

# ÜBER BOLZANOS NICHTDIFFERENZIERBARE STETIGE FUNKTION.

VON

GERHARD KOWALEWSKI

in DRESDEN.

In der Sitzung vom 16. Dezember 1921 ist der böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften eine höchst interessante Mitteilung des Herrn JAŠEK über Bolzanos wissenschaftlichen Nachlass vorgelegt worden. Daraus geht u. a. hervor, dass Bolzano schon vor dem Jahre 1834, also mehr als drei Jahrzehnte vor Weierstrass im Besitze eines ziemlich einfachen Verfahrens war, eine nirgends differenzierbare stetige Funktion zu konstruieren. In dem von Herrn Jašek ans Licht gezogenen Manuskript über Funktionenlehre sind die Beweise allerdings nicht mit aller Schärfe durchgeführt. Auch hat sich Bolzano damit begnügt, das Fehlen der Ableitung für eine zwar überall dichte, jedoch nur abzählbare Menge von Stellen wirklich zu konstatieren. Herr RYCHLÍK hat aber in einer an derselben Stelle erschienenen Arbeit (3. Februar 1922) gezeigt, wie man diese Lücken ausfüllen kann. Ich selbst habe in einer kurzen Note in den Leipziger Berichten (12. Juni 1922) ebenfalls zu Bolzanos bewundernswürdiger Leistung Stellung genommen und sein Verfahren geometrisch eingekleidet.

Bolzano benutzt eine besondere Grundoperation, durch die eine Strecke  $PQ$  in einen vierteiligen Streckenzug verwandelt wird. Er teilt  $PQ$  zunächst in die beiden Hälften  $PM$  und  $MQ$  und diese weiter in vier gleiche Teile  $PP_1$ ,  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ ,  $P_3M$  bzw.  $MQ_1$ ,  $Q_1Q_2$ ,  $Q_2Q_3$ ,  $Q_3Q$ . Nun wird  $Q_3$  durch Spiegelung an der Horizontalen des Punktes  $Q$  in  $Q'_3$  und  $P_3$  durch Spiegelung an der Horizontalen des Punktes  $M$  in  $P'_3$  übergeführt und der Streckenzug  $PP'_3MQ'_3Q$  gezeichnet. Im Übergange von der Strecke  $PQ$  zu dem Streckenzuge  $PP'_3MQ'_3Q$  besteht Bolzanos Grundoperation. Indem er auf die vier Strecken des aus  $PQ$  hergeleiteten Streckenzuges wieder die Grundoperation anwendet, erhält er einen  $4^2$ -teiligen Streckenzug, dessen einzelne Strecken von Neuem der Grundoperation unterworfen

werden, und so fort. Die so entstehenden Streckenzüge konvergieren nach einer Kurve, die auf eine horizontale  $x$ -Achse und eine vertikale  $y$ -Achse bezogen eine nirgends differenzierbare stetige Funktion darstellt.

Auffallend und durch nichts zu erklären ist es, warum Bolzano bei seiner Grundoperation gerade die *Vierteilung* der beiden Streckenhälften bevorzugt. Seine Konstruktion einer nirgends differenzierbaren stetigen Funktion gelingt nämlich ebenso gut, wenn man die beiden Streckenhälften  $PM$  und  $MQ$  nicht vierteilt, sondern *halbiert*, worauf dann die Halbierungspunkte an den Horizontalen der Punkte  $M$  bzw.  $Q$  gespiegelt werden. Hat Bolzano nicht gesehen, dass sein Verfahren unnötig kompliziert war? Ich halte es für ausgeschlossen, dass dies dem Scharfblick des genialen Mannes entgangen sein sollte, und habe mir eine andere Erklärung zurechtgelegt, die sich möglicherweise bei der weiteren Durchforschung der noch keineswegs vollständig durchmusterten, ja nicht einmal der Zeit nach geordneten Manuskriptschätze bestätigen wird. Wir wissen durch Herrn Jašek, dass Bolzano gewohnt war denselben Gegenstand auf verschiedene Weisen darzustellen und dass es wegen mangelnder Datierung der Manuskripte nicht selten schwer ist, die definitive Darstellung herauszuerkennen. So möchte ich nun glauben, dass jene Vierteilung der Streckenhälften aus einer andern Bearbeitung der ganzen Frage stammt, bei der sie sich von selbst aufdrängt. Ich möchte in vorliegender Note die Rekonstruktion dieses andern Gedankenganges, wie er mir vorschwebt, versuchen.

