SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME D'UNE FONCTION MONOGÈNE

(Seconde note)

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

Nous avons introduit dans notre première note une nouvelle conception géométrique: *l'étoile.*

Dans le plan de la variable x, soit une aire engendrée de la manière suivante: autour d'un point fixe a on fera tourner une fois un vecteur (= demi-droite) l; sur chaque vecteur on déterminera d'une manière univoque un point, soit a_l, dont la distance au point fixe a sera plus grande qu'une quantité positive donnée, la même pour tous les vecteurs. Le point a_l pourra être situé à une distance finie ou infinie du point a. Dans le cas où la distance de a à a_l est finie, on exclura du plan des x la partie du vecteur qui s'étend de a_l à l'infini. *L'étoile* est le domaine qui reste après que l'on aura pratiqué toutes ces coupures dans le plan des x. Le point fixe a est désigné comme le *centre* de l'étoile. Il convient encore de nommer les points a_l les *sommets* de l'étoile ainsi que d'introduire la définition suivante.

Une étoile est *inscrite* dans une autre qui lui est *circonscrite*, si tous les points de la première étoile appartiennent à la seconde, et si les deux étoiles ont des sommets communs.

Pour résumer les résultats qui ont été obtenus dans la première note nous emploierons la notion *d'expression limite.* [1]

Soit $f_a(xyz\ldots)$ *pour un nombre infini de valeurs de* α *une fonction déterminée des variables* $xyz\ldots$. *Soit* α_0 *un point limite des* α. *Supposons que,* $xyz\ldots$ *étant un point donné dans le domaine des variables, il corresponde à chaque nombre positif* σ *un autre nombre positif* δ *tel que*

$$|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$$

tant que

$$|\alpha' - \alpha_0| < \delta, \qquad |\alpha'' - \alpha_0| < \delta.$$

Cette supposition faite, le symbole

$$\operatorname*{Lim}_{a=a_0} f_a(xyz\ldots)$$

a un sens parfaitement déterminé.

On dit que $\operatorname*{Lim}_{a=a_0} f_a(xyz\ldots)$ *est convergente au point* $xyz\ldots$.

En ayant $\alpha_0 = \infty$, *on n'a qu'à remplacer* $|\alpha'-\alpha_0| < \delta$, $|\alpha''-\alpha_0| < \delta$ *par*

$$\left|\frac{1}{\alpha'}\right| < \delta, \qquad \left|\frac{1}{\alpha''}\right| < \delta.$$

L'inégalité $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \delta$ *ayant lieu pour un domaine X des variables* $xyz\ldots$, *on dit que l'expression limite* $\operatorname*{Lim}_{a=a_0} f_a(xyz\ldots)$ *est uniformément convergente pour ce domaine.*

---

[1] M. PHRAGMÉN a fait en 1890 tout un cours à l'Université de Stockholm où il a pris pour base la notion de l'expression limite. Son point de départ était la définition suivante:

Soit $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *une suite infinie de nombres rationnels ayant la propriété suivante: Le nombre positif* δ *étant fixé, on pourra séparer de la suite un nombre fini de termes de telle sorte que la valeur absolue de la différence entre deux termes restants soit toujours plus petite que* δ.

La suite définit alors d'une manière univoque une grandeur qui est désignée par

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} u_n.$$

Il nous parait évident qu'on gagne en simplicité en basant la théorie des fonctions sur la conception d'expression limite. On embrasse par exemple ainsi sous un même point de vue les séries infinies, les produits infinis, les intégrales etc.

Nous pouvons maintenant donner la forme suivante à notre théorème I.

Théorème I. a. *Soit* $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ *une suite de constantes assujetties à la condition de Cauchy,*[1] *et désignons par* $G_n(x\,|\,a)$ *le polynome en* x

$$\sum_{\lambda_1=0}^{n^2}\sum_{\lambda_2=0}^{n^4}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}}\frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}}F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\,.\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

qui est formé à l'aide de ces constantes.

Considérons l'expression limite

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x\,|\,a).$$

Il existe une étoile A *de centre* a *qui est donnée d'une manière univoque les constantes* $F(a)F^{(1)}(a)\ldots F^{(\mu)}(a)\ldots$ *une fois fixées et qui possède par rapport à l'expression limite* $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x\,|\,a)$ *les propriétés suivantes:*

Cette expression est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de A, *mais n'est jamais uniformément convergente pour aucun continuum qui embrasse un sommet de* A. *Elle définit pour l'intérieur de* A *la branche* $FA(x)$ *d'une fonction monogène. Cette branche est régulière dans l'intérieur de* A, *mais devient singulière pour les sommets de* A. *Elle possède encore la propriété*

$$\left(\frac{d^\mu FA(x)}{dx^\mu}\right)_{x=a} = F^{(\mu)}(a); \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots.$$

La branche fonctionnelle $FA(x)$, *en même temps que par* $G_n(x\,|\,a)$, *peut être définie par une infinité d'autres polynômes*

$$g_n(x\,|\,a) = \sum_{(\nu)} c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a)\,.\,(x-a)^\nu$$

dans lesquels chacun des coefficients $c_\nu^{(n)}$, *les indices* ν *et* n *une fois fixés, est une quantité numérique donnée indépendante de* a, *de* $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ *et de* x, *et qui possèdent par rapport à* A *les mêmes propriétés que* $G_n(x\,|\,a)$.

---

[1] voir »Première note» page 43, 44.

