bar{J}_{yh} + \nu \bar{J}_{zh} \\ \bar{J}_{xh} = \cos^3\psi' \bar{J}_1 + \sin\psi' \cos^2\psi' \bar{J}_2 \\ \bar{J}_{yh} = \cos^3\psi' \bar{J}_3 \\ \bar{J}_{zh} = \sin\psi' \cos^2\psi' \bar{J}_1 - \cos^3\psi' \bar{J}_2 . \end{cases}$$

Corollaire. *Continuité de* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *et de* $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$. *La quantité*

$$Z \equiv \lim_{\alpha=0} [I_1 + (I_2 - W_{sh}) + (I_3 + I_4 - J_{sh}) + I_5]$$

est de la forme

$$K + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{k}} \sigma P \frac{dt}{t^2}\,,\ \lim_{t=\infty} P \text{ finie,}$$

où K *est continue par rapport à* k, $\therefore$ Z *est continue. D'où le théorème:*

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *et* $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ — *si la courbe* P_0PP_1 *ne touche pas la surface* — *soient continues au point* P *pour un déplacement suivant la surface dans le plan des* xz $(r=k>0,\ \vartheta=0)$, *est que la quantité* $\bar{J}_s$ *est continue par rapport à* k.

Si $\frac{\partial V}{\partial s}$ *existe à l'origine, et si*

$$(253)\qquad \lim_{k=0} \bar{J}_s = \bar{J}_s^{\circ}\,,$$

où $\bar{J}_s^{\circ}$ *est la valeur de* $\bar{J}_s$ *pour* $k=0$, *donc* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *et* $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ — *la courbe* P_0PP_1 *ne touchant pas la surface* — *sont continues à l'origine pour un déplacement suivant la surface dans le plan des* xz.

§ 37. *Changement de la valeur de la dérivée en traversant la surface.* Les raisonnements du § 28 s'appliquent au cas d'une surface courbe, et les résultats deviennent identiques dans le cas où $\psi_0 = 0$ (point régulier), si l'on observe que l'angle ψ du chap. II correspond à l'angle ψ' du chapitre présent. Dans le cas général, l'angle $\psi\ (r,\ \vartheta)$ se change en $-\psi\ (r,\ \vartheta)$, lorsqu'on change la direction positive de l'axe des z.

Si pour la dérivée du potentiel au point P_0 la direction de ds change en la direction opposée, nous trouverons que $u = \cos(P_0Q,\ ds)$ change en $-u$, $\therefore\ u_0$ change en $-u_0$ et W_s en $-W_s$ (208),

$$(254)\qquad \begin{cases} \therefore\ \dfrac{\partial V}{\partial s_+} + \dfrac{\partial V}{\partial s_-} = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left\{2 + u_0 \log\frac{1-u_0}{1+u_0}\right\}\cos^2\psi_0\, d\vartheta \\ u_0 = \cos\psi' \cos\psi_0 \cos\vartheta + \sin\psi' \sin\psi_0. \end{cases}$$

Au contraire, si le point P se trouve à l'extérieur de la surface et qu'il traverse la surface au point P_0 suivant une droite, c.-à-d. si la direction de la droite P_0P change en la direction opposée, $\beta'_2 = \cos(P_0Q,\ ds)$ ne change pas, $\therefore\ W'_s$ ne change pas (222), mais $u = \cos(P_0Q, P_0P)$ change de signe, $\therefore\ u_0$ change en $-u_0$; de même $\beta'_1 = \cos(P_0P, ds)$ change en $-\beta'_1$. Par suite nous trouverons (222)

$$(255)\qquad \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)_+ - \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_{h'}}{ds}\right)_- = \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left\{\frac{2(\beta'_{20}u_0 - \beta'_1)}{1-u_0^2} - \beta'_{20}\log\frac{1-u_0}{1+u_0}\right\}\cos^2\psi_0\, d\vartheta\,.$$

Cette formule peut être écrite sous la forme suivante plus développée

$$(256)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = \lambda\dfrac{\partial V_h}{dx} + \mu\dfrac{\partial V_h}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial V_h}{\partial z} \\ \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial x}\right)_+ - \lim\limits_{h'=0}\left(\dfrac{\partial V_{h'}}{\partial x}\right)_- = -\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left\{\frac{2(\cos\psi' - u_0\cos\psi_0\cos\vartheta)}{1-u_0^2} + \cos\psi_0\cos\vartheta\log\frac{1-u_0}{1+u_0}\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cos^2\psi_0\, d\vartheta \\ \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial y}\right)_+ - \lim\limits_{h'=0}\left(\dfrac{\partial V_{h'}}{\partial y}\right)_- = \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left\{\frac{2u_0}{1-u_0^2} - \log\frac{1-u_0}{1+u_0}\right\}\cos^3\psi_0 \sin\vartheta\, d\vartheta \\ \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial z_+}\right)_+ + \lim\limits_{h'=0}\left(\dfrac{\partial V_{h'}}{\partial z_-}\right)_- = -\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left\{\frac{2(\sin\psi' - u_0\sin\psi_0)}{1-u_0^2} + \sin\psi_0\log\frac{1-u_0}{1+u_0}\right\}\cos^2\psi_0\, d\vartheta\,. \end{cases}$$

Remarque I. Le changement de la dérivée, lorsque le point P traverse la surface, est toujours fini, même dans le cas où la quantité W'_s est infinie, c.-à-d. où les limites de la dérivée n'existent pas, pourvu qu'on definisse le premier membre de l'égalité (255) par le second membre de l'égalité (202). Le second membre de l'égalité (255) restera le même, si on fait $h' = h$. En outre il faut ajouter le terme (cfr. 222, 221)

$$c\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\beta'_{20}\cos^2\psi_0\,d\vartheta, \quad c \equiv \lim \frac{h'}{h}.$$

Dans le cas où le point P se trouve dans la surface et qu'on change la direction de ds, on obtiendra un résultat analogue.

Remarque II. Si la surface admet au point P_0 un plan tangent bien déterminé, ψ_0 est $= 0$, et on retrouvera les formules (199) pour le cas d'une couche plane.

Cas particulier: *Point conique.* Supposons que l'angle ψ_0 est constant > 0, et que la fonction σ est continue au point P_0. Nous trouverons (208)

$$Q_s = -2\pi\sigma_0\cos^2\psi_0\Big\{(\sin\psi' - \sin\psi_0) + 2\sin\psi'\sin\psi_0 +$$
$$+ \sin\psi'\sin\psi_0\log\left[\frac{(\sin\psi' - \sin\psi_0) + 1 - \sin\psi'\sin\psi_0}{2}\cos\psi_0\right]\Big\}.$$

Nous définissons

$$\frac{\partial V}{\partial s_+} + \frac{\partial V}{\partial s_-} = \lim_{h=0}\left[\frac{1}{h}(V_{h+} - V) + \frac{1}{h}(V_{h-} - V)\right],$$

les potentiels V_{h+} et V_{h-} étant rapportés aux points P'_+ et P'_- situés sur la même droite $P'_+P_0P'_-$ à la même distance h du point P_0. Donc nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial s_+} + \frac{\partial V}{\partial s_-} = -2\pi\sigma_0\sin\psi'\cos^2\psi_0\left\{2 + \sin\psi_0\log\frac{1 - \sin\psi_0}{1 + \sin\psi_0}\right\}, \text{ si } \psi' > \psi_0, \text{ mais}$$
$$= -2\pi\sigma_0\sin\psi_0\cos^2\psi_0\left\{2 + \sin\psi'\log\frac{1 - \sin\psi'}{1 + \sin\psi'}\right\}, \text{ si } 0 \leqq \psi' < \psi_0.$$

De plus nous trouverons (222) pour $\omega' = 0$, c.-à-d. en prenant l'axe des y perpendiculaire à la droite P_0PP_1,

$$Q'_s = \lambda Q'_x + \mu Q'_y + \nu Q'_z$$

$$Q'_x = 2\pi\sigma_0\sin\psi_0\cos^2\psi_0\frac{1 - \sin\psi'}{\cos\psi'} \text{ pour } \psi' > \psi_0, \text{ et}$$

$$= -2\pi\sigma_0 \sin\psi_0 \cos^2\psi_0 \frac{1+\sin\psi'}{\cos\psi'} \quad \text{pour } \psi' < \psi_0$$

$$Q'_y = 0$$

$$Q'_z = -2\pi\sigma_0 \cos^2\psi_0 \left\{1 + 2\sin\psi_0 + \sin\psi_0 \log\frac{(1+\sin\psi')(1-\sin\psi_0)\cos\psi_0}{2}\right\} \text{pour } \psi' > \psi_0,$$

et

$$= -2\pi\sigma_0 \cos^2\psi_0 \left\{-1 + 2\sin\psi_0 + \sin\psi_0 \log\frac{(1-\sin\psi')(1+\sin\psi_0)\cos\psi_0}{2}\right\} \text{pour } \psi' < \psi_0.$$

D'où l'on tire

$$(256^*)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0}\left[\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial x}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial V_h}{\partial x}\right)_-\right] = 4\pi\sigma_0 \sin\psi_0 \cos^2\psi_0 \dfrac{1-\sin\psi'}{\cos\psi'} \quad \text{pour } \psi' > \psi_0, \text{ mais} \\ \qquad\qquad = -4\pi\sigma_0 \sin\psi_0 \cos^2\psi_0 \operatorname{tg}\psi' \quad \text{pour } 0 \leqq \psi' < \psi_0 \\ \lim\limits_{h=0}\left[\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial y}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial V_h}{\partial y}\right)_-\right] = 0 \\ \lim\limits_{h=0}\left[\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial z}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial V_h}{\partial z}\right)_-\right] = -2\pi\sigma_0 \cos^2\psi_0 \left\{2 + \sin\psi_0 \log\dfrac{1-\sin\psi_0}{1+\sin\psi_0}\right\} \quad \text{pour } \psi' > \psi_0, \text{ mais} \\ \qquad\qquad = -2\pi\sigma_0 \sin\psi_0 \cos^2\psi_0 \log\dfrac{1-\sin\psi'}{1+\sin\psi'} \quad \text{pour} \\ 0 \leqq \psi' < \psi_0. \end{cases}$$

CHAPITRE IV.

Les dérivées secondes du potentiel d'une simple couche. Surface plane.

§ 38. *Les dérivées suivant la surface en un point de la couche.* Considérons une partie circulaire de la couche, supposée plane, dont le centre se trouve au point P_0 et dont le rayon est a. Prenons le point P_0 pour origine d'un système d'axes de coordonnées, dont l'axe des z est dirigé suivant la normale du plan au point P_0. Soit P un point situé sur l'axe des x à la distance k de l'origine. Nous traiterons séparément les cas $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial s}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$, où l'élément ds est pris dans une direction quelconque.

1°. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. La dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ au point P_0 peut être définie par la formule

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{k=0} \frac{1}{k}\left[\frac{\partial V}{\partial x} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0\right],$$

où $\frac{\partial V}{\partial x}$ se rapporte au point P et $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0$ au point P_0. Nous avons trouvé (128), en posant $\omega = 0$,

(128*)
$$\begin{cases} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = T_x + M_x \\ T_x = \lim\limits_{h=0} \int\limits_0^{2\pi} \cos\vartheta\, d\vartheta \int\limits_h^a \sigma(r,\vartheta)\frac{dr}{r} \\ M_x = -\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[1 + \cos\vartheta + \cos\vartheta \log\frac{1-\cos\vartheta}{2}\right] d\vartheta, \text{ où} \\ \sigma_0(\vartheta) = \lim\limits_{r=0} \sigma(r,\vartheta). \end{cases}$$

Si la quantité T_x est finie, on aura

(130*)
$$\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta = 0.$$

Pour la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ au point P nous pourrons écrire (128, 139, 176, 177)

(257)
$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = U_x + M_x^{(k)} \\ U_x = I_1 + I_2 + \lim\limits_{\alpha=0}(I_3 + I_4) + \lim\limits_{\alpha=0} I_5 \\ I_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_0^{1-\varkappa} o_x\, ds \\ I_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} o_x\, ds \\ I_3 = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_{1-\varkappa}^{1-\alpha} o_x\, ds \\ I_4 = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_{1+\alpha}^{1+\varkappa} o_x\, ds \end{cases}$$

(257)
$$\begin{cases} I_5 = \int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha} ds \int\limits_{\vartheta_1}^{2\pi-\vartheta_1} o_x d\vartheta, \quad \alpha^2 = s^2 - 2s\cos\vartheta_1 + 1, \\ o_x = \sigma(ks, \vartheta)(su - 1)\dfrac{s}{p^3} \\ p = \sqrt{s^2 - 2su + 1} \\ u = \cos\vartheta \\ M_x^{(k)} = -\int\limits_0^{2\pi} \sigma_k(\bar\vartheta)\left[1 + \cos\bar\vartheta + \cos\bar\vartheta \log\dfrac{1-\cos\bar\vartheta}{2}\right] d\bar\vartheta \\ \sigma_k(\bar\vartheta) = \lim\limits_{R=0} \sigma^{(k)}(R, \bar\vartheta) \\ \sigma^{(k)}(R, \bar\vartheta) = \sigma(r, \vartheta) \\ R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rku + k^2} \\ r = ks, \end{cases}$$

où $\bar\vartheta$ est l'angle que fait la direction PQ avec l'axe des x. La dérivée $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ est finie, si la quantité

(180*)
$$\begin{cases} H_x = \lim\limits_{\alpha=0} H_{x\alpha} \text{ est finie, où} \\ H_{x\alpha} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int\limits_{\alpha}^{\chi} [\sigma(k + k\tau, \vartheta) - \sigma(k - k\tau, \vartheta)] \dfrac{\tau d\tau}{[\tau^2 + \vartheta^2]^{3/2}}. \end{cases}$$

Nous faisons pour la fonction $\sigma(r, \vartheta)$ l'hypothèse suivante:

(258)
$$\begin{cases} \sigma(r, \vartheta) = \sigma_0(\vartheta) + r\bar\sigma(r, \vartheta), \\ \lim\limits_{r=0} \sigma(r, \vartheta) = \text{une quantité finie } \bar\sigma_0(\vartheta). \end{cases}$$

Nous pourrons écrire

$$V = V^\circ + \bar V,$$

où V° se rapporte à σ_0 et $\bar V$ à $r\bar\sigma$.

En ayant égard à l'égalité (130*) nous trouverons

$$T_x = \int\limits_0^{2\pi} \cos\vartheta d\vartheta \int\limits_0^a \bar\sigma(r, \vartheta) dr.$$

Posons

$$\Gamma_x = \int (su - 1)\frac{s\,ds}{p^3} = u \log(p + s - u) + \frac{1 - 2su}{p}$$

$$\overline{\Gamma}_x = \int (su - 1)\frac{s^2 ds}{p^3} = up + (3u^2 - 1)\log(p + s - u) + \frac{(1 - 4u^2)s + 2u}{p}.$$

Soient p_- et p_+ ce que deviendra p, lorsqu'on y substitue à s successivement $1 - \alpha$ et $1 + \alpha$. Nous trouverons (cfr. équ. 73, 74)

$$\lim_{\alpha=0} \alpha \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p_+}\right) d\vartheta = 0$$

$$\lim_{\alpha=0} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+}\right) d\vartheta = 0$$

$$\lim_{\alpha=0} \int_0^{2\pi} \log \frac{p_- + 1 - \alpha - \cos\vartheta}{p_+ + 1 + \alpha - \cos\vartheta}\, d\vartheta = 0.$$

Soit F une fonction toujours numériquement plus petite qu'une quantité finie, donc

$$\lim_{\alpha=0} \int_0^{2\pi} F \Big|_{1+\alpha}^{1-\alpha} \Gamma_x\, d\vartheta = 0$$

$$\lim_{\alpha=0} \int_0^{2\pi} F \Big|_{1+\alpha}^{1-\alpha} \overline{\Gamma}_x\, d\vartheta = 0.$$

Nous chercherons les valeurs de $\dfrac{\partial^2 V^0}{\partial x^2}$ et de $\dfrac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2}$ séparément.

Premier cas. $\dfrac{\partial^2 V^0}{\partial x^2}$. La fonction $\sigma_0(\vartheta)$ étant indépendante de r, nous aurons (180*) $H_x = 0$, et nous aurons aussi $T_x = 0$,

$$\therefore \left(\frac{\partial V^0}{\partial x}\right)_0 = M_x.$$

De plus nous aurons

$$U_x = \lim_{\alpha=0} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left(\int_0^{1-\alpha} \Gamma_x + \int_{1+\alpha}^{\frac{a}{k}} \Gamma_x \right) d\vartheta + \lim_{\alpha=0} I_5 = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \int_0^{\frac{a}{k}} \Gamma_x d\vartheta + \lim_{\alpha=0} I_5 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{ u \left(\log \frac{2a}{k} - 2 \right) - [1 + u \log(1-u)] + \frac{k}{a}(1 - 3u^2) + k^2 b \right\} d\vartheta + \lim_{\alpha=0} I_5,$$

$\lim_{k=0} b$ finie,

$$\therefore\ U_x = M_x + \frac{k}{a} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(1 - 3u^2) d\vartheta + k^2 \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) b d\vartheta + \lim_{\alpha=0} I_5,$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2} = \lim_{k=0} \frac{1}{k} \left[\frac{\partial V^0}{\partial x} - \left(\frac{\partial V^0}{\partial x} \right)_0 \right] = -\frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3u^2 - 1) d\vartheta + \lim_{k=0} \frac{1}{k} [M_x^{(k)} + \lim_{\alpha=0} I_5].$$

Si nous supposons que la fonction $\sigma_0(\vartheta)$ a une valeur limite unique pour $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, et que cela aura lieu aussi pour $\pi \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, mais que les deux valeurs limites des deux côtés de l'axe des x peuvent être différentes, donc l'égalité (177) aura lieu. De plus, $\sigma_k(\bar{\vartheta})$ (257) étant, dans ce cas, une constante de chaque côté de l'axe des x, on trouvera $M_x^{(k)} = 0$,

$$\therefore\ \frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2} = -\frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3u^2 - 1) d\vartheta. \tag{259}$$

Deuxième cas: $\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2}$. La fonction σ_0 étant $= 0$, nous aurons $M_x = 0$

$$\therefore\ \left(\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x} \right)_0 = T_x.$$

Supposons qu'au point P la fonction $\bar{\sigma}(r, \vartheta)$ soit continue et qu'elle y ait une valeur limite unique pour $0 \leqq \bar{\vartheta} \leqq \pi$ et pour $\pi \leqq \bar{\vartheta} \leqq 2\pi$ resp., lorsque R tend vers zéro,

$$\therefore\ \lim_{\alpha=0} I_5 = 0, \quad M_x^{(k)} = 0.$$

De plus nous trouverons

$$U_x = k[\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \lim_{\alpha=0} (\bar{I}_3 + \bar{I}_4)],$$

où $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$ etc. sont ce que deviendront les intégrales I_1, I_2, etc., lorsqu'on y remplace $\sigma(ks,\vartheta)$ par $\bar{\sigma}(ks,\vartheta)$ et $\frac{sds}{p^3}$ par $\frac{s^2ds}{p^3}$.

Soit $\overline{H}_{x\alpha}$ ce que deviendra $H_{x\alpha}$, lorsqu'on y remplace σ par $\bar{\sigma}$. Donc nous trouverons

$$H_{x\alpha}=k\overline{H}_{x\alpha}+k\eta_{x\alpha},$$

$$\lim_{\alpha=0}\eta_{x\alpha} \text{ finie et } \lim_{k=0}(\lim_{\alpha=0}\eta_{x\alpha}) \text{ finie}.$$

D'où il suit que si la quantité H_x est finie, la quantité

$$\overline{H}_x=\lim_{\alpha=0}\overline{H}_{x\alpha}$$

est aussi finie et réciproquement. Nous avons trouvé (§ 27) que si $\lim\limits_{k=0} H_x=0$, la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ est continue à l'origine, si elle y est finie. Supposons maintenant

$$\lim_{k=0}\overline{H}_x=0. \tag{260}$$

Comme dans le § 27 nous trouverons

$$\lim_{k=0}[\lim_{\alpha=0}(\overline{I}_3+\overline{I}_4)]=\lim_{\alpha=0}(\overline{I}^\circ_3+\overline{I}^\circ_4),$$

où $\overline{I}^\circ_3$ et $\overline{I}^\circ_4$ sont ce que deviendront $\overline{I}_3$ et $\overline{I}_4$, lorsqu'on y remplace $\bar{\sigma}$ par $\bar{\sigma}_0$. Nous pourrons donc écrire, en posant $\lim\limits_{k=0}\overline{I}_1=\overline{I}^\circ_1$,

$$\frac{1}{k}\left[\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}-\left(\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}\right)_0\right]=\overline{I}^\circ_1+\overline{I}_2+\lim_{\alpha=0}(\overline{I}^\circ_3+\overline{I}^\circ_4)-\frac{1}{k}T_x+\bar{\varepsilon},\ \lim_{k=0}\bar{\varepsilon}=0, \quad \text{où}$$

$$\overline{I}^\circ_1=\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\int_0^{1-\varkappa}\overline{\Gamma}_x(s,u)\,d\vartheta$$

$$\overline{I}^\circ_3=\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\int_{1-\varkappa}^{1-\alpha}\overline{\Gamma}_x(s,u)\,d\vartheta$$

$$\overline{I}^\circ_4=\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\int_{1+\alpha}^{1+\varkappa}\overline{\Gamma}_x(s,u)\,d\vartheta$$

$$\overline{I}_2 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} \overline{\sigma}(ks, \vartheta)(su - 1)\, s^2 \frac{ds}{p^3}.$$

Or, on a

$$(su - 1)\frac{s^2}{p^3} = u + (3u^2 - 1)\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} P, \ \lim_{s=\infty} P \text{ finie},$$

par suite nous écrivons

$$\overline{I}_2 = I' + I''$$

$$I' = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} \overline{\sigma}(ks, \vartheta)\left[\frac{s^3 u - s^2}{p^3} - u - \frac{3u^2 - 1}{s}\right] ds$$

$$I'' = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} \overline{\sigma}(ks, \vartheta)\left[u + \frac{3u^2 - 1}{s}\right] ds,$$

et nous trouverons

$$\lim_{k=0} I' = \int_0^{2\pi} \overline{\sigma}_0(\vartheta) \Bigg/_{1+\varkappa}^{\infty} [\overline{\Gamma}_x(s, u) - su - (3u^2 - 1)\log s]\, d\vartheta$$

$$I'' = \frac{1}{k} T_x + \int_0^{2\pi} (3u^2 - 1)\, d\vartheta \int_{(1+\varkappa)k}^{a} \overline{\sigma}(r, \vartheta)\frac{dr}{r} - \int_0^{2\pi} u\, d\vartheta \int_0^{1+\varkappa} \overline{\sigma}(ks, \vartheta)\, ds.$$

En passant à la limite nous aurons

$$(261) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2} = \overline{W}_{xx} + \overline{S}_{xx} \\ \overline{W}_{xx} = \lim\limits_{k=0} \overline{W}_{xx}^{(k)} \\ \overline{W}_{xx}^{(k)} = \displaystyle\int_0^{2\pi} (3u^2 - 1)\, d\vartheta \int_k^a \overline{\sigma}(r, \vartheta)\frac{dr}{r} \\ \overline{S}_{xx} = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{\sigma}_0(\vartheta)\left[5u^2 + 3u - 1 + (3u^2 - 1)\log\frac{1 - u}{2}\right] d\vartheta \\ u = \cos\vartheta. \end{cases}$$

Dans le cas général, nous supposerons que la fonction σ est de la forme (258), et nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si la fonction $\sigma(r, \vartheta)$ est de la forme*

$$\sigma(r, \vartheta) = \sigma_0(\vartheta) + r\bar{\sigma}(r, \vartheta), \ \lim_{r=0} \sigma(r, \vartheta) \ \textit{finie},$$

et si à chaque point de l'axe des x dans le voisinage du point P_0 les fonctions $\sigma_0(\vartheta)$ et $\bar{\sigma}(r, \vartheta)$ représentent chacune une valeur limite unique de chaque côté de cet axe, la valeur de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ au point P_0 est donnée par la formule

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2}, \tag{262}$$

où les valeurs de $\frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2}$ sont données par les égalités (259) *et* (261), *pourvu que l'égalité* (260) *soit satisfaite. Si la quantité T_x* (128*) *existe, il faut donc et il suffit pour l'existence de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ que la quantité $\bar{W}_{xx}$* (261) *existe.*

Remarque. La quantité $\bar{W}_{xx}^{(k)}$ peut s'écrire

$$\bar{W}_{xx}^{(k)} = \int\limits_{(k)}^{(a)} (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} d\omega. \tag{263}$$

Cas particuliers. 1°. Si $\sigma_0(\vartheta) =$ une constante σ_1 pour $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, et
$= $ » » σ_2 » $\pi \leqq \vartheta \leqq 2\pi$,
nous trouverons que l'égalité (130*) est satisfaite et que

$$\frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2} = -\frac{\pi}{2a}(\sigma_1 + \sigma_2). \tag{264}$$

2°. Si $\bar{\sigma}_0(\vartheta)$ est $=$ une constante, l'équation

$$\int\limits_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)(3\cos^2\vartheta - 1)\, d\vartheta = 0 \tag{265}$$

n'est pas satisfaite, par suite la quantité $\bar{W}_{xx}$ ne peut pas être finie et déterminée

3°. Soit

$$\bar{\sigma}_0(\vartheta) = a' \cos\vartheta + b' \sin\vartheta, \tag{266}$$

où a' et b' sont des constantes. Dans ce cas, l'équation (265) est satisfaite, et nous trouverons

(267) $$\overline{S}_{xx} = 0.$$

2° $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$. La dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ au point P_0 peut être définie par la formule

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \lim_{k=0} \left[\frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0\right],$$

où $\frac{\partial V}{\partial y}$ se rapporte au point P et $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0$ au point P_0. Nous trouverons (128), en posant $\omega = \frac{\pi}{2}$,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = T_y + M_y$$

$$T_y = \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r}$$

$$M_y = -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[1 + \sin\vartheta + \sin\vartheta \log \frac{1 - \sin\vartheta}{2}\right] d\vartheta.$$

Pour la dérivée $\frac{\partial V}{\partial y}$ au point P, nous retrouverons les formules (257) en y remplaçant o_x par o_y, où (175)

(257*) $$o_y = \sigma(ks, \vartheta) \frac{s^2 \sin\vartheta}{p^3}.$$

La dérivée $\frac{\partial V}{\partial y}$ est finie, si la quantité

(187*) $$\begin{cases} H_y = \lim\limits_{\alpha=0} H_{y\alpha} \text{ est finie, où} \\ H_{y\alpha} = \int\limits_0^{\varepsilon} \vartheta d\vartheta \int\limits_{\alpha}^{\varkappa} [\sigma_2(k + k\tau, \vartheta) + \sigma_2(k - k\tau, \vartheta)] \frac{d\tau}{(\tau^2 + \vartheta^2)^{3/2}} \\ \sigma_2(r, \vartheta) = \sigma(r, \vartheta) - \sigma(r, 2\pi - \vartheta). \end{cases}$$

Nous faisons sur la fonction $\sigma(r, \vartheta)$ les mêmes hypothèses (258) que dans le cas précédent, et nous chercherons les valeurs de $\frac{\partial^2 V^0}{\partial x \partial y}$ et de $\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x \partial y}$.

