ÜBER DIE REGELFLÄCHEN MIT EINER LEITGERADEN.

VON

A. WIMAN

in UPSALA.

I.

Abbildung des speziellen linearen Komplexes.

1. In meiner Inauguraldissertation[1], wo es sich um eine Einteilung der Regelflächen 6. Grades nach der Beschaffenheit der Doppelkurve handelt, war der zu Grunde liegende Gedanke, dass ich einen möglichst einfachen die Regelfläche enthaltenden Komplex betrachtete. Ich versuchte dann eine Abbildung herzustellen, wobei dem Komplex bez. Punktraum im ersten System der Punktraum bez. ein Komplex von geraden Linien im zweiten System entsprach. Gelingt nämlich eine solche Abbildung, so wird ja die Regelfläche bez. ihre Doppelkurve in eine Kurve bez. die dem letzteren Komplexe zugehörige Bisekantenregelfläche dieser Kurve transformiert. Es erwies sich, dass in vielen Fällen die Behandlung durch diese Umformung des Problems wesentlich erleichtert wurde. Nun gibt es natürlich nicht für jeden algebraischen Komplex von geraden Linien eine Abbildung von der hier gewünschten Art. Man darf also nicht erwarten, dass die Methode für die allgemeinen Regelflächen jedes beliebigen Grades anwendbar ist. Ich halte es sogar für wahrscheinlich, dass es schon Regelflächen 7. Grades gibt, welche keinem Komplex von der in Rede stehenden Eigenschaft angehören.

---

[1] *Klassifikation af regelytorna af sjette graden* (Lund, 1892).

Für die Regelflächen 6. Grades $(=R_6)$ gilt es immer, dass dieselben entweder einem Tetraedralkomplexe oder einem der zugehörigen Unterarten angehören müssen. Dieser Komplex ist ja von 13 Parametern abhängig, und eine R_6 muss zu jedem quadratischen Komplexe gehören, der 13 gerade Linien mit ihr gemein hat. Nun wird ja durch die Pol- und Polarentheorie der Büschel von Flächen 2. Ordnung eine birationale involutorische Verwandtschaft zwischen einem Tetraedralkomplexe und dem Punktraum vermittelt. Jedenfalls lässt sich also unsere Methode auf solche Klassen von Regelflächen anwenden, welche in Tetraedralkomplexen enthalten sind.

Der einfachste Komplex ist der spezielle lineare, welcher eine Leitgerade besitzt. Tritt nun im obigen Büschel ein Ebenenpaar auf, so degeneriert offenbar der Tetraedralkomplex in einen speziellen linearen, der die Axe des Ebenenbüschels als Leitgerade hat. Gilt es nun *eigentliche* Flächen 2. Ordnung, so hat man 4 verschiedene Unterarten von Büscheln, zu denen ein Ebenenpaar gehört[1], und man bekommt diesen entsprechend *4 verschiedene Typen von Abbildungen des speziellen linearen Komplexes auf den Punktraum.* Da nach den Umständen jede von diesen Abbildungen Vorteile gewähren kann, so habe ich mich auch in meiner Dissertation mit allen 4 beschäftigt. Die Hauptrolle spielt aber dort *eine 5. Abbildung, bei welcher der Flächenbüschel aus lauter Kegeln besteht*, und wir werden uns hier ausschliesslich auf diese beschränken.

2. Als Gleichung des Kegelbüschels können wir wählen

$$(1) \qquad 2xy + \lambda(2yw + z^2) = 0.$$

Eine fundamentale Rolle bei der Transformation haben die geraden Linien $x = y = 0$ oder die Axe des Ebenenpaares und $y = z = 0$ oder der Ort der Kegelspitzen. Wir bezeichnen dieselben mit L und $\overline{L}$. Ebenso bezeichnen wir den Schnittpunkt $x = y = z = 0$ mit O und die gemeinschaftliche Ebene $y = 0$ mit E. Für einen Punkt x_1, y_1, z_1, w_1 erzeugen die Polarebenen den Büschel

$$(2) \qquad y_1x + x_1y + \lambda(w_1y + z_1z + y_1w) = 0.$$

Die entsprechende Gerade wird also durch die beiden Gleichungen

$$(3) \qquad y_1x + x_1y = w_1y + z_1z + y_1w = 0$$

bestimmt.

[1] Es gibt 14 verschiedene Typen von F_2-Büscheln. Eine Zusammenstellung findet man bei CLEBSCH-LINDEMANN, *Die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Klasse und der lineare Komplex*, p. 215—236 (Leipzig, 1891).

Wie es sein muss, bedeutet (3) eine gerade Linie, welche dem speziellen linearen Komplexe mit L als Achse angehört. Wir sehen auch, wie der dem Komplexe angehörigen Geradenbüschel durch den Punkt x_1, y_1, z_1, w_1 auf die Punktreihe der entsprechenden Linie abgebildet wird.

Es ist jetzt die Frage, wie die Geradenbüschel des Komplexes abgebildet werden, welche in einer beliebigen die Achse L nicht enthaltenden Ebene

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + \omega_1 w = 0 \tag{4}$$

liegen. Identifiziert man (2) und (4), so gelangt man zu den Bedingungen

$$\zeta_1 y_1 - \omega_1 z_1 = 0 = \eta_1 y_1 - \xi_1 x_1 - \omega_1 w_1. \tag{5}$$

Die Bedingungen für den entsprechenden Punkt x_1, y_1, z_1, w_1 sind also ganz ähnlich gebaut wie diejenigen in (3) für x, y, z, w. Nur hat hier $\overline{L}$ die Rolle als Achse übernommen. *Also haben wir eine involutorische eindeutige Transformation erhalten, bei welcher sowohl der Punktraum als der Ebenenraum je auf einen speziellen linearen Komplex abgebildet wird, wobei die Achsen dieser beiden Komplexe einander schneiden müssen.* Hiermit haben wir auch ein doppeltes Ziel erreicht. *Man kann in solcher Weise eine einem speziellen linearen Komplexe mit der Achse L zugehörige Regelfläche auf eine Kurve abbilden, dass sowohl die Doppelkurve als die Doppeldevelopable auf Bisekantenregelflächen übergeführt werden, welche je zu den Komplexen mit den Achsen L und $\overline{L}$ gehören.*

Denken wir uns die Gleichungen (3) in der Gestalt

$$u_1 x + u_2 y = v_2 y + v_3 z + v_4 w = 0, \tag{3'}$$

so erhalten wir in gewöhnlicher Weise als Koordinaten für die definierte gerade Linie

$$p_{12} = 0,\ p_{34} = y_1 w_1,\ p_{31} = x_1 y_1,\ p_{24} = -y_1 z_1,\ p_{14} = x_1 z_1,\ p_{23} = y_1^2. \tag{6}$$

Man findet für $y_1 = 0$, dass sämtliche Koordinaten mit Ausnahme von p_{14} verschwinden. Dies bedeutet, dass den Punkten der Ebene E die einzige Gerade $\overline{L}$ entspricht. In gleicher Weise erhalten wir, dass den Ebenen durch O die Gerade L entspricht. Hierbei hat man doch Ausnahmen, indem für die Geraden L und $\overline{L}$ auch p_{14} verschwindet. Man hat also für die Punkte dieser Linien *die Verhältnisse* der Koordinaten zu betrachten. Für $\overline{L}$ bekommt man dann

$p_{23} = p_{24} (= p_{12}) = 0$, $p_{34} : p_{31} = w_1 : x_1$. Dies bedeutet, dass einem Punkte von $\overline{L}$ der durch ihn gehende Geradenbüschel in der Ebene E entspricht. In gleicher Weise hat man für L $p_{31} = p_{23} (= p_{12}) = 0$, $p_{34} : p_{24} = w_1 : - z_1$. Den Punkten der Geraden L entsprechen somit die Geradenbüschel durch O in den durch $\overline{L}$ gehenden Ebenen. Nehmen wir endlich O oder den Punkt $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, so finden wir, indem wir das Verhältnis in Bezug auf p_{34} betrachten, $p_{31} = p_{23} = p_{24} (= p_{12}) = 0$. Hierdurch ist aber der Geradenbüschel durch O in der Ebene E definiert. Dies Resultat war ja auch nach den vorhergehenden Ergebnissen zu erwarten. Da man $p_{34} : p_{14} = w_1 y_1 : x_1 z_1$ hat, so sieht man, dass den Richtungen durch O, welche nicht in der Ebene E liegen, immer die Gerade L entspricht. Diese Resultate hätten wir natürlich auch geometrisch ohne Benutzung von Linienkoordinaten ermitteln können.

3. Wir suchen das Bild einer linearen Kongruenz. Kombinieren wir $p_{12} = 0$ mit einem Komplexe

$$a_{12} p_{34} + a_{24} p_{31} + a_{31} p_{24} + a_{23} p_{14} + a_{14} p_{23} = 0, \tag{7}$$

so erhalten wir nach (6)

$$a_{12} y w + a_{24} x y - a_{31} y z + a_{23} x z + a_{14} y^2 = 0, \tag{8}$$

also eine F_2, welche die beiden Fundamentalgeraden L und $\overline{L}$ enthält. Diese F_2 kann auch als Bild der zweiten Leitgeraden L_1 der Kongruenz betrachtet werden. Aus den Entwicklungen der vorigen Nummer ersehen wir, wie den beiden Erzeugendensystemen der F_2 die beiden Scharen von Strahlenbüscheln der Kongruenz entsprechen.