Il faut observer que les propriétés qui ont été attribuées à l'expression limite $\lim\limits_{n=\infty} G_n(x\,|\,a)$ n'empêchent aucunement que cette expression pour un choix convenable des constantes $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ soit convergente en dehors de l'étoile A. De plus le cas n'est pas exclu où elle pourrait être uniformément convergente pour tout un continuum en dehors de A. Dans ce dernier cas, il serait possible qu'elle representât pour ce continuum une fonction analytique qui ne serait pas un prolongement de la branche $FA(x)$. Il arrivera pour des formes spéciales de l'étoile A qu'un continuum simplement connexe pourra être situé en partie en dedans, en partie en dehors de A sans embrasser en même temps un sommet de A. Et le cas n'est pas exclu où l'expression limite $\lim\limits_{n=\infty} G_n(x\,|\,a)$ est uniformément convergente pour un tel domaine. Elle représente alors pour ce domaine un prolongement de la branche $FA(x)$. Il peut encore arriver que $\lim\limits_{n=\infty} G_n(x\,|\,a)$ soit uniformément convergente pour un domaine linéaire composé par la partie d'un vecteur compris entre le centre a et un point situé en dehors de A. Si l'on arrivait à déterminer les constantes $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ de telle manière que cette propriété subsistât on aurait incontestablement en même temps une espèce de généralisation de la conception de fonction analytique, la fonction analytique pouvant être définie comme nous l'avons vue aussi bien par l'expression limite $\lim\limits_{n=\infty} G_n(x\,|\,a)$ que par la série de TAYLOR. La première définition serait plus générale; elle admettrait une espèce de prolongement linéaire de la fonction analytique qui conserverait des propriétés essentielles de la fonction.[1]

On se tromperait pourtant d'une manière singulière en croyant avoir trouvé dans cette observation la base d'une nouvelle théorie analytique, embrassant les fonctions analytiques comme cas spécial et ayant en même temps la limitation naturelle et fixe de l'ancienne théorie. Pour entrevoir la justesse de cette affirmation, il suffit d'observer qu'on peut remplacer, comme nous venons de le voir, d'une infinité de manières le polynome

---

[1] Voir à ce sujet l'article récent de M. BOREL: *Sur la généralisation du prolongement analytique* (Comptes rendus etc. 23 avril 1900, page 1115) qui a paru, ce mémoire étant déjà sous presse.

$G_n(x\,|\,a)$ par un autre polynôme $g_n(x\,|\,a)$ qui est absolument équivalent à $G_n(x\,|\,a)$ quand il s'agit seulement de définir les fonctions analytiques proprement dites, mais qui en diffère essentiellement quand il s'agit de donner une extension à cette théorie telle que celle dont nous venons de parler.

Si nous avons préféré dans notre première note représenter la branche $FA(x)$ par l'intermédiaire du polynôme $G_n(x\,|\,a)$ ou d'un polynôme semblable, malgré l'inconvénient qu'il y a dans cette mode de représentation, les raisons ont été les suivantes:

La généralisation pour un nombre quelconque de variables indépendantes est immédiate. Les coefficients du polynôme se présentent sous une forme extrêmement simple au point de vue formel. La démonstration de nos théorèmes est indépendante du choix des vecteurs. Ces vecteurs peuvent en réalité être des lignes courbes quelconques (voir page 48, première note) définies de telle manière que leur ensemble recouvre tout le plan en dehors du cercle appartenant aux constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$, ... sans que deux courbes spéciales se rencontrent jamais en dehors de ce cercle.

Il faut ajouter encore une raison, c'est que cette mode de représentation se rattache d'une manière intime à une généralisation extrêmement simple de la série de TAYLOR que nous voulons exposer dans cette seconde note.

En effet, parmi les étoiles qu'on peut inscrire dans l'étoile A il faut remarquer d'une manière spéciale le cercle C de centre a, dont la circonférence, en vertu de notre définition, passera toujours par le sommet de A le plus rapproché du centre. A ce cercle correspond l'expression limite

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

qui est connue sous le nom de *la série de Taylor*. La série de TAYLOR possède par rapport au cercle les mêmes propriétés que nous venons d'énoncer pour

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a).\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

par rapport à A, avec une seule exception très-importante. Chaque sommet de A était un point singulier de la branche fonctionnelle $FA(x)$. Ce n'est pas le cas pour C par rapport à $FC(x)$. On ne peut en général affirmer autre chose que ceci: il existe toujours au moins un sommet de C (= un point sur la circonférence de C) qui sera un point singulier de la branche $FC(x)$.

Mais la série de TAYLOR possède d'autre part par rapport à C une propriété qu'on ne peut pas en général attribuer, nous venons de le voir, à l'expression limite

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \, \underline{|\lambda_2} \cdots \underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a) \cdot \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

par rapport à A. Elle ne converge jamais pour aucun point en dehors de C.

Il existe maintenant entre C et A une infinité d'étoiles intermédiaires K dont chacune est circonscrite aux précédentes et qui sont encore telles qu'à chacune d'elles correspond une expression limite qui possède par rapport à l'étoile toutes les propriétés que nous avons énoncées pour la série de TAYLOR par rapport à C. Ces nouvelles expressions limite ont encore la propriété d'embrasser la série de TAYLOR comme cas spécial.

Il y a des classes différentes d'expressions qui remplissent ces conditions. Nous voulons faire dans cette note l'étude d'une de ces classes ayant un rapport spécial avec l'expression limite $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x \mid a)$.

On y parvient de la manière suivante:

Soit

$$f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} \qquad \left|\begin{array}{l} \lambda_1 = 0, 1, 2, \ldots, \infty \\ \lambda_2 = 0, 1, 2, \ldots, \infty \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n = 0, 1, 2, \ldots, \infty \end{array}\right|$$

une suite n fois multiple de fonctions d'un certain nombre de variables.