Premier cas: $\dfrac{\partial^2 V^0}{\partial x\, \partial y}$. Posons

$$\sigma_2(\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) - \sigma_0(-\vartheta).$$

Nous trouverons (187)

$$H_{y\varkappa} = 2\int_0^\varepsilon \sigma_2(\vartheta)\left[\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\vartheta^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\vartheta^2}}\right]\frac{d\vartheta}{\vartheta} =$$

$$= 2\int_0^\alpha \sigma_2(\vartheta)\left[\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\vartheta^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\vartheta^2}}\right]\frac{d\vartheta}{\vartheta} + 2\int_\alpha^\varepsilon \sigma_2(\vartheta)\left[\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\vartheta^2}} - 1\right]\frac{d\vartheta}{\vartheta} -$$

$$- 2\int_\alpha^\varepsilon \sigma_2(\vartheta)\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\vartheta^2}}\, d\vartheta + 2\int_\alpha^\varepsilon \sigma_2(\vartheta)\frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

La limite pour $\alpha = 0$ de la première intégrale du dernier membre est

$$= 2\sigma_2(0)\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

La limite pour $\alpha = 0$ de la seconde intégrale peut s'écrire

$$= -2\sigma'_2 \log\frac{\sqrt{\varkappa^2+\varepsilon^2}+\varkappa}{2\varkappa},$$

où σ'_2 est une valeur moyenne de σ_2; elle est toujours finie. En posant $\vartheta = \alpha\varphi$, nous trouverons que la limite pour $\alpha = 0$ de la troisième intégrale est

$$= 2\sigma_2(0)\log(\sqrt{2}+1),$$

$$\therefore\ H_y = 2\sigma_2(0)\log\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right) - 2\sigma'_2\log\frac{\sqrt{\varkappa^2+\varepsilon^2}+\varkappa}{2\varkappa} + 2\lim_{\alpha=0}\int_\alpha^\varepsilon \sigma_2(\vartheta)\frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

Donc la condition, pour que la quantité H_y soit finie, est

(268) que $$\lim_{\alpha=0}\int_\alpha^\varepsilon \sigma_2(\vartheta)\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \text{une quantité finie.}$$

La fonction $\sigma_2(\vartheta)$ étant indépendante de r, on aura

$$\lim_{k=0} H_y = H_y^\circ . \tag{194*}$$

Pour que la quantité T_y soit finie, il faut que

$$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta = 0, \ \therefore\ T_y = 0. \tag{130**}$$

De plus, nous trouverons $\lim\limits_{\alpha=0} I_5 = 0$. Soit

$$\Gamma_y = \int \frac{s^2\, ds}{p^3} = \log(p + s - u) + \frac{(2u^2 - 1)s - u}{(1 - u^2)p},$$

$$\therefore \sin\vartheta \int_{1+\alpha}^{1-\alpha} \Gamma_y = -\frac{\alpha}{\sin\vartheta}\left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p_+}\right) + \zeta_\alpha,\ \lim_{\alpha=0} \zeta_\alpha = 0 \text{ pour } \vartheta = 0.$$

On peut remplacer p_- et p_+ par $\sqrt{\alpha^2 + \vartheta^2}$, et on trouvera, en posant $\vartheta = \alpha\varphi$,

$$\int_0^\varepsilon \sigma_2 \frac{\alpha\, d\vartheta}{\vartheta\sqrt{\alpha^2 + \vartheta^2}} = \int_0^\alpha \sigma_2 \frac{d\vartheta}{\vartheta} + \int_0^1 \sigma_2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}} - 1\right] \frac{d\varphi}{\varphi} +$$

$$+ \int_1^{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \sigma_2 \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{1 + \varphi^2}} = \int_0^\alpha \sigma_2(\vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta} + \sigma_2(0) \log 2 + \zeta',\ \lim_{\alpha=0} \zeta' = 0.$$

De plus, on aura

$$\int_0^{\frac{a}{k}} \Gamma_y = \log\frac{a}{k} - \log\frac{1 - \cos\vartheta}{2} - 2 + \frac{1}{1 - \cos\vartheta} - \frac{3k}{a}\cos\vartheta + k\eta,\ \lim_{k=0} \eta = 0$$

$$M_y^{(k)} = 2\sigma_2(0) \log 2,$$

$$\therefore \frac{1}{k}\left[\frac{\partial V^0}{\partial y} - \left(\frac{\partial V^0}{\partial y}\right)_0\right] = \frac{1}{k} Q - \frac{3}{a} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta + \eta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[1 + \sin\vartheta \log\frac{1 - \sin\vartheta}{1 - \cos\vartheta}\right] d\vartheta + \lim_{\alpha=0} \int_\alpha^\pi \sigma_2(\vartheta) \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1 - \cos\vartheta}. \tag{269}$$

Pour que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ existe, il faut donc que l'on ait $Q = 0$. Si cette condition est satisfaite, on trouvera

$$\frac{\partial^2 V^0}{\partial x\,\partial y} = -\frac{3}{a}\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta. \tag{270}$$

Deuxième cas: $\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x\,\partial y}$. La fonction $\sigma_0(\vartheta)$ étant $= 0$, nous trouverons

$$\left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial y}\right)_0 = T_y = \int_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^a \overline{\sigma}(r,\vartheta)\, dr.$$

Soit $\overline{H}_{y\alpha}$ ce que deviendra $H_{y\alpha}$, lorsqu'on y remplace σ par $\overline{\sigma}$. Donc nous trouverons

$$H_{y\alpha} = k\overline{H}_{y\alpha} + k\eta_{y\alpha},\ \lim_{\alpha=0} \eta_{y\alpha} \text{ finie pour } k \geqq 0, \text{ et } = 0 \text{ pour } k = 0.$$

Supposons que

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\alpha=0} \overline{H}_{y\alpha} \equiv \overline{H}_y \text{ soit finie et} \\ \lim\limits_{k=0} \overline{H}_y = \overline{H}_y^\circ, \end{array}\right. \tag{271}$$

où $\overline{H}_y^\circ$ est la valeur de $\overline{H}_y$ pour $k = 0$. Comme dans le premier cas nous trouverons que la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité $\overline{H}_y^\circ$ soit finie, est:

(272) que

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\alpha=0} \int_\alpha^\varepsilon \overline{\sigma}_2(\vartheta)\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \text{une quantité finie, où} \\ \overline{\sigma}_2(\vartheta) = \overline{\sigma}_0(\vartheta) - \overline{\sigma}_0(2\pi - \vartheta). \end{array}\right.$$

Posons

$$\overline{\Gamma}_y = \int \frac{s^3 ds}{p^3} = p + 3u\log(p + s - u) + \frac{(4u^2 - 3)su + 1 - 2u^2}{(1 - u^2)p}.$$

Si les égalités (271) et (272) sont satisfaites, nous trouverons comme dans le premier cas

$$\frac{1}{k}\frac{\partial \overline{V}}{\partial y} = \int_0^\pi \overline{\sigma}_2(\vartheta)\left[\Big/_{\!0}^{\frac{a}{k}} \overline{\Gamma}_y - \Big/_{\!0}^{\frac{a}{k}} s - \Big/_{\!1}^{\frac{a}{k}}\left(3u\log s - \frac{1}{1-u}\right)\right]\sin\vartheta\, d\vartheta + \lim_{\alpha=0}\int_\alpha^\pi \overline{\sigma}_2(\vartheta)\,\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1-u} + \frac{1}{k}\,T_y +$$

$$+ \lim_{k=0} 3\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\int_k^a \overline{\sigma}(r,\vartheta)\frac{dr}{r}.$$

D'où l'on tire

$$(273)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x\,\partial y} = \overline{W}_{xy} + \overline{S}_{xy} \\ \overline{W}_{xy} = \lim\limits_{k=0} \overline{W}_{xy}^{(k)} \\ \overline{W}_{xy}^{(k)} = 3\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\int_k^a \overline{\sigma}(r,\vartheta)\frac{dr}{r} \\ \overline{S}_{xy} = \displaystyle\int_0^\pi \sigma_2(\vartheta)\left[\frac{1}{1-\cos\vartheta} - 3 - 5\cos\vartheta - 3\cos\vartheta\log\frac{1-\cos\vartheta}{2}\right]\sin\vartheta\, d\vartheta. \end{cases}$$

Dans le cas général, nous supposerons que la fonction σ est de la forme (258), et nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si la fonction $\sigma(r,\vartheta)$ est de la forme*

$$\sigma(r,\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) + r\overline{\sigma}(r,\vartheta),\quad \lim_{r=0}\overline{\sigma}(r,\vartheta)\ \textit{finie},$$

et si à chaque point de l'axe des x dans le voisinage du point P_0 les fonctions $\sigma_0(\vartheta)$ et $\overline{\sigma}(r,\vartheta)$ ont chacune une valeur limite unique de chaque côté de cet axe, la valeur de $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ au point P est donnée par la formule

$$(274)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V^0}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x\,\partial y},$$

*où les valeurs de $\dfrac{\partial^2 V^0}{\partial x\,\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x\,\partial y}$ sont données par les égalités (270) et (273), pourvu que les conditions (130**), (268), (269), (271) et (272) soient satisfaites. Pour l'existence de la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ au point P_0, il faut donc de plus et il suffit que la quantité $\overline{W}_{xy}$ existe.*

Remarque I. La quantité $\overline{W}^{(k)}_{xy}$ peut s'écrire

$$\overline{W}^{(k)}_{xy} = \int_{(k)}^{(a)} (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial y} d\omega. \tag{275}$$

Remarque II. La dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y \, \partial x}$ n'est pas en général égale à la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y}$, car la quantité correspondante $\overline{S}_{yx}$ n'est pas nécessairement égale à $\overline{S}_{xy}$. En effet, $\overline{S}_{yx}$ est ce que deviendra $-\overline{S}_{xy}$ en y substituant à la fonction $\overline{\sigma}_2(\vartheta)$ la fonction $\overline{\sigma}_2 \left(\dfrac{\pi}{2} + \vartheta\right)$.

Cas particuliers. 1°. Si $\sigma_0(\vartheta)$ est une constante, les égalités (130**) et (269) sont satisfaites, et nous trouverons

$$\overline{S}_{xy} = 0 .$$

2°. Si $\overline{\sigma}_0(\vartheta)$ est une constante, nous trouverons

$$\overline{S}_{xy} = 0 .$$

3°. Soit

$$\overline{\sigma}_0(\vartheta) = a' \cos\vartheta + b' \sin\vartheta, \; \overline{\sigma}(r,\vartheta) = \overline{\sigma}_0(\vartheta) + \overline{\sigma}_1(r,\vartheta), \; \lim_{r=0} \overline{\sigma}_1(r,\vartheta) = 0, \tag{266}$$

$$\therefore \; \overline{W}^{(k)}_{xy} = 3 \int_0^{2\pi} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \int_k^a \overline{\sigma}_1(r,\vartheta) \frac{dr}{r}$$

$$\overline{S}_{xy} = 0 ,$$

pourvu que les conditions (271) soient satisfaites.

3° $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial s}$. Soient λ', μ', ν' les cosinus directeurs de l'élément ds émanant du point P, qui est situé sur l'axe des x à la distance k de l'origine P_0. Soient de plus ψ' l'angle que fait cet élément avec le plan des xy, et ω' l'angle que fait sa projection dans ce plan avec l'axe des x. Nous trouverons (cfr. équ. 131, 173).

$$\tag{276} \left\{ \begin{array}{l} \lambda' = \cos\psi' \cos\omega', \quad \mu' = \cos\psi' \sin\omega', \quad \nu' = \sin\psi' \\ \left(\dfrac{\partial V}{\partial s}\right)_0 = T' + M' \\ T' = \displaystyle\int_0^{2\pi} u' \, d\vartheta \int_0^a \overline{\sigma}(r_1 \vartheta) \, dr = \lambda' T_x + \mu' T_y \end{array} \right.$$

$$(276)\begin{cases} M' = -\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[1 + u' + u' \log \frac{1-u'}{2}\right] d\vartheta \\ u' = \lambda' \cos\vartheta + \mu' \sin\vartheta = \cos\psi' \cos(\vartheta - \omega') \\ \int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) u' d\vartheta = 0. \\ \frac{\partial V}{\partial s} = U_s + M'_k \\ U_s = \lambda' U_x + \mu' U_y \\ M'_k = -\pi[\sigma(k,0)_+ + \sigma(k,0)_-]\sin\psi' + 2[\sigma(k,0)_+ - \sigma(k,0)_-]\sin\psi \operatorname{tg}^{-1}[\cot\psi' \sin\omega'], \end{cases}$$

$$(277)\begin{cases} \therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial s} = \overline{W}_{xs} + \overline{S}_{xs} - \frac{\lambda'}{a}\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3\cos^2\vartheta - 1)\,d\vartheta - \frac{3\mu'}{a}\int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta - \\ \qquad - \pi \lim\limits_{k=0}[\overline{\sigma}(k,0)_+ + \overline{\sigma}(k,0)_-]\sin\psi \\ \overline{W}_{xs} = \lim\limits_{k=0} \overline{W}_{xs}^{(k)} \\ \overline{W}_{xs}^{(k)} = \lambda' \overline{W}_{xx}^{(k)} + \mu' \overline{W}_{xy}^{(k)} \\ \overline{S}_{xs} = \lambda' \overline{S}_{xx} + \mu' \overline{S}_{xy}. \end{cases}$$

Les conditions qui doivent être satisfaites sont

$$(278)\begin{cases} \sigma(r,\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) + r\overline{\sigma}(r,\vartheta) \\ \overline{\sigma}_0(\vartheta) = \lim\limits_{r=0} \overline{\sigma}(r,\vartheta) = \text{une quantité finie} \\ \lim\limits_{\vartheta=0} \sigma(r,\vartheta) = \text{une valeur unique de chaque côté de l'axe des } x. \\ \lim\limits_{\alpha=0} \int\limits_\alpha^\varepsilon \sigma_2(\vartheta)\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \text{une quantité finie}, \ \sigma_2(\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) - \sigma_0(2\pi - \vartheta) \\ \overline{H}_s \equiv \lim\limits_{\alpha=0} \overline{H}_{s\alpha} = \text{une quantité finie, où} \\ \overline{H}_{s\alpha} = \lambda' \overline{H}_{x\alpha} + \mu' \overline{H}_{y\alpha}, \\ \lim\limits_{k=0} \overline{H}_s = \overline{H}_s^\circ, \text{ où} \\ \overline{H}_s^\circ \text{ est la valeur de } \overline{H}_s \text{ pour } k = 0 \\ \int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) u' d\vartheta = 0. \end{cases}$$

De plus il faut que l'on ait

$$\lambda'\int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left[\left(\log\frac{2a}{k}-2\right)\cos\vartheta-\cos\vartheta\log(1-\cos\vartheta)-1\right]d\vartheta+$$

$$+\mu'\int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left[\log\frac{2a}{k}-2-\log(1-\cos\vartheta)\right]\sin\vartheta d\vartheta+\lim_{\alpha=0}\mu'\int\limits_\alpha^\pi\sigma_2(\vartheta)\frac{\sin\vartheta d\vartheta}{1-\cos\vartheta}-$$

$$-2\mu'\sigma_2(0)\log 2+\int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left[1+u'+u'\log\frac{1-u'}{2}\right]d\vartheta+\lim_{k=0}M'_k=0,$$

∴ en observant que (211)

$$\mu'\sigma_2(k,0)=0 \text{ et que } \sigma_2(\vartheta)=\lim_{k=0}\sigma_2(k,\vartheta),$$

$$(279)\quad\begin{cases}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left[1-\lambda'+u'\log\frac{1-u'}{1-\cos\vartheta}\right]d\vartheta+\lim_{\alpha=0}\mu'\int\limits_\alpha^\pi\sigma_2(\vartheta)\frac{\sin\vartheta d\vartheta}{1-\cos\vartheta}-\pi(\sigma_++\sigma_-)\sin\psi'\\[2ex] \sigma_+=\lim_{\vartheta=0}\sigma_0(\vartheta) \text{ pour } \vartheta>0,\ \sigma_-=\lim_{\vartheta=2\pi}\sigma_0(\vartheta) \text{ pour } \vartheta<2\pi.\end{cases}$$

Cas particulier. Si $\sigma_0(\vartheta)$ est une constante, nous trouverons

$$\frac{\partial^2 V^0}{\partial x\,\partial s}=-\frac{\pi\lambda'\sigma_0}{a}.$$

4° $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}$. Pour la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}$, nous trouverons l'expression

$$(280)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}=-\lim_{k=0}\int\limits_0^{2\pi}\bar\sigma_k(\bar\vartheta)\,d\bar\vartheta,$$

où $\sigma_k(\bar\vartheta)=\lim_{R=0}\bar\sigma_k(R,\bar\vartheta)$, $\bar\sigma_k(R,\bar\vartheta)$ étant $=\bar\sigma(r,\vartheta)$. La seule condition à satisfaire est

$$(279^*)\qquad \int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)d\vartheta=\pi(\sigma_++\sigma_-).$$

§ **39.** *La dérivée extérieure en un point de la couche.* Soit maintenant le point P situé au-dessus du plan, et soient $\lambda\mu\nu$ les cosinus directeurs de l'élément ds. Si la fonction σ est de la forme (258), nous trouverons pour le point P_0 (131)

$$(131^*)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial V}{\partial s}\right)_0 = T' + M' \\ T' = \displaystyle\int_0^{2\pi} u\,d\vartheta \int_0^a \bar{\sigma}(r,\vartheta)\,dr \\ M' = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[1 + u + u\log\frac{1-u}{2}\right]d\vartheta \\ u = \cos(P_0Q, ds) = \lambda\cos\vartheta + \mu\sin\vartheta \\ \text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\,u\,d\vartheta \text{ étant supposée} = 0. \end{cases}$$

Si $\lambda'\mu'\nu'$ sont les cosinus directeurs de la droite $P_0P = h$, les égalités (138) donnent

$$(138^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = U_h + N_h \\ U_h = \displaystyle\int_0^{2\pi} u\,d\vartheta \int_h^a \bar{\sigma}(r,\vartheta)\,dr = T' - h\int_0^{2\pi} u\,d\vartheta\int_0^1 \bar{\sigma}(ht,\vartheta)\,dt \\ N_h = N_h^0 + h\overline{N}_h \\ N_h^0 = -c\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_0^{\frac{a}{h}}\frac{t\,dt}{q^3} + \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,u\,d\vartheta\int_0^1\frac{t^2dt}{q^3} + \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,u\,d\vartheta\int_1^{\frac{a}{h}}\left(\frac{t^2}{q^3}-\frac{1}{t}\right)dt \\ \overline{N}_h = -c\displaystyle\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^{\frac{a}{h}}\bar{\sigma}(ht,\vartheta)\frac{t^2dt}{q^3} + \int_0^{2\pi}u\,d\vartheta\int_0^1\bar{\sigma}(ht,\vartheta)\frac{t^3dt}{q^3} + \int_0^{2\pi}u\,d\vartheta\int_1^{\frac{a}{h}}\bar{\sigma}(ht,\vartheta)\left(\frac{t^3}{q^3}-1\right)dt \\ c = \cos(P_0P, ds) = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' \\ q = \sqrt{t^2 - 2tu' + 1} \\ u' = \cos(P_0Q, P_0P) = \lambda'\cos\vartheta + \mu'\sin\vartheta. \end{cases}$$

En effectuant les intégrations, nous trouverons

$$N_h^0 = M' + \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left[\frac{u-c}{1-u'} + 1 - u + u\log\frac{1-u}{1-u'}\right]d\vartheta + \frac{h}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(c - 3uu')\,d\vartheta + h^2\eta_h,\ \lim_{h=0}\eta_h \text{ finie},$$

$$\overline{N}=\int_0^{2\pi}(3\,uu'-c)\,d\vartheta\int_h^a\bar{\sigma}(r,\vartheta)\frac{dr}{r}+\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\left[\frac{u-c}{1-u'}-2\,(u-c)-\right.$$

$$\left.-5\,uu'-(3\,uu'-c)\log\frac{1-u'}{2}\right]d\vartheta+h\bar{\eta}_h,\ \lim_{h=0}\bar{\eta}_h \text{ finie.}$$

D'où le résultat

$$(281)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 V}{\partial s'\partial s}=\overline{W}_{s's}+S_{s's}\\[2mm] \overline{W}_{s's}=\lim\limits_{h=0}\overline{W}_{s's}^{(h)}\\[2mm] \overline{W}_{s's}^{(h)}=\displaystyle\int_0^{2\pi}(3\,uu'-c)\,d\vartheta\int_h^a\bar{\sigma}(r,\vartheta)\frac{dr}{r}\\[2mm] S_{s's}=-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3\,uu'-c)\,d\vartheta+\\ \qquad+\displaystyle\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\left[\frac{u-c}{1-u'}+2\,c-3\,u-5\,uu'-(3\,uu'-c)\log\frac{1-u'}{2}\right]d\vartheta,\end{cases}$$

pourvu que la fonction $\sigma_0(\vartheta)$ satisfasse aux égalités

$$(282)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,u\,d\vartheta=0\\[2mm] \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left[\frac{u-c}{1-u'}+1-u+u\log\frac{1-u}{1-u'}\right]d\vartheta=0.\end{cases}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si la fonction σ est de la forme*

$$\sigma=\sigma_0(\vartheta)+r\bar{\sigma}(r,\vartheta),\ \lim_{r=0}\bar{\sigma}(r,\vartheta)\ \text{finie},$$

il faut et il suffit pour l'existence de la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s'\partial s}$ $(\nu'>0)$ *que les égalités* (282) *soient satifaites et que la quantité* $\overline{W}_{s's}$ *existe. La valeur de la dérivée est donnée par les égalités* (281).

Cas particuliers. 1° Pour la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$, la seconde des égalités (282) se réduit à la première.

2° Si $\sigma_0 =$ une constante σ_1 pour $\sigma \leqq \vartheta \leqq \pi$, et

$= \quad » \quad » \quad \sigma_2 \quad » \quad \pi \leqq \vartheta \leqq 2\pi$,

les conditions (282) sont satisfaites pour toutes les directions de ds et de ds' qui sont contenues dans le plan des xz; si $\sigma_1 = \sigma_2$, les égalités (282) sont satisfaites pour toutes les directions de ds et de ds'.

3° Si $\overline{W}_{s's}$ existe, donc

$$\int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)(3uu' - c)\,d\vartheta = 0. \tag{283}$$

4° Des égalités (281), (282) et (283) on tire

$$(284)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial z \partial s} = -\sin\psi \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \bar{\sigma}(r, \vartheta)\frac{dr}{r} + \frac{\sin\psi}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta - 2\cos\psi\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta, \\ \text{si} \\ \cos\psi \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta = 0 \text{ et} \\ \qquad \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)[1 - \sin\psi + \cos\psi\cos\vartheta\log(1 - \cos\psi\cos\vartheta)]\,d\vartheta = 0, \end{cases}$$

en supposant que l'élément ds soit contenu dans le plan des xz et en posant

$$\lambda = \cos\psi, \quad \mu = 0, \quad \nu = \sin\psi.$$

Des égalités (284) nous tirons d'une part

$$(285)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = -2\displaystyle\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta, \quad \text{si} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta = 0 \text{ et} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)[1 + \cos\vartheta\log(1 - \cos\vartheta)]\,d\vartheta = 0, \end{cases}$$

et d'autre part

$$(286) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\lim_{h=0} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \bar{\sigma}(r, \vartheta) \frac{dr}{r} + \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) d\vartheta + (1 - \log 2) \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta) d\vartheta$$

sans condition particulière.

5° En supposant que l'élément ds' soit contenu dans le plan des xz et en posant

$$\lambda' = \cos \psi', \quad \mu' = 0, \quad \nu' = \sin \psi',$$

nous trouverons

$$(287) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial s' \partial z} = -\sin \psi' \lim_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \bar{\sigma}(r, \vartheta) \frac{dr}{r} + \frac{\sin \psi'}{a} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) d\vartheta + \\ \qquad + \sin \psi' \displaystyle\int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta) \left[2 - \frac{1}{1 - \cos \psi' \cos \vartheta} + \log \frac{1 - \cos \psi' \cos \vartheta}{2} \right] d\vartheta, \\ \text{si} \\ \qquad \sin \psi' \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \frac{d\vartheta}{1 - \cos \psi' \cos \vartheta} = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) d\vartheta . \end{cases}$$

Remarque. Si $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s' \partial z}$ existe, nous trouverons

$$\lim_{\psi'=0} \frac{\partial^2 V}{\partial s' \partial z} = -\lim_{\psi'=0} \sin \psi' \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta) \frac{d\vartheta}{1 - \cos \psi' \cos \vartheta} = -\pi (\bar{\sigma}_+ + \bar{\sigma}_-),$$

où $\bar{\sigma}_+$ et $\bar{\sigma}_-$ sont des valeurs moyennes de $\bar{\sigma}_0(\vartheta)$ pour des valeurs infiniment petites positives, resp. négatives de ϑ. La condition à remplir se réduit à

$$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) d\vartheta = \pi (\sigma_+ + \sigma_-).$$

Si la fonction $\bar{\sigma}(k, \vartheta)$ est continue par rapport à k et à ϑ pour de petites valeurs positives resp. négatives de ϑ, nous trouverons (cfr équ. 280)

$$\lim_{\psi'=0} \frac{\partial^2 V}{\partial s' \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}. \tag{288}$$

§ 40. $\underset{h=0}{Lim} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ *pour un point extérieur.* Soient $\lambda_1 \mu_1 \nu_1$ et $\lambda_2 \mu_2 \nu_2$ les cosinus directeurs de deux éléments ds_1 et ds_2 émanant du point P, et soient $\lambda' \mu' \nu'$ les cosinus directeurs de la droite $P_0 P = h$. Supposons $\nu' \neq 0$, et posons

$$\begin{cases} u_1 = \cos(r, ds_1) = \lambda_1 \cos\vartheta + \mu_1 \sin\vartheta \\ u_2 = \cos(r, ds_2) = \lambda_2 \cos\vartheta + \mu_2 \sin\vartheta \\ c_1 = \cos(h, ds_1) = \lambda_1 \lambda' + \mu_1 \mu' + \nu_1 \nu' \\ c_2 = \cos(h, ds_2) = \lambda_2 \lambda' + \mu_2 \mu' + \nu_2 \nu' \\ c = \cos(ds_1, ds_2) = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + v_1 \nu_2, \end{cases} \tag{289}$$

$$\begin{cases} \therefore \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \int \sigma \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial s_1 \partial s_2} d\omega = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma(r, \vartheta)(3 v_1 v_2 - c) r \frac{dr}{R^3} \\ R = PQ = \sqrt{r^2 - 2 r h u' + h^2} \\ u' = \cos(r, h) = \lambda' \cos\vartheta + \mu' \sin\vartheta \\ v_1 = \cos(R, ds_1) = \lambda_1 \frac{r\cos\vartheta - \lambda' h}{R} + \mu_1 \frac{r \sin\vartheta - \mu' h}{R} - \nu_1 \frac{\nu' h}{R} = \frac{u_1 r - h c_1}{R} \\ v_2 = \cos(R, ds_2) = \frac{u_2 r - h c_2}{R}. \end{cases} \tag{290}$$

Posons de plus

$$r = ht, \quad R = hq, \quad \therefore q = \sqrt{t^2 - 2 t u' + 1}, \tag{291}$$

et supposons

$$\sigma = \sigma_0(\vartheta) + r\bar{\sigma}(r, \vartheta), \ \lim_{r=0} \bar{\sigma}(r, \vartheta) \text{ finie} \equiv \bar{\sigma}_0(\vartheta), \tag{258}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_h}{\partial s_1 \partial s_2},$$

V_h^0 et $\bar{V}_h$ étant ce que deviendra V_h, lorsqu'on y remplace σ par $\sigma_0(\vartheta)$ et $r\bar{\sigma}(r, \vartheta)$ resp. Nous aurons

$$\frac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{1}{h}\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \left[3 u_1 u_2 \frac{t^3}{q^5} - 3(c_1 u_2 + c_2 u_1)\frac{t^2}{q^5} + 3 c_1 c_2 \frac{t}{q^5} - \frac{ct}{q^3}\right] dt,$$

$$(292)\quad \begin{cases} \therefore\ \dfrac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) A_0\, d\vartheta - \dfrac{1}{a}\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3 u_1 u_2 - c)\, d\vartheta + h\eta_h,\ \lim_{h=0} \eta_h \text{ finie,} \\ A_0 = \dfrac{(u_1 - c_1)(u_2 - c_2)}{(1 - u')^2} + \dfrac{u_1 u_2 - c}{1 - u'}. \end{cases}$$

Pour que $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2}$ soit finie, il faut donc que l'on ait

$$(293)\qquad \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) A_0\, d\vartheta = 0.$$

Nous aurons de même

$$\frac{\partial^2 \overline{V}_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \bar{\sigma}(r, \vartheta) \left[3 u_1 u_2 \frac{t^4}{q^5} - 3(c_1 u_2 + c_2 u_1)\frac{t^3}{q^5} + 3 c_1 c_2 \frac{t^2}{q^5} - \frac{ct^2}{q^3}\right] dt,$$

d'où nous tirons

$$(294)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{V}_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \overline{X}^{(h)}_{s_1 s_2} + \overline{A}_{s_1 s_2} + h\bar{\eta}_h,\ \lim\limits_{h=0} \bar{\eta}_h \text{ finie,} \\ \overline{X}^{(h)}_{s_1 s_2} = \displaystyle\int_0^{2\pi} (3 u_1 u_2 - c)\, d\vartheta \int_h^a \bar{\sigma}(r, \vartheta) \frac{dr}{r} = \int_{(h)}^{(a)} (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2}\, d\omega \\ \overline{A}_{s_1 s_2} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta) \overline{A}\, d\vartheta \\ \overline{A} = \dfrac{(u_1 - c_1)(u_2 - c_2)}{(1 - u')^2} + \dfrac{3 u_1 u_2 - c - (c_1 u_2 + c_2 u_1)}{1 - u'} - \\ \qquad - 8 u_1 u_2 + 2c - (3 u_1 u_2 - c) \log \dfrac{1 - u'}{2}. \end{cases}$$

Si l'égalité (293) est satisfaite, nous aurons donc

$$(295)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3u_1 u_2 - c)\,d\vartheta + \overline{X}_{s_1 s_2} + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\overline{A}\,d\vartheta, \text{ où} \\ \overline{X}_{s_1 s_2} = \lim\limits_{h=0} \overline{X}^{(h)}_{s_1 s_2}, \end{cases}$$

les quantités $\overline{X}^{(h)}_{s_1 s_2}$ et $\overline{A}$ étant données par la formule (294). Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si la fonction σ est de la forme* (258), *la condition nécessaire et suffisante pour que $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ soit finie, est que l'égalité* (293) *est satisfaite, et que la quantité $\overline{X}_{s_1 s_2}$* (294) *a une valeur finie et déterminée. La valeur de cette limite est donnée par la formule* (294).