Betrachten wir jetzt eine Kurve von der Ordnung n mit μ Punkten auf $\overline{L}$ und ν Punkten auf $L (\mu + \nu \leqq n)$, wobei zu berücksichtigen ist, dass, falls einer dieser Punkte mit O zusammenfällt, derselbe nur einfach gezählt werden soll, falls die Tangente nicht zur Ebene E gehört, so können wir nach dem Grade der entsprechenden Regelfläche fragen. Diese Gradzahl ist offenbar mit der Anzahl der beweglichen Schnittpunkte mit den Flächen der Schar (8) identisch, also $2n - \mu - \nu$. Die überschiessende Zahl $n - \mu - \nu$ ist die Anzahl der Schnittpunkte der Kurve mit der Ebene E, welche ausserhalb der Geraden L und $\overline{L}$ liegen. Diese $n - \mu - \nu$ Punkte müssen aber nach der vorigen Nummer aus mit $\overline{L}$ zusammenfallenden Erzeugenden der Regelfläche herrühren. Als Umkehrung dieses Resultates erhalten wir für eine Regelfläche vom Grade n mit $\bar{L}$ als ν-facher Erzeugenden $(2\nu \leqq n)$ die Abbildung auf eine Kurve von der Ordnung $n-\nu$. *Will man nun eine zu einem speziellen linearen Komplexe gehörende Regelfläche mit Benutzung von dieser Abbildungsmethode studieren, so ist es mithin vorteilhaft als zweite Fundamentalgerade* $\bar{L}$ *eine möglichst vielfache Erzeugende zu wählen.*

Hat man in (7) $\alpha_{23} = 0$, so bedeutet dies, dass $\bar{L}$ eine Linie der Kongruenz darstellt. Nun wissen wir aus der vorigen Nummer, dass den Punkten von E die Gerade $\bar{L}$ entspricht. Hiermit stimmt überein, dass in diesem Falle aus dem linken Glied von (8) der Faktor y sich ausscheiden lässt, so dass, *wenn die zweite Fundamentalgerade* $\bar{L}$ *zu einer linearen Kongruenz gehört, letztere auf eine Ebene abgebildet wird.*

Für $\alpha_{12} = 0$ erhält man eine lineare Kongruenz, für welche die zweite Leitgerade sich unbegrenzt der ersten Leitgeraden L nähert. Als Bildfläche (8) hat man jetzt einen Kegel, für welchen O die Spitze darstellt. Hat man überdies $\alpha_{24}\alpha_{31} + \alpha_{23}\alpha_{14} = 0$, so besteht der durch $p_{12} = 0$ und (7) bestimmte Büschel aus lauter speziellen Komplexen. Die Kongruenz besteht dann aus einem Strahlenbündel und einem Strahlenfeld. Als zugehörige Träger haben wir einen Punkt auf L bez. eine Ebene durch L. Wie man aus den Entwicklungen der vorigen Nummer erwarten muss, wird der Strahlenbündel auf eine Ebene durch $\bar{L}$ und das Strahlenfeld auf eine Ebene durch L abgebildet.

4. Die Möglichkeiten betreffend die Eigenschaften einer Regelfläche lassen sich nun oft einfacher bei der Bildkurve überblicken. Dies steht damit im Zusammenhange, dass, wenn man dieselbe Bildkurve verschiedene Lagen in Bezug auf die Fundamentalelemente annehmen lässt, so kann man verschiedene Typen von Regelflächen erhalten. Besonders wollen wir hier die Torsalen betrachten. Bekanntlich gibt es zweierlei Arten von Torsalen, indem entweder die Torsalebene die Leitgerade enthält, oder der Torsalpunkt auf der Leitgeraden liegt. Nach der vorletzten Nummer erschliesst man, dass erstere auf solche Punkte der Bildkurve C abgebildet werden, deren Tangenten die Gerade L treffen, letztere dagegen auf Punkte, welche dieselbe Eigenschaft in Bezug auf die zweite Fundamentalgerade $\bar{L}$ besitzen. Man kann insbesondere nach den Eigenschaften des Bildpunktes fragen, falls man für $\bar{L}$ eine Torsalgerade gewählt hat. Es ist leicht ersichtlich, dass dann die Tangente in der Ebene E enthalten sein muss, und der Bildpunkt selbst im ersten Falle auf $\bar{L}$, im zweiten auf L liegen muss.

Eine gewöhnliche Rückkehrerzeugende enthält je eine Torsale von jeder der beiden Arten. Der Bildpunkt ist entweder ein Rückkehrpunkt oder, falls $\bar{L}$ mit der Rückkehrerzeugenden zusammenfällt, ein gewöhnlicher Punkt ausserhalb der Geraden L und $\bar{L}$, in welcher E die Bildkurve C berührt. Wie mehrere Torsalen sich in eine Erzeugende häufen können, lässt sich wohl kaum einfacher als durch das Studium über die Möglichkeiten für die Bildkurve überschauen. Man kann ja in einem Kurvpunkte eine Singularität haben, welche mit mehreren Rückkehrpunkten äquivalent ist. Überdies kann die Tangente entweder L oder $\bar{L}$ schneiden; dabei kann die Tangente noch stationär sein oder die oskulierende Ebene, welche auch stationär sein kann, eine von diesen Geraden enthalten.

Hier interessieren uns besonders solche Singularitäten, welche schon bei den Regelflächen 6. Grades auftreten und dabei Bedeutung für die Zusammensetzung der Doppelkurve oder der Doppeldevelopable erhalten können. Wir fragen nach der Bedeutung eines Doppelpunktes auf der Bildkurve C, dessen beide Tangenten entweder L oder $\bar{L}$ schneiden. In beiden Fällen bekommt man zwei zusammenfallende Torsalen, und zwar im ersten mit zusammenfallenden Torsalebenen durch die Leitgerade, im zweiten mit zusammenfallenden Torsalpunkten auf der Leitgeraden. Nimmt man diese Doppeltorsale als Fundamentallinie $\bar{L}$, so hat man als Abbildung zwei Punkte auf $\bar{L}$ bez. L, deren Tangenten in der Ebene E liegen. Wir können dieselben als *Doppeltorsale mit zusammenfallenden Ebenen* bez. *Doppeltorsale mit zusammenfallenden Punkten* charakterisieren. Diese beiden besonderen Arten von Doppeltorsalen sind offenbar zu einander reziprok. Nun ist es von Bedeutung, *dass erstere Art von Doppeltorsale offenbar die Ordnung der Restdoppelkurve mit 2 und die Klasse der Restdoppeldevelopable mit nur 1 herabsetzt. Das umgekehrte Verhältnis tritt natürlich bei der letzteren Art ein.* Wir finden aus diesem Beispiel, dass *bei den Regelflächen sehr wohl mehrfache Erzeugende auftreten können, welche einen verschiedenen Einfluss auf die Ordnung der Restdoppelkurve und auf die Klasse der Restdoppeldevelopable haben.*

Nun kommt der Fall, dass eine Tangente der Bildkurve durch O geht. Aus den vorhergehenden Entwicklungen wissen wir, dass einer Bisekante durch O ein Punkt der Restdoppelkurve auf der Leitgeraden entspricht. Wenn die Bisekante in eine Tangente übergeht, erhalten wir demnach eine Torsale mit dem Torsalpunkte auf der Leitgeraden. Diese Torsale wird offenbar sowohl für die Leitgerade als die Restdoppelkurve, also doppelt, gezählt. Nehmen wir nun an, es gebe einen Kegel mit der Spitze in O, der durch Bisekanten oder mehrfache Sekanten der Bildkurve C erzeugt wird. Ein solcher Kegel muss das Bild einer doppelten oder mehrfachen Kurve der Regelfläche bedeuten. Andererseits entsprechen den Erzeugenden des Kegels Punkte auf der Leitgeraden. *Man muss sich also die Sache so vorstellen, dass die fragliche doppelte oder mehrfache Kurve sich unmittelbar an die Leitgerade anschliesst, und dabei handelt es sich nicht, wie man leicht einsieht, um eine Regelfläche, welche einer linearen Kongruenz angehört.* Der Fall soll also nicht mit demjenigen mit zwei zusammenfallenden Leitgeraden verwechselt werden. Vielleicht lässt sich eine solche singuläre Leitgerade kurz als *mehrfache Leitgerade mit Berührung* charakterisieren. Den Punkten der Bildkurve auf einer Erzeugenden des Kegels entsprechen Erzeugende der Regelfläche, welche sowohl derselben Ebene durch die Leitgerade als demselben Punkte auf der Leitgeraden angehören. Dabei wird den Erzeugenden des Kegels, welche in einer Ebene durch $\overline{L}$ enthalten sind, derselbe Punkt auf der Leitgeraden zugeordnet; ebenso verhält es sich mit den Ebenen durch die Leitgerade und den Erzeugenden des Kegels, welche in einer und derselben Ebene durch die Fundamentalgerade L liegen.

Zuletzt kann es bekanntlich auch Torsalen geben, welche mit der Leitgeraden koinzidieren. Eine solche wird im Punkte O abgebildet und ist im einfachsten Falle mit zwei einfachen Torsalen äquivalent.