Jede Strecke von der Steigung  $s$  lässt sich (auf zwei Weisen) als geometrische Summe zweier Strecken von den Steigungen  $2s$  bzw.  $-2s$  darstellen. Handelt es sich z. B. um die Bildstrecke der komplexen Zahl  $x + iy$  oder  $x + isx$ , so kann man in der Tat  $x_1$  und  $x_2$  derart wählen, dass

$$x + isx = (x_1 + 2isx_1) + (x_2 - 2isx_2)$$

ist, und zwar findet man

$$x_1 = \frac{3x}{4}, \quad x_2 = \frac{x}{4}.$$

Die gewünschte Zerlegungsformel lautet somit, wenn wir statt  $sx$  wieder  $y$  schreiben,

$$(1) \quad x + iy = \left( \frac{3x}{4} + \frac{3iy}{2} \right) + \left( \frac{x}{4} - \frac{iy}{2} \right).$$

Man sieht, wie sich hier von selbst die Vierteilung des  $x$  einstellt. In Fig. 1 ist diese Zerlegung einer Strecke in zwei, wie ich sagen möchte, *doppelt so steile* Strecken zur Darstellung gebracht. Das eine Mal liegen beide Komponenten

oberhalb, das andre Mal beide unterhalb der betrachteten Strecke. Es gibt also für eine Strecke sozusagen eine *obere* und eine *untere* Zerlegung in zwei doppelt so steile Strecken. Die Ordinaten der Komponentenstrecken sind, wie die Formel (1) zeigt,  $\frac{3}{2}$  bzw.  $-\frac{1}{2}$  der Ordinate der ursprünglichen Strecke. Wenn man also eine gegebene Strecke zuerst halbiert und dann jede Hälfte in zwei doppelt so steile Strecken zerlegt, so werden deren Ordinaten  $\frac{3}{4}$  bzw.  $-\frac{1}{4}$  von der Ordinate der Ausgangsstrecke sein. Der Umstand, dass diese beiden Zahlen ihrem Betrage nach kleiner als 1 sind, ist für das Gelingen des von mir rekonstruierten Bolzanoschen Verfahrens von wesentlicher Bedeutung. Besonders klar übersieht man die Verhältnisse, wenn man jedesmal die Zerlegung der Streckenhälften in zwei *obere* doppelt so steile Komponenten bevorzugt. Der Gang des Verfahrens ist dann folgender:

Die Strecke  $PQ$  wird halbiert und jede Hälfte in zwei obere Strecken von doppelt so grosser Steilheit zerlegt. Dadurch entsteht ein viergliedriger Streckenzug  $y = \varphi_1(x)$ . Seine Strecken werden in derselben Weise behandelt wie  $PQ$ , wodurch man zu einem 4<sup>2</sup>-gliedrigen Streckenzug  $y = \varphi_2(x)$  gelangt, und so fort. Offenbar werden dann die 4<sup>n</sup> Strecken von  $y = \varphi_n(x)$  im Vergleich zur Ausgangsstrecke 2<sup>n</sup>-mal so steil sein. Ausserdem gilt für das ganze  $x$ -Intervall die Beziehung  $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ , weil wir uns konsequent für die *obere* Zerlegung in zwei doppelt so steile Strecken entschieden haben. Endlich ist aus der Konstruktion die Ungleichung