Cas particuliers, où l'égalité (293) **est satisfaite.**

1° $\sigma_0 =$ *une constante.* En effet, dirigeons l'axe des x de manière que $\mu' = 0$,

$$\therefore \lambda'^2 A_0 = (\mu_1\mu_2 - \lambda_1\lambda_2)u' - (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\lambda' \sin\vartheta + (2\mu_1\mu_2 +$$

$$+ c_1 c_2 - c)\left[\frac{1}{1-u'} - \frac{1-\lambda'^2}{(1-u')^2}\right] + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 - \lambda' c_1\mu_2 - \lambda' c_2\mu_1)\frac{\lambda'\sin\vartheta}{(1-u')^2},\ u' = \lambda'\cos\vartheta,$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} A_0\,d\vartheta = 0.$$

2° $\sigma_0 =$ *une constante* σ_1 *pour* $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, *et* $=$ *une constante* σ_2 *pour* $\pi \leqq \vartheta \leqq 2\pi$; $\mu' = \mu_1 = \mu_2 = \lambda_2 = 0$. En effet, nous trouverons

$$\lambda' A_0 = (\nu'\lambda_1 - \lambda'\nu_1)\left[\frac{1}{1-u'} - \frac{1-\lambda'^2}{(1-u')^2}\right] \text{ etc.}$$

3° σ_0 *comme dans le cas* 2°; $\lambda' = \mu' = \mu_1 = \mu_2 = \nu_2 = 0$.

4° $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda'$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu'$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu'$, et

$$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\,u\,d\vartheta = 0.$$

Remarque I. Les cas 2° et 3° font voir que dans certains cas la dérivée seconde peut avoir une limite finie, même si le point P_0 se trouve sur une ligne de discontinuité de la densité. Dans le cas 4°, la discontinuité de la densité au point P_0 peut être assez profonde.

Remarque II. Dans le cas 4°, nous trouverons

$$(296)\begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s^2} = \lim\limits_{h=0} \int\limits_0^{2\pi} (3u'^2 - 1)\, d\vartheta \int\limits_h^a \bar{\sigma}(r, \vartheta) \dfrac{dr}{r} - \dfrac{1}{a} \int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3u'^2 - 1)\, d\vartheta + \\ \qquad + \int\limits_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)\left[2 - 3u' - 8u'^2 - (3u'^2 - 1)\log\dfrac{1-u'}{2}\right] d\vartheta = \\ \qquad = \left(\dfrac{\partial^2 V}{d s^2}\right)_0 - \int\limits_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)(3u'^2 - 1)\, d\vartheta, \end{cases}$$

où le dernier terme est $= 0$, si $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s^2}$ existe; $\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right)_0$ est la valeur de $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ au point P_0. Nous trouverons aussi que les conditions de l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s^2}$ et de $\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right)_0$ sont les mêmes.

CHAPITRE V.

Les dérivées secondes du potentiel d'une simple couche. Surface courbe.

§ 41. *Les dérivées secondes extérieures en un point de la couche.* Soit P_0 un point de la couche, et supposons que la surface soit physiquement régulière à ce point; soient Q un point quelconque de la couche et ψ l'angle que fait la droite $P_0 Q$ avec sa projection dans le plan des xy. Supposons que le point P se meuve vers le point P_0 suivant une droite qui ne touche pas la surface. Soient $\lambda' \mu' \nu'$ les cosinus directeurs de la droite $P_0 P$, et $\lambda \mu \nu$ les cosinus directeurs de l'élément ds. Supposons que la fonction σ soit de la forme

$$(258)\qquad \sigma = \sigma_0(\vartheta) + r\bar{\sigma}(r, \vartheta),\ \lim_{r=0} \bar{\sigma}(r, \vartheta) \text{ finie} \equiv \bar{\sigma}_0(\vartheta),$$

et posons

$$(297)\qquad V = V^0 + \bar{V},$$

où V^0 et $\overline{V}$ se rapportent aux fonctions σ_0 et $r\overline{\sigma}$.

Premier cas: $\frac{\partial^2 V^0}{\partial s' \partial s}$. Les égalités (208) donnent pour le point P_0

$$(208^*)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial V^0}{\partial s}\right)_0 = W_s^0 + Q_s \\ &W_s^0 = \lim_{h=0} W_{sh}^0 \\ &W_{sh}^0 = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_h^a u \cos^2\psi \frac{dr}{r} \\ &Q_s = -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{1 + u_0 + u_0 \log\left[\frac{1-u_0}{2} \cos\psi_0\right]\right\} \cos^2\psi_0\, d\vartheta \\ &u = \lambda \cos\psi \cos\vartheta + \mu \cos\psi \sin\vartheta + \nu \sin\psi, \end{aligned}\right.$$

où $\psi_0 = \lim_{r=0} \psi(r, \vartheta)$, et où u_0 est ce que deviendra u, si l'on y substitue ψ_0 à ψ. Si W_s^0 existe, on aura

$$(298)\qquad \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, u_0 \cos^2 \psi_0\, d\vartheta = 0.$$

Posons $P_0 P = h$. Pour le point P nous avons trouvé

$$(220^*)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V_h^0}{\partial s} = W_{sh}^0 + Q'_{sh} \\ &Q'_{sh} = -c\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \cos\psi\, q \frac{dt}{q'^3} + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^1 u \cos\psi \cdot q^2 \frac{dt}{q'^3} + \\ &\qquad + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} u \cos\psi \left[\frac{q^2}{q'^3} - \frac{1}{q}\right] dt \\ &\frac{1}{h} P_0 Q = q = \frac{t}{\cos\psi}, \quad r = ht, \\ &\frac{1}{h} P Q = q' = \sqrt{q^2 - 2qu' + 1} \\ &\cos(h, P_0 Q) = u' = \lambda' \cos\psi \cos\vartheta + \mu' \cos\psi \sin\vartheta + \nu' \sin\psi \\ &\cos(h, ds) = c = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu', \text{ et} \end{aligned}\right.$$

$$(222^*)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h^0}{\partial s} = W_s^0 + Q'_s \\[2ex] Q'_s = -c \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \int_0^{\infty} \cos\psi_0 q_0 \frac{dt}{q_0'^3} + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^1 u_0 \cos\psi_0 \cdot q_0^2 \frac{dt}{q_0'^3} + \\[2ex] \qquad + \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_1^{\infty} u_0 \cos\psi_0 \left[\frac{q_0^2}{q_0'^3} - \frac{1}{q_0}\right] dt = \\[2ex] = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{\frac{u_0 - c}{1 - u_0'} - 2u_0 - u_0 \log\left[\frac{1 - u_0'}{2} \cos\psi_0\right]\right\} \cos^2\psi_0\, d\vartheta \\[2ex] q_0 = \dfrac{t}{\cos\psi_0} \\[1ex] q_0' = \sqrt{q_0^2 - 2 q_0 u_0' + 1}, \end{cases}$$

$$(299)\qquad \therefore \frac{1}{h}\left[\frac{\partial V_h^0}{\partial s} - \left(\frac{\partial V^0}{\partial s}\right)_0\right] = \frac{1}{h}(W_{sh}^0 - W_s^0) + \frac{1}{h}(Q'_{sh} - Q'_s) + \frac{1}{h}(Q'_s - Q_s).$$

Nous trouverons

$$\frac{1}{h}(W_{sh}^0 - W_s^0) = -\frac{1}{h} \lim_{h'=0} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_{h'}^{h} u \cos^2\psi \frac{dr}{r} = -$$

$$-\frac{1}{h} \lim_{h'=0} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_{\frac{h'}{h}}^{1} u \cos^2\psi \frac{dt}{t}$$

pour $r = ht$. Nous supposerons de plus

$$(300)\qquad \psi(r, \vartheta) = \psi_0(\vartheta) + r\overline{\psi}(r, \vartheta),\ \lim_{r=0} \overline{\psi} \text{ finie} \equiv \overline{\psi}_0(\vartheta).$$

En employant la formule

$$(301)\qquad f(\psi + \delta\psi) = f(\psi) + \delta\psi f'(\psi + \theta\delta\psi),\ 0 \leq \theta \leq 1,$$

nous trouverons

$$(302)\qquad \begin{cases} u \cos^2\psi = u_0 \cos^2\psi_0 + (\nu \cos\psi_1 - 3u_1 \cos\psi_1 \sin\psi_1) r\overline{\psi} \\ \quad \psi_1 = \psi_0 + \theta r \overline{\psi},\ 0 \leq \theta \leq 1, \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{h}(W^0_{sh} - W^0_s) = \frac{1}{h}\lim_{h'=0} \log\frac{h'}{h}\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, u_0 \cos^2\psi_0\, d\vartheta -$$

$$-\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta\int_0^1 (\nu\cos\psi_1 - 3\, u_1 \cos\psi_1 \sin\psi_1)\, \overline{\psi}\, dt.$$

En ayant égard à l'égalité (298), nous trouverons

$$\lim_{h=0}\frac{1}{h}(W^0_{sh} - W^0_s) = \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3\, u_0\sin\psi_0 - \nu)\cos\psi_0\cdot\overline{\psi}_0(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{303}$$

De plus nous aurons

$$\tag{304} \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{h}(Q'_{sh} - Q'_s) = -\frac{1}{h}\, c\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta\int_0^{\frac{a}{h}}\left(\frac{1}{q'^3} - \frac{1}{q'^3_0}\right) t\, dt + \\ &+ \frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta\int_0^1\left(\frac{u}{\cos\psi\, q'^3} - \frac{u_0}{\cos\psi_0\, q'^3_0}\right) t^2\, dt + \\ &+ \frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta\int_1^{\frac{a}{h}}\left[\left(\frac{u}{\cos\psi}\cdot\frac{1}{q'^3} - \frac{u_0}{\cos\psi_0}\cdot\frac{1}{q'^3_0}\right) t^2 - \frac{u\cos^2\psi - u_0\cos^2\psi_0}{t}\right] dt + \\ &+ \frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta\int_{\frac{a}{h}}^{\infty}\left(\frac{c\, q_0}{q'^3_0} - \frac{u_0\, q_0^2}{q'^3_0} + \frac{u_0}{q_0}\right)\cos\psi_0\, dt \equiv \frac{1}{h}A + \frac{1}{h}B + \frac{1}{h}C + \frac{1}{h}D. \end{aligned}\right.$$

Le coefficient de $\frac{1}{t^2}$ dans le développement de $\frac{t}{q'^3}$ étant $\cos^3\psi$, nous écrivons

$$\frac{t}{q'^3} - \frac{\cos^3\psi}{t^2} = \frac{t}{q'^3_0} - \frac{\cos^3\psi_0}{t^2} + \left[3(\nu' - q_1\sin\psi_1)\frac{q_1^2}{q'^5_1} + \frac{3\sin\psi_1}{q_1^2}\right]\overline{\psi}\, r,$$

$$\therefore \frac{1}{h} A = -3c \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^1 \overline{\psi}(\nu' - q_1 \sin \psi_1) \frac{q_1^3}{q_1'^5} \cos \psi_1\, dt -$$

$$-3c \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \overline{\psi} \left\{ (\nu' - q_1 \sin \psi_1) \frac{q_1^3}{q_1'^5} \cos \psi_1 + \frac{\cos \psi_1 \sin \psi_1}{q_1} \right\} dt + Y_h$$

$$(305) \qquad Y_h \equiv -c \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_h^a (\cos^3 \psi - \cos^3 \psi_0) \frac{dr}{r^2},$$

$$\therefore \lim_{h=0} \frac{1}{h} A = -3c \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \overline{\psi}_0(\vartheta) \cos \psi_0\, d\vartheta \int_0^1 (\nu' - q_0 \sin \psi_0) \frac{q_0^8}{q_0'^5}\, dt -$$

$$-3c \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \overline{\psi}_0(\vartheta) \cos \psi_0\, d\vartheta \int_1^{\infty} \left\{ (\nu' - q_0 \sin \psi_0) \frac{q_0^8}{q_0'^5} + \frac{\sin \psi_0}{q_0} \right\} dt + \lim_{h=0} Y_h.$$

En posant $dt = \cos \psi_0\, dq$ et en intégrant, nous trouverons

$$(306) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{h=0} \frac{1}{h} A = &-c \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \overline{\psi}_0(\vartheta) \cos^2 \psi_0 \left\{ \frac{2 - u_0'}{(1 - u_0')^2} \nu' + \right. \\ &\left. + \sin \psi_0 \left[\frac{3 u_0 - 4}{(1 - u_0')^2} + 8 + 3 \log \left(\frac{1 - u_0'}{2} \cos \psi_0 \right) \right] \right\} d\vartheta + \lim_{h=0} Y_h. \end{aligned} \right.$$

De même nous trouverons

$$(307) \quad \lim_{h=0} \frac{1}{h} B = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \overline{\psi}_0(\vartheta) \cos^3 \psi_0\, d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\cos \psi_0}} \left\{ 3 u_0 (\nu' - q_0 \sin \psi_0) \frac{q_0^4}{q_0'^5} + \frac{\nu q_0^3}{q_0'^3} \right\} dq_0.$$

En développant, nous trouverons que l'expression

$$\left(\frac{u}{\cos \psi} \cdot \frac{1}{q'^3} - \frac{u_0}{\cos \psi_0} \cdot \frac{1}{q_0'^3} \right) t^2 - \frac{u \cos^2 \psi - u_0 \cos^2 \psi_0}{t}$$

peut s'écrire sous la forme

$\frac{\bar{a}-\bar{a}_0}{t^2}+\frac{1}{t^3}(P-P_0)$, $\lim_{t=\infty}(P-P_0)$ finie, où $\bar{a}-\bar{a}_0=3\,u\,u'\cos^3\psi-3\,u_0\,u'_0\cos^3\psi_0$.

Nous trouverons comme précédemment

$$(308)\quad\begin{cases}\lim_{h=0}\frac{1}{h}C=\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,\overline{\psi}_0(\vartheta)\cos^2\psi_0\,d\vartheta\int_{\frac{1}{\cos\psi_0}}^{\infty}\Big\{3\,u_0(\nu'-q_0\sin\psi_0)\frac{q_0^4}{q_0'^5}+\\ \qquad+\frac{\nu q_0^2}{q_0'^3}-\nu+3\,u_0\sin\psi_0-3(\nu u'_0+\nu' u_0)\frac{1}{q_0}+15\,\frac{u_0\,u'_0\sin\psi_0}{q_0}\Big\}\,dq_0+\lim_{h=0}Z_h\\ Z_h=3\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_h^a(u\,u'\cos^3\psi-u_0\,u'_0\cos^3\psi_0)\frac{dr}{r^2}.\end{cases}$$

Enfin nous trouverons

$$(309)\qquad \lim_{h=0}\frac{1}{h}D=-\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3\,u_0\,u'_0-c)\cos^3\psi_0\,d\vartheta.$$

Si nous effectuons les intégrations dans les équations (307) et (308), nous trouverons le résultat suivant

$$(310)\quad\begin{cases}\frac{\partial^2 V^0}{\partial s'\,\partial s}=W^0_{s's}+Q^0_{s's}\\ W^0_{s's}=\lim_{h=0}W^{0(h)}_{s's}\\ W^{0(h)}_{s's}=\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_h^a\{(3\,u\,u'-c)\cos^3\psi-(3\,u_0\,u'_0-c)\cos^3\psi_0\}\frac{dr}{r^2}\\ Q^0_{s's}=-\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3\,u_0\,u'_0-c)\cos^3\psi_0\,d\vartheta+\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,\overline{\psi}_0(\vartheta)\cos^2\psi_0\,\Gamma^0_{s's}\,d\vartheta\\ \Gamma^0_{s's}=3\,[\sin\psi_0(5\,u_0\,u'_0-c)-(\nu' u_0+\nu u'_0)]\log\Big[\frac{1-u'_0}{2}\cos\psi_0\Big]+\\ \qquad+(15\,u_0+31\,u_0\,u'_0-8\,c)\sin\psi_0-(8\,\nu' u_0+5\,\nu u'_0+3\,\nu)+[(c\sin\psi_0+\\ +\nu' u_0)(4-3\,u'_0)-c\,\nu'(2-u'_0)-u_0\sin\psi_0(7-6\,u'_0)+\nu(1-u'_0)]\frac{1}{(1-u'_0)^2},\end{cases}$$

pourvu que la quantité W_s^0 (208*) soit finie et que (208* et 222*)

$$Q'_s = Q_s. \tag{311}$$

Remarque I. Pour $\psi_0 = 0$, l'égalité (311) se réduit à la deuxième des égalités (282).

Deuxième cas: $\dfrac{\partial^2 \overline{V}}{\partial s' \partial s}$. Nous trouverons

$$\overline{Q}'_s = \overline{Q}_s = 0. \tag{312}$$

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} (\overline{W}_{sh} - \overline{W}_s) = -\int_0^{2\pi} \overline{\sigma}_0(\vartheta)\, u_0 \cos^2 \psi_0\, d\vartheta. \tag{313}$$

De plus nous pourrons écrire

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{h}\overline{Q}'_{sh} = &-c\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \overline{\sigma}(ht, \vartheta) \frac{q^2}{q'^3} \cos^2\psi\, dt - c\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \overline{\sigma}(ht, \vartheta)\, \cdot \\ &\cos^2\psi \left[\frac{q^2}{q'^3} - \frac{1}{q}\right] dt + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \overline{\sigma}(ht, \vartheta)\, u \cos^2\psi \frac{q^3}{q'^3} dt + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \overline{\sigma}(ht, \vartheta)\, u \cos^2\psi \left[\frac{q^3}{q'^3} - 1 - \frac{3u'}{q}\right] dt + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \overline{\sigma}(r, \vartheta)(3uu' - c)\cos^3\psi \frac{dr}{r}. \end{aligned}\right. \tag{314}$$

En passant à la limite et en effectuant les intégrations, nous trouverons le résultat suivant:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial s' \partial s} = \overline{W}_{s's} + \overline{Q}_{s's} \\ &\overline{W}_{s's} = \lim_{h=0} \overline{W}^{(h)}_{s's} \\ &\overline{W}^{(h)}_{s's} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \overline{\sigma}(r, \vartheta)(3uu' - c)\cos^3\psi \frac{dr}{r} \end{aligned}\right. \tag{315}$$

$$(315)\quad \begin{cases} \overline{Q}_{s's} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)\cos^3\psi_0\,\overline{\Gamma}_{s's}\,d\vartheta \\ \overline{\Gamma}_{s's} = -(3u_0u_0' - c)\log\left[\dfrac{1-u_0'}{2}\cos\psi_0\right] + \dfrac{u_0 - c}{1-u_0'} + 2c - 3u_0 - 5u_0u_0'. \end{cases}$$

Dans le cas général, nous trouverons

$$(297^*)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial s} = \frac{\partial^2 V^0}{\partial s'\,\partial s} + \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial s'\,\partial s}.$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si*

$$(316)\quad \begin{cases} \sigma(r,\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) + r\bar{\sigma}(r,\vartheta), & \lim\limits_{r=0} \bar{\sigma}(r,\vartheta)\ \textit{finie} \\ \psi(r,\vartheta) = \psi_0(\vartheta) + r\overline{\psi}(r,\vartheta), & \lim\limits_{r=0} \overline{\psi}(r,\vartheta)\ \textit{finie}, \end{cases}$$

si de plus la quantité W_s (208*) *est finie et l'égalité* (311) *est satisfaite, la valeur de* $\frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial s}$ *au point* P_0 *est donnée par la formule*

$$(317)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial s} = W_{s's} + Q_{s's} - \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3u_0u_0' - c)\cos^3\psi_0\,d\vartheta \\ W_{s's} = \lim\limits_{h=0} W_{s's}^{(h)} \\ W_{s's}^{(h)} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \{\sigma(r,\vartheta)(3uu' - c)\cos^3\psi - \sigma_0(\vartheta)(3u_0u_0' - c)\cos^3\psi_0\}\frac{dr}{r^2} \\ Q_{s's} = \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\overline{\psi}_0(\vartheta)\cos^2\psi_0\,\Gamma_{s's}^0\,d\vartheta + \int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\cos^3\psi_0\,\overline{\Gamma}_{s's}\,d\vartheta, \end{cases}$$

où les quantités $\Gamma_{s's}^0$ *et* $\overline{\Gamma}_{s's}$ *sont définies dans les formules* (310) *et* (315).

On peut écrire

$$(318)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial s} = \lambda\frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial x} + \mu\frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial y} + \nu\frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial z}.$$

Remarque II. On trouvera facilement

$$(3\,uu' - c)\cos^3\psi - (3\,u_0 u'_0 - c)\cos^3\psi_0 = 3\cos^2\psi_1\,[u_1\nu' + u'_1\nu - (5\,u_1 u'_1 - c)\sin\psi_1]\,r\overline{\psi}$$

$$\psi_1 = \psi_0 + \theta r\overline{\psi},\quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

par suite la quantité $W^{(h)}_{s's}$ peut s'écrire

$$W^{(h)}_{s's} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \{\sigma(r,\vartheta)(3\,uu' - c)\cos^3\psi +$$

$$+ 3\,\sigma_0(\vartheta)\cos^2\psi_1\,[u_1\nu' + u'_1\nu - (5\,u_1 u'_1 - c)\sin\psi_1]\,\overline{\psi}(r,\vartheta)\}\frac{dr}{r}.$$

D'où il suit que pour l'existence de la quantité $W^{(h)}_{s's}$ il faut et il suffit que la quantité

(319) $$\left\{\begin{aligned} & W^0_{s's} \equiv \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} \cos^2\psi_0\, d\vartheta \int_h^a [\bar\sigma(r,\vartheta)(3\,u_0 u'_0 - c)\cos\psi_0 + \\ & \qquad\qquad + 3\,\sigma_0(\vartheta)\, C'_0\, \overline{\psi}(r,\vartheta)]\frac{dr}{r} \text{ soit finie, où} \\ & \qquad C'_0 = u_0\nu' + u'_0\nu + (c - 5\,u_0 u'_0)\sin\psi_0. \end{aligned}\right.$$

Cas particuliers. 1° $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}$. Pour $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, $\nu' = \nu$, nous trouverons

$$Q'_s = Q_s - \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, u_0 \cos^2\psi_0\, d\vartheta,$$

par suite, si W_s existe, l'égalité (311) est satisfaite à cause de l'égalité (298). Les seules conditions pour l'existence de la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ sont donc que les quantités W_s et $W_{s's}$ existent. On trouvera dans ce cas

(320) $$\left\{\begin{aligned} & \Gamma^0_{ss} = 3\,[\sin\psi_0(5\,u_0^2 - 1) - 2\,\nu u_0]\log\left(\frac{1-u_0}{2}\cos\psi_0\right) - \\ & \qquad - \sin\psi_0\left[\frac{2}{1-u_0} + 2 - 15\,u_0 - 31\,u_0^2\right] + \nu\left[\frac{2}{1-u_0} - 6 - 13\,u_0\right] \\ & \overline{\Gamma}_{ss} = -(3\,u_0^2 - 1)\log\left(\frac{1-u_0}{2}\cos\psi_0\right) + 1 - 3\,u_0 - 5\,u_0^2. \\ & \quad \text{Pour } \psi_0 = 0 \text{ on aura} \\ & \qquad \Gamma^0_{ss} = -6\,\nu u_0 \log\frac{1-u_0}{2} + \nu\left[\frac{2}{1-u_0} - 6 - 13\,u_0\right]. \end{aligned}\right.$$

2^0 $\psi_0 = 0$. Si W_s et W_{zs} existent, on aura

$$
(321)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\nu \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)\, d\vartheta = 3 \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \overline{\psi}_0(\vartheta)\, u_0\, d\vartheta, \\
&\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial s} = W_{zs} + \frac{\nu}{a} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) d\vartheta - \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \overline{\psi}_0(\vartheta)(4\nu + u_0) d\vartheta - 2 \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta) u_0 d\vartheta, \\
&\text{avec la condition} \\
&Q_s' - Q_s = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[1 - \nu + u_0 \log(1 - u_0)\right] d\vartheta = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

§ 42. $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ *pour un point extérieur.* Soient $\lambda_1 \mu_1 \nu_1$ et $\lambda_2 \mu_2 \nu_2$ les cosinus directeurs de deux éléments ds_1 et ds_2 émanant du point P, situé en dehors de la couche, et soient $\lambda' \mu' \nu'$ les cosinus directeurs de la droite $P_0 P = h$. Posons

$$
(322)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&u_1 = \cos(P_0 Q, ds_1) = \lambda_1 \cos\psi \cos\vartheta + \mu_1 \cos\psi \sin\vartheta + \nu_1 \sin\psi \\
&u_2 = \cos(P_0 Q, ds_2) = \lambda_2 \cos\psi \cos\vartheta + \mu_2 \cos\psi \sin\vartheta + \nu_2 \sin\psi \\
&u' = \cos(P_0 Q, P_0 P) = \lambda' \cos\psi \cos\vartheta + \mu' \cos\psi \sin\vartheta + \nu' \sin\psi \\
&c_1 = \cos(h, ds_1) = \lambda_1 \lambda' + \mu_1 \mu' + \nu_1 \nu' \\
&c_2 = \cos(h, ds_2) = \lambda_2 \lambda' + \mu_2 \mu' + \nu_2 \nu' \\
&c = \cos(ds_1, ds_2) = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 \\
&r' = P_0 Q = \frac{r}{\cos\psi} \\
&R = PQ = \sqrt{r'^2 - 2 r' h u' + h^2} \\
&v_1 = \cos(R, ds_1) = \frac{r' u_1 - h c_1}{R} \\
&v_2 = \cos(R, ds_2) = \frac{r' u_2 - h c_2}{R} \\
&r = ht \\
&\frac{t}{\cos\psi} = q \\
&q' = \sqrt{q^2 - 2 q u' + 1} \\
&\therefore \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \int \sigma \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial s_1 \partial s_2} d\omega = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma(r, \vartheta)\, (3 v_1 v_2 - c) \frac{r\, dr}{R^3}.
\end{aligned}
\right.
$$

Supposons

$$(316^*)\quad \begin{cases} \sigma(r,\vartheta)=\sigma_0(\vartheta)+r\bar{\sigma}(r,\vartheta),\ \bar{\sigma}(r,\vartheta)=\bar{\sigma}_0(\vartheta)+\sigma_1(r,\vartheta),\ \lim\limits_{r=0}\sigma_1(r,\vartheta)=0 \\ \psi(r,\vartheta)=\psi_0(\vartheta)+r\bar{\psi}(r,\vartheta),\ \bar{\psi}(r,\vartheta)=\bar{\psi}_0(\vartheta)+\bar{\psi}_1(r,\vartheta),\ \lim\limits_{r=0}\psi_1(r,\vartheta)=0, \end{cases}$$

et posons

$$V_h = V_h^0 + \bar{V}_h,$$

où V_h^0 se rapporte à σ_0 et $\bar{V}_h$ à $r\bar{\sigma}$.