5. Mit ganz anderen Hilfsmitteln arbeitet W. L. Edge, der soeben eine grosse Arbeit über die Regelflächen von den Gradzahlen 4, 5, 6 veröffentlicht hat.[1] Einerseits betrachtet dieser Verfasser eine Regelfläche als eine Kurve auf der quadratischen Hyperfläche

$$p_{12}p_{34} + p_{31}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0 \tag{9}$$

im fünfdimensionalen Raume. Andererseits denkt er sich die Regelflächen als Projektionen von Normalregelflächen in höheren Räumen. Diese interessante und höchst sorgfältig ausgeführte Arbeit wird gewiss einen hohen Wert beibehalten, auch wenn dem Verfasser seine Absicht eine vollständige Aufzählung der verschiedenen Typen von Regelflächen 6. Grades zu geben nicht völlig gelungen sein mag. Offenbar hat Edge bei der Verfassung seiner Abhandlung keine Gelegenheit gehabt Kenntnis von meiner Dissertation zu nehmen; dieselbe wird auch nirgends zitiert.

Bei der Aufzählung der verschiedenen Typen von R_6 in meiner Dissertation

---

[1] *The theory of ruled surfaces* (Cambridge University Press, 1931).

habe ich als einziges Unterscheidungsmerkmal die Beschaffenheit der Doppelkurve benutzt. Dagegen hat Edge in gleichem Masse Rücksicht sowohl auf die Doppelkurve als auf die Doppeldevelopable genommen. Ohne Zweifel ist letzterer Standpunkt als der richtigere zu bezeichnen. Übrigens habe auch ich *im Texte*, wo ich es nötig fand, auf die verschiedenen Möglichkeiten für die Doppeldeveloppable aufmerksam gemacht. So habe ich z. B. die Fälle, wo eine Erzeugende sich mit einer Leitgeraden vereinigt, nur im Texte besonders angeführt. Bei dem anderen Einteilungsgrund, wo auch auf die Doppeldevelopable Rücksicht genommen wird, treten solche Fälle von selbst hervor. Am Ende des folgenden Abschnitts werde ich ganz kurz angeben, wie viele verschiedene Arten von R_6 man nach den Resultaten meiner Dissertation bekommt, wenn man den Prinzipien von Edge folgt.

Dass die Aufzählung der R_6 bei Edge unvollständig ist, hat in erster Instanz seinen Grund darin, dass bei ihm alle solche Typen fehlen, wo singuläre mehrfache Erzeugenden oder Leitgeraden von der in der vorigen Nummer behandelten Art auftreten. Dazu kommen noch Fälle ohne Leitgerade mit ähnlichen Singularitäten bei der Doppelkurve.[1] Die Schwierigkeit ist hier, dass die Aufmerksamkeit darauf gerichtet wird, dass solche Fälle existieren können, und nicht die eigentliche Aufsuchung der Fälle. In dieser Hinsicht verdient vielleicht erwähnt zu werden, wie ich bei der Ausarbeitung meiner Dissertation auf die besprochenen singulären Fälle aufmerksam wurde. Dies gelang mir ganz einfach durch die Notwendigkeit durchzudenken, welche Bedeutung gewissen Lagen der Bildkurve in Bezug auf die beiden Fundamentalgeraden zukommt.

Im nächsten Abschnitt behandle ich in einem allgemeineren Zusammenhange die R_6 mit sowohl zweifacher Leitgerade als mindestens einer zweifachen Erzeugenden. Wir werden also nicht das ganze Gebiet der R_6 mit einer Leitgeraden wieder aufnehmen. Die Abteilung, auf welche wir uns beschränken werden, ist wohl diejenige, bei welcher die Vorzüge unserer Methode am vorteilhaftesten hervortreten. Auch bekommt man dabei eine überraschend grosse Anzahl von Fällen, welche noch durch Betrachtung der reziproken R_6 verdoppelt wird. Gewisse andere Fälle von R_6 werde ich im 4. Abschnitt nach anderen Methoden beleuchten.

---

[1] Dies gilt sogar schon für die Regelflächen 5. Grades. Ich habe nämlich (Diss., p. 86) nachgewiesen, dass bei dem von Schwarz gegebenen Falle mit 3 doppelten Kegelschnitten 2 oder sogar alle 3 Kegelschnitte unmittelbar auf einander folgen können.

II.

R_n mit sowohl einer $(n-4)$-fachen Leitgeraden als einer $(n-4)$-fachen Erzeugenden.

6. Wenn wir die $(n-4)$-fache Erzeugende als zweite Fundamentalgerade $\overline{L}$ wählen, wird in allen Fällen die Regelfläche auf eine C_4 abgebildet, welche keinen Punkt mit der Fundamentalgeraden L gemein hat. Man hat nur die 4 Möglichkeiten $n = 5, 6, 7, 8$, und diese lassen sich dadurch unterscheiden, dass die Bildkurve C_4 mit $\overline{L}$ bez. 3, 2, 1, 0 Punkte gemein hat. Da wir die Fälle, wo die Regelfläche zu einer linearen Kongruenz gehört, ausser Acht lassen, kann keine ebene Kurve als Bildkurve auftreten. Es gibt daher nur die 3 Möglichkeiten:

A. *Die C_4 ist von der 2. Art;*
B. *Die C_4 hat einen Doppelpunkt;*
C. *Die C_4 ist vom Geschlechte $p = 1$.*

Betreffend die Doppelkurve, welche auf die Regelfläche der Bisekanten der C_4 von der Linie L aus abgebildet wird, so finden wir ihr Geschlecht P nach der bekannten Formel von ZEUTHEN, indem wir die Anzahl T der Torsalen berechnen, deren Torsalpunkte auf L liegen. Diese Anzahl T ist offenbar im allgemeinen gleich der Anzahl der Schnittpunkte von L mit der Doppeldevelopabeln der Bildkurve. Ist nun L eine σ-fache Leitgerade der genannten Bisekantenregelfläche, so erhält man

$$P = 1 + \frac{T}{2} - \sigma. \tag{10}$$

Diese Zahl wird doch jedesmal um eins reduziert, wenn L die fragliche Doppeldevelopable berührt. In einem solchen Falle erhält man nämlich für die Bisekantenregelfläche eine Doppeltorsale mit Vereinigung der Ebenen. Da die Torsalebene jetzt L enthält, so liegen die beiden zugehörigen Torsalpunkte auf der Restdoppelkurve. Wenn nun L diese Doppeldevelopable hinreichend oft berührt, so muss die Doppelkurve der ursprünglichen Regelfläche zerfallen.

Für $n=5$ hat man eigentlich blos mit dem Fall A zu tun. Eine besondere Möglichkeit für $n=6$ ist hervorzuheben, indem $\overline{L}$ für die Bisekantenregelfläche der C_4 eine Doppeltorsale von der eben besprochenen Art sein kann. Die doppelte Gerade der R_6 ist dann eine eben solche Doppeltorsale, durch welche die Ordnung der Restdoppelkurve mit 2 und die Klasse der Restdoppeldevelopabeln nur mit 1 herabgesetzt wird. Im Falle B gibt es auch die Möglichkeit, dass die beiden Tangenten im Doppelpunkte die Gerade L schneiden. Auch hiervon ist die Bedeutung eine Doppeltorsale mit zusammenfallenden Ebenen. Man sieht auch, dass für die R_6 diese beiden Möglichkeiten für Doppeltorsalen gleichzeitig eintreten können. In den Fällen B und C kann die Bildkurve auf einem Kegel 2. Grades mit der Spitze in O liegen. Doch muss offenbar dann n entweder $=6$ oder $=8$ sein.

In entsprechender Weise lässt sich die Untersuchung der Doppeldevelopabeln auf diejenige der Bisekantenregelfläche der Bildkurve von $\overline{L}$ aus zurückführen. Nur sind hier die Verhältnisse viel einfacher, wenn man $n=8$ ausnimmt. Vertauscht man die Rollen der Fundamentalgeraden L und $\overline{L}$, so erhält man die reziproken Flächen. Für $n=8$ gibt doch dies nichts neues.

Wir führen zunächst die Untersuchungen für $n=6$ aus. Daran werden sodann die entsprechenden Resultate für die anderen Gradzahlen angeknüpft.