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) < \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} K$$

zu entnehmen, wobei  $K$  den Ordinatenbetrag der Strecke  $PQ$  bezeichnet. Dadurch ist die gleichmässige Konvergenz der Reihe

$$\varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + \dots$$

gesichert, also auch die Existenz und Stetigkeit der Bolzanoschen Grenzfunktion

$$\Phi(x) = \lim \varphi_n(x).$$

Man sieht nun sofort, dass  $\Phi(x)$  an allen Stellen, die Eckpunkte irgend eines der Streckenzüge  $y = \varphi_n(x)$  sind, nach rechts die Ableitung  $+\infty$ , nach

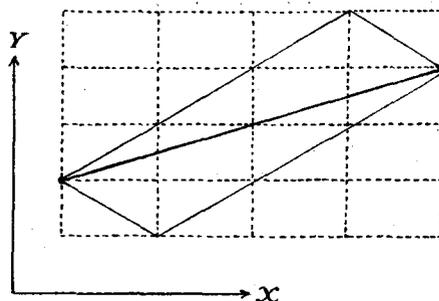


Fig. 1.

links die Ableitung  $-\infty$  hat. Ebenso ist an der Stelle  $P$  die rechtsseitige Ableitung  $+\infty$ , an der Stelle  $Q$  die linksseitige Ableitung  $-\infty$  vorhanden.

Betrachten wir irgend einen andern Punkt  $A$  der Kurve  $y = \Phi(x)$ , so wird er oberhalb einer bestimmten Strecke  $P_n Q_n$  des Streckenzuges  $y = \varphi_n(x)$  liegen, deren Länge mit wachsendem  $n$  nach Null konvergiert. Es kommt nun darauf an, ob es unter diesen Strecken  $P_n Q_n$ , die offenbar Sehnen der Bolzanoschen Kurve sind, unendlich viele steigende und zugleich unendlich viele fallende gibt oder nur eine Art von beiden. Je nachdem der erste oder der zweite Fall eintritt, sprechen wir von einem Kurvenpunkt  $A$  erster oder zweiter Klasse. Die Punkte jeder Klasse bilden eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums, wie man unschwer erkennt. Ist  $A$  ein Punkt erster Klasse und  $P_n Q_n$  aufsteigend, so wird, da sich  $A$  oberhalb  $P_n Q_n$  befindet,  $P_n A$  stärker aufsteigen als  $P_n Q_n$ .

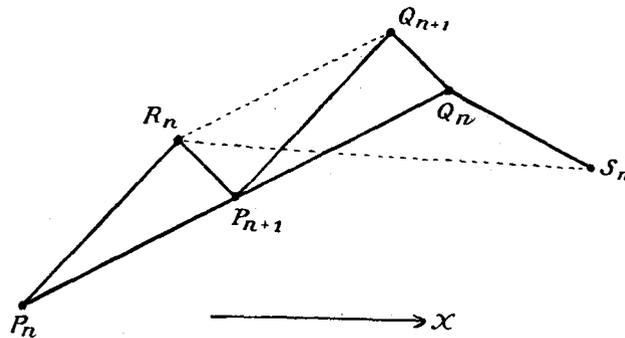


Fig. 2.

Wenn also für unendlich viele Werte von  $n$  diese Beziehung stattfindet, so ist damit gesagt, dass es an der Stelle  $A$  eine ausgezeichnete Folge linksseitiger Differenzenquotienten mit dem Grenzwert  $+\infty$  gibt. Analog lässt sich einsehen, dass dort eine ausgezeichnete Folge von Differenzenquotienten mit dem Grenzwert  $-\infty$  vorhanden ist, weil unendlich viele der Sehnen  $P_n Q_n$  unterhalb  $A$  absteigend laufen. Ist  $A$  ein Punkt zweiter Klasse, so werden entweder fast alle zugehörigen Sehnen  $P_n Q_n$  aufsteigend oder fast alle absteigend sein. Durch Umkehrung der  $y$ -Achse lässt sich der zweite auf den ersten Fall zurückführen, so dass es genügt, diesen allein näher zu betrachten. Zunächst ist wie bei den Punkten erster Klasse eine ausgezeichnete Folge linksseitiger Differenzenquotienten mit dem Grenzwert  $+\infty$  vorhanden. Um nun zu erkennen, dass an der Stelle  $A$  nicht etwa eine einheitliche Ableitung vom Werte  $+\infty$  auftritt, genügt der Anblick der Figur 2.