Premier cas: $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2}$. Nous trouverons

$$\frac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2}=\frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_0^{\frac{a}{h}}\left[3(u_1q-c_1)(u_2q-c_2)\frac{1}{q'^2}-c\right]\frac{tdt}{q'^3},$$

et nous aurons ensuite

$$(323)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2}=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\cos^2\psi_0 A'_0\,d\vartheta-\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3\,u_1^0u_2^0-c)\cos^3\psi_0\,d\vartheta+ \\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)B'\,d\vartheta+\eta_h,\ \lim_{h=0}\eta_h=0 \\ A_0'=\dfrac{(u_1^0-c_1)(u_2^0-c_2)}{(1-u_0')^2}+\dfrac{u_1^0u_2^0-c}{1-u_0'},\ u_1^0\equiv\lim\limits_{r=0}u_1\ \text{etc.} \\ B'=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{\frac{a}{h}}\left(\frac{e}{q'^3}-\frac{e_0}{q_0'^3}\right)tdt \\ e=3(u_1q-c_1)(u_2q-c_2)\dfrac{1}{q'^2}-c,\ e_0=\lim\limits_{r=0}e. \end{cases}$$

Le coefficient de $\frac{1}{t^2}$ dans le développement de l'expression

$$\frac{et}{q'^3}$$

étant

$$(3\, u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi,$$

nous posons

$$\left(\frac{e}{q'^3} - \frac{e_0}{q_0'^3}\right) t = \left[\frac{te}{q'^3} - (3\, u_1 u_2 - c)\frac{\cos^3 \psi}{t^2}\right] - \left[\frac{te_0}{q_0'^3} - (3\, u_1^0 u_2^0 - c)\frac{\cos^3 \psi_0}{t^2}\right] +$$
$$+ [3\, u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi - (3\, u_1^0 u_2^0 - c) \cos^3 \psi_0] \frac{1}{t^2},$$

et en employant la formule

$$f(\psi_0 + r\overline{\psi}) - f(\psi_0) = f'(\psi_0 + \theta r \overline{\psi}) r\overline{\psi}, \qquad 0 \leqq \theta \leqq 1,$$

nous trouverons

$$B' = 3\int_0^1 \left(\frac{5\, A_1}{q_1'^7} + \frac{B_1}{q_1'^5}\right) \cos \psi_1 \overline{\psi} dt + 3\int_1^{\frac{a}{h}} \left[\frac{5\, A_2}{q_2'^7} + \frac{B_2}{q_2'^5} - \frac{C_2}{q_2}\right] \cos \psi_2 \overline{\psi} dt +$$
$$+ \int_1^{\frac{a}{h}} [3\, u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi - (3\, u_1^0 u_2^0 - c) \cos^3 \psi_0] \frac{dt}{t^2}$$

$$A = (\nu' - q \sin \psi)(u_1 q - c_1)(u_2 q - c_2) q^3$$
$$B = [(\nu_1 u_2 + \nu_2 u_1) q - (\nu_1 c_2 + \nu_2 c_1) - c(\nu' - q \sin \psi)] q^3$$
$$C = \nu_1 u_2 + \nu_2 u_1 + (c - 5\, u_1 u_2) \sin \psi,$$

A_1, B_1, A_2, B_2 et C_2 étant ce que deviendront les quantités A, B, C, lorsqu'on y remplace ψ par ψ_1, resp. ψ_2, où

$$\psi_1 = \psi_0 + \theta_1 r \overline{\psi}, \quad \psi_2 = \psi_0 + \theta_2 r \overline{\psi}, \quad 0 \leqq \theta_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq \theta_2 \leqq 1.$$

En passant à la limite, nous trouverons

$$(324) \quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2} = C_{s_1 s_2}^0 - \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3\, u_1^0 u_2^0 - c) \cos^3 \psi_0 d\vartheta + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \overline{\psi}_0(\vartheta) E \cos^2 \psi_0 d\vartheta \\ C_{s_1 s_2}^0 = \lim C_{s_1 s_2}^{0(h)} \\ C_{s_1 s_2}^{0(h)} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) d\vartheta \int_h^a \left[(3\, u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi - (3\, u_1^0 u_2^0 - c) \cos^3 \psi_0 \right] \frac{dr}{r^2} \end{cases}$$

$$
(324)\quad \left\{\begin{aligned}
E = {} & c_1 c_2 \nu' F_1 - [c_1 c_2 \sin\psi_0 + \nu'(c_1 u_2^0 + c_2 u_1^0)] F_2 + \\
& + [\nu' u_1^0 u_2^0 + (c_1 u_2^0 + c_2 u_1^0)\sin\psi_0] F_3 - u_1^0 u_2^0 \sin\psi_0 F_4 - \\
& - (c_1 \nu_2 + c_2 \nu_1 + c\nu') G_1 + (\nu_1 u_2^0 + \nu_2 u_1^0 + c \sin\psi_0) G_2,
\end{aligned}\right.
$$

où

$$
(325)\quad \left\{\begin{aligned}
F_1 &= 15\int_0^\infty q_0^3 \frac{dq_0}{q'^7_0} = \frac{2}{(1-u'_0)^3} \\
F_2 &= 15\int_0^\infty \frac{q_0^4\, dq_0}{q'^7_0} = \frac{2}{(1-u'_0)^3} + \frac{1}{(1-u'_0)^2} \\
F_3 &= 15\int_0^\infty \frac{q_0^5\, dq_0}{q'^7_0} = \frac{2}{(1-u'_0)^3} + \frac{3}{(1-u'_0)^2} + \frac{3}{1-u'_0} \\
F_4 &= 15\int_0^{\frac{1}{\cos\psi_0}} \frac{q_0^6\, dq_0}{q'^7_0} + 15\int_{\frac{1}{\cos\psi_0}}^\infty \left(\frac{q_0^6}{q'^7_0} - \frac{1}{q_0}\right) dq_0 = \frac{2}{(1-u'_0)^3} + \frac{6}{(1-u'_0)^2} + \\
&\qquad + \frac{15}{1-u'_0} - 46 - 15\log\left(\frac{1-u'_0}{2}\cos\psi_0\right) \\
G_1 &= \int_0^\infty \frac{q_0^3\, dq_0}{q'^5_0} = \frac{1}{(1-u'_0)^2} + \frac{1}{1-u'_0} \\
G_2 &= 3\int_0^{\frac{1}{\cos\psi_0}} \frac{q_0^4}{q'^5_0}\, dq_0 + 3\int_{\frac{1}{\cos\psi_0}}^\infty \left(\frac{q_0^4}{q'^5_0} - \frac{1}{q_0}\right) dq_0 = \frac{1}{(1-u'_0)^2} + \frac{3}{1-u'_0} - \\
&\qquad - 8 - 3\log\left(\frac{1-u'_0}{2}\cos\psi_0\right).
\end{aligned}\right.
$$

La condition à remplir est

$$
(326)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \sigma(\vartheta) A'_0 \cos^2\psi_0\, d\vartheta = 0 \\
&A'_0 = \frac{(u_1^0 - c_1)(u_2^0 - c_2)}{(1-u'_0)^2} + \frac{u_1^0 u_2^0 - c}{1-u'_0}.
\end{aligned}\right.
$$

Deuxième cas: $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 \overline{V}_h}{\partial s_1 \partial s_2}$. **Nous aurons**

$$\frac{\partial^2 \overline{V}_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \bar{\sigma}(ht, \vartheta) \left\{ 3(u_1 q - c_1)(u_2 q - c_2) \frac{1}{q'^2} - c \right\} \frac{t^2 dt}{q'^3},$$

et nous trouverons

$$(327) \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 \overline{V}_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \overline{C}_{s_1 s_2} + \displaystyle\int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta) \overline{A}' \cos^3 \psi_0 d\vartheta \\ \overline{C}_{s_1 s_2} = \lim\limits_{h=0} \overline{C}^{(h)}_{s_1 s_2} \\ \overline{C}^{(h)}_{s_1 s_2} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \bar{\sigma}(r, \vartheta)(3 u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi \frac{dr}{r} \\ \overline{A}' = -(3 u_1^0 u_2^0 - c) \log\left(\dfrac{1 - u'_0}{2} \cos \psi_0\right) + \dfrac{(u_1^0 - c_1)(u_2^0 - c_2)}{(1 - u_0')^2} - \\ \qquad - 8 u_1^0 u_2^0 + 2c + [3 u_1^0 u_2^0 - c - (c_1 u_2^0 + c_2 u_1^0)] \dfrac{1}{1 - u_0'}. \end{cases}$$

Dans le cas général, nous aurons

$$(328) \qquad \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \lim_{h=0} \left[\frac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial^2 \overline{V}_h}{\partial s_1 \partial s_2} \right],$$

où les deux termes du second membre sont définis par les systèmes (324) et (327), l'égalité (326) étant supposée satisfaite. Pour que le premier membre de l'égalité (328) soit fini, il faut donc que la quantité

$$(329) \qquad \left\{ \text{soit finie, où} \quad \begin{array}{l} C_{s_1 s_2} = \lim\limits_{h=0} C^{(h)}_{s_1 s_2} \\ C^{(h)}_{s_1 s_2} = C^{0(h)}_{s_1 s_2} + \overline{C}^{(h)}_{s_1 s_2}. \end{array} \right.$$

Cette condition, à savoir que la quantité $C_{s_1 s_2}$ doit être finie, peut être remplacée par cette autre que la quantité correspondante, où l'on a remplacé $\psi(r, \vartheta)$ par $\psi_0(\vartheta)$ (cfr. 319), doit être finie. Celle-ci peut être remplacée par les deux suivantes (316*)

$$(330)\quad \left\{\begin{aligned}
&D_{s_1s_2}\equiv\int_0^{2\pi}\{3\,\sigma_0(\vartheta)\overline{\psi}_0(\vartheta)C_0+\overline{\sigma}_0(\vartheta)(3\,u_1^0u_2^0-c)\cos\psi_0\}\cos^2\psi_0\,d\vartheta=0\\
&E'_{s_1s_2}\equiv\lim_{h=0}E'^{(h)}_{s_1s_2}=\text{une quantité finie, où}\\
&C_0=\nu_1u_2^0+\nu_2u_1^0+(c-5\,u_1^0u_2^0)\sin\psi_0\\
&E'^{(h)}_{s_1s_2}=\int_0^{2\pi}\cos^2\psi_0\,d\vartheta\int_h^a\{3\,\sigma_0(\vartheta)C_0\psi_1(r,\vartheta)+(3\,u_1^0u_2^0-c)\cos\psi_0\sigma_1(r,\vartheta)\}\frac{dr}{r}\,.
\end{aligned}\right.$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si les fonctions $\sigma(r,\vartheta)$ et $\psi(r,\vartheta)$ peuvent être représentées par les formules* (316*), *les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\partial s_2}$ sont que les équations* (326) *et* (330) *sont satisfaites, et on trouvera*

$$(331)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lim_{h=0}\frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\partial s_2}=A_{s_1s_2}+C_{s_1s_2}-\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3\,u_1^0u_2^0-c)\cos^3\psi_0\,d\vartheta\\
&A_{s_1s_2}=\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\overline{\psi}_0(\vartheta)E\cos^2\psi_0\,d\vartheta+\int_0^{2\pi}\overline{\sigma}_0(\vartheta)\overline{A}'\cos^3\psi_0\,d\vartheta\\
&C_{s_1s_2}=\lim_{h=0}C^{(h)}_{s_1s_2}\\
&C^{(h)}_{s_1s_2}=\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_h^a[\sigma(r,\vartheta)(3\,u_1u_2-c)\cos^3\psi-\sigma_0(\vartheta)(3\,u_1^0u_2^0-c)\cos^3\psi_0]\frac{dr}{r^2}\,,
\end{aligned}\right.$$

où les quantités E et $\overline{A}'$ sont définies dans les systèmes (324) *et* (327).

Remarque I. On trouvera (317)

$$W^{(h)}_{s_1s_2}=C^{(h)}_{s_1s_2}\,.$$

Remarque II. On a toujours

$$(332)\qquad \lim_{h=0}\frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\partial s_2}=\lim_{h=0}\frac{\partial^2 V_h}{\partial s_2\partial s_1}\,.$$

Remarque III. Pour $\psi_0=0$, la condition (326) devient identique à la condition correspondante (293) pour le plan.

Remárque IV. Si $\psi_0 = 0$, on trouvera (330) que les quantités

$$\lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial x^2}, \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial y^2}, \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial z^2}, \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial x \partial y} \text{ et } \lim_{h=0} \frac{\partial^2 \overline{V}_h}{\partial s_1 \partial s_2}$$

existent dans les mêmes cas que pour une surface plane.

Remarque V. Pour

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda', \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu', \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu'$$

nous trouverons que la condition (326) se réduit à la suivante

$$298^*) \qquad \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) u_0' \cos^2 \psi_0 d\vartheta = 0.$$

De plus nous trouverons (317) et (331)

$$(333) \qquad \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = - D_{ss}.$$

D'où il suit (319, 330) que $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s^2}$ existe ou n'existe pas en même temps que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ au point P_0, et que ces deux quantités sont égales, si elles existent, la droite $P_0 P$ étant prise dans la direction de ds.

§ **43. Cas particuliers.** I. *Point régulier.* Supposons

$$(334) \qquad \begin{cases} \sigma_0(\vartheta) = \text{une constante } \sigma_0 \\ \psi_0(\vartheta) = 0 \\ \bar{\sigma}_0(\vartheta) = a' \cos \vartheta + b' \sin \vartheta \\ \bar{\psi}_0(\vartheta) = \alpha \cos^2 \vartheta + 2\beta \cos \vartheta \sin \vartheta + \gamma \sin^2 \vartheta, \end{cases}$$

a' b' α β et γ étant des constantes.

Dans ce cas, la condition (326) est satisfaite (cfr 293). De plus la première des conditions (330) est satisfaite. On trouvera donc que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ est dans ce cas que la quantité

$$(330^*) \begin{cases} E'_{s_1 s_2} = \lim\limits_{h=0} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a [3\sigma_0(\nu_1 u_2^0 + \nu_2 u_1^0)\bar{\psi}_1(r, \vartheta) + (3 u_1^0 u_2^0 - c)\bar{\sigma}_1(r, \vartheta)] \frac{dr}{r} \\ u_1^0 = \lambda_1 \cos \vartheta + \mu_1 \sin \vartheta, \quad u_2^0 = \lambda_2 \cos \vartheta + \mu_2 \sin \vartheta \end{cases}$$

existe.

La valeur de $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\,\partial s_2}$ s'obtient (331) par la formule

$$(335)\quad\left\{\begin{aligned}
&\lim_{h=0}\frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\,\partial s_2}=C_{s_1s_2}+\sigma_0\int_0^{2\pi}\overline{\psi}_0(\vartheta)E_0\,d\vartheta+\int_0^{2\pi}\overline{\sigma}_0(\vartheta)\,\overline{A}'_0\,d\vartheta+\frac{1}{a}\pi\sigma_0(3\nu_1\nu_2-c)\\
&E_0=c_1c_2\nu'F_1-\nu'(c_1u_2^0+c_2u_1^0)F_2+\nu'u_1^0u_2^0F_3-\\
&\qquad\qquad-(c_1\nu_2+c_2\nu_1+c\nu')G_1+(\nu_1u_2^0+\nu_2u_1^0)G_2\\
&\overline{A}'_0=\frac{(u_1^0-c_1)(u_2^0-c_2)}{(1-u_0')^2}+[3u_1^0u_2^0-(c_1u_2^0+c_2u_1^0)-c]\frac{1}{1-u_0'}-\\
&\qquad\qquad-(3u_1^0u_2^0-c)\log(1-u_0')\\
&u_0'=\lambda'\cos\vartheta+\mu'\sin\vartheta,
\end{aligned}\right.$$

où la quantité $C_{s_1s_2}$ est définie dans le système (331).

En effectuant les intégrations, nous trouverons

$$\sigma_0c_1c_2\nu'\int_0^{2\pi}\overline{\psi}_0(\vartheta)F_1\,d\vartheta=2\pi\sigma_0c_1c_2\left\{\alpha\left(\frac{3\lambda'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right)+6\beta\frac{\lambda'\mu'}{\nu'^4}+\gamma\left(\frac{3\mu'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right)\right\},$$

$$\begin{aligned}
-\sigma_0\nu'\int_0^{2\pi}\overline{\psi}_0(\vartheta)(c_1u_2^0+c_2u_1^0)F_2\,d\vartheta=&-6\pi\sigma_0\alpha\lambda'(c_1\lambda_2+c_2\lambda_1)\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^4}+\frac{\mu'^2}{\nu'^2}\right)-\\
&-2\pi\sigma_0\alpha\mu'(c_1\mu_2+c_2\mu_1)\left(\frac{3\lambda'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right)-4\pi\sigma_0\beta\mu'(c_1\lambda_2+c_2\lambda_1)\left(\frac{3\lambda'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right)-\\
&-4\pi\sigma_0\beta\lambda'(c_1\mu_2+c_2\mu_1)\left(\frac{3\mu'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right)-2\pi\sigma_0\gamma\lambda'(c_1\lambda_2+c_2\lambda_1)\left(\frac{3\mu'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right)-\\
&-6\pi\sigma_0\gamma\mu'(c_1\mu_2+c_2\mu_1)\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu'\int_0^{2\pi}\overline{\psi}_0(\vartheta)u_1^0u_2^0F_3\,d\vartheta=&\,6\pi\sigma_0\alpha\lambda_1\lambda_2\left(\frac{\lambda'^4}{\nu'^4}+\frac{2\lambda'^2}{\nu'^2}+1\right)+6\pi\sigma_0\alpha\lambda'\mu'(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right)+\\
&+2\pi\sigma_0\alpha\mu_1\mu_2\left(\frac{3\lambda'^2\mu'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right)+6\pi\sigma_0\beta\lambda'\mu'\lambda_1\lambda_2\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right)+\\
&+2\pi\sigma_0\beta(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)\left(\frac{3\lambda'^2\mu'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right)+6\pi\sigma_0\beta\lambda'\mu'\mu_1\mu_2\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right)+
\end{aligned}$$

$$+2\pi\sigma_0\gamma\lambda_1\lambda_2\left(\frac{3\lambda'^2\mu'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right)+6\pi\sigma_0\gamma\lambda'\mu'(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^4}+\frac{1}{\nu'^2}\right)+$$

$$+6\pi\sigma_0\gamma\mu_1\mu_2\left(\frac{\mu'^4}{\nu'^4}+\frac{2\mu'^2}{\nu'^2}+1\right),$$

$$-\sigma_0\int_0^{2\pi}\overline{\psi}_0(\vartheta)(c_1\nu_2+c_2\nu_1+c\nu')G_1\,d\vartheta=2\pi\sigma_0\alpha\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3}+\frac{1}{\nu'}\right)+4\pi\sigma_0\beta\frac{\lambda'\mu'}{\nu'^3}+2\pi\sigma_0\gamma\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3}+\frac{1}{\nu'}\right),$$

$$\sigma_0\int_0^{2\pi}\overline{\psi}_0(\vartheta)(\nu_1u_2^0+\nu_2u_1^0)G_2\,d\vartheta=2\pi\sigma_0\alpha\lambda'(\lambda_1\nu_2+\lambda_2\nu_1)\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3}+\frac{3}{\nu'}\right)+$$

$$+2\pi\sigma_0\alpha\mu'(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1)\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3}+\frac{1}{\nu'}\right)+2\pi\sigma_0\beta\mu'(\lambda_1\nu_2+\lambda_2\nu_1)\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3}+\frac{1}{\nu'}\right)+$$

$$+2\pi\sigma_0\beta\lambda'(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1)\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3}+\frac{1}{\nu'}\right)+2\pi\sigma_0\gamma\lambda'(\lambda_1\nu_2+\lambda_2\nu_1)\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3}+\frac{1}{\nu'}\right)+$$

$$+2\pi\sigma_0\gamma\mu'(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1)\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3}+\frac{3}{\nu'}\right),$$

$$(336)\ \therefore\ \sigma_0\int_0^{2\pi}\overline{\psi}_0(\vartheta)E_0\,d\vartheta=4\pi\sigma_0\alpha(\lambda_1\lambda_2-\nu_1\nu_2)+4\pi\sigma_0\beta(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)+4\pi\sigma_0\gamma(\mu_1\mu_2-\nu_1\nu_2).$$

De plus nous aurons

$$\int_0^{2\pi}\overline{\sigma}_0(\vartheta)\overline{A'}_0\,d\vartheta=H_1+H_2+H_3$$

$$H_1\equiv\int_0^{2\pi}\overline{\sigma}_0(\vartheta)u_1^0u_2^0\left[\frac{1}{(1-u'_0)^2}+\frac{3}{1-u'_0}-3\log(1-u'_0)\right]d\vartheta=2\pi a'\lambda'\lambda_1\lambda_2\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3}+\frac{3}{\nu'}\right)+$$

$$+2\pi a'\mu'(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3}+\frac{1}{\nu'}\right)+2\pi a'\lambda'\mu_1\mu_2\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3}+\frac{1}{\nu'}\right)+2\pi b'\mu'\lambda_1\lambda_2\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3}+\frac{1}{\nu'}\right)+$$

$$+2\pi b'\lambda'(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3}+\frac{1}{\nu'}\right)+2\pi b'\mu'\mu_1\mu_2\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3}+\frac{3}{\nu'}\right)$$

$$H_2\equiv-\int_0^{2\pi}\overline{\sigma}_0(\vartheta)(c_1u_2^0+c_2u_1^0)\left[\frac{1}{(1-u'_0)^2}+\frac{1}{1-u'_0}\right]d\vartheta=-2\pi a'(c_1\lambda_2+c_2\lambda_1)\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3}+\frac{1}{\nu'}\right)-$$

$$-2\pi a'\frac{\lambda'\mu'}{\nu'^3}(c_1\mu_2+c_2\mu_1)-2\pi b'\frac{\lambda'\mu'}{\nu'^3}(c_1\lambda_2+c_2\lambda_1)-2\pi b'(c_1\mu_2+c_2\mu_1)\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3}+\frac{1}{\nu'}\right)$$

$$H_3\equiv\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\left[\frac{c_1c_2}{(1-u'_0)^2}-c\left(\frac{1}{1-u'_0}-\log\overline{1-u'_0}\right)\right]d\vartheta=2\pi a'c_1c_2\frac{\lambda'}{\nu'^3}-2\pi a'c\frac{\lambda'}{\nu'}+$$
$$+2\pi b'c_1c_2\frac{\mu'}{\nu'^3}-2\pi b'c\frac{\mu'}{\nu'},$$

$$(337)\qquad \therefore\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\bar{A}'_0\,d\vartheta=-2\pi a'(\lambda_1\nu_2+\lambda_2\nu_1)-2\pi b'(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1).$$

D'où le résultat:

$$(338)\quad\left\{\begin{aligned}
&\lim_{h=0}\frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\partial s_2}=\lim_{h=0}C^{(h)}_{s_1s_2}+K_{s_1s_2}+\frac{1}{a}\pi\sigma_0(3\nu_1\nu_2-c)\\
&C^{(h)}_{s_1s_2}=\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_h^a[\sigma(r,\vartheta)(3u_1u_2-c)\cos^3\psi-\sigma_0(3u_1^0u_2^0-c)]\frac{dr}{r^2}\\
&K_{s_1s_2}=4\pi\sigma_0\alpha(\lambda_1\lambda_2-\nu_1\nu_2)+4\pi\sigma_0\beta(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)+4\pi\sigma_0\gamma(\mu_1\mu_2-\nu_1\nu_2)-\\
&\qquad-2\pi a'(\lambda_1\nu_2+\lambda_2\nu_1)-2\pi b'(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1),\\
&\therefore\ K_{xx}=4\pi\sigma_0\alpha,\ K_{xy}=K_{yx}=4\pi\sigma_0\beta,\ K_{yy}=4\pi\sigma_0\gamma\\
&\quad K_{zz}=-4\pi\sigma_0(\alpha+\gamma),\ K_{xz}=K_{zx}=-2\pi a',\ K_{yz}=K_{zy}=-2\pi b'.
\end{aligned}\right.$$

II. *Point conique.* Supposons

$$(339)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sigma_0(\vartheta)=\text{une constante }\sigma_0\\
&\psi_0(\vartheta)=\text{une constante }\psi_0\neq 0\\
&\bar{\sigma}_0(\vartheta)=a'\cos\vartheta+b'\sin\vartheta\\
&\bar{\psi}_0(\vartheta)=\alpha\cos^2\vartheta+2\beta\cos\vartheta\sin\vartheta+\gamma\sin^2\vartheta.
\end{aligned}\right.$$

Comme nous avons supposé que la droite P_0P n'est pas tangente à la surface, il faut que ν' soit $\neq\sin\psi_0$. Nous distinguerons trois cas.

1° $\nu'<\sin\psi_0$. Nous trouverons (326)

$$(340)\quad\left\{\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\sigma_0A'_0\cos^2\psi_0\,d\vartheta=2\pi\sigma_0\sin\psi_0\cos^2\psi_0\left\{\frac{(c_1-\nu'\nu_1)(c_2-\nu'\nu_2)}{(1-\nu')^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\nu_1\nu_2-c}{1-\nu'}+\frac{\nu_1(c_2-\nu'\nu_2)+\nu_2(c_1-\nu'\nu_1)}{1-\nu'}+\nu_1\nu_2\right\}.
\end{aligned}\right.$$

2°. $1 > \nu' > \sin\psi_0$.

$$(341)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0 A'_0 \cos^2\psi_0 \, d\vartheta = -2\pi\sigma_0 \sin\psi_0 \cos^2\psi_0 \left\{ \frac{(c_1 - \nu'\nu_1)(c_2 - \nu'\nu_2)}{(1+\nu')^2} + \frac{\nu_1\nu_2 - c}{1+\nu'} + \right. \\ \displaystyle\qquad\qquad \left. + \frac{\nu_1(c_2 - \nu'\nu_2) + \nu_2(c_1 - \nu'\nu_1)}{1+\nu'} + \nu_1\nu_2 \right\}. \end{cases}$$

3°. $\nu' = 1$.

$$(342)\qquad \int_0^{2\pi} \sigma_0 A'_0 \cos^2\psi_0 \, d\vartheta = \pi\sigma_0 \sin\psi_0 \cos^2\psi_0 (c - 3\nu_1\nu_2).$$

Pour les trois cas, nous trouverons (330)

$$(343)\quad \begin{cases} \displaystyle D_{s_1 s_2} = 3\pi\sigma_0 \cos^2\psi_0 \sin\psi_0 \left\{ (c - 3\nu_1\nu_2)(\alpha+\gamma) - \frac{5}{4}\cos^2\psi_0 [(c - 5\nu_1\nu_2)(\alpha+\gamma) + \right. \\ \displaystyle \left. + 2\lambda_1\lambda_2\alpha + 2(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\beta + 2\mu_1\mu_2\gamma] \right\} + 3\pi\cos^4\psi_0 \sin\psi_0 \{(\lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1)a' + \\ \displaystyle \qquad + (\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1)b'\}. \end{cases}$$

Cas particuliers. La condition (326) et la première des conditions (330) n'étant pas toujours remplies, $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ n'est pas en général finie pour toutes les directions de ds_1, de ds_2 et de P_0P. Pour que ces conditions soient remplies, il suffit que

$$(344)\qquad 1^\circ \quad \begin{cases} \psi_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ \alpha + \gamma = 0, \text{ ou que} \end{cases}$$

$$(345)\qquad 2^\circ \quad \begin{cases} \psi_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ c = 3\nu_1\nu_2, \text{ ou enfin que} \end{cases}$$

$$(346)\qquad 3^\circ \quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 = 2\nu_1\nu_2 \\ \alpha\lambda_1\lambda_2 + \gamma\mu_1\mu_2 = (\alpha+\gamma)\nu_1\nu_2 \\ (\lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1)a' + (\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1)b' = 0. \end{cases}$$

§ 44. *Changement brusque de la valeur de la dérivée en traversant la surface.* Nous considérerons les deux cas: 1° les dérivées extérieures en un point de la surface (§ 41), et 2° les limites des dérivées extérieures (§§ 42, 43).