A. **Die Bildkurve ist eine C_4 von der 2. Art.**

7. In diesem Falle ist die Bisekantenregelfläche, auf welche die Doppelkurve abgebildet wird, eine R_9; die Gerade L ist ja eine dreifache Leitgerade, und in jeder Ebene durch L liegen 6 Bisekanten. Da die Doppeldevelopable der C_4 vom Range 6 ist, so hat man nach (10) im allgemeinen $P=1$. Die Trisekantenregelfläche der C_4 ist bekanntlich eine Regelschar. Von diesen Trisekanten schneidet also L zwei, und diese werden auch Trisekanten für die R_9. Hieraus erhält man für $n=6$, 7, 8 zwei dreifache Punkte der Doppelkurve, durch welche je drei Erzeugende gehen. Für $n=5$ hat aber die Doppelkurve nur einen einzigen dreifachen Punkt, weil eine Trisekante mit $\overline{L}$ zusammenfällt, und diese bedeutet die Abbildung von den Schnittpunkten der drei anderen Erzeugenden der R_5, welche in der Ebene E liegen. Besondere Fälle lassen sich hier erhalten, indem L die F_2, welche die Trisekantenregelschar enthält, berühren kann, oder für $n=6$, 7, 8 eine Trisekante in E liegen kann, oder diese beiden Möglichkeiten kombiniert werden. Für $n=6$ wird die doppelte Erzeugende der Regelfläche von 2 einfachen Erzeugenden geschnitten, und hieraus erhält man noch 2 dreifache Punkte der R_6, welche doch nur gewöhnliche Doppelpunkte für die

Restdoppelkurve bedeuten. In gleicher Weise hat man für $n=7$ einen vierfachen Punkt auf der dreifachen Erzeugenden und bekommt hieraus einen dreifachen Punkt für die Restdoppelkurve. Da für $n=7$, 8 $\overline{L}$ nicht zur R_9 gehört, so hat in diesen Fällen die Doppelkurve die Ordnung 9. Für $n=5$ ist $\overline{L}$ eine dreifache Erzeugende der R_9, was mit der Ordnung 6 der Doppelkurve übereinstimmt. In dieser Nummer nehmen wir an, dass der Ausnahmefall für $n=6$ nicht eintritt, wo $\overline{L}$ eine mehr als einfache Erzeugende der R_9 bedeutet. Die Doppelkurve hat dann die Ordnung 8.

Ist die Bildkurve C_4 gegeben, so erhält man je nach der Lage von L verschiedene Eigenschaften für die Doppelkurve. Ist nämlich L mit 0, 1, 2, 3 Ebenen der Doppeldevelopabeln von C_4 inzident, so ergibt sich bez. $P=1$, 0, -1, -2. In den beiden letzteren Fällen muss mithin die Doppelkurve zerfallen. In dieser Hinsicht gibt es für die R_9 nur die Möglichkeiten in R_3+R_6 und $3\,R_3$. Eine hier auftretende R_3 muss L als einfache Leitgerade haben, und ihre beiden Torsalebenen müssen aus zwei Ebenen der genannten Doppeldevelopabeln herrühren. Ausserdem muss die R_3 die beiden die Gerade L schneidenden Trisekanten der C_4 einfach enthalten. Wie die dreifachen Punkte bei Zerlegung der Doppelkurve verteilt werden, ist wohl unmittelbar klar. Die Doppeltorsalen mit gemeinsamer Ebene durch L bedeuten aber neu entstandene Doppelpunkte der Doppelkurve. Auf einer solchen hat die C_4 zwei Punkte, deren Tangenten L treffen. Die Bedeutung hiervon für die Regelfläche ist zwei Torsalen mit gemeinsamer Ebene durch die Leitgerade. Der Punkt, wo dieselben einander schneiden, liefert einen Doppelpunkt für die Doppelkurve.

Dass man L sogar in 3 oskulierenden Ebenen der C_4 wählen kann, ersieht man folgendermassen. Die Schnittkurve einer oskulierenden Ebene mit der zugehörigen developabeln Fläche ist eine C_4 mit einem Rückkehrpunkte und zwei Doppelpunkten. Für diese C_4 findet man 2 Doppeltangenten. Man hat nur L als eine solche Doppeltangente zu wählen. Im Falle $n=8$ kann man noch für $\overline{L}$ die andere Doppeltangente nehmen.

Die Zerlegungsmöglichkeiten der R_9 liefern für $n=6$ vier Fälle:

α) R_9.
β) R_3+R_9. $\overline{L}$ ist eine Erzeugende der R_3.
γ) R_3+R_6. $\overline{L}$ ist eine Erzeugende der R_6.
δ) $3\,R_3$.

Übertragen wir auf die Doppelkurve, so bekommen wir:

α) C_8.
β) $C_2 + C_6$.
γ) $C_3 + C_5$.
δ) $C_2 + 2\, C_3$.

Die C_8, welche gewöhnlich vom Geschlechte $P=1$ ist, hat zwei dreifache Punkte und überdies zwei Doppelpunkte auf der doppelten Erzeugenden. Alle diese 4 Punkte sind Doppelpunkte für die C_6. Die C_5 hat aber die beiden letzteren nur als einfache Punkte. Für eine C_3 sind alle 4 Punkte einfach. Die C_2 geht nur durch die beiden ersteren und trifft die doppelte Erzeugende in einem Punkte, wo die beiden Schalen der Regelfläche einander berühren. Letzterer Punkt gehört auch zur C_8 und zur C_5. Man beachte hierbei, dass diese Fälle sich aus entsprechenden ohne doppelte Erzeugende herleiten lassen, indem bez. aus einer doppelten C_9, C_6 oder C_3 eine doppelte Erzeugende ausgeschieden wird. In den Fällen β) und γ) haben die Kurven noch zwei Schnittpunkte und im Falle δ) jedes Paar von Kurven noch je einen Schnittpunkt gemein.

Fün $n=5$, 7, 8 lassen sich die Fälle β) und γ) nicht unterscheiden, so dass man nur drei Möglichkeiten bekommt. Für $n=7$, 8 sind diese C_3; $C_3 + C_6$; $3\, C_3$. Die Doppelkurve hat für diese Gradzahlen 6 Punkte auf der mehrfachen Erzeugenden. Für $n=7$ erhält man diese aus dem oben besprochenen dreifachen Punkte und drei einfachen Punkten, bei denen je zwei von den drei Schalen der R_7 einander berühren. Für $n=8$ hat man 4 Schalen, und indem je zwei von diesen einander berühren, bekommt man die 6 Punkte. Für den Fall, dass z. B. $3\, C_3$ in der Doppelkurve auftreten, folgt hieraus der Unterschied, dass für $n=7$, 8 jedes Paar auf der $(n-4)$-fachen Erzeugenden einen bez. keinen Punkt gemein hat.

Wir wissen aus dem vorigen Abschnitt, dass die Doppeldevelopable auf die Bisekantenregelfläche der C_4 von $\overline{L}$ aus abgebildet wird. Diese wird für $n=6$, 7, 8 bez. vom Grade 3, 6, 9. Da die Gerade L keine Erzeugende dieser Regelfläche sein kann, so wird die Klasse der Doppeldevelopabeln eben von diesen Zahlen 3, 6, 9 angegeben.

Für $n=7$ gibt es die besondere Möglichkeit, dass $\overline{L}$ zur Leitschar der aus den Trisekanten der C_4 gebildeten Regelschar gehören kann. In diesem Falle bekommt man als Doppeldevelopabeln einen dreifachen Kegel 2. Grades. In solcher Weise wird die Anzahl der Typen für $n=7$ verdoppelt, so dass man deren 6 erhält.

Wir haben oben hervorgehoben, dass man für $n=8$ L und $\bar{L}$ unabhängig von einander alle möglichen Lagen in Bezug auf die Doppeldevelopable der C_4 geben kann. Die Doppelkurve und die Doppeldevelopable können also unabhängig von einander zerfallen. Die Anzahl der Typen wird demnach hier 9.

8. Für $n=6$ ist noch der Fall übrig, dass die Tangenten der beiden C_4-Punkte auf $\bar{L}$ in der Ebene E enthalten sind. Die Gerade $\bar{L}$ ist dann sowohl für die R_6 als für die Bisekantenregelfläche ihrer Bildkurve eine Doppeltorsale mit E als gemeinsamer Ebene. Die beiden besprochenen C_4-Punkte müssen ja nach dem vorigen Abschnitt mit $\bar{L}$ zusammenfallenden Torsalen entsprechen, deren gemeinsame Ebene die Gerade L enthält. Umgekehrt entsprechen der doppelten Torsale, welche die Bisekantenregelfläche der C_4 in $\bar{L}$ besitzt, zwei Punkte der Doppelkurve von der gleichen Art.

Dieser Fall unterscheidet sich von der vorigen nur dadurch dass die R_9 von vornherein in $\bar{L}$ eine singuläre Doppeltorsale haben soll. Wenn die R_9 in eine R_3 und eine R_6 zerlegt wird, so muss $\bar{L}$ für jede von diesen Regelflächen einfach sein, und wir bekommen mithin nur einen Fall. Für die Restdoppelkurve haben wir also die Fälle:

α) C_7.
β) $C_2 + C_5$.
γ) $2\,C_2 + C_3$.

Die C_7 ist vom Geschlechte $P=0$ und besitzt zwei dreifache Punkte. Auf der Doppeltorsale hat dieselbe die beiden Torsalpunkte und noch zwei Punkte, deren Tangenten die Torsalebene enthält. Im Falle γ) gehören zur C_3 die beiden Torsalpunkte und zu den C_2 je einer von den beiden anderen Punkten; die C_3 entspricht ja derjenigen R_3, welche in der Ebene E die beiden C_4-Tangenten enthält. Alle drei Kurven gehen durch die beiden dreifachen Punkte; überdies hat jede C_2 mit der C_3 einen Punkt gemein. Im Falle β) trifft die C_2 die C_5 noch in einem Punkte ausser den beiden dreifachen Punkten.

Die Doppeldevelopable wird auch in diesem Falle auf eine R_3 abgebildet. Die singuläre Eigenschaft der doppelten Erzeugenden findet ihren Ausdruck darin, dass diese R_3 zum Cayleyschen Spezialfalle gehört, so dass $\bar{L}$ sowohl Leitgerade als Erzeugende ist. Die Klasse der Doppeldevelopablen wird aber dadurch nicht geändert und ist also auch hier 3.