La définition de la série multiple

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$$

est en général établie en égalant cette série à une série simple dont les termes sont les différentes fonctions $f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ liées aux nombres entiers $0, 1, 2, \ldots$ d'après un principe donné.

Il est pourtant utile d'introduire pour l'étude de cette série un autre point de vue qui malgré sa grande simplicité et malgré le profit qu'on peut en tirer ne paraît pas avoir attiré autant qu'il le mérite l'attention des géomètres. [1]

Nous introduirons la définition suivante: Nous supposerons que les séries

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}} = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$$

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-2}} = \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty} f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} f_{\lambda_1\lambda_2}$$

$$f = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} f_{\lambda_1}$$

sont toutes convergentes pour une certaine valeur des variables. Nous dirons alors que *la série*

$$f = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$$

est une série n fois infinie qui est convergente pour cette valeur.

Nous supposerons encore que les séries

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}},\ f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-2}},\ \ldots,\ f_{\lambda_1\lambda_2},\ f_{\lambda_1},\ f$$

sont toutes uniformément convergentes pour un domaine commun K à l'intérieur du domaine d'existence des fonctions $f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$. Nous dirons alors que la série f est *une série n fois infinie qui est uniformément convergente pour le domaine K.*

Cette définition posée, nous pouvons énoncer le théorème suivant: [2]

---

[1] Voir: *Om den analytiska framställningen etc.* Första meddelandet. 11 Maj 1898. Vet. Ak. Öfversigt.

[2] Ce théorème est une conséquence immédiate d'un théorème démontré par WEIERSTRASS dans son mémoire: *Zur Functionenlehre*, § 2, Werke, Bd. 2, page 205—208.

Les fonctions $f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}\begin{vmatrix}\lambda_1=0,1,2,\ldots,\infty\\ \lambda_2=0,1,2,\ldots,\infty\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_n=0,1,2,\ldots,\infty\end{vmatrix}$ *étant, pour le continuum* K, *des fonctions analytiques uniformes et régulières des variables* $x_1x_2\ldots x_m$, *et la série*

$$f=\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty}f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}(x_1\ldots x_m)$$

étant une série n *fois infinie qui est uniformément convergente pour ce domaine* K, *la série représente toujours pour ce même domaine* K *une fonction uniforme régulière des variables* $x_1\ldots x_m$.

Il est facile de voir que la conception d'une série n fois infinie est très différente de celle qu'on a en général d'une série n fois multiple et que le domaine de convergence de la première série est en général beaucoup plus vaste que celui de la seconde.

Faisons par exemple

$$f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

On a, en désignant par ζ un point réel entre 0 et -1

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\nu}}f^{(\nu)}(\zeta)(x-\zeta)^{\nu}.$$

Cette égalité a lieu pour $|x-\zeta|\leqq|\zeta|$. Par suite

$$f(2\zeta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\nu}}f^{(\nu)}(\zeta)\zeta^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\nu}\,\underline{|\mu}}f^{(\nu+\mu)}(0)\zeta^{\nu+\mu}.$$

La série $\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\nu}\,\underline{|\mu}}f^{(\nu+\mu)}(0)\zeta^{\nu+\mu}$ étant regardée comme une série double dans le sens ordinaire de ces mots, on aura

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\nu}\,\underline{|\mu}}f^{(\nu+\mu)}(0)\zeta^{\nu+\mu}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\lambda}}f^{(\lambda)}(0)(2\zeta)^{\lambda}$$

et cette série sera donc convergente seulement pour $0 \geqq \zeta > -\frac{1}{2}$. Si au contraire la série $\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}\,\underline{|\mu}} f^{(\nu+\mu)}(0)\zeta^{\nu+\mu}$ est regardée comme une série deux fois infinie la convergence a lieu pour $0 \geqq \zeta > -1$. C'est par une application de notre conception de série n fois infinie dans le cas où il n'entre dans les fonctions $f_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ qu'une seule variable x, que nous obtiendrons une classe d'expressions limite jouissant des propriétés que nous avons énoncées précédemment.

Nous avons appris dans notre première note[1] à construire une étoile finie E située à l'intérieur de $\mathfrak{E}$ et ayant X à son intérieur, $\mathfrak{E}$ désignant une étoile quelconque et X un domaine fini situé à l'intérieur de $\mathfrak{E}$. Nous avons appris également à construire de la manière suivante une nouvelle étoile $E^{(n)}$ faisant partie de $\mathfrak{E}$ et ayant encore X à son intérieur, le nombre entier positif n étant pris suffisamment grand.[2]

On fixe un vecteur l issu du centre a. En désignant par r une quantité positive suffisamment petite et en limitant le vecteur à la longueur $(n-1)r$, il arrivera que tout cercle de rayon r décrit d'un point quelconque du vecteur limité comme centre fera partie de E. C'est en portant sur l la longueur $n\rho$, où ρ est la limite supérieure de r et en faisant tourner l une fois autour de a qu'on obtient $E^{(n)}$.