1° $\frac{\partial^2 V}{\partial s' \partial s}$. Dans ce qui précède, nous avons toujours dirigé l'axe des z positifs vers le côté du plan des xy, où se trouve le point P. Si la direction de la droite P_0P change en la direction opposée, il faut changer la direction positive de l'axe des z. Les formules qui ont lieu pour la première direction auront ieu aussi pour la direction opposée, si l'on y change $\psi(r, \vartheta)$ en $-\psi(r, \vartheta)$, les cosinus directeurs λ' et μ' de la droite P_0P en $-\lambda'$ et $-\mu'$ resp. — la quantité ν' ne changeant pas — et la quantité ν en $-\nu$. Nous distinguerons les deux côtés de la surface par les signes $+$ et $-$.

Les systèmes (208*) et (220*) montrent que les quantités u' et c changent en $-u'$ et $-c$ resp., mais que la quantité u ne change pas. Le système (317) donne

$$(347) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial s'_+ \partial s} + \frac{\partial^2 V}{\partial s'_- \partial s} = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \overline{\psi}_0(\vartheta) (\Gamma^0_{s'_+ s} - \Gamma^0_{s'_- s}) \cos^2 \psi_0 \, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \overline{\sigma}_0(\vartheta) (\overline{\Gamma}_{s'_+ s} + \\ + \overline{\Gamma}_{s'_- s}) \cos^3 \psi_0 \, d\vartheta, \end{aligned} \right.$$

les valeurs de $\Gamma^0_{s's}$ et de $\overline{\Gamma}_{s's}$ étant données dans les systèmes (310) et (315).

Remarque I. L'égalité (347) montre que si la direction de ds' change en la direction opposée, la direction de ds restant la même, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s'_+ \partial s}$ ne change pas en général en $-\frac{\partial^2 V}{\partial s'_- \partial s}$.

Cas particulier. Supposons $\psi_0 = 0$, $\lambda' = \mu' = 0$. La condition (311) se réduit (321) à

$$(348) \qquad \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) [1 - \nu + u_0 \log (1 - u_0)] \, d\vartheta = 0, \quad u_0 = \lambda \cos \vartheta + \mu \sin \vartheta,$$

et nous trouverons (321)

$$(349) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial z_+ \partial s} + \frac{\partial^2 V}{\partial z_- \partial s} = -8 \nu \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \overline{\psi}_0(\vartheta) \, d\vartheta - 4 \int_0^{2\pi} \overline{\sigma}_0(\vartheta) u_0 \, d\vartheta.$$

2° $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$. Pour le côté négatif, il faut faire les mêmes changements que dans le cas précédent, mais au lieu de changer la quantité ν, il faut ici changer les quantités correspondantes ν_1 et ν_2 en $-\nu_1$ et $-\nu_2$. Des égalités

(322) nous tirons que les quantités u', c_1 et c_2 changent en $-u'$, $-c_1$ et $-c_2$ resp., les quantités u_1, u_2 et c ne changeant point. De l'équation (331) nous tirons

$$(350)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_{h+}}{\partial s_1 \partial s_2} - \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_{h-}}{\partial s_1 \partial s_2} = \int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\,\bar{\psi}_0(\vartheta)(E_+ + E_-)\cos^2\psi_0\, d\vartheta + \\ \qquad + \int\limits_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)(\bar{A}'_+ - \bar{A}'_-)\cos^3\psi_0\, d\vartheta. \end{cases}$$

Remarque II. Les conditions (330) de l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_{h-}}{\partial s_1 \partial s_2}$ sont identiques à celles de l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_{h+}}{\partial s_1 \partial s_2}$, mais la condition (326) peut être différente pour les deux côtés.

Remarque III. Dans le cas où $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ n'existe pas, nous retrouverons l'égalité (350), si nous changeons le premier membre en

$$(351)\quad \lim_{h=0}\left[\frac{\partial^2 V_{h+}}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 V_{h-}}{\partial s_1 \partial s_2}\right].$$

La seule condition à satisfaire est (326)

$$(352)\quad \begin{cases} I_+ = I_-, & \text{où} \\ I = \int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) A'_0 \cos^2\psi_0\, d\vartheta. \end{cases}$$

Cas particulier: *Point régulier.* Si les égalités (334) sont satisfaites, nous trouverons (338)

$$(353)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0}\left[\dfrac{\partial^2 V_{h+}}{\partial s_1 \partial s_2} - \dfrac{\partial^2 V_{h-}}{\partial s_1 \partial s_2}\right] = 8\pi\sigma_0\alpha(\lambda_1\lambda_2 - \nu_1\nu_2) + 8\pi\sigma_0\beta(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + \\ \quad + 8\pi\sigma_0\gamma(\mu_1\mu_2 - \nu_1\nu_2) - 4\pi a'(\lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1) - 4\pi b'(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1). \end{cases}$$

Remarque IV. L'égalité (353) a lieu sans aucune condition additive. Mais si nous voulons écrire le premier membre de la même manière que dans l'égalité (350), il faut que la quantité $E'_{s_1 s_2}$ (330*) existe.

Corollaires. Nous trouverons (353)

$$
(354)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\lim_{h=0}\left[\frac{\partial^2 V_{h+}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V_{h-}}{\partial x^2}\right]=8\pi\sigma_0\alpha\\
&\lim_{h=0}\left[\frac{\partial^2 V_{h+}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 V_{h-}}{\partial x\partial y}\right]=8\pi\sigma_0\beta\\
&\lim_{h=0}\left[\frac{\partial^2 V_{h+}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 V_{h-}}{\partial y^2}\right]=8\pi\sigma_0\gamma\\
&\lim_{h=0}\left[\frac{\partial^2 V_{h+}}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 V_{h-}}{\partial x\partial z}\right]=-4\pi a'\\
&\lim_{h=0}\left[\frac{\partial^2 V_{h+}}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 V_{h-}}{\partial y\partial z}\right]=-4\pi b'\\
&\lim_{h=0}\left[\frac{\partial^2 V_{h+}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 V_{h-}}{\partial z^2}\right]=-8\pi\sigma_0(\alpha+\gamma).
\end{aligned}\right.
$$

Les valeurs correspondantes de la quantité $E'_{s_1 s_2}$ (330*) sont

$$
(355)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&E'_{xx}=\lim_{h=0}\int_0^{2\pi}(3\cos^2\vartheta-1)\,d\vartheta\int_h^a\bar{\sigma}_1(r,\vartheta)\,\frac{dr}{r}\\
&E'_{xy}=\lim_{h=0}3\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\int_h^a\bar{\sigma}_1(r,\vartheta)\,\frac{dr}{r}\\
&E'_{yy}=\lim_{h=0}\int_0^{2\pi}(3\sin^2\vartheta-1)\,d\vartheta\int_h^a\bar{\sigma}_1(r,\vartheta)\,\frac{dr}{r}\\
&E'_{xz}=\lim_{h=0}3\sigma_0\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta\int_h^a\bar{\psi}_1(r,\vartheta)\,\frac{dr}{r}\\
&E'_{yz}=\lim_{h=0}3\sigma_0\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_h^a\bar{\psi}_1(r,\vartheta)\,\frac{dr}{r}\\
&E'_{zz}=-\lim_{h=0}\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_h^a\bar{\sigma}_1(r,\vartheta)\,\frac{dr}{r}.
\end{aligned}\right.
$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Les changements brusques des dérivées secondes du potentiel prises suivant les axes sont donnés par les égalités* (354) *sans aucune autre hypothèse* *que celle que les constantes $\alpha\ \beta\ \gamma\ a'$ et b', définies par le système* (334), *soient finies et déterminées, l'angle ψ_0 étant supposé* $=0$ *et l'axe des z étant dirigé suivant la normale. Pour que les limites des dérivées existent elles-mêmes, il faut et il suffit que les quantités correspondantes $E'_{s_1 s_2}$* (355) *soient finies et déterminées.*

Remarque V. Le système (354) est identique aux formules correspondantes de M. Poincaré,[1] les quantités $\sigma_0\ a'\ b'\ \alpha\ \beta\ \gamma$ ayant les mêmes sens que les quantités $\mu'\ \frac{\partial \frac{\mu'}{\gamma'}}{\partial x'}\ \frac{\partial \frac{\mu'}{\gamma'}}{\partial y'}\ \frac{1}{2} r_1\ \frac{1}{2} s_1$ et $\frac{1}{2} t_1$ de M. Poincaré. En effet, les formules (334) impliquent qu'on peut mettre l'équation de la surface sous la forme

$$z=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+r^2 f(x,y),\ \lim_{r=0} f(x,y)=0\,. \tag{356}$$

Si on suppose que la fonction $f(xy)$ admette les dérivées premières et secondes par rapport à x et à y à l'origine, nous trouverons

$$r_1=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0=2\alpha\,,\ \text{etc.}^{2}$$

Remarque VI. Les suppositions (334) que nous avons faites quant à la surface et à la densité peuvent être exprimées de la manière suivante:

1°. Au point P_0, la surface admet un plan tangent bien déterminé.

2°. Si ce plan est pris pour plan des xy, et si le point P_0 est pris pour origine, l'équation de la surface peut être mise sous la forme (356).

3°. L'élément de masse étant exprimé par la quantité $\sigma dxdy$, nous supposons que la fonction σ peut être mise sous la forme

$$\sigma=\sigma_0+a'x+b'y+r\sigma_1(x,y),\ \lim_{r=0}\sigma_1(x,y)=0\,, \tag{357}$$

$\sigma_0\ a'$ et b' étant des constantes.

4°. Pour que les limites des dérivées existent, il faut ajouter que les quantités $E'_{s_1 s_2}$ (355) correspondantes existent.

Remarque VII. L'équation (356) implique l'existence *au point* P_0 des dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, et exige qu'elles y soient $=0$, mais elle n'exige pas que ces dérivées existent en des points du voisinage du point P_0, par suite il ne faut pas nécessairement que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ existent au point P_0.

---

[1] H. Poincaré l. c. p. 251.

[2] l. c. p. 245.

Pourtant, en tournant les axes des x et des y de manière que $\beta = 0$, nous pourrons regarder les quantités 2α et 2γ comme les inverses d'une sorte de rayons de courbure principaux géométriques, si non analytiques. Quant à la fonction $f(x, y)$ de l'équation (356), nous n'avons pas supposé qu'elle admette une dérivée au point P_0, ni qu'elle soit continue dans le voisinage de ce point; nous avons supposé seulement qu'elle est continue au point P_0 et qu'elle y prend la valeur de zéro. Des considérations analogues se rattachent à l'égalité (357). Elle implique l'existence *au point* P_0 des deux dérivées $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$, etc.

Remarque VIII. Nous pourrons écrire (330*) pour $\nu_1 = \nu_2 = 0$

$$E'^{(h)}_{s_1 s_2} = \int\limits_0^{2\pi} (3 u_1^0 u_2^0 - c)\, d\vartheta \int\limits_h^{(a)} \sigma_1(r, \vartheta) \frac{dr}{r} = \int\limits_{(h)}^{(a)} r \sigma_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1 \, \partial s_2} d\omega, \tag{358}$$

et, en employant la méthode du § 3 δ), nous trouverons que

si la quantité $\frac{\partial r \sigma_1(x, y)}{\partial x}$ est intégrable, donc E'_{xx} et E'_{xy} existent,

» » » $\frac{\partial r \sigma_1(x, y)}{\partial y}$ » » » E'_{xy} » E'_{yy} »

De plus nous pourrons écrire pour $\nu_1 = \lambda_2 = \mu_2 = 0$

$$E'^{(h)}_{s_1 z} = \int\limits_0^{2\pi} u_1^0 \, d\vartheta \int\limits_h^{a} \psi_1(r, \vartheta) \frac{dr}{r} = \int\limits_{(h)}^{(a)} \psi_1(x, y) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} d\omega, \tag{359}$$

et nous trouverons de même que

si la quantité $\frac{\partial \psi_1(x, y)}{\partial x}$ est intégrale, donc E'_{xz} existe, et

» » » $\frac{\partial \psi_1(x, y)}{\partial y}$ » » » E'_{yz} »

Remarque IX. Par comparaison, nous donnerons ici les hypothèses qu'a fait M. POINCARÉ pour la déduction des mêmes formules (354).

I. La surface admet, au point P_0 et à tous les points du voisinage de P_0, un plan tangent bien déterminé (p. 235—236).

II. La densité μ' y est continue ainsi que ses dérivées premières et admet des dérivées secondes qui restent finies (p. 236). Les mêmes hypothèses sont faites quant à la quantité $\frac{\mu'}{\gamma'}$, où γ' est le cosinus de l'angle que fait la normale au point Q de la surface avec l'axe des z (p. 244). (Cette fonction $\frac{\mu'}{\gamma'}$ est la même que la fonction σ du chapitre présent). Par suite les dérivées premières de γ' sont finies et continues, et les dérivées secondes de γ' sont finies.

III. Si

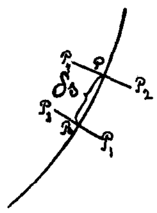
$$z' = f(x', y')$$

est l'équation de la surface, la fonction f admet au point P_0 et à tous les points du voisinage de P_0 les dérivées premières et secondes, de manière que tous ces points la surface a des rayons de courbure principaux (p. 245).

IV. Les suppositions II par rapport à μ' sont faites aussi par rapport à $\mu' p_1$, où $p_1 = \frac{\partial z'}{\partial x'}$ (p. 248, 249), de manière que la fonction $f(x' y')$ admet des dérivées troisièmes finies.

§ 45. *Théorème général. Application au cas de M. Poincaré.* S'il ne s'agit pas de déduire les valeurs des changements brusques considérés dans le § précédent sous des conditions les plus étendues, nous pourrons faire le calcul d'une manière beaucoup plus simple.[1] En effet, soit (fig. 9) s une courbe plane donnée quelconque qui admette une normale bien déterminée en tous ses points. Soient P_1 et P_2 deux points situés du même côté de la courbe infiniment près d'elle, P_3 et P_4 deux autres points situés de l'autre côté près de la courbe, de manière que les points P_1 et P_3 d'une part, P_2 et P_4 de l'autre, sont situés sur la même normale resp. Soient P_0 et P les points, où les droites $P_1 P_3$ et $P_2 P_4$ rencontrent la courbe, posons $P_0 P = \delta s$ et supposons $P_0 P_1 = P_0 P_3 = P P_2 = P P_4 = h$. Soit u une fonction donnée dans le plan, et supposons que la fonction u, ainsi que sa dérivée première prise parallèlement à l'élément δs, sont finies et continues dans cette même direction. Soient $u_1\, u_2\, u_3$ et u_4 les valeurs de u aux points $P_1\, P_2\, P_3$ et P_4 resp., et posons

Fig. 9.



$$v_h \delta s \equiv (u_4 - u_3) - (u_2 - u_1), \tag{360}$$

$$\therefore\ v_h \delta s = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{m_+} - \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{m_-}\right] \delta s,$$

[1] Voir «Continuité et discontinuité des dérivées du potentiel». K. Vet. Akad. Öfvers. Stockholm 1901 pp. 644—647.

$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{m_+}$ étant une valeur moyenne de $\frac{\partial u}{\partial s}$ pour la courbe $P_3 P_4$; cette dérivée, ainsi que sa limite pour $h = 0$, est supposée continue,

$$\therefore\ v \equiv \lim_{h=0} v_h = \lim_{h=0} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{m_+},$$

$$\therefore\ \lim_{\partial s=0} v = \lim_{\partial s=0} \lim_{h=0} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{m_+} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_+ .$$

Des considérations analogues se rapportent à la quantité $\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{m_-}$,

(361) $$\therefore\ \lim_{\partial s=0} v = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_+ - \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_-,$$

où $\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_+$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_-$ sont les limites des valeurs de $\frac{\partial u}{\partial s}$ aux points P_3 et P_1 resp. De même on peut écrire

$$v_h \partial s = (u_4 - u_2) - (u_3 - u_1).$$

Posons

(362) $$\begin{cases} u_3 - u_1 = w_h^{\circ} \\ u_4 - u_2 = w_h, \\ \lim\limits_{h=0} u_4 = u_+,\ \lim\limits_{h=0} u_2 = u_-,\ \lim\limits_{h=0} w_h = w, \end{cases}$$

$$\therefore\ v = \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_m,$$

où $\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_m$ est une valeur moyenne de $\frac{\partial w}{\partial s}$. La dérivée $\frac{\partial w}{\partial s}$ étant supposée continue, nous trouverons

(363) $$\lim_{\partial s=0} v = \lim_{\partial s=0} \frac{\partial (u_+ - u_-)}{\partial s}.$$

Les égalités (361) et (363) donnent, pour le point P_0, la relation

(364) $$\frac{\partial (u_+ - u_-)}{\partial s} = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_+ - \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_- .$$

Soit maintenant l'équation de la surface attirante donnée par la formule

(365) $$z = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + r^2 f(x, y),\ \lim_{r=0} f = 0.$$

La normale au point P (xyz) fait avec les axes des angles, dont les cosinus directeurs lmn s'obtiennent par les formules

$$(366)\qquad \begin{cases} l = -2\alpha x - 2\beta y \\ m = -2\beta x - 2\gamma y \\ n = 1, \end{cases}$$

où nous avons supposé que la fonction f admet, en chaque point du voisinage de l'origine P_0, des dérivées premières finies et que

$$\lim_{r=0} r\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{r=0} r\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

et où nous avons supprimé les termes d'ordres supérieurs au premier par rapport aux coordonnées x et y. Prenons un système d'axes de coordonnées (x_1, y_1, z_1) par l'origine P_0, dont l'axe des z_1 est dirigé parallèlement à la normale qui passe par le point P, et dont les autres axes font des angles infiniment petits avec les axes des x et des y. Soient $(l'm'n')$, $(l''m''n'')$ et (lmn) les cosinus directeurs des axes des x_1, des y_1 et des z_1 resp., et soit $W(x, y, z)$ une fonction des coordonnées (xyz) qui reste finie et continue ainsi que ses premières et secondes dérivées pour chaque côté de la surface, mais nous supposons que ses dérivées premières peuvent éprouver des changements brusques en traversant la surface. Posons

$$(367)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)_+ - \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)_- = \xi \\ \left(\frac{\partial W}{\partial y_1}\right)_+ - \left(\frac{\partial W}{\partial y_1}\right)_- = \eta \\ \left(\frac{\partial W}{\partial z_1}\right)_+ - \left(\frac{\partial W}{\partial z_1}\right)_- = \zeta. \end{cases}$$

D'autre part nous avons

$$(368)\qquad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x_1} l' + \frac{\partial W}{\partial y_1} l'' + \frac{\partial W}{\partial z_1} l \\ \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial x_1} m' + \frac{\partial W}{\partial y_1} m'' + \frac{\partial W}{\partial z_1} m \\ \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x_1} n' + \frac{\partial W}{\partial y_1} n'' + \frac{\partial W}{\partial z_1} n, \end{cases}$$

$$(369)\qquad \begin{cases} \therefore \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_- = l'\xi + l''\eta + l\zeta \\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_+ - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_- = m'\xi + m''\eta + m\zeta \\ \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_+ - \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_- = n'\xi + n''\eta + n\zeta. \end{cases}$$

De l'égalité (364) nous conclurons

$$(370)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+^0 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-^0 = \lim\limits_{x=0} \frac{\partial}{\partial x}(u_+ - u_-)_{y=0} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_+^0 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_-^0 = \lim\limits_{y=0} \frac{\partial}{\partial y}(u_+ - u_-)_{x=0}\,, \end{cases}$$

où $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+^0$ est la valeur de $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+$ à l'origine prise du côté des z positifs, etc. Si dans les egalités (370) nous substituons à la fonction u successivement les fonctions $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ et $\frac{\partial W}{\partial z}$, nous trouverons

$$(371)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_+^0 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_-^0 = \lim\limits_{x=0} \frac{\partial}{\partial x}(l'\xi + l''\eta + l\zeta)_{y=0} = \lim\limits_{x=0}\left[\frac{\partial l''}{\partial x}\eta + \frac{\partial l}{\partial x}\zeta\right]_{y=0} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^0 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)_+^0 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)_-^0 = \lim\limits_{x=0} \frac{\partial}{\partial x}(m'\xi + m''\eta + m\zeta)_{y=0} = \lim\limits_{x=0}\left[\frac{\partial m'}{\partial x}\xi + \frac{\partial m}{\partial x}\zeta\right]_{y=0} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^0 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial z}\right)_+^0 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial z}\right)_-^0 = \lim\limits_{x=0} \frac{\partial}{\partial x}(n'\xi + n''\eta + n\zeta)_{y=0} = \lim\limits_{x=0}\left[\frac{\partial n'}{\partial x}\xi + \frac{\partial n''}{\partial x}\eta\right]_{y=0} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^0 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\partial x}\right)_+^0 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\partial x}\right)_-^0 = \lim\limits_{y=0} \frac{\partial}{\partial y}(l'\xi + l''\eta + l\zeta)_{x=0} = \lim\limits_{y=0}\left[\frac{\partial l''}{\partial y}\eta + \frac{\partial l}{\partial y}\zeta\right]_{x=0} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^0 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_+^0 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_-^0 = \lim\limits_{y=0} \frac{\partial}{\partial y}(m'\xi + m''\eta + m\zeta)_{x=0} = \lim\limits_{y=0}\left[\frac{\partial m'}{\partial y}\xi + \frac{\partial m}{\partial y}\zeta\right]_{x=0} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^0 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\partial z}\right)_+^0 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\partial z}\right)_-^0 = \lim\limits_{y=0} \frac{\partial}{\partial y}(n'\xi + n''\eta + n\zeta)_{x=0} = \lim\limits_{y=0}\left[\frac{\partial n'}{\partial y}\xi + \frac{\partial n''}{\partial y}\eta\right]_{x=0} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^0. \end{cases}$$

Si nous avons donné de plus

$$(372)\quad \Delta W = \varphi,$$

$$\therefore (\Delta W)_+ - (\Delta W)_- = \varphi_+ - \varphi_-,$$

nous tirons

$$(373)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_+^0 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_-^0 = \varphi_+^0 - \varphi_-^0 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^0 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^0 - \\ \qquad - \lim\limits_{x=0}\left(\frac{\partial l''}{\partial x}\eta + \frac{\partial l}{\partial x}\zeta\right)_{y=0} - \lim\limits_{y=0}\left(\frac{\partial m'}{\partial y}\xi + \frac{\partial m}{\partial y}\zeta\right)_{x=0}. \end{cases}$$

Des égalités

$$(374)\quad \begin{cases} l'l'' + m'm'' + n'n'' = 0 \\ l'l + m'm + n'n = 0 \\ l''l + m''m + n''n = 0 \\ l' = m'' = n = 1 \end{cases}$$

nous tirons

$$(375)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial l''}{\partial x}+\dfrac{\partial m'}{\partial x}=0 & \dfrac{\partial l''}{\partial y}+\dfrac{\partial m'}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial l}{\partial x}+\dfrac{\partial n'}{\partial x}=0 & \dfrac{\partial l}{\partial y}+\dfrac{\partial n'}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial m}{\partial x}+\dfrac{\partial n''}{\partial x}=0 & \dfrac{\partial m}{\partial y}+\dfrac{\partial n''}{\partial y}=0 . \end{cases}$$

Si nous supposons que la fonction f (365) admet les dérivées secondes, nous obtenons (375 et 366)

$$(376)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial l''}{\partial x}=-\dfrac{\partial m'}{\partial x}, & \dfrac{\partial l''}{\partial y}=-\dfrac{\partial m'}{\partial y} \\ \dfrac{\partial n'}{\partial x}=-\dfrac{\partial l}{\partial x}=2\alpha & \dfrac{\partial n'}{\partial y}=-\dfrac{\partial l}{\partial y}=2\beta \\ \dfrac{\partial n''}{\partial x}=-\dfrac{\partial m}{\partial x}=2\beta & \dfrac{\partial n''}{\partial y}=-\dfrac{\partial m}{\partial y}=2\gamma . \end{cases}$$

D'où le resultat

$$(377)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_+-\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_-=\dfrac{\partial \xi}{\partial x}-\eta\dfrac{\partial m'}{\partial x}-2\alpha\zeta & \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_+-\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_-=\xi\dfrac{\partial m'}{\partial y}+\dfrac{\partial \eta}{\partial y}-2\gamma\zeta \\ \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)_+-\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)_-=\xi\dfrac{\partial m'}{\partial x}+\dfrac{\partial \eta}{\partial x}-2\beta\zeta & \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\partial x}\right)_+-\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\partial x}\right)_-=\dfrac{\partial \xi}{\partial y}-\eta\dfrac{\partial m'}{\partial y}-2\beta\zeta \\ \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\partial z}\right)_+-\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\partial z}\right)_-=2\alpha\xi+2\beta\eta+\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} & \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\partial z}\right)_+-\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\partial z}\right)_-=2\beta\xi+2\gamma\eta+\dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_+-\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_-=\varphi_+-\varphi_--\dfrac{\partial \xi}{\partial x}-\dfrac{\partial \eta}{\partial y}+2(\alpha+\gamma)\zeta+\eta\dfrac{\partial m'}{\partial x}-\xi\dfrac{\partial m'}{\partial y}, & \end{cases}$$

où nous avons supprimé l'indice o, quoique ces formules (377) se rapportent à l'origine P_0, et où $\frac{\partial m'}{\partial x}$ et $\frac{\partial m'}{\partial y}$ sont écrites pour $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{\partial m'}{\partial x}\right)_{y=0}$ et $\lim\limits_{y=0}\left(\frac{\partial m'}{\partial y}\right)_{x=0}$ resp.

Remarque I. Dans le système (377) la quantité infiniment petite m' reste arbitraire. Dans le cas de la courbe $y=0$ (371) on peut choisir l'axe des x_1 dans le plan des xz, et dans ce cas on aura $m'=l'=0$, et ce même résultat on retrouvera dans le cas $x=0$,

$$(378)\qquad \therefore\ m'=\frac{\partial m'}{\partial x}=\frac{\partial m'}{\partial y}=0 .$$

Remarque II. Si l'on pose

$$\xi = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}, \quad m' = 0,$$

on trouvera que le saut brusque de $\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ est égal à celui de $\dfrac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}$.

Si nous appliquons les formules générales (377) au potentiel d'une simple couche, nous n'aurons qu'à poser (199)

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = \eta = \varphi = 0, \\ \zeta = -4\pi\mu, \; \mu = \sigma n, \end{array}\right. \tag{379}$$

et nous retrouverons les formules (354) en posant

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 = a', \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0 = b'.$$

Remarque III. Quant aux hypothèses que nous avons faites ici, elles sont presque identiques à celles de M. Poincaré. En effet, nous avons supposé 1° que la fonction z admet les dérivées du second ordre et que celles-ci sont continues; 2° que la fonction σ admet les dérivées du premier ordre et que celles-ci sont continues; enfin 3° que les fonctions z et σ sont telles que les limites des dérivées existent et soient continues, ce qui est le cas par ex. si les dérivées troisièmes de z et les dérivées secondes de σ existent (cfr § 44 rem. VIII).

CHAPITRE VI.

Double couche.

