SUR LA THÉORIE DES GROUPES

PAR

M. DUPORT
à DIJON.

Bien que la théorie des groupes continus de transformation ait fait l'objet de nombreux travaux, il ne semble pas que l'on soit arrivé encore au résultat final que comporte cette étude. Il résulte en effet du caractère fonctionnel des équations qui définissent un groupe que ce groupe doit forcément être cherché parmi des expressions précises renfermant des fonctions arbitraires, le cas le plus défavorable étant celui où ces expressions seraient les solutions d'un système précis d'équations aux dérivées partielles.

L'analyse suivante où je me suis borné au cas d'un groupe d'une variable et un paramètre fera bien comprendre la partie générale des considérations précédentes. Elle met en plus en évidence un fait nouveau; c'est l'existence de groupes continus n'admettant pas la substitution unité, malgré un changement de variable quelconque effectué sur le paramètre.

Il s'agit de trouver une fonction $y = f(x, a)$ telle que l'on ait

$$f[f(x, a), b] = f(x, c),$$

c étant une fonction de a et de b.

Or ce problème est un cas particulier du suivant: exprimer que les équations

$$\begin{aligned} y &= f(x, a), \\ f_1(y, b) &= F(x, c), \\ c &= \varphi(a, b) \end{aligned} \tag{1}$$

se réduisent à deux.

On a

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial a} da,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial b} db = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial c} dc,$$

$$dc = \frac{\partial \varphi}{\partial a} da + \frac{\partial \varphi}{\partial b} db;$$

on en tire

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial a} da\right] + \frac{\partial f_1}{\partial b} db = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial c}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial a} da + \frac{\partial \varphi}{\partial b} db\right],$$

d'où séparément

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial c}\frac{\partial \varphi}{\partial a}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial b} = \frac{\partial F}{\partial c}\frac{\partial \varphi}{\partial b}.$$

Ces équations (2) doivent encore rentrer dans (1).

On en tire

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial c}} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial a}}$$

ou bien, en prenant les logarithmes

$$R(x\,,\,c) + S(a\,,\,b) = T(x\,,\,a).$$

Si on suppose dans cette équation c remplacé par sa valeur en a et b, elle doit devenir une identité. On en tire donc

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dT}{dx}.$$

Cette équation ne contenant que x, a et c doit être une identité. On aura donc

$$R = A(x) + B(c),$$

$$T = A(x) + D(a)$$

d'où

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial c}} = M(c)N(x), \qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial a}} = P(a)N(x).$$

On en tire

$$f(x\,,\,a) = \varphi[H(x) + K(a)], \qquad F(x\,,\,c) = \psi[H(x) + L(c)].$$

Les équations (1) peuvent alors être remplacées par les suivantes

$$(3) \qquad \begin{aligned} H(x) + K(a) - Q(y) \quad &= 0, \\ H(x) + L(c) + F_1(y\,,\,b) &= 0, \\ c &= \varphi(a\,,\,b). \end{aligned}$$

En retranchant la première de la seconde, on a

$$(4) \qquad F_1(y\,,\,b) + Q(y) + L(c) - K(a) = 0.$$

Si on suppose dans cette équation, c remplacé par sa valeur en a et b, elle doit être une identité; on a donc

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(y\,,\,b) + Q'(y) = 0$$

d'où

$$F_1(y\,,\,b) = -Q(y) - D(b)$$

et l'équation (4) devient

$$-D(b) + L(c) - K(a) = 0,$$

et doit être équivalente à

$$c = \varphi(a\,,\,b).$$

En résumé le système (1) est équivalent aux équations suivantes

$$(5) \qquad \begin{aligned} H(x) + K(a) - Q(y) &= 0, \\ -Q(y) - D(b) + H(x) + L(c) &= 0, \\ -D(b) + L(c) - K(a) &= 0 \end{aligned}$$

qui se réduisent bien à deux.

Supposons maintenant que de plus f, f_1 et F soient la même fonction des deux variables dont elles dépendent.

Il sera nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\varphi[H(y)+K(b)]=\varphi[H(x)+K(c)],$$

φ étant, on se rappelle, la fonction inverse de Q.

Cette équation peut s'écrire

$$\varphi[H(y)+K(b)]=\varphi[Q(y)+K(c)-K(a)]. \tag{6}$$

D'après cette équation, il faut d'abord que

$$K(c)-K(a)$$

soit une fonction de b. Donc l'équation

$$K(c)=K(a)+O(b).$$

doit être identique à

$$L(c)=K(a)+D(b)$$

On en tire

$$L(c)=K(c)-\alpha,$$

$$O(b)=D(b)+\alpha$$

α étant une constante. L'équation (6) devient

$$\varphi[H(y)+K(b)]=\varphi[Q(y)+D(b)+\alpha].$$

On en tire

$$\frac{H'(y)}{Q'(y)}=\frac{K'(b)}{D'(b)}=\beta$$

puis

$$H(y)=\beta Q(y)+\gamma,$$

$$K(b)=\beta D(b)+\delta$$

β, γ, δ étant de nouvelles constantes. Les équations (5) se reduisent à

$$Q(y)=\beta Q(x)+\gamma+\beta D(a)+\delta,$$

$$\beta D(c)-\alpha=\beta D(a)+D(b)$$

et l'équation (6) devient

$$\varphi[\beta Q(y)+\gamma+\beta D(b)+\delta]=\varphi[Q(y)+D(b)+\alpha].$$

Si on pose

$$z = Q(y) + D(b) + \alpha$$

cette équation devient

$$\varphi(\beta z + \gamma + \delta - \alpha\beta) = \varphi(z);$$

$\gamma + \delta$ peut être remplacé par une seule constante α'; on peut faire un changement de paramètre de façon à poser

$$D(a) = a', \qquad D(b) = b', \qquad D(c) = c'$$

et les équations d'un groupe à un paramètre et une variable peuvent s'écrire

$$Q(y) = \beta[Q(x) + a'] + \alpha',$$
$$\beta c' = b' + \beta a' + \alpha.$$

Dans ces équations la fonction φ inverse de Q satisfait à l'équation

$$\varphi(\beta z + \alpha' - \alpha\beta) = \varphi(z).$$

Les cas les plus remarquables sont:

1° $$\beta = 1, \qquad \alpha' = \alpha = 0;$$

on a la solution connue jusqu'ici où la fonction Q est complètement arbitraire.

2° $$\beta = -1, \qquad \alpha' = \alpha = 0$$

la fonction φ inverse de Q doit être paire.

Dans le cas général la solution peut, ainsi que me l'a fait remarquer M. E. Picard, s'écrire

$$Q(y) = Q_1(x) + \lambda,$$

Q et Q_1 étant deux déterminations d'une fonction z satisfaisant à l'équation

$$\varphi(z) = \varphi(mz + n),$$

m et n étant deux constantes arbitraires, λ étant le paramètre.