En désignant par α une quantité réelle positive et inférieure à l'unité et en remplaçant ρ par $\rho_1 = \alpha\rho$ nous avons obtenu une nouvelle étoile $E_1^{(n)}$ qui est située à l'intérieur de $E^{(n)}$ et qui embrasse X, α étant pris suffisamment rapproché de l'unité.[3]

Choisissons maintenant pour $\mathfrak{E}$ l'étoile A appartenant aux constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\nu)}(a)$, ... et faisons

$$
(1) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{x-a}{n} \\[2ex] \xi_\mu = a + \mu\dfrac{x-a}{n}; \qquad 0 < \mu \leqq n-1 \end{cases}
$$

---

[1] Page 50—51.
[2] Page 49.
[3] Page 50.

où x est un point de X. Nous obtenons[1]

$$(2)\qquad \begin{cases} FA(\xi_\mu + \xi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\xi^\lambda + \varepsilon, \\ \varepsilon = \sum_{\lambda=m+1}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\xi^\lambda. \end{cases}$$

En désignant par g la limite supérieure de $FA(x)$ quand x appartient à E et en nous appuyant sur les formules

$$\left| \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(\xi_\mu) \right| \leqq g\rho^{-\lambda},$$

$$\left| \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\xi^\lambda \right| \leqq g\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^\lambda = g\alpha^\lambda$$

nous obtenons encore[2]

$$(3)\qquad |\varepsilon| \leqq g\frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha}.$$

La série

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\xi^\lambda$$

est donc uniformément convergente pour le domaine X.

En se rappelant que la dérivée de la branche fonctionnelle $FA(x)$ a la même étoile de convergence que la fonction elle-même, on conclut que chaque série

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda+\nu)}(\xi_\mu)\xi^\lambda; \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

est encore uniformément convergente pour le domaine X.

---

[1] c. f. formules (20) et (21) de la première note. Dans ces formules au lieu de μ on a $n-1$, mais on voit qu'elles sont encore valables sous la forme donnée ici.

[2] c. f. formule (22) de la première note.

On aura donc:

$$
(4) \quad \left\{
\begin{aligned}
FA(x) &= \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\xi^{\lambda_1}, \\
F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1}) &= \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\xi^{\lambda_2}, \\
F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2}) &= \sum_{\lambda_3=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_3}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(\xi_{n-3})\xi^{\lambda_3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1})}(\xi_1) &= \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a).\xi^{\lambda_n}
\end{aligned}
\right.
$$

où les séries $\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\xi^{\lambda_1}\ldots, \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}(a)\xi^{\lambda_n}$ sont toutes uniformément convergentes pour le domaine X.

Le résultat que nous venons d'obtenir pourra se résumer ainsi:

Soit X un domaine fini quelconque à l'intérieur de l'étoile A appartenant aux constantes $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$. On pourra toujours fixer un nombre entier positif minimum $\bar{n}$ tel que, n étant un autre nombre entier positif qui ne sera pas plus petit que $\bar{n}$, la série n fois infinie

$$
(5) \qquad \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a).\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}
$$

en étant uniformément convergente pour le domaine X représente en même temps $FA(x)$ pour ce domaine.

Le domaine X étant situé à l'intérieur du cercle [1] appartenant aux constantes $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ on aura $\bar{n} = 1$, et la série (5) devient pour $n = \bar{n}$ une série une fois infinie qui n'est pas autre chose que la série de Taylor.

[1] Voir page 48 première note. Nous dirons alternativement *le cercle de convergence des constantes* $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ ou encore *le cercle des constantes* $F(a), F^{(1)}(a), \ldots F^{(\mu)}(a), \ldots$.

On voit que la série de TAYLOR

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a) \,.\, (x-a)^{\lambda}$$

a une étoile de convergence C (le cercle de convergence) tel que la série, en étant uniformément convergente pour chaque domaine en dedans de C ne converge jamais en dehors de C.

Existe-t-il pour la série générale

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \underline{|\lambda_2} \cdots \underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

un domaine de convergence de ce même caractère?

Nous verrons, les constantes $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ étant prises d'une manière quelconque que ce n'est pas le cas, sauf pour $n = 1, 2, 3$, mais que d'un autre côté on pourra former une nouvelle série n fois infinie qui pour n suffisamment grand représente $FA(x)$ dans un domaine quelconque à l'intérieur de A et qui, tout en embrassant comme cas special la série de TAYLOR, possède encore la propriété d'avoir un domaine de convergence de la nature que nous avons indiquée.

En effet, supposons que la série (5) soit convergente pour $x = x'$. Mettons $\xi' = \frac{x'-a}{n}$; $\xi'_\mu = a + \mu\xi'$. Chacune des séries

$$\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}(a)\,\xi'^{\lambda_n}\,,\ \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_{n-1}}} F^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1})}(\xi'_1)\,\xi'^{\lambda_{n-1}}\,,\ \ldots\,,\ \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi'_{n-1})\,\xi'^{\lambda_1}$$

étant convergente, il y a évidemment une branche fonctionnelle qui coïncide dans les environs de $x = a$ avec $FA(x)$ et qui reste uniforme et régulière à l'intérieur d'un domaine C' formé par l'ensemble des différents points qui appartiennent aux cercles ayant pour centre ξ'_μ; $\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, et pour rayon $|\xi'|$. Soit maintenant x'' un point situé entre a et x' sur le vecteur partant de a et passant par x'. Faisons

$$\xi'' = \frac{x''-a}{n}, \qquad \xi''_\mu = a + \mu\xi''$$

et désignons par C'' l'ensemble des différents points appartenant aux cercles ayant pour centre ξ''_μ et pour rayon $|\xi''|$. On voit que C'' est toujours situé à l'intérieur de C' si la distance minimum entre ξ''_{n-1} et la frontière de C' reste plus grande que $|\xi''|$, mais que C'' sort en partie de C' sitôt que cela n'a pas lieu. Le premier cas arrive toujours pour $n = 1, 2, 3$, le second peut toujours arriver pour $n > 3$ par l'effet d'un choix convenable de x''.

Donc on aura évidemment le théorème suivant:

La série n fois infinie

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}}F^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}$$

dans le cas général où les $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$ sont des constantes quelconques remplissant la condition de Cauchy, se comporte quant à la convergence d'une manière différente pour $n = 1, 2, 3$ et pour $n > 3$.