§ **46.** *La fonction W_h, sa définition et sa valeur limite.* Nous definirons une fonction W_h des coordonnées d'un point P, extérieur à une surface donnée, par la formule (cfr. 203)

$$(380)\qquad \begin{cases} W_h \equiv -\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + \dfrac{\partial U_2}{\partial y} + \dfrac{\partial U_3}{\partial z}\right) \\ U_1 = \displaystyle\int l\sigma \frac{d\omega}{R} \\ U_2 = \displaystyle\int m\sigma \frac{d\omega}{R} \\ U_3 = \displaystyle\int n\sigma \frac{d\omega}{R} \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1, \end{cases}$$

où les quantités lmn sont des fonctions des coordonnées du point Q de la surface, et nous supposons qu'elles sont continues par rapport à r au point P_0. Si nous posons

$$(381)\qquad \begin{cases} u = l \cos\psi \cos\vartheta + m \cos\psi \sin\vartheta + n \sin\psi \\ u' = \lambda' \cos\psi \cos\vartheta + \mu' \cos\psi \sin\vartheta + \nu' \sin\psi \\ c' = \lambda' l + \mu' m + \nu' n, \end{cases}$$

où $\lambda'\mu'\nu'$ sont les cosinus directeurs de la droite P_0P, nous trouverons (222)

$$(382)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} W_h = -W_s - Q' \\ W_s = \lim\limits_{h=0} W_s^{(h)} \\ W_s^{(h)} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) u \cos^2\psi \frac{dr}{r} \\ Q' = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{\frac{u_0 - c_0'}{1 - u'_0} - 2u_0 - u_0 \log\left[\frac{1 - u_0'}{2}\cos\psi_0\right]\right\} \cos^2\psi_0 \, d\vartheta, \end{cases}$$

où $c_0' = \lim\limits_{r=0} c'$, etc. D'où le théorème:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de* $\lim\limits_{h=0} W_h$ *est que la quantité* W_s *existe* (382).

Nous définirons une fonction W pour un point de la surface de la manière suivante:

$$W = -\int l\sigma \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} d\omega - \int m\sigma \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} d\omega - \int n\sigma \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} d\omega, \tag{380*}$$

$\therefore$ (208)

$$\begin{cases} W = -W_s - Q \\ Q = -\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left\{1 + u_0 + u_0 \log\left[\frac{1-u_0}{2}\cos\psi_0\right]\right\}\cos^2\psi_0\, d\vartheta, \end{cases} \tag{383}$$

où la quantité W_s est définie dans les formules (382). Par suite, la quantité W existe en même temps que $\lim\limits_{h=0} W_h$. Si W_s existe, on trouvera

$$\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) u_0 \cos^2\psi_0\, d\vartheta = 0. \tag{384}$$

Corollaire. Pour $\lambda' = l_0$, $\mu' = m_0$ et $\nu' = n_0$, on aura $u'_0 = u_0$ et $c'_0 = 1$

$$\therefore \lim_{h=0} W_h - W = -\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0 u_0 \cos^2\psi_0\, d\vartheta = 0. \tag{385}$$

Si les quantités $l\ m\ n$ sont les cosinus directeurs de la normale de la surface au point Q, la fonction W_h est le potentiel d'une *double couche*,[1] dont le moment est

$$\mu = n\sigma. \tag{386}$$

Par suite, si on change la direction positive de l'axe des z et si le point P traverse la surface, il faut non seulement changer les quantités ψ, λ' et μ' en $-\psi$, $-\lambda'$ et $-\mu'$ resp., mais aussi les quantités σ, l et m en $-\sigma$, $-l$ et $-m$ resp. Nous supposerons dans la suite que la fonction W_h se comporte comme le potentiel d'une double couche, les fonctions l, m, n étant des fonctions quelconques satisfaisant à la relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{387}$$

Si on change la direction positive de l'axe des z, et si le point P traverse la surface suivant une droite, la fonction W_h change de W_{h+} en W_{h-}, et les quantités u et u' en $-u$ et $-u'$ resp., pendant que la quantité c' ne change pas (381). Nous trouverons (382)

[1] Voir H. Poincaré l. c. p. 218.

$$\lim_{h=0}(W_{h+} - W_{h-}) = -Q'_+ + Q'_-, \tag{388}$$

Q'_- étant ce que deviendra Q' (382), lorsqu'on y remplace σ_0, u_0 et u'_0 par $-\sigma_0$, $-u_0$ et $-u_0'$ resp.

Nous pourrons traiter la fonction W d'une manière analogue, et nous trouverons

$$W_+ - W_- = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[2 + u_0 \log \frac{1-u_0}{1+u_0}\right] \cos^2 \psi_0 \, d\vartheta. \tag{389}$$

Remarque I. L'égalité (388) aura lieu même dans le cas où $\lim\limits_{h=0} W_h$ n'existe pas.

Cas particuliers. I. *Point régulier.* Si $\psi_0 = 0$, on trouvera pour le potentiel d'une double couche

$$l_0 = m_0 = 0, \quad n_0 = 1 \tag{390}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{h=0} (W_{h+} - W_{h-}) = 2\nu' \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \frac{d\vartheta}{1 - u_0'^2} \\ W_+ - W_- = 2 \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) d\vartheta. \end{cases} \tag{391}$$

Soit $\sigma_0 =$ une constante σ_1 pour $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, et
$\quad = \quad$ » $\quad$ » $\quad \sigma_2 \quad$ » $\quad \pi \leqq \vartheta \leqq 2\pi$,

donc (201) pour $\mu' = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{h=0} (W_{h+} - W_{h-}) = 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = W_+ - W_-. \end{cases} \tag{392}$$

II. *Point conique.* Si $\psi_0 = \text{const.}$, on trouvera pour le potentiel d'une double couche

$$\begin{cases} l_0 = -\sin\psi_0 \cos\vartheta, \; m_0 = -\sin\psi_0 \sin\vartheta, \; n_0 = \cos\psi_0 \\ u_0 = 0, \; c_0' = \operatorname{tg}\psi_0(1 - u_0') + \dfrac{\nu' - \sin\psi_0}{\cos\psi_0} \\ \therefore Q' = -\cos\psi_0 \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[\sin\psi_0 + \frac{\nu' - \sin\psi_0}{1 - u_0'}\right] d\vartheta, \end{cases} \tag{393}$$

$$(394)\quad \begin{cases} \therefore \text{ pour } \sigma_0' = \text{const. et } \nu' > \sin\psi_0,\ Q' = -2\pi\sigma_0\cos\psi_0[\sin\psi_0 + 1], \text{ et} \\ \quad » \quad » \quad » \quad » \ \nu' < \sin\psi_0,\ Q' = -2\pi\sigma_0\cos\psi_0[\sin\psi_0 - 1], \\ \therefore \lim\limits_{h=0} (W_{h+} - W_{h-}) = 4\pi\sigma_0\cos\psi_0. \end{cases}$$

De même nous trouverons pour $u_0 = 0$ et $\sigma_0 = \text{const.}$

$$(395)\quad \begin{cases} Q = -2\pi\sigma_0\cos^2\psi_0, \\ \therefore\ W_+ - W_- = 4\pi\sigma_0\cos^2\psi_0, \end{cases}$$

$$(396)\quad \therefore \lim_{h=0} (W_{h+} - W_{h-}) = (W_+ - W_-)\frac{1}{\cos\psi_0}.$$

Remarque II. Les seconds membres des égalités (394, 395, 396) sont indépendants de la direction de la droite P_0P.

§ **47.** *La limite de la dérivée première de la fonction* W_h. Des formules (380) nous tirons

$$(397)\quad \frac{\partial W_h}{\partial s} = -\left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial s\,\partial x} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial s\,\partial y} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial s\,\partial z}\right] = \lambda\frac{\partial W}{\partial x} + \mu\frac{\partial W}{\partial y} + \nu\frac{\partial W}{\partial z},$$

$\lambda\mu\nu$ étant les cosinus directeurs de l'élément ds. Posons

$$(398)\quad \begin{cases} u_1 = \lambda\cos\psi\cos\vartheta + \mu\cos\psi\sin\vartheta + \nu\sin\psi = \cos(ds, P_0Q) \\ u_2 = l\cos\psi\cos\vartheta + m\cos\psi\sin\vartheta + n\sin\psi = \cos(N, P_0Q) \\ u' = \lambda'\cos\psi\cos\vartheta + \mu'\cos\psi\sin\vartheta + \nu'\sin\psi = \cos(h, P_0Q) \\ c_1 = \lambda'\lambda + \mu'\mu + \nu'\nu = \cos(ds, h) \\ c_2 = \lambda' l + \mu' m + \nu' n = \cos(N, h) \\ c = \lambda l + \mu m + \nu n = \cos(ds, N) \\ 3(u_1 q - c_1)(u_2 q - c_2)\dfrac{1}{q'^2} - c = f \\ q' = \sqrt{q^2 - 2qu' + 1} \\ q = \dfrac{t}{\cos\psi}, \end{cases}$$

où N est le vecteur (lmn) et $h = P_0P$. Nous trouverons (322)

$$(399)\quad \frac{\partial W_h}{\partial s} = -\frac{1}{h}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma f \frac{t\,dt}{q'^3}.$$

Supposons que les quantités $\sigma\,\psi\,l\,m\,n$ soient, au point P_0, continues par rapport à r, et soient

$$(400)\quad \left\{\begin{aligned} &\sigma_0(\vartheta)=\lim_{r=0}\sigma(r,\vartheta)\ \text{etc.},\ u_{2\,0}^0=\lim_{r=0}u_2,\ \text{et posons}\\ &u_2^0=l\cos\psi_0\cos\vartheta+m\cos\psi_0\sin\vartheta+n\sin\psi_0\\ &f_1=(3u_1^0q_0-c_1)(3u_2^0q_0-c_2)\frac{1}{q_0'^2}-c. \end{aligned}\right.$$

Nous pourrons écrire

$$(401)\quad \frac{\sigma f}{q'^3}=\frac{\sigma_0 f_0}{q_0'^3}+\frac{\sigma_0}{q_0'^3}(f_1-f_0)+\sigma_0\left(\frac{f}{q'^3}-\frac{f_1}{q_0'^3}\right)+(\sigma-\sigma_0)\frac{f}{q'^3},$$

$$\therefore\ \frac{\partial W_h}{\partial s}=\frac{1}{h}I_1+\frac{1}{h}I_2+\frac{1}{h}I_3+\frac{1}{h}I_4,$$

$I_1 I_2$, etc. étant les intégrales qui correspondent aux divers termes du second membre de l'égalité (401),

$$\therefore\ \frac{1}{h}I_1=-\frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0\,d\vartheta\int_0^{\infty}\frac{f_0}{q_0'^3}\,t\,dt+\frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0\,d\vartheta\int_{\frac{a}{h}}^{\infty}\frac{f_0}{q_0'^3}\,t\,dt\equiv\frac{1}{h}I'+\frac{1}{h}I''.$$

Mais

$$\lim_{h=0}\,(I''+I_2+I_3+I_4)=0,$$

$\therefore$ pour que $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial W_h}{\partial s}$ soit finie, il faut que

$$(402)\quad I'\equiv-\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_0^{\infty}\frac{f_0}{q_0'^3}\,t\,dt=0,$$

et cette égalité est identique à la condition (326),

$$(402^*)\quad \left\{\begin{aligned} &\therefore\ I'=-\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)A\cos^2\psi_0\,d\vartheta\\ &A=\frac{(u_1^0-c_1)(u_{2\,0}^0-c_2^0)}{(1-u_0')^2}+\frac{u_1^0u_{2\,0}^0-c_0}{1-u_0'}. \end{aligned}\right.$$

De plus nous trouverons

$$\lim_{h=0} I'' = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3\,u_1^0 u_{2\,0}^0 - c_0)\cos^3\psi_0 d\vartheta. \tag{403}$$

Posons

$$\begin{cases} l = l_0(\vartheta) + r\bar{l}(r,\vartheta),\ m = m_0(\vartheta) + r\bar{m}(r,\vartheta),\ n = n_0(\vartheta) + r\bar{n}(r,\vartheta) \\ \sigma = \sigma_0(\vartheta) + r\bar{\sigma}(r,\vartheta),\ \psi = \psi_0(\vartheta) + r\bar{\psi}(r,\vartheta), \end{cases} \tag{404}$$

où $l_0(\vartheta) = \lim_{r=0} l(r,\vartheta)$, etc. Nous trouverons

$$\begin{cases} \frac{1}{h}I_2 = I_N^{(h)} + E_N^{(h)} \\ I_N^{(h)} = -\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)d\vartheta\int_0^1 \bar{f}\frac{t^2dt}{q_0'^3} - \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)d\vartheta\int_1^{\frac{a}{h}}\left\{\frac{\bar{f}t^2}{q_0'^3} - \frac{3\,u_1^0\bar{u}_2^0 - \bar{c}}{t}\cos^3\psi_0\right\}dt \\ E_N^{(h)} = -\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)d\vartheta\int_h^a (3\,u_1\bar{u}_2^0 - \bar{c})\cos^3\psi_0\frac{dr}{r} \\ \quad \bar{f} = 3(u_1^0 q_0 - c_1)(\bar{u}_2^0 q_0 - \bar{c}_2)\frac{1}{q_0'^2} - \bar{c} \\ \quad \bar{u}_2^0 = \bar{l}\cos\psi_0\cos\vartheta + \bar{m}\cos\psi_0\sin\vartheta + \bar{n}\sin\psi_0 \\ \quad \bar{c}_2 = \lambda'\bar{l} + \mu'\bar{m} + \nu'\bar{n} \\ \quad \bar{c} = \lambda\bar{l} + \mu\bar{m} + \nu\bar{n}, \end{cases} \tag{405}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{h}I_3 = I_\psi^{(h)} + E_\psi^{(h)} \\ I_\psi^{(h)} = -\frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)d\vartheta\int_0^1\left(\frac{f}{q'^3} - \frac{f_1}{q_0'^3}\right)tdt - \frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)d\vartheta\int_1^{\frac{a}{h}}\left\{\frac{ft}{q'^3} - \frac{f_1 t}{q_0'^3} - \right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{3\,u_1u_2 - c}{t^2}\cos^3\psi + \frac{3\,u_1^0u_2^0 - c}{t^2}\cos^3\psi_0\right\}dt \\ E_\psi = -\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)d\vartheta\int_h^a\{(3\,u_1u_2 - c)\cos^3\psi - (3\,u_1^0u_2^0 - c)\cos^3\psi_0\}\frac{dr}{r^2}, \end{cases} \tag{406}$$

et

$$(407)\quad \begin{cases} \frac{1}{h} I_4 = I_\sigma^{(h)} + E_\sigma^{(h)} \\ I_\sigma^{(h)} = -\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_0^1 \bar{\sigma} f \frac{t^2 dt}{q'^3} - \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_1^{\frac{a}{h}} \bar{\sigma} \left\{ \frac{f t^2}{q'^3} - \frac{3 u_1 u_2 - c}{t} \cos^3 \psi \right\} dt \\ E_\sigma^{(h)} = -\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_h^a \bar{\sigma}(r, \vartheta)(3 u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi \frac{dr}{r} \cdot \end{cases}$$

Posons

$$(408)\quad \begin{cases} I_s^{(h)} = I_N^{(h)} + I_\psi^{(h)} + I_\sigma^{(h)} \\ E_s^{(h)} = E_N^{(h)} + E_\psi^{(h)} + E_\sigma^{(h)}, \end{cases}$$

$$(409)\quad \begin{cases} \therefore \frac{\partial W_h}{\partial s} = E_s^{(h)} + I_s^{(h)} + \frac{1}{a} \int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3 u_1^0 u_{2 0}^0 - c_0) \cos^3 \psi_0 d\vartheta + \eta_h, \lim\limits_{h=0} \eta_h = 0 \\ E_s^{(h)} = -\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_h^a \{\sigma(r, \vartheta)(3 u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi - \sigma_0(\vartheta)(3 u_1^0 u_{2 0}^0 - c_0) \cos^3 \psi_0\} \frac{dr}{r^2} \cdot \end{cases}$$

Nous supposons (cfr. 404)

$$(410)\quad \begin{cases} \lim\limits_{r=0} \bar{\sigma}(r, \vartheta) \text{ finie, posons } \bar{\sigma}(r, \vartheta) = \bar{\sigma}_0(\vartheta) + \sigma_1(r, \vartheta), \lim\limits_{r=0} \sigma_1 = 0 \\ \lim\limits_{r=0} \bar{\psi}(r, \vartheta) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \bar{\psi}(r, \vartheta) = \bar{\psi}_0(\vartheta) + \psi_1(r, \vartheta), \lim\limits_{r=0} \psi_1 = 0 \\ \lim\limits_{r=0} \bar{l}(r, \vartheta) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \bar{l}(r, \vartheta) = \bar{l}_0(\vartheta) + l_1(r, \vartheta), \lim\limits_{r=0} l_1 = 0 \\ \lim\limits_{r=0} \bar{m}(r, \vartheta) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \bar{m}(r, \vartheta) = \bar{m}_0(\vartheta) + m_1(r, \vartheta), \lim\limits_{r=0} m_1 = 0, \\ \therefore (387) \lim\limits_{r=0} \bar{n}(r, \vartheta) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \bar{n}(r, \vartheta) = \bar{n}_0(\vartheta) + n_1(r, \vartheta), \lim\limits_{r=0} n_1 = 0, \text{ si } n \neq 0, \end{cases}$$

$$(411)\quad \therefore (387) \begin{cases} l_0^2 + m_0^2 + n_0^2 = 1 \\ l_0 \bar{l}_0 + m_0 \bar{m}_0 + n_0 \bar{n}_0 = 0 \\ l_0 l_1 + m_0 m_1 + n_0 n_1 + \frac{r}{2}(\bar{l}^2 + \bar{m}^2 + \bar{n}^2) = 0 \end{cases}$$

Donc nous trouverons

$$(412)\qquad \left\{\begin{aligned} I_N &\equiv \lim_{h=0} I_N^{(h)} = -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\overline{A}\cos^2\psi_0 d\vartheta \\ I_\psi &\equiv \lim_{h=0} I_\psi^{(h)} = -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\overline{\psi}_0(\vartheta) E\cos^2\psi_0 d\vartheta \\ I_\sigma &\equiv \lim_{h=0} I_\sigma^{(h)} = -\int_0^{2\pi} \overline{\sigma}(\vartheta) A'\cos^3\psi_0 d\vartheta, \end{aligned}\right.$$

où $\overline{A}$ a le même sens que $\overline{A}'$ de la formule (327) pour $\lambda_2 = \overline{l}_0$, $\mu_2 = \overline{m}_0$, $\nu_2 = \overline{n}_0$,
E » » » » » E » » » (324), et
A' » » » » » $\overline{A}'$ » » » (327),
∴ (409), (412)

$$(413)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s} = E_s + I_s + \frac{1}{a}\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3u_1^0 u_{20}^0 - c_0)\cos^3\psi_0 d\vartheta \\ &E_s = \lim_{h=0} E_s^{(h)} \\ &I_s = I_N + I_\psi + I_\sigma. \end{aligned}\right.$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Pour que* $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s}$ *soit finie, il faut toujours que la condition* (402*) *soit remplie. Dans le cas particulier, défini par les formules* (410), *il faut de plus et il suffit pour l'existence de* $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s}$ *que la quantité* E_s (413) *existe.*

Remarque I. On peut écrire

$$(414)\qquad I_N + I_\sigma = -\int_0^{2\pi} \overline{\overline{\sigma}}(\vartheta)\overline{\overline{A}}\cos^3\psi_0 d\vartheta,$$

$\overline{\overline{A}}$ étant ce que deviendra $\overline{A}'$ de la formule (327), lorsqu'on y remplace $\lambda_2\mu_2\nu_2$ par $\overline{\overline{l}}_0\overline{\overline{m}}_0\overline{\overline{n}}_0$ resp., où

$$(415)\qquad \overline{\overline{\sigma}}_0\overline{\overline{l}}_0 \equiv \sigma_0\overline{l}_0 + \overline{\sigma}_0 l_0,\quad \overline{\overline{\sigma}}_0\overline{\overline{m}}_0 \equiv \sigma_0\overline{m}_0 + \overline{\sigma}_0 m_0,\quad \overline{\overline{\sigma}}_0\overline{\overline{n}}_0 \equiv \sigma_0\overline{n}_1 + \overline{\sigma}_0 n_0.$$

Corollaire. La condition que la quantité E_s doit être finie peut être remplacée par les deux conditions suivantes (cfr. 330):

$$(416)\quad \begin{cases} F_s \equiv -\int\limits_0^{2\pi} \{\bar{\bar{\sigma}}_0(\vartheta)(3u_1^0 \bar{\bar{u}}_{20}^0 - \bar{\bar{c}}_0)\cos\psi_0 + 3\sigma_0(\vartheta)\bar{\psi}_0(\vartheta) C^0\} \cos^2\psi_0\, d\vartheta = 0 \\ E'_s \equiv \lim\limits_{h=0} E'^{(h)}_s = \text{une quantité finie,} \\ \text{où} \\ C^0 = \nu u_{20}^0 + n_0 u_1^0 + (c_0 - 5u_1^0 u_{20}^0)\sin\psi_0 \\ E'^{(h)}_s = -\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\psi_0\, d\vartheta \int\limits_h^a \{\sigma^1(r,\vartheta)(3u_1^0 u_2^{10} - c^1)\cos\psi_0 + 3\sigma_0(\vartheta)\psi_1(r,\vartheta) C^0\} \dfrac{dr}{r}, \end{cases}$$

et

$$(417)\quad \begin{cases} \sigma^1 l^1 \equiv \sigma_0 l_1 + \sigma_1 l_0 \text{ etc.} \\ c^1 \equiv \lambda l^1 + \mu m^1 + \nu l^1 \\ u_2^{10} = l^1 \cos\psi_0 \cos\vartheta + m^1 \cos\psi_0 \sin\vartheta + n^1 \sin\psi_0 . \end{cases}$$

Le cas où le point P est situé dans la surface peut être traité de la même manière. Nous trouverons

$$(418)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial s} = E_s + J_s + \dfrac{1}{a}\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3u_{10}u_{20}^0 - c_0)\cos^3\psi_0\, d\vartheta \\ J_s = J_N + J_\psi + J_\sigma \\ J_N = -\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \bar{B} \cos^3\psi_0\, d\vartheta \\ J_\psi = -\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \bar{\psi}_0(\vartheta)\, \Gamma \cos^2\psi_0\, d\vartheta \\ J_\sigma = -\int\limits_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)\, B \cos^3\psi_0\, d\vartheta \end{cases}$$

sous la condition

$$(419)\qquad Q'_s = Q_s,$$

où $\overline{B}$ a le même sens que $\overline{\Gamma}_{s's}$ de la formule (315) pour $u_0 = \overline{u}^0_{20}$, $u'_0 = u^0_1$, $c' = \overline{c}_0$
Γ » » » » » $\Gamma^0_{s's}$ » » » (310) » $u_0 = u^0_{20}$, $u'_0 = u^0_1$, $c' = c_0$, $\nu' = \nu_1$ et $\nu = n_0$
B » » » » » $\overline{\Gamma}_{s's}$ » » » (315) » $u_0 = u^0_{20}$, $u'_0 = u^0_1$, $c' = c_0$, $\nu' = \nu_1$ et $\nu = n_0$.

Corollaire. Pour $\lambda' = \lambda = l_0$, $\mu' = \mu = m_0$ et $\nu' = \nu = n_0$, nous trouverons (cfr. 333 et 416)

$$\lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s} - \frac{\partial W}{\partial s} = F_s. \tag{420}$$

Le changement brusque de la dérivée, lorsque le point P traverse la surface, s'obtient en changeant les quantités σ, ψ, λ', μ', l, m et ν en $-\sigma$, $-\psi$, $-\lambda'$, $-\mu'$, $-l$, $-m$ et $-\nu$ resp., $\therefore$ u_2, u', c_1 et c changent en $-u_2$, $-u'$, $-c_1$ et $-c$ resp., pendant que u_1 et c_2 restent les mêmes. En désignant les deux côtés de la surface par les signes + et —, nous trouverons (409) dans le cas général

$$E^{h+}_s = E^{h-}_s. \tag{421}$$

Dans le cas plus particulier (410), nous aurons (413)

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{h=0}\left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \frac{\partial W_{h-}}{ds}\right] = -\int_0^{2\pi}\left\{[\sigma_0(\vartheta)\overline{A}_+ + \overline{\sigma}_0(\vartheta)A'_+] + [\sigma_0(\vartheta)\overline{A}_- + \overline{\sigma}_0(\vartheta)A'_-]\right\}. \\ &\qquad \cos^3\psi_0\, d\vartheta - \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,\overline{\psi}_0(\vartheta)\,(E_+ - E_-)\cos^2\psi_0\, d\vartheta, \end{aligned}\right. \tag{422}$$

sous la condition (cfr. 402*)

$$\Gamma'_+ = \Gamma'_-. \tag{423}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Dans le cas défini par les suppositions* (410), $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_{h+}}{\partial s}$ *est finie ou infinie en même temps que* $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_{h-}}{\partial s}$, *pourvu que l'égalité* (423) *soit satisfaite.*

Remarque II. On trouvera de même (418)

$$\frac{\partial W_+}{\partial s} - \frac{\partial W_-}{\partial s} = J_{s+} - J_{s-}, \tag{424}$$

pourvu que

$$Q'_{s+} - Q_{s+} = Q'_{s-} - Q_{s-}\,. \tag{425}$$

Cas particuliers. *I. Point régulier.* Supposons

$$\begin{cases} \psi_0 = 0,\ \sigma_0 = \text{une constante} \\ \sigma_0 \bar{l}_0 + \bar{\sigma}_0 l_0 = a_1 \cos\vartheta + b_1 \sin\vartheta \\ \sigma_0 \bar{m}_0 + \bar{\sigma}_0 m_0 = a_2 \cos\vartheta + b_2 \sin\vartheta \\ \sigma_0 \bar{n}_0 + \bar{\sigma}_0 n_0 = a_3 \cos\vartheta + b_3 \sin\vartheta \\ \bar{\psi}_0(\vartheta) = \alpha\cos^2\vartheta + 2\beta\cos\vartheta\sin\vartheta + \gamma\sin^2\vartheta\,. \end{cases} \tag{426}$$

Donc nous trouverons (cfr. 402*, 416, 413, 338 et 335)

$$\begin{cases} I' = F_s = 0 \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s} = E_s + I_s + \dfrac{\pi}{a}(c_0 - 3\nu n_0) \\ I_s = -4\pi\sigma_0\lambda(\alpha l_0 + \beta m_0) - 4\pi\sigma_0\mu(\beta l_0 + \gamma m_0) + 4\pi\sigma_0\nu n_0(\alpha+\gamma) + \\ \qquad + 2\pi(\lambda a_3 + \mu b_3) + 2\pi\nu(a_1 + b_2)\,, \end{cases} \tag{427}$$

et la seule condition à remplir est celle que la quantité E'_s (416) doit être finie. De plus nous trouverons

$$\begin{cases} \lim\limits_{h=0}\left[\dfrac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \dfrac{\partial W_{h-}}{\partial s}\right] = -8\pi\sigma_0\lambda(\alpha l_0 + \beta m_0) - 8\pi\sigma_0\mu(\beta l_0 + \gamma m_0) + 8\pi\sigma_0\nu n_0(\alpha + \\ \qquad + \gamma) + 4\pi(\lambda a_3 + \mu b_3) + 4\pi\nu(a_1 + b_2)\,. \end{cases} \tag{428}$$

Remarque III. L'égalité (428) aura lieu sans condition additionnelle. Mais pour que les deux limites existent elles-mêmes, il faut de plus et il suffit que la quantité E'_s (416) soit finie.

II. Point conique. Si $\psi_0 =$ une constante, on trouvera pour le potentiel d'une double couche (cfr. 393, 402*)

$$\begin{cases} l_0 = -\sin\psi_0\cos\vartheta,\ m_0 = -\sin\psi_0\sin\vartheta, n_0 = \cos\psi_0, \\ u^0_{20} = 0,\ u^0_1 = u\cos\psi_0 + \nu\sin\psi_0,\ \text{où}\ u = \lambda\cos\vartheta + \mu\sin\vartheta, \\ c^0_2 = \operatorname{tg}\psi_0(1 - u'_0) + \dfrac{\nu' - \sin\psi_0}{\cos\psi_0},\ c_0 = -u\sin\psi_0 + \nu\cos\psi_0, \end{cases} \tag{393*}$$

$$\begin{cases} I' = \cos\psi_0 \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left\{(\nu' - \sin\psi_0)\frac{u\cos\psi_0}{(1-u'_0)^2} + \frac{(\nu' - \sin\psi_0)(\nu\sin\psi_0 - c_1)}{(1-u'_0)^2} + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{\nu - c_1\sin\psi_0}{1 - u'_0}\right\} d\vartheta\,. \end{cases} \tag{429}$$

Si la fonction σ_0 est constante, on trouvera

$$I' = 0, \tag{430}$$

d'où il suit que $\lim\limits_{h=0}\left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial s}\right]$ est toujours finie en un point conique, pourvu que le moment de la double couche soit continu.