B. Die Bildkurve ist eine C_4 mit einem Doppelpunkte.

9. Für $n=5$ kann dieser Fall nur dann in Betracht kommen, wenn der Doppelpunkt auf $\bar{L}$ liegt. Der Doppelpunkt hat hier die Bedeutung, dass die Erzeugende, welche wir als zweite Fundamentalgerade $\bar{L}$ gewählt haben, in einem und demselben Punkte, und zwar in dem dreifachen Punkte der Regelfläche, von zwei anderen Erzeugenden getroffen wird. Ob wir den Fall A oder den Fall B bekommen, ist mithin von der Wahl der zweiten Fundamentalgeraden abhängig, und wir brauchen uns nicht weiter mit dem Falle $n=5$ zu beschäftigen. Auch für $n=6$ kann die C_4 einen Doppelpunkt auf der Geraden $\bar{L}$ besitzen. Dies bedeutet, dass die 4 dreifachen Punkte der R_6 sich in einem vierfachen Punkte vereinigen. Die hierunter sich subsumierenden Fälle werden wir erst in Nummer 12 behandeln. Bei anderen Lagen hat der Doppelpunkt der C_4 immer die Bedeutung einer doppelten Erzeugenden der R_n. Liegt der Doppelpunkt in der Ebene E aber nicht auf der Geraden $\bar{L}$, so bedeutet dies nur, dass diese doppelte Erzeugende sich unmittelbar an die $(n-4)$-fache Erzeugende anschliesst.

In dieser Nummer nehmen wir an, dass die Ebene, welche durch die Tangenten des Doppelpunktes bestimmt wird, die Gerade L nicht enthält, und dass die C_4 nicht auf einem Kegel 2. Grades mit der Spitze in O liegt. Überdies soll für $n=6$ die Gerade $\bar{L}$ sich wie in der nächstvorhergehenden Nummer verhalten. Die Bisekantenregelfläche wird dann eine R_8, für welche C_4 eine dreifache Kurve, L eine doppelte Leitgerade und $\bar{L}$ eine einfache Erzeugende darstellen. Die Doppeldevelopable der C_4 besteht hier bekanntlich aus zwei Kegeln 2. Grades. Nach (10) hat man auch hier im allgemeinen $P=1$. Man ersieht nun, dass die R_8 zerfallen muss, falls L die beiden K_2 berührt oder durch die Spitze des einen Kegels geht, in welchem letzteren Falle L noch den anderen Kegel berühren kann. Die R_8 lässt sich mithin in den folgenden Weisen zerlegen, wobei wir zuerst den Fall $n=6$ berücksichtigen:

α) R_8.
β_1) K_2+R_6.
β_2) R_3+R_5. $\bar{L}$ ist eine Erzeugende der R_3.
γ) R_3+R_5. $\bar{L}$ ist eine Erzeugende der R_5.
δ) K_2+2R_3.

Wenn wir diese Resultate auf die Doppelkurve überführen, so finden wir, dass β_1) und β_2) denselben Fall darstellen. Dies hat seinen Grund darin, dass man für die Wahl von $\overline{L}$ in einer von den beiden doppelten Erzeugenden zwei Möglichkeiten hat. Für die Doppelkurve gibt es somit die folgenden 4 Fälle:

α) C_7.
β) $C_2 + C_5$.
γ) $C_3 + C_4$.
δ) $2\,C_2 + C_3$.

Jede von den beiden doppelten Erzeugenden trifft zwei einfache Erzeugende. So erhalten wir 4 dreifache Punkte der R_6, welche für die C_7 Doppelpunkte sind. Die C_7 hat auf jeder doppelten Erzeugenden noch einen 5. Punkt, wo die beiden Schalen der R_6 einander berühren. Bei der Zerlegung der C_7 verteilen sich diese Punkte so, dass sowohl die C_3 als die C_4 einfach durch die 4 dreifachen Punkte der R_6 gehen; die beiden noch übrigen Punkte gehören zur C_4. Die C_5 hat auf einer doppelten Erzeugenden 2 Doppelpunkte und auf der anderen 3 einfache Punkte. Eine C_2 geht nur durch die beiden dreifachen Punkte der R_6 auf der einen doppelten Erzeugenden und hat auf der anderen nur den Punkt, wo die beiden Schalen einander berühren. Betreffend die Schnittpunkte der Kurven, welche nicht mit den dreifachen Punkten der R_6 zusammenfallen, verhält es sich ganz wie in Nummer 7.

Für $n=7$, 8 erhalten wir auch 4 Fälle für die Doppelkurve, und zwar C_8; $C_2 + C_6$; $C_3 + C_5$; $C_2 + 2\,C_3$. Die Klasse der Doppeldevelopablen lässt sich wie in den vorhergehenden Fällen bestimmen. Es ergibt sich für $n=6$, 7, 8 bez. 2, 5, 8. In einem Falle ist doch die Klasse für $n=8$ nur 7, nämlich wenn die Ebene durch die Tangenten der C_4 im Doppelpunkte die Gerade $\overline{L}$ enthält; die eutsprechende doppelte Erzeugende der R_8 muss dann eine Doppeltorsale mit zusammenfallenden Torsalpunkten auf der Leitgeraden sein.

10. Wir nehmen jetzt an, dass die Ebene durch die Tangenten der Bildkurve im Doppelpunkte die Gerade L enthalten soll. Die entsprechende doppelte Erzeugende ist eine Doppeltorsale, deren Ebenen zusammenfallen und die Leitgerade enthalten. Für $n=6$ hat man dann eine andere Abbildungsmöglichkeit, indem man für $\overline{L}$ eben diese Doppeltorsale wählt; die beiden möglichen Methoden geben aber selbstverständlich dieselben Resultate.

Von der Bisekantenregelfläche scheidet sich in diesem Falle der Geradenbüschel vom Doppelpunkte aus. Es bleibt eine R_7 übrig, für welche die Leitgerade L einfach ist. Diese R_7 zerfällt nur, falls L durch die Spitze eines zur

Doppeldevelopabeln der C_4 gehörenden Kegels hindurchgeht. Wir bekommen mithin die Fälle:

α) R_7.

β) $K_2 + R_5$.

γ) $2\,K_2 + R_3$.

Es wird hier angenommen, dass keine K_2-Spitze mit O zusammenfällt. Im Falle $n=6$ erhalten wir dann für die Doppelkurve die Möglichkeiten:

α) C_6.

β) $C_2 + C_4$.

γ) $3\,C_2$.

Wie die Doppelkurve sich in Bezug auf sowohl die gewöhnliche als die singuläre doppelte Erzeugende verhält, findet man aus den vorhergehenden Nummern. Im Falle γ) gehen zwei Kegelschnitte durch die beiden dreifachen Punkte der R_6 auf der gewöhnlichen doppelten Erzeugenden; dieselben besitzen auf der singulären je einen Punkt mit der Tangente in der Torsalebene. Der dritte Kegelschnitt geht durch die beiden Torsalpunkte der letzteren doppelten Erzeugenden und trifft den ersteren im Punkte, wo die beiden Schalen der R_6 einander berühren. Überdies hat letzterer Kegelschnitt mit den beiden ersteren je einen Punkt gemein. Der im Falle β) anftretende Kegelschnitt verhält sich in Bezug auf die R_6 wie einer von den beiden ersteren Kegelschnitten.

Für $n=7$, 8 bekommt man ebenfalls 3 Fälle für die Doppelkurve: C_7; $C_2 + C_5$; $2\,C_2 + C_3$. Die Klasse der Doppeldevelopabeln lässt sich ganz wie in der vorigen Nummer bestimmen.

Wünscht man hier besonders für $n=8$ die Gesamtzahl von Typen anzugeben, so hat man zu beachten, dass sowohl die Doppelkurve als die Doppeldevelopable sich auf Regelflächen nach einer von den in dieser und der vorhergehenden Nummer gegebenen 7 Möglichkeiten abbilden lassen. Die Frage ist also, auf welche Weisen sich diese Möglichkeiten kombinieren lassen. Da die Durchführung dieser Untersuchung wohl kaum besonderes Interesse darbietet, so begnügen wir uns damit als Resultat mitzuteilen, dass man hier nicht weniger als 33 verschiedene Typen von R_8 bekommt.

11. Den Punkten der Doppelkurve, welche in die Leitgerade hineinrücken, entsprechen Bisekanten der Bildkurve durch den Punkt O. Dabei spielt doch die Gerade $\overline{L}$ eine besondere Rolle, da dieser Geraden die Punkte der Ebene E entsprechen. Nun setzen wir voraus, dass die Bildkurve auf einem K_2 mit der

Spitze in O liegen soll. Die Bedeutung hiervon für die Regelfläche ist leicht einzusehen, nämlich dass *ein Teil der Doppelkurve sich unmittelbar an die Leitgerade angeschlossen hat.* In jedem Querschnitt berühren sich dann Zweige der Schnittkurve auf der Leitgeraden.