Dans le premier cas il existe un domaine de convergence K tel que la série est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de K, mais cesse de converger pour chaque point situé en dehors de K. On obtient ce domaine de convergence K en construisant l'étoile $E^{(n)}$ par rapport à A (voir page 191). *Dans le second cas au contraire la série* (5) *ne possède pas un pareil domaine de convergence K. Par l'effet d'un choix convenable des éléments $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$, ... il pourra arriver que la série converge en un point x' sans être convergente en un autre point x'' situé sur le vecteur entre a et x'.*

Avant d'aborder la question de former, au lieu de (5), une autre série qui, pour toutes les valeurs de n, les $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$ ... étant quelconques, garde la propriété de posséder un domaine de convergence K comme celui que nous avons obtenu jusqu'ici seulement pour les cas $n = 1, 2, 3$, nous ferons l'observation suivante.

Il est vrai que l'étoile $E^{(n)}$ $(n > 3)$ prise par rapport à A n'est pas un domaine de convergence K dans le cas général où les $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$, ... sont des constantes quelconques assujetties à la condition de Cauchy. Mais ces constantes étant choisies d'une manière spéciale, il arrive, même dans des cas très généraux, que l'étoile $E^{(n)}$ garde, pour toutes les valeurs de n, sa propriété d'être un domaine de convergence K.

Supposons par exemple le choix de ces éléments tel que l'étoile A n ait qu'un seul sommet fini, soit $x = b$. Supposons de plus, pour simplifier, que b soit un nombre réel positif et que le centre de l'étoile A soit zéro. On aura évidemment pour résultat que l'étoile $E^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ prise par rapport à A est dans ce cas un domaine de convergence tel que celui que nous avons désigné par K. Vu le rôle central qu'on pourra dans la théorie générale de la représentation analytique d'une fonction monogène faire jouer à la fonction

$$\frac{1}{1-x}$$

qui n'est qu'une fonction appartenant à une telle l'étoile A à un seul sommet fini, il ne sera pas sans intérêt d'exécuter pour le cas d'une étoile A à un seul sommet b la construction des étoiles $E^{(n)}$.

On le fait aisément de la manière suivante. Soit l un vecteur quelconque, et désignons par ξ, η les coordonnées d'un point sur l qui appartient à $E^{(n)}$. Posons

$$\xi = nu; \qquad \eta = nv.$$

La définition géométrique que nous avons donnée de $E^{(n)}$ pourra se transformer en la définition arithmétique que voici:

$$(mu - b)^2 + m^2v^2 > b^2 > u^2 + v^2; \qquad m = 1, 2, \ldots, n-1.$$

On aura donc

$$\xi \leqq n\frac{b}{2},$$

$$\left(\xi - \frac{mnb}{m^2-1}\right)^2 + \eta^2 > \left(\frac{nb}{m^2-1}\right)^2.$$

L'étoile $E^{(n)}$ devient la partie de l'intérieur d'un cercle ayant zéro pour centre et nb pour rayon qui se trouve, en même temps, à gauche et de la ligne droite menée perpendiculairement à l'axe réel par le point $x = n\frac{b}{2}$ et des circonférences ayant pour centres $\frac{mnb}{m^2-1}$ et pour rayons $\frac{nb}{m^2-1}$; $m = 2, 3, \ldots, n-1$. Les cas $n = 1, 2, 3, 4, 5$ se trouvent dessinés sur la planche jointe à cette note.

Revenons au problème qui consiste à former, au lieu de (5), une autre série n fois infinie qui possède toujours, les $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ étant des constantes quelconques remplissant la condition de Cauchy, un domaine de convergence K tel que la série en ne convergeant jamais en dehors de K soit uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de K.

Soit E une étoile de centre a. Nous construirons par rapport à E une nouvelle étoile $E^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ de la manière suivante. Fixons un vecteur l issu du centre a. Construisons un système de n circonférences ayant leurs centres $a, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ sur l et dont chacune passera toujours par le centre de la précédente. Nous désignerons les rayons par $r, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$. Les centres $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ seront choisis d'une manière telle que chaque circonférence coupera la précédente aux points où elle sera rencontrée par les droites issues du point a qui lui sont tangentes, et que l'on ait $|\eta_1 - a| = r_1 = r$. Il est évident que le rayon r étant pris suffisamment petit notre système de cercles fera toujours partie de E. C'est en portant sur l la longueur $|\eta_{n-1} - a| + r_{n-1}$, en substituant à r sa limite supérieure ρ, et en faisant tourner l une fois autour de a que nous obtenons $E^{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Le domaine formé par les différents points du système de cercles que nous avons construit autour de l possède la propriété importante que le domaine correspondant à r', r' étant une valeur de r plus petite que r'', est toujours situé à l'intérieur du domaine construit par rapport à r''. L'inconvénient qui existait dans l'étoile qui était désignée auparavant par $E^{(n)}$ a donc disparu et $E^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ étant construit par rapport à l'étoile A, on voit, par les mêmes considérations que celles employées précédemment, que la série n fois infinie

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\sum_{\lambda_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\lambda_1}\;\underline{|\lambda_2}\;\underline{|\lambda_3}\cdots\underline{|\lambda_n}} \tag{6}$$
$$\times F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots+\lambda_n)}(a)(\eta_{n-1}-\eta_{n-2})^{\lambda_1+\lambda_2}(\eta_{n-2}-\eta_{n-3})^{\lambda_3}\ldots(\eta_1-a)^{\lambda_n}$$

où

$$x = \eta_{n-1} + (\eta_{n-1} - \eta_{n-2}) = 2\eta_{n-1} - \eta_{n-2} \tag{7}$$

est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$, et que si la série converge pour un point x ce point ne pourra jamais être situé en dehors de $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