Remarque IV. Ce même résultat (430) aura lieu, si la fonction $\sigma(r, \vartheta)$ est discontinue suivant l'axe des x, de manière que $\sigma_0 =$ une constante σ_1 pour $0 \leq \vartheta \leq \pi$ et $=$ une constante σ_2 pour $\pi \leq \vartheta \leq 2\pi$, pourvu que $\mu' = \mu = 0$.

§ 48. *La dérivée première du potentiel d'une double couche.* Nous supposerons dans ce § que la surface admet, au point P_0 et en tous les points du voisinage de P_0, un plan tangent bien déterminé, et nous prenons la direction $(l\, m\, n)$ suivant la normale qui passe par le point Q. Donc nous aurons (411) dans le cas (410)

$$\psi_0 = l_0 = m_0 = 0, \; n_0 = 1, \; \overline{n}_0 = 0, \; n_1 = -\frac{r}{2}(\overline{l}^2 + \overline{m}^2 + \overline{n}^2). \tag{431}$$

L'équation de la surface peut s'écrire

$$z = r \operatorname{tg} \psi, \tag{432}$$

et en supposant que les quantités $\frac{\partial z}{\partial r}$ et $\frac{\partial z}{\partial \vartheta}$ soient finies, nous trouverons

$$u_2^0 \equiv l \cos\vartheta + m \sin\vartheta = -n \frac{\partial z}{\partial r}. \tag{433}$$

Supposons

$$\lim_{r=0}\left(r \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial r}\right) = 0, \tag{434}$$

$$\left\{\begin{aligned} \therefore\; \overline{l}_0 &= -2\overline{\psi}_0 \cos\vartheta + \frac{d\overline{\psi}_0}{d\vartheta}\sin\vartheta \\ \overline{m}_0 &= -2\overline{\psi}_0 \sin\vartheta - \frac{d\overline{\psi}_0}{d\vartheta}\cos\vartheta, \end{aligned}\right. \tag{435}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\therefore\; \overline{u}_0 \equiv \overline{l}_0 \cos\vartheta + \overline{m}_0 \sin\vartheta = -2\overline{\psi}_0 \\ &\overline{c}_0 \equiv \lambda \overline{l}_0 + \mu \overline{m}_0 + \nu \overline{n}_0 = -2\overline{\psi}_0 u - \frac{d\overline{\psi}_0}{d\vartheta}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}, \end{aligned}\right. \tag{436}$$

où

$$u = \lambda \cos\vartheta + \mu \sin\vartheta. \tag{437}$$

Nous trouverons (402^* et 416) que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial W_h}{ds}$ sont

$$(438) \begin{cases} I' = \int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[\frac{\nu'(u - c_1)}{(1-u')^2} + \frac{\nu}{1-u'}\right] d\vartheta = 0 \\ F_s = \int\limits_0^{2\pi} \{\sigma_0(\vartheta)[3\bar{\psi}_0(\vartheta)u + \bar{c}_0] + \nu\bar{\sigma}_0(\vartheta)\} d\vartheta = 0 \\ E_s^1 = -\lim\limits_{h=0,} \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_h^a [\sigma_0(\vartheta)(3uu^1 - c_1^1) - \nu\sigma_1 + 3\sigma_0(\vartheta)\psi_1 u] \frac{dr}{r} = \text{une quantité} \end{cases}$$

finie, où

$$(417^*) \begin{cases} \sigma(r,\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) + r\bar{\sigma}_0(\vartheta) + r\sigma_1(r,\vartheta), \quad \psi = r\bar{\psi}_0(\vartheta) + r\psi_1(r,\vartheta) \\ l = r\bar{l}_0(\vartheta) + rl_1(r,\vartheta), \quad m = r\bar{m}_0(\vartheta) + rm_1(r,\vartheta), \quad n = 1 + rn_1(r,\vartheta) \\ u' = \lambda'\cos\vartheta + \mu'\sin\vartheta, \quad u^1 = l_1\cos\vartheta + m_1\sin\vartheta \\ c_1 = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu', \quad c_1^1 = \lambda l_1 + \mu m_1 + \nu n_1 \\ \lim\limits_{r=0} \sigma_1 = 0 \text{ etc.} \end{cases}$$

Cas particuliers. 1°. *Point régulier.* Supposons

$$(334) \begin{cases} \bar{\psi}_0 = \alpha\cos^2\vartheta + 2\beta\cos\vartheta\sin\vartheta + \gamma\sin^2\vartheta \\ \sigma_0 = \text{une constante} \\ \bar{\sigma}_0 = a'\cos\vartheta + b'\sin\vartheta, \end{cases}$$

$$(439) \begin{cases} \therefore\ \bar{l}_0 = -2(\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta) \\ \bar{m}_0 = -2(\beta\cos\vartheta + \gamma\sin\vartheta). \end{cases}$$

Des égalités (426), (427), (431), (334), (439) et (338) nous tirons

$$(440) \quad a_1 = -2\sigma_0\alpha, \ b_1 = -2\sigma_0\beta, \ a_2 = -2\sigma_0\beta, \ b_2 = -2\sigma_0\gamma, \ a_3 = a', \ b_3 = b',$$

$$(427^*) \qquad \therefore\ I_s = 2\pi(\lambda a' + \mu b')$$

$$(428^*) \qquad \lim_{h=0}\left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial s}\right] = 4\pi(\lambda a' + \mu b') = 4\pi\left(\frac{\partial\mu}{\partial s_1}\right)_0,$$

où ds_1 est la projection de l'élément ds dans le plan tangent qui passe par le point P_0.

Remarque I. On retrouvera l'égalité (428^*) en appliquant la formule (364), si l'on pose (391)

(441) $$w = 4\pi\sigma n.$$

Remarque II. Si, dans les équations (367), nous posons (428*)

(442) $$\xi = 4\pi\frac{\partial\mu}{\partial x_1},\ \eta = 4\pi\frac{\partial\mu}{\partial y_1},\ \zeta = 0,\ \text{où } \mu = n\sigma,$$

nous trouverons (377)

(443) $$\begin{cases} \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial^2 W_{h+}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 W_{h-}}{\partial x^2}\right) = 4\pi\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x^2} \\ \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial^2 W_{h+}}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial^2 W_{h-}}{\partial x\,\partial y}\right) = 4\pi\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial y} \\ \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial^2 W_{h+}}{\partial x\,\partial z} - \dfrac{\partial^2 W_{h-}}{\partial x\,\partial z}\right) = 8\pi\alpha\dfrac{\partial\mu}{\partial x} + 8\pi\beta\dfrac{\partial\mu}{\partial y} \\ \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial^2 W_{h+}}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 W_{h-}}{\partial z^2}\right) = -4\pi\left(\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\mu}{\partial y^2}\right), \end{cases}$$

où tous les termes sont pris pour $r = 0$.

2°. *Le point P se meut suivant la normale.* Nous trouverons (324, 327) pour $\psi_0 = \lambda' = \mu' = 0,\ \nu' = 1$

(444) $$\begin{cases} E = 8u_1u_2 - 2\nu_1\nu_2 - 2c - (\nu_1u_2 + \nu_2u_1)\left(7 + 3\log\dfrac{1}{2}\right) \\ \bar{A'} = -(3u_1u_2 - c)\log\dfrac{1}{2} + \nu_1\nu_2 + c - 4u_1u_2 - 2(\nu_1u_2 + \nu_2u_1), \end{cases}$$

(445) $$\begin{cases} \therefore\ I_s = -\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(\bar{A} + \bar{\psi}_0E)\,d\vartheta - \int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0A'\,d\vartheta \\ \bar{A} = -(3u\bar{u} - \bar{c})\log\dfrac{1}{2} + \bar{c} - 4u\bar{u} - 2\nu\bar{u} \\ E = -4\nu - u\left(7 + 3\log\dfrac{1}{2}\right) \\ A' = \nu\log\dfrac{1}{2} + 2\nu - 2u, \end{cases}$$

d'où il suit (436)

(446) $$\therefore\ \lim_{h=0}\left(\frac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial s}\right) = 4\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\,u\,d\vartheta,$$

pourvu que (402*)

$$(447) \qquad I'_+ = -I'_- = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) u \, d\vartheta \text{ soit} = 0.$$

Corollaires. Nous trouverons (446, 437)

$$(448) \qquad \lim_{h=0} \left(\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z} \right) = 0$$

et (420, 438)

$$(449) \qquad \lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial z} = \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta) d\vartheta.$$

Pour l'existence des deux termes du premier membre, il faut et il suffit que le second membre de l'égalité (449) soit $= 0$ et que (438, 411)

$$(450) \qquad \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \sigma_1(r, \vartheta) \frac{dr}{r} \text{ soit} = \text{une quantité finie.}$$

§ **49.** *Dérivée normale. Théorème de M. Liapounoff.* M. Liapounoff a démontré dans des cas très étendus que si l'une des deux limites $\lim_{h=0} \frac{\partial W_{h+}}{\partial z}$ et $\lim_{h=0} \frac{\partial W_{h-}}{\partial z}$ existe, le point P étant situé sur la normale qui passe par le point P_0, donc l'autre limite existe aussi et est égale à la première. Ce théorème est déduit dans le § précédent (formule 448) dans le cas défini par les suppositions (410) et (434). Nous étudierons dans ce § plus en détail les suppositions qu'il faut faire pour la déduction de la formule (448).

Posons dans la formule (399)

$$(451) \qquad \lambda' = \mu' = \lambda = \mu = 0, \; \nu' = \nu = 1, \; \lim_{r=0} \sigma = \sigma_0(\vartheta) \text{ et } \lim_{r=0} \psi = \psi_0(\vartheta),$$

$$(452) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\therefore \frac{\partial W_h}{\partial z} = -\frac{1}{h} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(r, \vartheta) f \frac{t\,dt}{q'^3}, \; r = ht \\ &f = 3(q \sin\psi - 1)(u_2 q \cos\psi + n_2 q \sin\psi - n) \frac{1}{q'^2} - n \\ &u_2 \equiv l \cos\vartheta + m \sin\vartheta \\ &q' = \sqrt{q^2 - 2q\sin\psi + 1}, \; q = \frac{t}{\cos\psi}, \end{aligned} \right.$$

(453) $$\begin{cases} f_- = -3(q\sin\psi + 1)(uq\cos\psi + nq\sin\psi + n)\dfrac{1}{q_-'^2} + n \\ q_-' = \sqrt{q^2 + 2q\sin\psi + 1}\,, \end{cases}$$

(454) $$\therefore \frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z} = -\frac{1}{h}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(r,\vartheta)\left(\frac{f_+}{q_+'^3} + \frac{f_-}{q_-'^3}\right) t\,dt.$$

Nous étudierons séparément les deux cas: I $\psi = 0$, II $\psi \gtrless 0$, $\psi_0 = 0$.

I. *Surface plane.* Dans ce cas

$$\psi = l = m = 0,\ n = 1,\ \therefore u_2 = 0,\ q = t.$$

Posons

(455) $$p = \sqrt{t^2 + 1}\,,$$

$$\therefore q_+' = q_-' = p$$

$$f_+ = -f_- = \frac{3}{p^2} - 1,$$

(456) $$\therefore \frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z} = 0.$$

Pour l'étude de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial z}$ nous posons

(457) $$\varrho(r) \equiv \int_0^{2\pi} \sigma(r,\vartheta)\,d\vartheta,$$

(458) $$\therefore \frac{\partial W_h}{\partial z} = \frac{1}{h}\int_0^{\frac{a}{h}} \varrho(r)\left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt.$$

Posons

(459) $$\varrho = \varrho_0 + \varrho_1(r),\ \varrho_0 = \text{une constante},\ \lim_{r=0} \varrho_1 = 0,$$

(460) $$\begin{cases} \therefore \dfrac{\partial W_h}{\partial z} = Z_h - \dfrac{\varrho_0}{a} + \eta_h,\ \lim\limits_{h=0} \eta_h = 0 \\ Z_h = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{\frac{a}{h}} \varrho_1(r)\left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt, \end{cases}$$

d'où il suit que l'existence de $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial z}$ dépend de l'existence de $\lim\limits_{h=0} Z_h$.

Nous supposons qu'on peut écrire

$$(461)\quad \begin{cases} \varrho_1(r) = \varphi(h)\,\varphi_1(h,t), \ \lim\limits_{h=0} \varphi_1(h,t) = \text{une quantité} \\ \qquad\qquad \text{finie et déterminée} \equiv \Phi(t) \text{ qui est} \neq 0, \end{cases}$$

$$(462)\quad \begin{cases} \therefore Z_h = \dfrac{\varphi(h)}{h} \displaystyle\int_0^{\frac{a}{h}} \varphi_1(h,t) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt \\ \varphi_1(h,t) = \Phi(t) + \eta'_h, \ \lim\limits_{h=0} \eta'_h = 0. \end{cases}$$

Si $\lim\limits_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h}$ est finie, nous retrouverons le cas du § précédent, et il nous faut discuter seulement le cas, où cette quantité est infinie. Dans ce cas la fonction $\Phi(t)$ devient infinie d'un ordre qui est plus petit que l'unité, lorsque t tend vers l'infini,

$$\therefore \lim_{h=0} \int_0^{\frac{a}{h}} \varphi_1(h,t) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5} - \frac{1}{t^3}\right) t\,dt = \text{une quantité finie} \equiv I,$$

$$\therefore Z_h = \frac{\varphi(h)}{h} (I + K_h + \eta''_h), \ \lim_{h=0} \eta''_h = 0$$

$$I = \int_0^1 \Phi(t) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt + \int_1^\infty \Phi(t) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5} - \frac{1}{t^3}\right) t^2\,dt$$

$$K_h = \int_1^{\frac{a}{h}} \varphi_1(h,t) \frac{dt}{t^2}.$$

Pour que $\lim\limits_{h=0} Z_h$ soit finie, il faut donc que la quantité

$$K \equiv \lim_{h=0} K_h$$

soit finie et $= -I$. Posons

$$\varphi_1(h,t) = \varphi_2(t)\,\varphi_3(h,t), \ \lim_{\substack{h=0 \\ t=\infty}} \varphi_3 \text{ finie pour } ht \leqq a,$$

et supposons que la quantité $\varphi_2(t)$ ne change pas de signe pour $t >$ une certaine quantité w,

$$\therefore\ K_h = \varphi_m \int_1^{\frac{a}{h}} \varphi_2(t) \frac{dt}{t^2},$$

où φ_m est une valeur moyenne de φ_3,

$$\therefore\ K = \varphi_4 \int_1^{\infty} \varphi_2(t) \frac{dt}{t^2},$$

où $\varphi_4 = \lim_{h=0} \varphi_m$. Pour que la quantité K soit finie, il faut donc que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \varphi_2(t) \frac{dt}{t^2} \text{ soit finie,}$$

ou, ce qui revient au même, que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \Phi(t) \frac{dt}{t^2} = \text{une quantité finie.} \tag{463}$$

Dans ce cas nous aurons la condition

$$\int_0^{\infty} \Phi(t) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt = 0. \tag{464}$$

On voit sans difficulté qu'on pourra énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Soit la fonction* $\varrho_1(r)$ (459, 457) *développée de la manière suivante pour* $r = ht$*:*

$$\left\{\begin{aligned} &\varrho_1(r) = \varphi_1(h) X_1(t) + \varphi_2(h) X_2(t) + \cdots + \varphi_n(h) X_n(t) + \varphi_{n+1}(h) X_{n+1}(h, t) \\ &\lim_{h=0} \frac{\varphi_{\nu+1}}{\varphi_\nu} = 0 \ \textit{pour}\ \nu = 1, 2, 3 \cdots n \\ &\qquad \lim_{h=0} \frac{\varphi_n(h)}{h} \ \textit{infinie.} \end{aligned}\right. \tag{465}$$

Pour l'existence de $\lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial z}$ *dans le cas d'une couche plane, il faut que l'on ait*

$$(466)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty X_\nu(t)\left(\frac{1}{p^3}-\frac{3}{p^5}\right)t\,dt = 0 \quad pour \quad \nu = 1,\ 2,\ 3\cdots n \\ p = \sqrt{t^2+1}, \end{cases}$$

$$(467)\quad \begin{cases} \displaystyle \therefore\ Z_h = \frac{\varphi_{n+1}(h)}{h}\int_0^{\frac{a}{h}} X_{n+1}(h,t)\left(\frac{1}{p^3}-\frac{3}{p^5}\right)t\,dt. \\ \displaystyle \lim_{h=0}\frac{\partial W_h}{\partial z} = \lim_{h=0} Z_h - \frac{\varrho_0}{a}. \end{cases}$$

Si le développement de la fonction $\varrho_1(r)$ *peut être poussé jusqu'à une valeur de* n *telle que*

$$(468)\quad \lim_{h=0}\frac{\varphi_{n+1}(h)}{h} = \textit{une quantité finie},$$

il faut de plus et il suffit que l'on ait

$$(469)\quad \lim_{h=0}\int_1^{\frac{a}{h}} X_{n+1}(h,t)\frac{dt}{t^2} = \textit{une quantité finie}.$$

Nous démontrerons maintenant le théorème suivant:

Théorème. *Si une fonction* $\Phi(t)$ *va toujours en augmentant ou toujours en diminuant, lorsque la variable* t *croît de zéro jusqu'à l'infini, l'intégrale*

$$(470)\quad Z = \int_0^\infty \Phi(t)\left(\frac{1}{p^3}-\frac{3}{p^5}\right)t\,dt \ \textit{est} \neq 0.$$

En effet,

$$(471)\quad \int_0^\infty \left(\frac{1}{p^3}-\frac{3}{p^5}\right)t\,dt = 0,$$

et $\frac{1}{p^3}-\frac{3}{p^5}$ est $=0$ pour $t=\sqrt{2}$ et $\neq 0$ pour $0 \leqq t \neq \sqrt{2}$,

$$(472) \qquad \therefore\; Z_0 \equiv \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) t\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt > 0\,.$$

Si $\Phi(t)$ va toujours en augmentant, nous aurons

$$(473) \qquad Z' \equiv \int_0^{\sqrt{2}} \Phi(t) \left(\frac{3}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) t\,dt < \Phi(\sqrt{2})\, Z_0 < \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \Phi(t) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt \equiv Z'',$$

et nous trouverons un résultat analogue, si $\Phi(t)$ va toujours en diminuant.

Corollaire. Si la fonction $\varrho_1(r)$ va toujours en diminuant, lorsque r diminue, il faut et il suffit pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial z}$ que

$$(474) \qquad \int_0^{\alpha} (\varrho_1 - \varrho_0)\, \frac{dr}{r^2} \text{ soit} = \text{une quantité finie, } \varrho_0 \equiv \lim_{r=0} \varrho_1\,.$$

Remarque I. Si $\varrho_1 = \varrho_0 + r\bar{\varrho}$, $\lim\limits_{r=0} \bar{\varrho} =$ une quantité finie, la condition (474) est nécessaire et suffisante pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial z}$, même dans le cas où la fonction ϱ_1 ne va pas toujours en diminuant. On trouvera

$$(475) \qquad \lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial z} = -\frac{\varrho_0}{a} - (2 - \log 2)\, \bar{\varrho}_0 + \int_0^{\alpha} \varrho_1(r)\, \frac{dr}{r^2}\,, \quad \bar{\varrho}_0 \equiv \lim_{r=0} \bar{\varrho}\,.$$

II. *Surface courbe,* $\lim\limits_{r=0} \psi = 0$. Dans ce cas, le plan des xy est un plan tangent de la surface, même dans le cas où les quantités $\dfrac{\partial \psi}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$ n'existent pas toutes les deux en ce point. C'est le cas par ex., si

$$(476) \qquad \psi = r^{\alpha} \sin \frac{1}{r}\,, \quad 0 < \alpha < 1\,,$$

où même $\lim\limits_{r=0} \left(\dfrac{r\,\partial \psi}{\partial r}\right)$ n'existe pas. La définition d'une double couche implique l'existence d'une normale bien déterminée à chaque point, mais cette existence n'implique donc pas du tout l'existence des dérivées premières des coordonnées. Nous nous placerons dans un cas plus général, si nous ne supposons pas l'existence des dérivées $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$, comme nous l'avons fait dans le § 48. Mais nous supposerons seulement que $l m n$ sont des fonctions quelconques qui satisfont (cfr. 431, 432, 433) aux égalités

$$(477) \qquad \begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 1, \; l_0 = m_0 = 0, \; \therefore \; n_0 = 1, \text{ et} \\ u_2 \equiv l \cos \vartheta + m \sin \vartheta = - n \left(\operatorname{tg} \psi + \dfrac{r \psi_1}{\cos^2 \psi}\right) \\ \lim\limits_{r=0} \psi_1 = \text{une quantité finie (cfr. équ. 434).} \end{cases}$$

Nous trouverons (454)

$$\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z} = \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \mu F t dt, \; \mu = n\sigma$$

$$F = 3(q \sin \psi - 1)\left(\frac{q r \psi_1}{\cos \psi} + 1\right) \frac{1}{q_+'^5} - 3(q \sin \psi + 1)\left(\frac{q r \psi_1}{\cos \psi} - 1\right) \frac{1}{q_-'^5} +$$

$$+ \frac{1}{q_+'^3} - \frac{1}{q_-'^3} F_1 \psi_1 + F_2,$$

où le premier terme du dernier membre renferme tous les termes qui ont ψ_1 pour facteur commun. Nous trouverons pour la limite de l'intégrale correspondante

$$(478) \qquad \begin{cases} I_1 \equiv \lim\limits_{h=0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \mu F_1 \psi_1 t dt = -4 \int_0^{2\pi} \mu_0(\vartheta) \psi_1^0(\vartheta) d\vartheta, \text{ où} \\ \mu_0(\vartheta) \equiv \lim\limits_{r=0} \mu(r, \vartheta), \; \psi_1^0(\vartheta) \equiv \lim\limits_{r=0} \psi_1(r, \vartheta). \end{cases}$$

De plus nous aurons

$$F_2 = 3 q \sin \psi \left(\frac{1}{q_+'^5} + \frac{1}{q_-'^5}\right) - 3\left(\frac{1}{q_+'^5} - \frac{1}{q_-'^5}\right) + \left(\frac{1}{q_+'^3} - \frac{1}{q_-'^3}\right),$$

d'où nous tirons en développant

$$F_2 = 6\left(2-\frac{5}{p^2}\right)\frac{t\psi}{p^5} + \frac{t\psi^2}{p^5}P,\ \lim_{t=\infty} P \text{ finie.}$$

Posons

$$(479)\quad \begin{cases} I_2^{(h)} \equiv \frac{1}{h}\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_0^{\frac{a}{h}} \mu F_2 t\,dt, \\ \therefore \frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z} = I_1 + I_2^{(h)} + \eta_h,\ \lim_{h=0} \eta_h = 0; \end{cases}$$

par suite l'existence de $\lim_{h=0}\left(\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z}\right)$ dépend de l'existence de $\lim_{h=0} I_2^{(h)}$. Posons de plus

$$(480)\quad \begin{cases} \psi = \varphi(r)\overline{\psi}_1(r,\vartheta),\ \lim_{r=0}\overline{\psi}_1 \text{ finie} \equiv \psi_2(\vartheta), \\ \varphi(r) = \varphi_1(h)\varphi_2(h,t),\ \lim_{h=0}\varphi_2(h,t) \text{ finie} \equiv \Phi(t) \gtrless 0, \\ \therefore I_2^{(h)} = 6\frac{\varphi_1(h)}{h}\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_0^{\frac{a}{h}} \mu\left\{2 - \frac{5}{p^2} + \frac{\psi}{6}P\right\}\overline{\psi}_1\varphi_2\frac{t^2dt}{p^5}. \end{cases}$$

Si $\lim_{h=0}\frac{\varphi_1(h)}{h}$ est finie, nous retrouverons le cas du § précédent, et si $\lim_{h=0}\frac{\varphi_1(h)}{h}$ est infinie — ce que nous supposerons ici — la fonction $\Phi(t)$ devient infinie d'un ordre qui est plus petit que l'unité, lorsque t tend vers l'infini,

$$(481)\quad \begin{cases} \therefore I \equiv \lim_{h=0}\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_0^{\frac{a}{h}} \mu\left\{2 - \frac{5}{p^2} + \frac{\psi}{6}P\right\}\overline{\psi}_1\varphi_2\frac{t^2dt}{p^5} = \\ \qquad = \int\limits_0^{2\pi}\mu_0(\vartheta)\psi_2(\vartheta)d\vartheta\int\limits_0^{\infty}\Phi(t)\left[2-\frac{5}{p^2}\right]\frac{t^2dt}{p^5} = \text{une quantité finie,} \end{cases}$$

$$(482)\quad \therefore h_2^{(h)} = 6\frac{\varphi_1(h)}{h}(I + \eta'_h),\ \lim_{h=0}\eta'_h = 0.$$

Pour que $\lim_{h=0} I_2^{(h)}$ soit finie, il faut donc que

$$(483)\quad I \text{ soit} = 0,$$

d'où il suit ou que

(484) $$\Theta \equiv \int_0^{2\pi} \mu_0(\vartheta)\, \psi_2(\vartheta)\, d\vartheta = 0$$

ou que

(485) $$I_0 \equiv \int_0^{\infty} \Phi(t) \left[2 - \frac{5}{p^2}\right] \frac{t^2\,dt}{p^5} = 0.$$

Nous aurons

$$\int_0^{\infty} \left(2 - \frac{1}{p^2}\right) \frac{t^2\,dt}{p^5} = 0,$$

par suite nous trouverons, comme dans le cas précédent (cfr. 470, 471, 472 et 473), que si la fonction $\Phi(t)$ va constamment en augmentant, I_0 est > 0,

$$\therefore \lim_{h=0} I_2^h \text{ infinie.}$$

Pour que $\lim\limits_{h=0} I_2^{(h)}$ soit finie, il faut donc que

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi_1(h)}{h} \text{ soit finie.}$$

D'où il suit que si nous posons

(486) $$\psi = r\,\overline{\psi},$$

il faut que $\lim\limits_{r=0} \overline{\psi}$ soit finie $\equiv \overline{\psi}_0(\vartheta)$, $\therefore\ \Phi(t) = t$,

(487) $$\therefore\ I_0 = \frac{2}{3},$$

(488) $$\therefore\ \lim_{h=0} \left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z}\right] = 4\int_0^{2\pi} \mu_0(\vartheta)[-\psi_1^0(\vartheta) + \overline{\psi}_0(\vartheta)]\,d\vartheta.$$

L'égalité (477) donne, pour

$$u_2 = r\overline{u},\ \overline{u}_0 = \lim_{r=0} \overline{u},$$

$$\overline{u}_0 = -(\overline{\psi}_0 + \psi_1^0),$$

$$\therefore\ -\psi_1^0 + \overline{\psi}_0 = \overline{u}_0 + 2\,\overline{\psi}_0,$$

d'où le théorème:

Théorème. *Si les fonctions lmn satisfont à la condition suivante:*

$$(477^*)\qquad \begin{cases} u_2 \equiv l\cos\vartheta + m\sin\vartheta = -n\left(\operatorname{tg}\psi + \dfrac{r\psi_1}{\cos^2\psi}\right) \\ \lim\limits_{r=0}\psi_1 = \textit{une quantité finie}, \end{cases}$$

si l'angle ψ va constamment en diminuant, lorsque r diminue, et si la quantité Θ (484) *n'est pas nulle, la condition nécessaire et suffisante, pour que*

$$\lim_{h=0}\left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z}\right] \textit{ soit finie,}$$

est que

$$(489)\qquad \lim_{r=0}\left(\frac{\psi(r,\vartheta)}{r}\right) \textit{ est finie.}$$

Si, de plus, les fonctions $l\,m\,n$ satisfont à l'égalité

$$(436^*)\qquad \overline{u}_0 + 2\overline{\psi}_0 = 0,$$

donc

$$(490)\qquad \lim_{h=0}\left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z}\right] = 0.$$

Remarque II. Dans le cas où la condition (477*) est satisfaite, la condition (489) est suffisante pour l'existence de $\lim\limits_{h=0}\left[\dfrac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \dfrac{\partial W_{h-}}{\partial z}\right]$ et cette limite deviendra $= 0$, si l'égalité (436*) est satisfaite.