Dieser Fall ist nur möglich für $n=6$ und $n=8$. Für $n=6$ muss dann die Gerade $\overline{L}$ zum K_2 gehören. Nach Nummer 4 wissen wir, dass den Punkten der C_4, welche auf derselben Erzeugenden des K_2 liegen, Erzeugende der Regelfläche entsprechen, für welche in Bezug af die Leitgerade sowohl die Punkte als die Ebenen koinzidieren. Eine Ebene durch $\overline{L}$ enthält für $n=8$ zwei, für $n=6$ nur eine bewegliche Erzeugende des K_2. Für die Regelfläche bedeutet dies, dass für $n=8$ von jedem Punkte der Leitgeraden zwei Paare von Erzeugenden ausgehen, welche je in derselben Ebene durch die Leitgerade liegen, für $n=6$ aber nur ein solches Paar. Dass dagegen in jeder Ebene durch die Leitgerade für sowohl $n=6$ als $n=8$ zwei solche Paare von Erzeugenden enthalten sind, ist damit äquivalent, dass in beiden Eällen eine Ebene durch L zwei bewegliche Erzeugende des K_2 ausschneidet.

Wenn wir allgemeiner einen Kegel vom Grade n in Betracht nehmen, für welchen O die Spitze, $\overline{L}$ eine μ-fache und L eine ν-fache Erzeugende bedeuten, so ersehen wir leicht, dass dieser Kegel als die Abbildung einer Kongruenz von der Ordnung $n-\nu$ und Klasse $n-\mu$ aufzufassen ist. Gehört ein Strahl zu einer solchen Kongruenz, der mit der Leitgeraden den Punkt Q und die Ebene F bestimmt, so gehört auch zur Kongruenz der ganze Büschel (Q, F). Als eine charakteristische Eigenschaft der in Rede stehenden Kongruenzen kann man hervorheben, dass *auch eine zweite Brennkurve sich mit der Leitgeraden vereinigt hat.* Die Abbildung auf das obige Kegelsystem scheint uns einen bequemen Überblick über diese Kongruenzen zu gewähren.

Nach der Beschaffenheit der beiden doppelten Geraden haben wir für $n=6$ drei Hauptfälle.

1) Beide sind für die R_6 gewöhnliche doppelte Erzeugende. Die Restdoppelkurve wird in diesem Falle, wie in Nummer 9: β_1), auf eine R_6 abgebildet, welche, wie in Nummer 9: δ) in zwei R_3 zerfallen kann. Da die R_6 hier die Gerade $\overline{L}$ nicht enthält, so bekommen wir für die Doppelkurve die beiden Fälle:

α_1) C_6.
β_1) $2\,C_3$.

Die C_6 hat 4 Doppelpunkte, nämlich 2 auf jeder der doppelten Erzeugenden in den dreifachen Punkten der R_6. Die beiden C_3 haben ausser diesen 4 Punkten noch einen 5. Punkt gemein.

2) Eine doppelte Erzeugende ist, wie in der vorigen Nummer, singulär. Wenn wir die Abbildung, wie in der vorigen Nummer, ausführen, so entspricht der Restdoppelkurve eine R_5, die in K_2+R_3 zerfallen kann. Wir erhalten mithin die beiden Fälle:

α_2) C_5.

β_2) C_2+C_3.

Die C_5 hat 2 Doppelpunkte auf der gewöhnlichen doppelten Erzeugenden und auf der singulären 3 Punkte, nämlich ausser den beiden Torsalpunkten noch einen Punkt; für diesen letzteren Punkt liegt die Tangente in der Torsalebene. Bei der Zerlegung schneiden die C_2 und die C_3 einander in den beiden obenerwähnten Doppelpunkten, wozu noch ein dritter Schnittpunkt hinzukommt. Die drei Punkte auf der singlären Erzeugenden verteilen sich so, dass die C_3 durch die beiden Torsalpunkte geht.

3) Auch die zweite doppelte Erzeugende ist singulär. Für die Bildkurve gilt hier, dass nicht nur die Tangenten im Doppelpunkte, sondern auch die Tangenten in den auf $\bar{L}$ liegenden Punkten die Fundamentalgerade L treffen. Bei der Abbildung der Restdoppelkurve tritt hier der Unterschied vom vorigen Falle ein, dass $\bar{L}$ nicht nur zum ausgeschiedenen K_2, sondern auch zur R_5 oder, bei Zerlegung der R_5, zur R_3 gehört. Wir bekommen demnach die beiden neuen Fälle[1]:

α_3) C_4.

β_3) $2\,C_2$.

Jede C_2 geht durch die Torsalpunkte einer Doppeltorsale und trifft die andere im dritten Punkt der Doppelkurve. Die C_2 schneiden einander in einem ausserhalb der doppelten Erzeugenden belegenen Punkte.

Für $n=6$ wird hier auch die Doppeldevelopable auf den K_2 mit der Spitze in O abgebildet. Dies ist der Ausdruck davon, dass in diesem Falle die Doppeldevelopable aus dem zur Axe L gehörigen doppelten Ebenenbüschel besteht.

Für $n=8$ gibt es zum dritten Hauptfall nichts Entsprechendes. Es bleiben

---

[1] Diese beiden Fälle waren mir bei der Ausarbeitung meiner Dissertation anfänglich entgangen und wurden deshalb erst bei der Beschäftigung mit den R_6 ohne Leitgerade (Diss., p. 95) entdeckt. Im Verzeichnis der R_6 mit einer Leitgeraden (Diss., p. 60) konnte ich also dieselben nicht einführen.

4 Möglichkeiten übrig und eben so viele für die Doppeldevelopable. Die Frage entsteht dann, in welchen Weisen die Möglichkeiten für die Doppelkurve und die Doppeldevelopable sich kombinieren lassen. Da die Doppeldevelopable der Bildkurve nur $2K_2$ enthält, so ersieht man, dass ein Fall β_2) nicht mit einem Falle β_2) kombiniert werden kann. Es bleiben 15 verschiedene Typen von R_8 übrig.

12. Zuletzt wollen wir den Fall untersuchen, wo die Bildkurve den Doppelpunkt auf der Linie $\bar{L}$ hat. Es ist bereits hervorgehoben, dass dann die doppelte Erzeugende der R_6 in einem und demselben Punkte von zwei anderen Erzeugenden getroffen wird. Dieser Punkt, der für die R_6 vierfach ist, ersetzt die im gewöhnlichen Falle auftretenden vier dreifachen Punkte. In einem derartigen vierfachen Punkte soll die Doppelkurve einen sechsfachen Punkt besitzen; doch wird hier ein Zweig von der doppelten Erzeugenden absorbiert. Die Typen, welche wir bei einem vierfachen Punkte der R_6 erhalten, können wir wohl als *Nebentypen* bezeichnen, indem wir die entsprechenden bei vier dreifachen Punkten als *Haupttypen* gelten lassen. Es sind hier mehrere Hauptfälle zu unterscheiden.

1) Die Ebene durch die beiden Tangenten im Doppelpunkte enthält nicht die Gerade $\bar{L}$.

In diesem Falle ist $\bar{L}$ auch keine Erzeugende der Bisekantenregelfläche, welche, wie in Nummer 9, eine R_8 ist. Die Restdoppelkurve ist also von der Ordnung 8, woraus man schon ersieht, dass hier dem Doppelpunkte der C_4 keine neue doppelte Erzeugende der R_6 entspricht. Für die R_8 gibt es dieselben Möglichkeiten der Zerlegung wie in Nummer 9, also: R_8; K_2+R_6; R_3+R_5; K_2+2R_3. Hieraus entspringen für die Doppelkurve die folgenden 4 Fälle:

α_1) C_8.
β_1) C_2+C_6.
γ_1) C_3+C_5.
δ_1) C_2+2C_3.

Die Haupttypen, in Bezug auf welche diese als Nebentypen zu betrachten sind, haben wir in den Fällen α), β), γ), δ) der Nummer 7. Man findet leicht, dass der vierfache Punkt der R_6 für die C_8 einen fünffachen, für die C_6 einen vierfachen, für die C_5 einen dreifachen, für die C_3 einen doppelten und für die C_2 einen einfachen Punkt bedeutet. Eine Doppelkurve C_3 muss demnach hier *eine Ebene Kurve* bezeichnen, was auch daraus hervorgeht, dass die doppelte

Leitgerade der entsprechenden R_3 offenbar durch den Doppelpunkt der Bildkurve C_4 gehen und also die Gerade $\overline{L}$ treffen muss. Die C_2 hat mit der doppelten Erzeugenden noch den Punkt gemeinsam, wo die beiden Schalen der R_6 einander berühren. Betreffend die Schnittpunkte der Kurven, welche als eine Bedingung des Zerfallens der Doppelkurve zukommen müssen, verhält es sich bei den Nebentypen ganz wie bei den Haupttypen.

In meiner Dissertation, p. 38 habe ich drei Typen von R_6 mit vierfachem Punkt ohne doppelte Erzeugende hergeleitet, welche, abgesehen von der doppelten Leitgeraden, bez. durch die Doppelkurve C_9; $C_3 + C_6$; $3\,C_3$ charakterisiert sind. Es ist leicht zu verstehen, wie hieraus die 4 Typen α_1), β_1), γ_1), δ_1) sich erhalten lassen, indem aus einer von den Doppelkurven sich eine doppelte Gerade ausscheidet. Es ist eben diese Doppelkurve, welche (wie oben die C_2) die doppelte Gerade in einem ausserhalb des vierfachen Punktes der R_6 belegenen Punkte trifft.

2) Die Ebene durch die Tangenten im Doppelpunkte enthält die Gerade $\overline{L}$. Doch soll diese Ebene nicht mit E zusammenfallen. Auch soll O keine Spitze für einen K_2 bedeuten, der die C_4 enthält.