Sicher trifft sie für unendlich viele Werte von  $n$  zu, d. h. es liegt unendlich oft  $P_{n+1} Q_{n+1}$  über der rechten Hälfte von  $P_n Q_n$ . Wäre dem nicht so, dann

hätten die Sehnen  $P_n Q_n$ , von einem gewissen Index an, einen gemeinsamen Anfangspunkt, mit dem auch  $A$  zusammenfiel, während doch  $A$  kein Punkt  $P_n$  sein soll. In der Figur muss man sich  $A$  über der Strecke  $P_{n+1} Q_{n+1}$  liegend denken. Werden nun die Koordinaten der Strecke  $P_n S_n$  mit  $h_n, k_n$  bezeichnet, so hat nach Formel (1)  $P_n Q_n$  die Koordinaten  $\frac{3h_n}{4}, \frac{3k_n}{2}$  und  $P_n R_n$  die Koordinaten  $\frac{3^2 h_n}{2 \cdot 4^2}, \frac{3^2 k_n}{2 \cdot 2^2}$ , also  $R_n S_n = P_n S_n - P_n R_n$  die Koordinaten  $\frac{23}{32} h_n, -\frac{1}{8} k_n$ .

Die Steigung der Sehne  $R_n S_n$  wird mithin  $-\frac{4}{23} \frac{k_n}{h_n}$  sein und nach  $-\infty$  streben. Liegt der Punkt  $A$  *unendlich oft* oberhalb  $R_n S_n$ , so dass  $A S_n$  steiler läuft als  $R_n S_n$ , dann hat man an der Stelle  $A$  eine ausgezeichnete Folge rechtsseitiger Differenzenquotienten, die nach  $-\infty$  konvergiert. Es bleibt also nur noch zu erwägen, was geschieht, wenn der Punkt  $A$  in Figur 2, die für unendlich viele Werte von  $n$  zutrifft, *fast immer* unterhalb der Sehne  $R_n S_n$  liegt. Dann geht von  $A$  aus nach links die Sehne  $A R_n$ , steiler als  $S_n R_n$ , und nach rechts die Sehne  $A Q_{n+1}$ , steiler als  $R_n Q_{n+1}$ , d. h. steiler als  $P_n Q_n$ . Wir haben also an der Stelle  $A$  eine ausgezeichnete Folge linksseitiger Differenzenquotienten mit dem Grenzwert  $-\infty$  und eine ausgezeichnete Folge rechtsseitiger Differenzenquotienten mit dem Grenzwert  $+\infty$ .

Zusammenfassend wäre zu sagen, dass die Bolzanosche Funktion  $\Phi(x)$ , so wie wir sie hier rekonstruiert haben, im ganzen Innern des Intervalles nirgends eine Ableitung besitzt, dass sich vielmehr an jeder Stelle auf der einen Seite eine ausgezeichnete Folge von Differenzenquotienten mit dem Grenzwert  $+\infty$ , auf der anderen Seite eine solche mit dem Grenzwert  $-\infty$  nachweisen lässt. An den Grenzen des Intervalles sind einseitige Ableitungen mit den Werten  $+\infty$  bzw.  $-\infty$  vorhanden. Spiegelt man an der äussersten Ordinate links oder rechts und erweitert dann die Funktion zu einer periodischen, so zeigt sich das im Innern des alten Intervalles konstatierte Verhalten für alle Werte von  $x$ .