De plus, nous trouverons, en supposant que les quantités ψ_1 et $\overline{\psi}_0$ soient finies,

$$\frac{\partial W_h}{\partial z} = 3\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \mu\,(q\sin\psi - 1)\,\psi_1\, q\,\frac{t^2\,dt}{\cos\psi\, q'^5} + 3\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \mu\left[(q\sin\psi - 1)\frac{t^2}{\cos\psi\, q'^5} - \right.$$

$$\left. - q^2\,\frac{\operatorname{tg}\psi\cos^5\psi}{t^3}\right]\psi_1\,dt + 3\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \mu\,\psi_1\cos^2\psi\sin\psi\,\frac{dr}{r} + \frac{1}{h}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \mu\left[\frac{3\,(q\sin\psi - 1)}{q'^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{q'^3}\right]t\,dt = 2\int_0^{2\pi} \mu_0\,(\overline{\psi}_0 - \psi_1^0)\,d\vartheta + 3\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \mu\,\psi_1\cos^2\psi\sin\psi\,\frac{dr}{r} + \frac{1}{h}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \mu\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^5}\right)t\,dt +$$

$$+ \overline{\eta}_h,\ \lim_{h=0}\overline{\eta} = 0.$$

D'où le théorème:

Théorème. *Si les conditions* (489 *et* 477*) *de l'existence de* $\lim \left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z}\right]$ *sont satisfaites, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de* $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial z}$ *est que la quantité*

$$Z \equiv \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \partial \vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \mu(r, \vartheta) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\, dt \tag{491}$$

existe,
ce qui est la même condition (460) *que pour une surface plane. Si la condition* (436*) *est remplie, nous trouverons*

$$\lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial z} = Z + \lim_{h=0} 3 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{a} \mu(r, \vartheta)\, \psi_1(r, \vartheta) \cos^2\psi \sin\psi \frac{dr}{r}. \tag{492}$$

Remarque III. Si $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$ existent, donc $\psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial r}$ dans le cas d'une double couche,

$$(492^*) \begin{cases} \therefore \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial z} = -\lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^{a} \mu(r, \vartheta) \frac{\partial \cos^3\psi}{\partial r} \frac{dr}{r} + \int_0^{a} \bar{\varrho}(r) \frac{dr}{r} - \frac{\varrho_0}{a}, \text{ en supposant} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \mu\, d\vartheta = \varrho_0 + r\bar{\varrho}, \ \lim_{r=0} \bar{\varrho} = 0. \end{cases}$$

Résumé.

§ **50.** *La méthode et quelques résultats généraux.* La méthode employée dans ce mémoire peut être décrite en deux mots de la manière suivante. Pour l'étude de l'existence de la quantité

$$(493)\qquad \begin{cases} I \equiv \lim\limits_{h=0} I_h \\ I_h = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^a f(r,h)\,dr, \end{cases}$$

nous posons

$$(494)\qquad r = ht,$$

et nous développons

$$(495)\qquad f(ht,h) = \frac{1}{t} f_1 + \frac{1}{t^2} P,$$

où les quantités f_1 et P restent toujours plus petites qu'une constante finie pour $t>1$, et où les fonctions f et f_1 sont telles que les intégrales

$$\int_0^w f(ht,h)\,dt \text{ et } \int_\varkappa^w f_1 \frac{dt}{t}, \quad 0<\varkappa<1<w<\frac{a}{h},$$

restent finies pour toutes les valeurs de $h \geqq 0$, les constantes $\varkappa$ et w étant indépendantes de h. Puis nous écrivons

$$(496)\qquad I_h = \int_0^1 f(ht,h)\,dt + \int_1^w \left(f - \frac{f_1}{t}\right) dt + \int_w^{\frac{a}{h}} \left(f - \frac{f_1}{t}\right) dt + \int_h^a f_1 \frac{dr}{r}.$$

Pour des valeurs suffisamment petites de h on peut (493) prendre la constante w assez grande pour que le troisième terme du second membre de (496) devienne quelque petit qu'on voudra,

$$(497)\qquad \begin{cases} \therefore\ I = \lim\limits_{h=0} I_h = K + Q \\ K = \lim\limits_{h=0} K_h \\ K_h = \displaystyle\int_h^a f_1 \frac{dr}{r} \\ Q = \displaystyle\int_0^1 f_0(t)\,dt + \int_1^\infty \left[f_0(t) - \frac{f_1^0(t)}{t}\right] dt \\ f_0(t) \equiv \lim\limits_{h=0} f(ht,h) \\ f_1^0(t) \equiv \lim\limits_{h=0} f_1. \end{cases}$$

La quantité Q (497) est toujours finie, par suite *la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de* $\lim\limits_{h=0} I_h$ *est que la quantité* K *existe.*

Le plus souvent, la quantité f_1 est une fonction de r seulement,

$$\therefore\ K_h = \int\limits_h^a f_1(r)\frac{dr}{r}. \tag{498}$$

Dans quelques cas, la fonction $f_0(t)$ devient infinie pour $t=1$ sans que l'on sache à priori, si la quantité

$$\lim_{h=0}\int\limits_0^w f\,dt$$

est finie ou non. Dans ces cas nous avons cherché une fonction H_h d'une forme aussi simple que possible et telle que

$$\lim_{h=0}\int\limits_0^w (f-H_h)\,dt$$

est nécessairement finie. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la quantité I est que la quantité

$$\lim_{h=0}\,(K_h+H_h)\ \text{existe.} \tag{499}$$

Pour la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ du potentiel d'un espace à trois dimensions et la dérivée $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ d'une simple couche, K_h est ce que deviendra la dérivée au point considéré P_0, lorsqu'on décrit autour de ce point fixe une sphère de rayon h et éloigne toute masse qui se trouve à l'intérieur de cette sphère.

Si la droite $P_+P_0P_-$ coupe une surface de discontinuité, et si les distances P_0P_+ et P_0P_- sont égales ($=h$), nous avons trouvé que la quantité K_h reste la même pour les deux points P_+ et P_-, de manière que la différence des valeurs de la dérivée aux deux points a toujours une valeur finie pour $\lim h=0$.

Quant aux dérivées secondes d'une simple couche et aux dérivées premières d'une double couche, nous avons trouvé qu'il faut satisfaire à deux conditions pour leur existence (cfr. équ. 326 et 331), dont l'une dépend seulement des valeurs limites pour $h=0$ des quantités considérées. L'autre condition consiste en l'existence d'une certaine quantité $W_{s's}$ (317) et cette quantité prend la même valeur aux deux points P_+ et P_-. Dans ce cas nous avons fait la supposition que la fonction σ et l'angle ψ que fait le rayon vecteur P_0Q avec le plan des xy puissent s'écrire

$$(500)\quad \begin{cases} \sigma = \sigma_0(\vartheta) + r\bar{\sigma}(r, \vartheta), \ \lim\limits_{r=0} \bar{\sigma} \text{ finie,} \\ \psi = \psi_0(\vartheta) + r\bar{\psi}(r, \vartheta), \ \lim\limits_{r=0} \bar{\psi} \text{ finie.} \end{cases}$$

La supposition (498) a été discutée plus particulièrement dans le cas du théorème de M. Liapounoff (§ 49).

Table des intégrales.

$$p \equiv \sqrt{s^2 - 2su + 1}, \ A \equiv \frac{1}{(1-u^2)p^3} + \frac{2}{(1-u^2)^2 p}, \ B \equiv \frac{1}{(1-u^2)p^5} + \frac{4}{3(1-u^2)^2 p^3} + \frac{8}{3(1-u^2)^3 p}.$$

$$\int \frac{ds}{p} = \log(p + s - u).$$

$$\int \frac{ds}{p^3} = \frac{s-u}{(1-u^2)p}$$

$$\int \frac{sds}{p^3} = \frac{su-1}{(1-u^2)p}$$

$$\int \frac{s^2 ds}{p^3} = \log(p+s-u) + \frac{(2u^2-1)s-u}{(1-u^2)p}$$

$$\int \frac{s^3 ds}{p^3} = p + 3u\log(p+s-u) + \frac{(4u^2-3)us+1-2u^2}{(1-u^2)p}.$$

$$\int \frac{ds}{p^5} = \frac{s-u}{3(1-u^2)}\left[\frac{1}{p^3} + \frac{2}{(1-u^2)p}\right]$$

$$\int \frac{sds}{p^5} = \frac{su-1}{3(1-u^2)p^3} + \frac{2u(s-u)}{3(1-u^2)^2 p}$$

$$\int \frac{s^2 ds}{p^5} = \frac{(2u^2-1)s-u}{3(1-u^2)p^3} + \frac{(1+u^2)(s-u)}{3(1-u^2)^2 p}$$

$$\int \frac{s^3 ds}{p^5} = \frac{(4u^3-3u)s+1-2u^2}{3(1-u^2)p^3} + \frac{(3u-u^3)s+3u^2-2u^4-3}{3(1-u^2)^2 p}$$

$$\int \frac{s^4 ds}{p^5} = \log(p+s-u) + \frac{(8u^4-8u^2+1)s+(3-4u^2)u}{3(1-u^2)p^3} + \\ + \frac{2(7u^2-4u^4-2)s+2(5u^2-2u^4-4)u}{3(1-u^2)^2 p}$$

$$\int \frac{s^5 ds}{p^5} = p + 5u\log(p+s-u) + \frac{(16u^5-20u^3+5u)s+8u^2-8u^4-1}{3(1-u^2)p^3} + \\ + \frac{(50u^3-28u^5-20u)s+28u^4-8u^6-28u^2+6}{3(1-u^2)^2 p}.$$

$$\int \frac{ds}{p^7} = \frac{s-u}{5} B$$

$$\int \frac{s\,ds}{p^7} = -\frac{1}{5p^5} + \frac{u(s-u)}{5} B$$

$$\int \frac{s^2 ds}{p^7} = -\frac{2u}{5p^5} + \frac{s-u}{3} A + \frac{(2u^2-1)(s-u)}{5} B$$

$$\int \frac{s^3 ds}{p^7} = -\frac{1}{3p^3} - \frac{4u^2-1}{5p^5} + u(s-u)A + \frac{(4u^3-3u)(s-u)}{5} B$$

$$\int \frac{s^4 ds}{p^7} = -\frac{4u}{3p^3} - \frac{8u^3-4u}{5p^5} + \frac{s-u}{(1-u^2)p} + \frac{(8u^2-2)(s-u)}{3} A + \frac{(8u^4-8u^2+1)(s-u)}{5} B$$

$$\int \frac{s^5 ds}{p^7} = -\frac{1}{p} - \frac{12u^2-2}{3p^3} - \frac{16u^4-12u^2+1}{5p^5} + \frac{5u(s-u)}{(1-u^2)p} + \frac{10u(2u^2-1)(s-u)}{3} A + \\ + \frac{(16u^5-20u^3+5u)(s-u)}{5} B$$

$$\int \frac{s^6 ds}{p^7} = \log(p+s-u) - \frac{6u}{p} - \frac{32u^3-12u}{3p^3} - \frac{32u^5-32u^3+6u}{5p^5} + \frac{(18u^2-3)(s-u)}{(1-u^2)p} + \\ + \frac{(48u^4-36u^2+3)(s-u)}{3} A + \frac{(32u^6-48u^4+18u^2-1)(s-u)}{5} B.$$

$$\lambda^2+\mu^2=\zeta,\quad \varkappa^2=\lambda^2+\mu^2+\nu^2,\quad u=\lambda\cos\vartheta+\mu\sin\vartheta,\quad \therefore\ \nu=\sqrt{\varkappa^2-\zeta}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\varkappa-u} = \frac{2\pi}{\nu}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{(\varkappa-u)^2} = -\frac{\partial}{\partial\varkappa}\frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi\varkappa}{\nu^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{(\varkappa-u)^3} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varkappa}\frac{2\pi\varkappa}{\nu^3} = -\frac{\pi}{\nu^3} + \frac{3\pi\varkappa^2}{\nu^5}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^2} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi\lambda}{\nu^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^2} = \frac{\partial}{\partial\mu}\frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi\mu}{\nu^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^3} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varkappa}\frac{2\pi\lambda}{\nu^3} = \frac{3\pi\lambda\varkappa}{\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^3} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varkappa}\frac{2\pi\mu}{\nu^3} = \frac{3\pi\mu\varkappa}{\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{\varkappa-u} = \int_\varkappa^\infty \frac{2\pi\lambda}{\nu^3}\, d\varkappa = \frac{2\pi\lambda}{\zeta}\left(\frac{\varkappa}{\nu} - 1\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\varkappa-u} = \int_\varkappa^\infty \frac{2\pi\mu}{\nu^3}\, d\varkappa = \frac{2\pi\mu}{\zeta}\left(\frac{\varkappa}{\nu} - 1\right).$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^2} = \frac{2\pi(\mu^2-\lambda^2)}{\zeta^2}\left(\frac{\varkappa}{\nu} - 1\right) + \frac{2\pi\lambda^2\varkappa}{\zeta\nu^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta\sin\vartheta}{(\varkappa-u)^2}\, d\vartheta = -\frac{4\pi\lambda\mu}{\zeta^2}\left(\frac{\varkappa}{\nu} - 1\right) + \frac{2\pi\lambda\mu\varkappa}{\zeta\nu^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^2} = \frac{2\pi(\lambda^2-\mu^2)}{\zeta^2}\left(\frac{\varkappa}{\nu} - 1\right) + \frac{2\pi\mu^2\varkappa}{\zeta\nu^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^3}=\frac{\pi}{\nu^3}+\frac{3\pi\lambda^2}{\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^3}=\frac{3\pi\lambda\mu}{\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^3}=\frac{\pi}{\nu^3}+\frac{3\pi\mu^2}{\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\vartheta\, d\vartheta}{\varkappa-u}=\frac{2\pi(\lambda^2-\mu^2)\varkappa}{\zeta^2}\left(\frac{\varkappa}{\nu}-1\right)+\frac{2\pi\mu^2}{\zeta\nu}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta}{\varkappa-u}=\frac{4\pi\lambda\mu\varkappa}{\zeta^2}\left(\frac{\varkappa}{\nu}-1\right)-\frac{2\pi\lambda\mu}{\zeta\nu}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{\varkappa-u}=\frac{2\pi(\mu^2-\lambda^2)\varkappa}{\zeta^2}\left(\frac{\varkappa}{\nu}-1\right)+\frac{2\pi\lambda^2}{\zeta\nu}.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^2}=\frac{4\pi\lambda\varkappa}{\zeta^3}(3\mu^2-\lambda^2)\left(\frac{\varkappa}{\nu}-1\right)+\frac{2\pi\lambda(\lambda^2-3\mu^2)}{\zeta^2\nu}+\frac{2\pi\lambda^3}{\zeta\nu^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^2}=\frac{4\pi\mu(\mu^2-3\lambda^2)}{\zeta^3}\varkappa\left(\frac{\varkappa}{\nu}-1\right)+\frac{2\pi\mu(3\lambda^2-\mu^2)}{\zeta^2\nu}+\frac{2\pi\lambda^2\mu}{\zeta\nu^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^2}=\frac{4\pi\lambda(\lambda^2-3\mu^2)}{\zeta^3}\varkappa\left(\frac{\varkappa}{\nu}-1\right)+\frac{2\pi\lambda(3\mu^2-\lambda^2)}{\zeta^2\nu}+\frac{2\pi\lambda\mu^2}{\zeta\nu^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^2}=\frac{4\pi\mu\varkappa}{\zeta^3}(3\lambda^2-\mu^2)\left(\frac{\varkappa}{\nu}-1\right)+\frac{2\pi\mu(\mu^2-3\lambda^2)}{\zeta^2\nu}+\frac{2\pi\mu^3}{\zeta\nu^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^3}=\frac{2\pi\lambda}{\zeta^3}(\lambda^2-3\mu^2)\left(\frac{\varkappa}{\nu}-1\right)-\frac{\pi\lambda(3\mu^2-\lambda^2)\varkappa}{\zeta^2\nu^3}+\frac{3\pi\lambda^3\varkappa}{\zeta\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta}{(\varkappa-u)^3}=\frac{2\pi\mu(3\lambda^2-\mu^2)}{\zeta^3}\left(\frac{\varkappa}{\nu}-1\right)+\frac{\pi\mu(\mu^2-3\lambda^2)\varkappa}{\zeta^2\nu^3}+\frac{3\pi\lambda^2\mu\varkappa}{\zeta\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\sin^2\vartheta d\vartheta}{(\varkappa-u)^3}=\frac{2\pi\lambda(3\mu^2-\lambda^2)}{\zeta^3}\left(\frac{\varkappa}{\nu}-1\right)+\frac{\pi\lambda(\lambda^2-3\mu^2)\varkappa}{\zeta^2\nu^3}+\frac{3\pi\lambda\mu^2\varkappa}{\zeta\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3\vartheta d\vartheta}{(\varkappa-u)^3}=\frac{2\pi\mu}{\zeta^3}(\mu^2-3\lambda^2)\left(\frac{\varkappa}{\nu}-1\right)+\frac{\pi\mu(3\lambda^2-\mu^2)}{\zeta^2\nu^3}\varkappa+\frac{3\pi\mu^3\varkappa}{\zeta\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3\vartheta d\vartheta}{\varkappa-u}=\frac{2\pi\lambda(\lambda^2-3\mu^2)(\nu\varkappa-\varkappa^2)}{\zeta^3}+\frac{2\pi\lambda^3\varkappa}{\zeta^2\nu}-\frac{\pi\lambda(\lambda^2+3\mu^2)}{\zeta^2}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\vartheta\sin\vartheta d\vartheta}{\varkappa-u}=\frac{2\pi\mu(3\lambda^2-\mu^2)}{\zeta^3}(\nu\varkappa-\varkappa^2)+\frac{2\pi\lambda^2\mu\varkappa}{\zeta^2\nu}+\frac{\pi\mu(\lambda^2-\mu^2)}{\zeta^2}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\sin^2\vartheta d\vartheta}{\varkappa-u}=\frac{2\pi\lambda(3\mu^2-\lambda^2)}{\zeta^3}(\nu\varkappa-\varkappa^2)+\frac{2\pi\lambda\mu^2\varkappa}{\zeta^2\nu}+\frac{\pi\lambda(\mu^2-\lambda^2)}{\zeta^2}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3\vartheta d\vartheta}{\varkappa-u}=\frac{2\pi\mu(\mu^2-3\lambda^2)(\nu\varkappa-\varkappa^2)}{\zeta^3}+\frac{2\pi\mu^3\varkappa}{\zeta^2\nu}-\frac{\pi\mu(\mu^2+3\lambda^2)}{\zeta^2}.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^4\vartheta d\vartheta}{(\varkappa-u)^2}=6\pi\left[\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^4}-\frac{1}{\zeta^2}\right](\nu\varkappa-\varkappa^2)+\frac{4\pi\lambda^2(3\mu^2-\lambda^2)\varkappa}{\zeta^3\nu}+\frac{2\pi\lambda^4\varkappa}{\zeta^2\nu^3}-\frac{3\pi}{\zeta}+\frac{4\pi\lambda^2}{\zeta^2}+\frac{8\pi\lambda^2\mu^2}{\zeta^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3\vartheta\sin\vartheta d\vartheta}{(\varkappa-u)^2}=\frac{24\pi\lambda\mu}{\zeta^4}(\mu^2-\lambda^2)(\nu\varkappa-\varkappa^2)+\frac{2\pi\lambda\mu}{\zeta^3\nu}(3\mu^2-5\lambda^2)\varkappa+\frac{2\pi\lambda^3\mu\varkappa}{\zeta^2\nu^3}+\frac{2\pi\lambda\mu(3\mu^2-\lambda^2)}{\zeta^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta d\vartheta}{(\varkappa-u)^2}=\frac{\pi}{\zeta}\left(1-\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}\right)\left[1+\frac{2\varkappa}{\nu}+\frac{6(\nu\varkappa-\varkappa^2)}{\zeta}\right]+\frac{2\pi\lambda^2\mu^2\varkappa}{\zeta^2\nu^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\sin^3\vartheta d\vartheta}{(\varkappa-u)^2}=\frac{24\pi\lambda\mu}{\zeta^4}(\lambda^2-\mu^2)(\nu\varkappa-\varkappa^2)+\frac{2\pi\lambda\mu}{\zeta^2\nu}(3\lambda^2-5\mu^2)\varkappa+\frac{2\pi\lambda\mu^3\varkappa}{\zeta^2\nu^3}+\frac{2\pi\lambda\mu}{\zeta^3}(3\lambda^2-\mu^2)$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^4\vartheta d\vartheta}{(\varkappa-u)^2}=6\pi\left[\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^4}-\frac{1}{\zeta^2}\right](\nu\varkappa-\varkappa^2)+\frac{4\pi\mu^2}{\zeta^3\nu}(3\lambda^2-\mu^2)\varkappa+\frac{2\pi\mu^4\varkappa}{\zeta^2\nu^3}-\frac{3\pi}{\zeta}+\frac{4\pi\mu^2}{\zeta^2}+\frac{8\pi\lambda^2\mu^2}{\zeta^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^4\vartheta d\vartheta}{(\varkappa-u)^3}=6\pi\left[\frac{1}{\zeta^2}-\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^4}\right]\varkappa\left(\frac{\varkappa}{\nu}-1\right)+\frac{3\pi}{\zeta\nu}\left[\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}-1\right]+\frac{6\pi\lambda^2\mu^2}{\zeta^2\nu^3}+\frac{3\pi\lambda^4}{\zeta\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{(\varkappa - u)^3} = \frac{24\pi\lambda\mu}{\zeta^4}(\lambda^2 - \mu^2)\varkappa\left(\frac{\varkappa}{\nu} - 1\right) + \frac{12\pi\lambda\mu(\mu^2 - \lambda^2)}{\zeta^3 \nu} + \frac{3\pi\lambda\mu(\mu^2 - \lambda^2)}{\zeta^2\nu^3} + \frac{3\pi\lambda^3\mu}{\zeta\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta d\vartheta}{(\varkappa - u)^3} = \frac{6\pi}{\zeta^2}\left(\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2} - 1\right)\varkappa\left(\frac{\varkappa}{\nu} - 1\right) + \frac{3\pi}{\zeta\nu}\left(1 - \frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}\right) + \frac{\pi}{\nu^3}\left(1 - \frac{6\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}\right) + \frac{3\pi\lambda^2\mu^2}{\zeta\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \vartheta \sin^3 \vartheta d\vartheta}{(\varkappa - u)^3} = \frac{24\pi\lambda\mu}{\zeta^4}(\mu^2 - \lambda^2)\varkappa\left(\frac{\varkappa}{\nu} - 1\right) + \frac{12\pi\lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2)}{\zeta^3 \nu} + \frac{3\pi\lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2)}{\zeta^2\nu^3} + \frac{3\pi\lambda\mu^3}{\zeta\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 \vartheta d\vartheta}{(\varkappa - u)^3} = 6\pi\left[\frac{1}{\zeta^2} - \frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^4}\right]\varkappa\left(\frac{\varkappa}{\nu} - 1\right) + \frac{3\pi}{\zeta\nu}\left[\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2} - 1\right] + \frac{6\pi\lambda^2\mu^2}{\zeta^2\nu^3} + \frac{3\pi\mu^4}{\xi\nu^5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 \vartheta d\vartheta}{\varkappa - u} = \frac{2\pi}{\zeta^2}\left(\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2} - 1\right)(\varkappa^3 - \nu^3) - \frac{4\pi\lambda^2(3\mu^2 - \lambda^2)\nu}{\zeta^3} - \frac{\pi}{\zeta^3}(\lambda^4 + 6\lambda^2\mu^2 - 3\mu^4)\varkappa + \frac{2\pi\lambda^4}{\zeta^2\nu}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{\varkappa - u} = \frac{8\pi\lambda\mu}{\zeta^4}(\mu^2 - \lambda^2)(\varkappa^3 - \nu^3) - \frac{2\pi\lambda\mu(3\mu^2 - 5\lambda^2)\nu}{\zeta^3} + \frac{2\pi\lambda^3\mu}{\zeta^2\nu} - \frac{2\pi\lambda\mu}{\zeta^3}(3\mu^2 - \lambda^2)\varkappa$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta d\vartheta}{\varkappa - u} = \frac{\pi}{\zeta}\left(1 - \frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}\right)\left[\frac{2(\varkappa^3 - \nu^3)}{\zeta} - 2\nu - \varkappa\right] + \frac{2\pi\lambda^2\mu^2}{\zeta^2\nu}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \vartheta \sin^3 \vartheta d\vartheta}{\varkappa - u} = \frac{8\pi\lambda\mu}{\zeta^4}(\lambda^2 - \mu^2)(\varkappa^3 - \nu^3) - \frac{2\pi\lambda\mu(3\lambda^2 - 5\mu^2)\nu}{\zeta^3} + \frac{2\pi\lambda\mu^3}{\zeta^2\nu} - \frac{2\pi\lambda\mu(3\lambda^2 - \mu^2)\varkappa}{\zeta^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 \vartheta d\vartheta}{\varkappa - u} = \frac{2\pi}{\zeta^2}\left(\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2} - 1\right)(\varkappa^3 - \nu^3) - \frac{4\pi\mu^2(3\lambda^2 - \mu^2)\nu}{\zeta^3} - \frac{\pi}{\zeta^3}(\mu^4 + 6\lambda^2\mu^2 - 3\lambda^4)\varkappa + \frac{2\pi\mu^4}{\zeta^2\nu}.$$

$$\int_0^{2\pi} \log(\varkappa - u)d\vartheta = \int_\varkappa^\infty \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\varkappa - u}\right)d\varkappa d\vartheta + 2\pi\log\varkappa = 2\pi\int_\varkappa^\infty\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\nu}\right)d\varkappa + 2\pi\log\varkappa = 2\pi\log(\varkappa + \nu)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \log(\varkappa - u)d\vartheta = \frac{2\pi\varkappa}{\zeta}(\nu - \varkappa)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\vartheta \log(\varkappa - u)d\vartheta = \frac{2\pi\mu}{\zeta}(\nu - \varkappa)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \pi \log(\varkappa + \nu) + \frac{\pi}{\zeta^2}(\lambda^2 - \mu^2)\left(\varkappa\nu - \varkappa^2 + \frac{\zeta}{2}\right)$$

$$\int_5^{2\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \frac{\pi\lambda\mu}{\zeta} + \frac{2\pi\lambda\mu}{\zeta^2}\varkappa(\nu - \varkappa)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \pi \log(\varkappa + \nu) + \frac{\pi}{\zeta^2}(\mu^2 - \lambda^2)\left(\varkappa\nu - \varkappa^2 + \frac{\zeta}{2}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \frac{2\pi\lambda}{3\zeta^3}(\lambda^2 - 3\mu^2)(\nu^3 - \varkappa^3) + \frac{2\pi\lambda^3\nu}{\zeta^2} - \frac{\pi\lambda}{\zeta^2}(\lambda^2 + 3\mu^2)\varkappa$$

$$\int_9^{2\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \frac{2\pi\mu(3\lambda^2 - \mu^2)}{3\zeta^3}(\nu^3 - \varkappa^3) + \frac{2\pi\lambda^2\mu\nu}{\zeta^2} + \frac{\pi\mu(\lambda^2 - \mu^2)\varkappa}{\zeta^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin^2\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \frac{2\pi\lambda(3\mu^2 - \lambda^2)}{3\zeta^3}(\nu^3 - \varkappa^3) + \frac{2\pi\lambda\mu^2\nu}{\zeta^2} + \frac{\pi\lambda(\mu^2 - \lambda^2)\varkappa}{\zeta^2}$$

$$\int^{2\pi} \sin^3\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \frac{2\pi\mu}{3\zeta^3}(\mu^2 - 3\lambda^2)(\nu^3 - \varkappa^3) + \frac{2\pi\mu^3\nu}{\zeta^2} - \frac{\pi\mu}{\zeta^2}(\mu^2 + 3\lambda^2)\varkappa.$$

TABLE DES MATIÈRES.