In diesem Falle gehört $\overline{L}$ zur Bisekantenregelfläche R_8, was damit äquivalent ist, dass dem Doppelpunkte der C_4 eine doppelte Erzeugende entspricht. Die R_6 besitzt demnach zwei doppelte Erzeugende, welche einander im vierfachen Punkte treffen. Aus den Annahmen folgt, dass bei einer etwaigen Zerlegung der R_8 kein K_2 als Glied auftreten kann; die Spitze für einen K_2, der die C_4 enthält, muss ja in der durch die Tangenten im Doppelpunkte bestimmten Ebene liegen. Es sind also nur die Fälle R_8 und $R_3 + R_5$ möglich. Die Gerade $\overline{L}$ muss im letzteren Falle Erzeugende der R_5 sein; denn wenn die beiden Zweige im Doppelpunkte einander entsprechen, so erhält man als Bisekantenregelfläche der C_4 keine R_3, sondern eine Regelschar. Für die Doppelkurve bekommen wir also die Fälle:

α_2) C_7.
β_2) $C_3 + C_4$.

Die entsprechenden Haupttypen haben wir in α) und γ) der Nummer 9. Der Schnittpunkt der beiden doppelten Erzeugenden der R_6 ist für die C_7 ein vierfacher und für die C_4 und die C_3 ein Doppelpunkt. Die C_4 hat mit den doppelten Erzeugenden noch je einen gemeinsamen Punkt.

3) Dieser Fall soll nur darin von dem vorhergehenden abweichen, dass O

als die Spitze eines die C_4 enthaltenden K_2 angenommen wird. Man hat also eine doppelte Leitgerade mit Berührung. Die Restdoppelkurve lässt sich auf eine R_6 abbilden, welche sich auch in $2 R_3$ zerlegen lässt. Man erhält für die Doppelkurve die beiden Fälle:

α_3) C_6.

β_3) $2 C_3$.

Als entsprechende Haupttypen hat man α_1) und β_1) der vorhergehenden Nummer. Hier hat aber die C_6 einen vierfachen und die beiden C_3 Doppelpunkte im vierfachen Punkte der R_6.

4) In den noch übrigen Fällen soll E die Ebene sein, welche durch die Tangenten der Bildkurve im Doppelpunkte bestimmt wird. Diese Lage bedeutet, dass die beiden doppelten Erzeugenden unmittelbar nach einander folgen und eine Doppeltorsale mit sowohl zusammenfallenden Torsalpunkten als Torsalebenen bilden. Im allgemeinen wird eine solche sowohl die Ordnung der Restdoppelkurve als die Klasse der Restdoppeldevelopable mit 2 erniedrigen, was ja eine Äquivalenz mit 2 gewöhnlichen doppelten Geraden bezeichnet.

Die Bisekantenregelfläche der C_4 ist hier eine R_7, für welche L eine einfache Leitgerade bedeutet. Diese R_7 soll 6 Erzeugende in der Ebene E besitzen. Die Tangenten im Doppelpunkte liefern zwei von diesen und entsprechen den Torsalpunkten. Die übrigen treffen L in den Punkten, wo L die beiden K_2 berührt, welche C_4 enthalten. Von diesen Punkten wird ja der Doppelpunkt als ein Oskulationsknoten (und nicht nur Berührungsknoten) projiziert. Man erhält hieraus zwei Torsalen der R_7, für welche E die Torsalebene und die Spitzen der K_2 die Torsalpunkte bezeichnen. Hierzu entsprechend hat die Doppelkurve der R_6 2 Zweige im vierfachen Punkt (welcher eben der doppelte Torsalpunkt ist), deren Tangenten mit der singulären Geraden zusammenfallen.

Zunächst nehmen wir an, dass keine K_2-Spitze auf der Geraden $\overline{L}$ liegt. Diese Gerade ist dann keine Erzeugende der R_7, und die Doppeltorsale erniedrigt folglich die Ordnung der Restdoppelkurve nur mit 2. Für die Zerlegung der R_7 hat man die Möglichkeiten: R_7; K_2+R_5; $2 K_2+R_3$. Für die Doppelkurve erhält man somit die Fälle:

α_4) C_7.

β_4) C_2+C_5.

γ) $2 C_2+C_3$.

Als entsprechende Haupttypen hat man die Fälle α), β), δ) der Nummer 9 anzusehen. Im vierfachen Punkte gehören zur C_3 die Torsalpunkte und zu den beiden C_2 die einander berührenden Zweige.

5) Jetzt soll eine K_2-Spitze auf der Geraden $\bar{L}$ liegen; doch soll dabei der Punkt O ausgeschlossen sein. Die Gerade $\bar{L}$ wird dann Erzeugende der R_7. Hierin liegt die Bedeutung, dass *die Ordnung der Restdoppelkurve durch die singuläre Gerade jetzt um 3 herabgesetzt wird.* Wie leicht zu sehen ist, wird dagegen die Klasse der Restdoppeldevelopablen nur um 2 reduziert. Die beiden doppelten Erzeugenden, durch deren Verschmelzung die singuläre Gerade entstanden sein soll, denkt man sich darum wohl von der Art wie die in Nummer 10 auftretenden. Für die R_7 gibt es nur die Zerlegungen R_7 und K_2+R_5. Es ergibt sich hieraus die Fälle:

α_5) C_6.
β_5) C_2+C_4.

Die entsprechenden Haupttypen findet man in α) und β) der Nummer 10. Im vierfachen Punkt der R_6 hat die C_6 einen dreifachen Punkt. Der Geraden $\bar{L}$ als einer Erzeugenden der R_7 entspricht ein Punkt der Doppelkurve, der auf der singulären Geraden anderswo als im vierfachen Punkte liegt; im folgenden Hauptfalle 6) nähert sich dieser Punkt unbegrenzt der Leitgeraden. Die C_4 hat einen Doppelpunkt im vierfachen Punkte der R_6, der aus den beiden Torsalpunkten herrührt, und die C_2 einen einfachen Punkt mit der Tangente wie im vorigen Hauptfalle.

6) Zuletzt betrachten wir den Fall, wo eine K_2-Spitze eben im Punkte O liegt, und es sich also um eine doppelte Leitgerade mit Berührung handelt. Für die R_5, welche nach Abtrennung des K_2 von der R_7 übrig bleibt, haben wir die Zerlegungsmöglichkeiten R_5 und K_2+R_3. Man bekommt mithin für die Doppelkurve zwei Fälle:

α_6) C_5.
β_6) C_2+C_3.

Als entsprechende Haupttypen sind die Fälle α_2) und β_2) der vorigen Nummer aufzufassen. Im vierfachen Punkte der R_6 verhalten sich die C_5, C_3 und C_2 bez. wie die C_6, C_4 und C_3 im Hauptfalle 5).

C. Die Bildkurve ist eine C_4 vom Geschlechte $p = 1$.

13. Die Bisekantenregelfläche wird in diesem Falle immer eine R_8, für welche L eine doppelte Leitgerade und die C_4 eine dreifache Kurve bezeichnen. Löst sich diese R_8 in 2 oder 3 verschiedene Flächen auf, so muss jedenfalls eine von diesen die C_4 einfach enthalten. Die zugehörigen Erzeugenden vermitteln dann eine Involution zwischen den Punkten der C_4. Ist diese Involution rational, so handelt es sich um eine Regelschar, welche zu einer die C_4 enthaltenden F_2 gehört. Dieser Fall kann hier offenbar nur dann eintreten, wenn einer von den 4 dem F_2-Büschel zugehörigen K_2 seine Spitze auf L hat. Es gibt aber noch auf der C_4 3 besondere Involutionen, für welche die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte eine Regelfläche vom Geschlechte $p=1$ erzeugen. Diese 3 Regelflächen sind vom Grade 4; zerlegt man die 4 K_2-Spitzen in 2 Paare, was ja auf 3 Weisen möglich ist, so erhält man aus den Verbindungslinien die zugehörigen doppelten Leitgeraden. Für die Zerlegung der R_8 hat man demnach die 3 Möglichkeiten: R_8; K_2+R_6; $2\,K_2+R_4$.

Die Doppeldevelopable der C_4 besteht bekanntlich in diesem Falle aus 4 K_2. Die R_8 hat also im allgemeinen 8 Torsalpunkte auf der Leitgeraden, so dass man nach (10) $P=3$ erhält. Wenn aber L einen oder 2 von den 4 K_2 berührt, so reduziert sich das Geschlecht P auf 2 oder 1. Zerfällt die R_8 in einen K_2 und eine R_6, so hat die R_6 im Allgemeinen 6 Torsalpunkte auf der Leitgeraden und also $P=2$. Wenn aber L durch eine K_2-Spitze geht und einen anderen K_2 berührt, so erhält man $P=1$.

Wir nehmen zunächst an, dass keine der 4 K_2-Spitzen die Lage O haben soll. Überdies soll, falls für $n=6$ einer von den K_2 $\overline{L}$ als Erzeugende hat, die zugehörige Berührungsebene nicht mit E zusammenfallen. Im Falle $n=6$ hat man nun für die Doppelkurve die 3 Möglichkeiten:

α) C_7.

β) C_2+C_5.

γ) $2\,C_2+C_3$.