La définition géométrique que nous avons donnée de $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ nous montre encore d'une manière immédiate que $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ est inscrite dans l'étoile principale A, et que pour $n' > n$ l'étoile $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ est inscrite dans l'étoile $A^{\left(\frac{1}{n'}\right)}$.[1]

Nous voulons maintenant exprimer les quantités $\eta_1 \ldots \eta_{n-1}$ d'une manière arithmétique en fonction de la variable x. Désignons par α_μ l'angle comprise entre le vecteur l et la tangente menée de a à la circonférence ayant η_μ pour centre. Nous aurons

$$(8) \qquad \begin{cases} r_{\mu+1} = (r_1 + r_2 + \ldots + r_{\mu+1}) \sin \alpha_{\mu+1}, \\ r_\mu \quad = (r_1 + r_2 + \ldots + r_\mu) \sin \alpha_\mu, \\ \qquad 2 r_{\mu+1} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\alpha_{\mu+1}\right) = r_\mu. \end{cases}$$

D'où

$$\frac{r_{\mu+1}}{r_\mu} = \frac{\sin \alpha_{\mu+1}}{1 - \sin \alpha_{\mu+1}} \cdot \frac{1}{\sin \alpha_\mu} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\alpha_{\mu+1}\right)}.$$

Par conséquent, en vertu de

$$1 - \sin \alpha_{\mu+1} = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\alpha_{\mu+1}\right),$$

$$(9) \qquad \begin{cases} \sin \alpha_{\mu+1} = -\frac{1}{4}\sin^2 \alpha_\mu + \frac{1}{4}\sin \alpha_\mu \sqrt{8 + \sin^2 \alpha_\mu} \\ \sin \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

---

[1] Remarquons encore qu'il existe évidemment une infinité de solutions au probléme géométrique que nous avons résolu par la construction de l'étoile $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. On pourra employer d'autres systèmes de n cercles, et on pourra aussi employer des systèmes d'autres figures que le cercle.

L'essentiel pour nous est de montrer qu'il existe des séries n fois infinies qui sont la généralisation directe de la série de TAYLOR et qui possèdent une vraie étoile de convergence plutôt que d'étudier une forme spéciale de pareilles séries.

c'est à dire

$$\sin \alpha_1 = 1,$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{1}{2},$$

$$\sin \alpha_3 = \frac{\sqrt{33} - 1}{16}$$

et ainsi de suite.

Faisons encore l'observation qu'ayant une fois obtenu $\sin \alpha_{\mu+1}$ par la formule (9), le rayon $r_{\mu+1}$ s'obtient par la formule:

$$\frac{r_{\mu+1}}{r_\mu} = \frac{1}{2} \frac{\sin a_\mu}{\sin a_{\mu+1}}$$

ou

$$r_{\mu+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^\mu \frac{r}{\sin a_{\mu+1}}.$$

Le calcul de $\eta_{\mu+1} - \eta_\mu$ se fait immédiatement. On a

$$\frac{\eta_{\mu+1} - \eta_\mu}{x - a} = \frac{r_{\mu+1}}{r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1} + r_{n-1}} = \frac{r_{\mu+1}}{r_{n-1}} \cdot \frac{r_{n-1}}{r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1} + r_{n-1}}$$

$$= \frac{2^{n-\mu-2} \sin^2 a_{n-1}}{(1 + \sin a_{n-1}) \sin a_{\mu+1}}.$$

La série (6) devient par conséquent

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a) \,.\, (x - a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \tag{10}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} & c_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} = \\ & \left(\frac{\sin^2 a_{n-1}}{1 + \sin a_{n-1}}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sin a_{n-1}}\right)^{\lambda_1+\lambda_2}}{|\underline{\lambda_1}\, |\underline{\lambda_2}} \cdot \frac{\left(\frac{2}{\sin a_{n-2}}\right)^{\lambda_3}}{|\underline{\lambda_3}} \cdot \frac{\left(\frac{2^2}{\sin a_{n-3}}\right)^{\lambda_4}}{|\underline{\lambda_4}} \cdots \\ & \qquad \cdots \frac{\left(\frac{2^{\nu-2}}{\sin a_{n+1-\nu}}\right)^{\lambda_\nu}}{|\underline{\lambda_\nu}} \cdots \frac{(2^{n-2})^{\lambda_{n-1}+\lambda_n}}{|\underline{\lambda_{n-1}}\, |\underline{\lambda_n}}, \\ & c_{\lambda_1} = \frac{1}{|\underline{\lambda_1}}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Nous aurons donc

$$\begin{aligned}
c_{\lambda_1} &= \frac{1}{|\underline{\lambda_1}}, \\
c_{\lambda_1\lambda_2} &= \frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda_1+\lambda_2}, \\
c_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} &= \frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}\,|\underline{\lambda_3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}, \\
c_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} &= \frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}\,|\underline{\lambda_3}\,|\underline{\lambda_4}} \cdot \left(\frac{\sin\alpha_3}{1+\sin\alpha_3}\right)^{\lambda_1+\lambda_2} \cdot \left(\frac{(2\sin\alpha_3)^2}{1+\sin\alpha_3}\right)^{\lambda_3+\lambda_5}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Nous avons montré dans le précédent article qu'il existe, outre le cercle C et l'étoile A appartenant aux constantes $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ encore d'autres étoiles $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ intimement liées à ces mêmes constantes. Nous aurons l'occasion d'étudier, dans une note suivante, de nouvelles étoiles de ce caractère.

Dans la détermination de toutes ces étoiles entre un élément arbitraire qui n'existe pas pour l'étoile A. C'est pourquoi il sera convenable d'appeler cette étoile soit *l'étoile A appartenant aux constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $\ldots$, $F^{(\mu)}(a)$, $\ldots$* comme nous l'avons fait dans la première note, soit *l'étoile principale des constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $\ldots$, $F^{(\mu)}(a)$, $\ldots$.*

Le résultat que nous venons d'obtenir peut être résumé au moyen du théorème suivant:

Théorème 3. *Soient $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, $\ldots$ des constantes quelconques assujetties à la condition de Cauchy, et soit*

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\,.\,(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

une série n fois infinie où $c_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ désigne certains coefficients numériques indépendants des constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, $\ldots$ ainsi que de a et de x.

On pourra toujours fixer ces coefficients en sorte que la série possède les propriétés suivantes:

Elle aura une étoile de convergence $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ telle que la série converge uniformément pour chaque domaine à l'intérieur de $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ mais ne converge jamais en dehors de $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. Cette étoile $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ est inscrite dans l'étoile principale des constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, ..., et, pour $n \geqq \bar{n}$, le nombre entier positif $\bar{n}$ étant pris suffisamment grand, elle renferme elle-même à son intérieur un domaine quelconque fini appartenant à l'intérieur de A.

L'étoile $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ est encore inscrite dans l'étoile $A^{\left(\frac{1}{n'}\right)}$ tant que $n < n'$.

L'égalité

$$(12) \qquad FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a) \,.\, (x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

a lieu partout à l'intérieur de $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. Pour $n = 1$ la série devient la série de Taylor.

On pourra facilement transformer les séries n fois infinies qui ont été employées dans cet article en des séries simples qui conservent en partie les mêmes propriétés. En effet en employant les mêmes considérations que dans notre premiére note on obtient facilement la proposition suivante:

Soient $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots,$ une suite de constantes assujetties à la condition de Cauchy, et soit l'étoile A de centre a l'étoile principale de ces constantes. Désignons par $G_m^{(n)}(x \mid a)$ le polynôme en x

$$\sum_{\lambda_1=0}^{m} \sum_{\lambda_2=0}^{m^2} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{m^n} \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \, \underline{|\lambda_2} \cdots \underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a) \,.\, \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

Il existe une étoile A_n inscrite dans A qu'on obtient en employant la construction qui a été indiquée page 191 (pour former $E^{(n)}$ par rapport à E) et qui possède par rapport à l'expression limite $\lim\limits_{m=\infty} G_m^{(n)}(x \mid a)$ la propriété suivante: Cette expression converge uniformément pour chaque domaine à l'intérieur de A_n et représente en même temps $FA_n(x)$.

On obtient le même énoncé en substituant à A_n l'étoile qu'on obtient par la construction de la page 197, si l'on substitue en même temps aux coeffi-

cients $\dfrac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}}\cdot\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$ *les coefficients* $c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ *donnés par les formules* (11) *et* (9).

Il y a une différence importante entre l'expression limite $\operatorname*{Lim}_{m=\infty} G_m^{(n)}(x\,|\,a)$ et l'expression limite $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x\,|\,a)$ dont nous avons parlé au commencement de cette note. Cette dernière expression ne pouvait jamais être uniformément convergente pour une continuum embrassant un sommet de l'étoile A. Pour l'expression limite $\operatorname*{Lim}_{m=\infty} G_m^{(n)}(x\,|\,a)$ au contraire nous pouvons seulement affirmer ceci: c'est qu'elle ne sera jamais uniformément convergente pour un continuum embrassant un sommet de A_n qui serait en même temps un sommet de A.

Quant aux imperfections que nous avons signalées pour l'expression limite $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x\,|\,a)$, elles existent évidemment *a fortiori* pour les expressions $\operatorname*{Lim}_{m=\infty} G_m^{(n)}(x\,|\,a)$.

L'inconvénient essentiel de $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} G_n(x\,|\,a)$ comme expression de la branche fonctionnelle $FA(x)$ était que cette expression pouvait avoir un sens en dehors de l'étoile A sans toutefois représenter un prolongement de cette branche.

C'est une imperfection qui n'existe plus pour les expressions

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\,.\,(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

par rapport aux étoiles $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

En étendant un peu la définition d'expression limite donnée au commencement de cette note, on aura pour la branche $FA(x)$ une représentation analytique ayant les mêmes propriétés que celles trouvées pour les expressions qui représentent $FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x)$.

En effet:

Pour un nombre infini de valeurs de α *soit* $f_\alpha(x, y, z, \ldots)$ *une fonction des variables* $x, y, z, \ldots$, *définie d'une manière univoque à l'intérieur d'un* *domaine K_a faisant lui-même partie d'un domaine K dont il se rapproche indéfiniment quand a se rapproche d'un point limite α_0.*

Supposons, $x, y, z, \ldots$, étant un point donné à l'intérieur de K, qu'à chaque nombre positif σ correspond un autre nombre positif δ tel que les fonctions $f_{a'}(x, y, z, \ldots)$, $f_{a''}(x, y, z, \ldots)$ aient un sens et qu'on ait $|f_{a'} - f_{a''}| < \sigma$ tant que $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$. Le symbole

$$\lim_{a=a_0} f_a(x, y, z, \ldots)$$

possède alors pour chaque point à l'intérieur de K un sens parfaitement déterminé.

On dit que $\lim\limits_{a=a_0} f_a(x, y, z, \ldots)$ converge au point $x, y, z, \ldots$.

Quand on a $\alpha_0 = \infty$ on remplacera $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$ par les inégalités $\left|\frac{1}{a'}\right| < \delta$, $\left|\frac{1}{a''}\right| < \delta$.

Quand on a l'inégalité $|f_{a'} - f_{a''}| < \sigma$ pour un domaine X à l'intérieur de K, on dit que l'expression limite $\lim\limits_{a=a_0} f_a(x, y, z, \ldots)$ converge uniformé- pour ce domaine.

La définition s'étend immédiatement à des expressions limites multiples. Il faut alors avoir égard aux observations que nous avons faites au sujet des séries multiples.

Rappelons encore la notion de l'étoile de convergence qui a été introduite dans cette note.

C'est lorsqu'entre une expression limite et une étoile K il y a un rapport tel que l'expression limite converge uniformément pour chaque domaine à l'intérieur de K, mais ne converge jamais pour un point en dehors de K, que nous avons désigné l'étoile K comme l'étoile de convergence de l'expression limite.

On peut maintenant énoncer le théorème suivant:

Théorème I. b. *Soient $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $\ldots$, $F^{(\mu)}(a)$, $\ldots$ une suite de constantes assujetties à la condition de Cauchy, et soit A l'étoile principale de ces constantes. Soit encore*

$$S_n(x \mid a) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a) \, . \, (x - a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

une série n fois infinie où $c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ désigne certains coefficients numériques indépendants des constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$, ... ainsi que de a et de x.

On pourra toujours déterminer ces coefficients en sorte que l'expression limite

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} S_n(x \mid a)$$

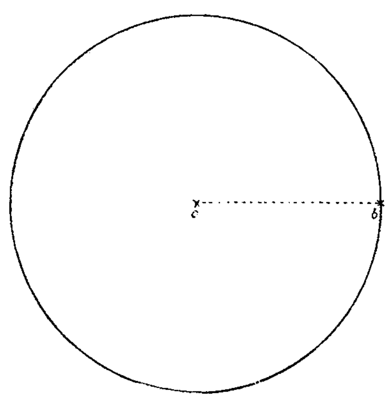
possède l'étoile A pour étoile de convergence et en même temps représente à l'intérieur de A la branche fonctionnelle $FA(x)$.

On s'est beaucoup occupé dans ces derniers temps de donner un sens aux séries divergentes. Il s'agit surtout alors de la série de TAYLOR qu'on veut définir en dehors de son cercle de convergence. C'est un problème qui est déjà résolu dans un certain sens par la conception du prolongement analytique. Ce problème est résolu dans une autre direction par nos différents théorèmes.

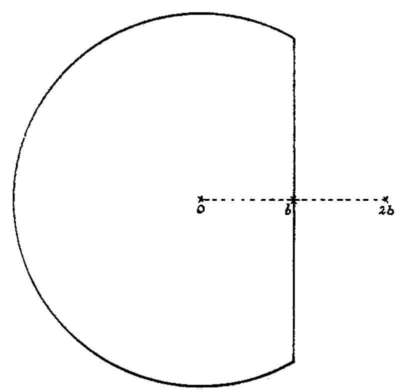
Nous désirons ici attirer tout particulièrement l'attention sur les deux théorèmes de cette deuxième note. En effet, il s'agit pour nous non seulement de trouver une expression analytique représentant la fonction dans un domaine qui varie depuis C jusqu'à A mais encore de trouver une expression qui, tout en étant valable à l'intérieur de ce domaine cesse de converger en dehors du domaine.

Nous donnerons dans des notes suivantes des méthodes pour résoudre ce problème au moyen d'expressions d'une nouvelle nature.

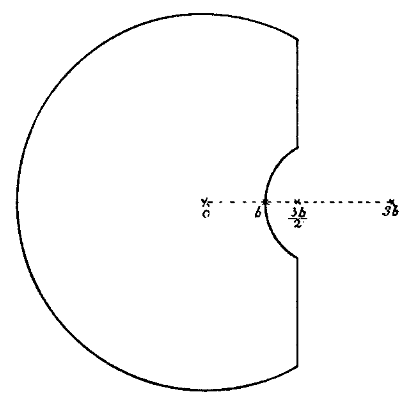
$n = 1$



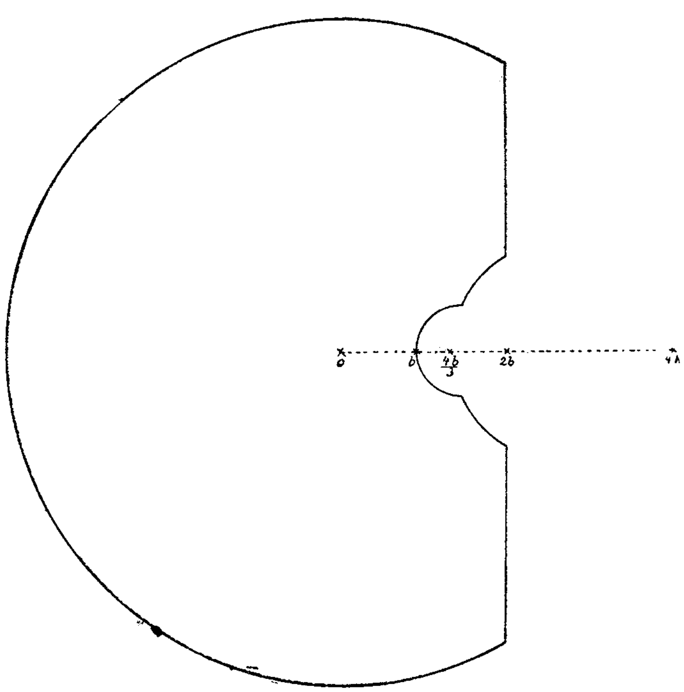
$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$