Die doppelte Erzeugende der R_6 wird von 2 einfachen in Punkten getroffen, welche für die C_7 Doppelpunkte sind. Durch diese Punkte gehen im Falle γ) die beiden C_2, so dass die C_2-Ebenen die doppelte Erzeugende enthalten. Die C_3 hat auf der doppelten Erzeugenden den Punkt, wo die beiden Schalen der R_6 einander berühren, und trifft jede C_2 in 2 Punkten. Da $\overline{L}$ eine Erzeugende der R_4 ist, so muss die andere Leitgerade der R_4 $\bar{L}$ treffen. Dies bedeutet, dass die C_3 eine ebene Kurve sein muss, was auch daraus hervorgeht, dass ihr Geschlecht $P=1$ ist.

In unserer Dissertation (p. 51) haben wir die 3 entsprechenden Fälle von R_6 ohne doppelte Erzeugende hergeleitet. Dabei ergab sich für die Doppelkurve C_8; C_2+C_6; $2\,C_2+C_4$. Die obigen Typen α), β), γ) lassen sich aus diesen erhalten, indem sich die doppelte Erzeugende bez. von der C_8, C_6, C_4 abtrennt.

Für $n=7$, 8 hat man ebenfalls als Möglichkeiten für die Doppelkurve: C_8; C_2+C_6; $2\,C_2+C_4$. Die Ebene der C_2 enthält stets die $(n-4)$-fache Erzeugende. Doch besteht ein Unterschied, der sich im Falle γ) so ausdrückt, dass für $n=7$ die beiden C_2 nur einen und für $n=8$ keinen Punkt gemeinsam haben.

Für $n=8$ hat man eine eben solche Abbildung der Doppeldevelopablen auf eine R_8, wobei $\bar{L}$ als Leitgerade auftritt. Nun ist die Frage, wie die Zerlegungsmöglichkeiten für die beiden R_8 sich kombinieren lassen. Man ersieht leicht, dass dabei nur die Kombination $2\,K_2+R_4$ mit $2\,K_2+R_4$ ausgeschlossen ist. Man erhält demnach hier 8 verschiedene Typen von R_8.

14. In dieser Nummer denken wir uns für $n=6$ $\bar{L}$ als Erzeugende von einem der 4 K_2 mit E als zugehörige Berührungsebene. Dagegen soll die K_2-Spitze nicht mit O zusammenfallen. Da L hier von vornherein diesen K_2 berührt, so kann das Geschlecht P der Doppelkurve höchstens 2 sein. Offenbar kann L in diesem Falle höchstens durch eine K_2-Spitze gehen, so dass wir für die Zerlegung der R_8 nur die beiden Möglichkeiten R_8 und K_2+R_6 erhalten. Für die R_8 und die R_6 ist $\bar{L}$ eine Doppeltorsale mit Vereinigung der Torsalebenen. Man erhält also für die Doppelkurve die folgenden zwei Fälle:

α) C_6.
β) C_2+C_4.

Die R_6, welche dem Falle β) entspricht, ist offenbar von demselben Typus wie die R_6, welche als Teil der Bisekantenregelfläche R_8 bei ihrer Zerlegung in K_2+R_6 eingeht. Die C_2 geht durch die beiden Torsalpunkte der doppelten Torsale, so dass ihre Ebene diese Linien enthält. Die C_4 hat auf der Doppeltorsale zwei Punkte, deren Tangenten in der Torsalebene liegen. Ausserhalb der Doppeltorsale haben die C_4 und die C_2 zwei gemeinsame Punkte. Für die Klasse der Restdoppeldevelopablen erhält man 2, ebenso wie in der vorigen Nummer.

15. In den noch übrigen Fällen ist O eine von den 4 K_2-Spitzen. Nur die Gradzahlen $n=6$ und $n=8$ kommen hier in Betracht. Die Bisekantenregel-

fläche besteht hier aus dem K_2 und einer R_6, welche letztere sich noch in einen K_2 und eine R_4 zerlegen kann. Für $n=6$ haben wir zwei Hauptfälle:

1) Die Ebene E ist keine doppelt berührende Ebene der C_4.

2) Die Ebene E ist eine doppelt berührende Ebene der C_4.

Mit Leichtigkeit erhalten wir hieraus für die Doppelkurve die folgenden 4 Möglichkeiten:

α_1) C_6.

β_1) $C_2 + C_4$.

α_2) C_5.

β_2) $C_2 + C_3$.

In den Fällen α_1) und β_1) hat die Doppelkurve auf der doppelten Erzeugenden zwei Doppelpunkte. In diesen Punkten sowie in zwei anderen Punkten schneiden sich im Falle β_1) die C_2 und die C_4. Im Falle β_2) haben die C_2 und die C_3 nur zwei Punkte ausserhalb der doppelten Torsale gemeinsam. Die C_3 ist eine ebene Kurve vom Geschlechte 1, und die C_2 geht durch die beiden Torsalpunkte der singulären Geraden. Die Restdoppeldevelopable ist in allen 4 Fällen von der Klasse 2.

Ist $n=8$, so hat man nur für α_1) und β_1) entsprechende Fälle. Da diese Möglichkeiten auch für die Doppeldevelopable existieren, so erhält man 4 Typen.

16. Wollen wir nun unsere Resultate für $n=6$ zusammenführen, so finden wir, dass wir für $p=0$ 20 Typen und für $p=1$ 9 Typen erhalten haben. Dabei sind die in Nummer 12 behandelten Nebentypen nicht mitgenommen. Nehmen wir hierzu die reziproken Fälle, so erhalten wir sogleich eine Verdoppelung der Typenzahl, also 40 für $p=0$ und 18 für $p=1$. In den Nummern 8, 10, 11, 14, 15 haben wir die Fälle gegeben, wo entweder eine doppelte Torsale mit gemeinsamer Ebene ohne gemeinsamen Punkt oder eine Leitgerade mit Berührung vorkommt. Es ergab sich insgesamt 12 Typen für $p=0$ und 6 für $p=1$. Wenn wir die reziproken Fälle hinzunehmen, erhalten wir bez. 24 und 12. Dazu kommt, dass es für $p=2$ vier Typen mit einer singulären mehrfachen Leitgeraden gibt, welche wir im 4. Abschnitt näher charakterisieren wollen. Hier ist auch an die Fälle zu erinnern, wo mehrere Erzeugende mit der Leitgeraden zusammenfallen. Hier handelt es sich ja immer um Torsalen, und singuläre Fälle werden in verschiedenen Weisen durch Zusammenfallen von Torsalebenen oder Torsalpunkten ermöglicht. Wir werden sogleich unten skizzieren, wie man von solchen Typen 11 für $p=0$ und 2 für $p=1$ erhält.

Wenn wir die Fälle, welche einer linearen Kongruenz angehören, ausser Acht lassen, so erhalten wir nach meiner Berechnung die folgenden Anzahlen von R_6-Typen mit einer Leitgeraden:

$p=0$; 87 Typen.

$p=1$; 37 Typen.

$p=2$; 11 Typen.

Wenn wir von solchen Arten wegsehen, welche durch Eigentümlichkeiten bei mehrfachen Erzeugenden oder Leitgeraden bedingt sind, so fehlen von diesen Typen bei EDGE 2 für $p=0$ und 2 für $p=1$. Die letzteren beiden Typen hat man in Nummer 13: γ) und dem dazu reziproken Falle. Für $p=0$ fehlt auch ein Paar zu einander reziproker Flächen. Für eine von diesen besteht die Doppelkurve aus einer dreifachen Leitgeraden, einem dreifachen Kegelschnitte und einer doppelten Erzeugenden. Die anderen Fälle, bei denen ein dreifacher Kegelschnitt in der Doppelkurve auftritt, sind doch mitgenommen.

Nach denselben Prinzipien findet man, wenn meine Berechnungen richtig sind, für die R_6 ohne Leitgerade die folgenden Resultate:

$p=0$; 55 Typen.

$p=1$; 13 Typen.

$p=2$; 2 Typen.

Hierbei liegen zwar die Ergebnisse meiner Dissertation zu Grunde; doch sind hier für $p=0$ zwei Fälle gar nicht erwähnt, und für einige andere Typen ist der Beweis für die Existenz nicht gegeben. Auch hier gibt es eine beträchtliche Anzahl von Typen, welche dadurch charakterisiert sind, dass entweder verschiedene Doppelkurven in unmittelbare Nähe an einander rücken oder eine doppelte Erzeugende existiert, durch welche die Ordnung der Restdoppelkurve um 2 bez. 1 und die Klasse der Restdoppeldevelopable um 1 bez. 2 reduziert werden. In dieser Hinsicht finden wir für $p=0$ 24 Typen und für $p=1$ 3 Typen. Im 4. Abschnitt werden wir 2 Typen behandeln, welche bei EDGE nicht vorkommen und in meiner Dissertation ohne Beweis gegeben sind. Es sind diese die R_6 vom Geschlechte $p=0$ oder 1 mit sowohl einer dreifachen Kurve von der Ordnung 3 als einer dreifachen Developablen von der Klasse 3; für $p=0$ muss natürlich noch eine doppelte Erzeugende hinzutreten.

In seiner Arbeit hat EDGE die abwickelbaren R_6 eingehend untersucht und insgesamt 10 Typen aufgestellt. Eine entsprechende Zusammenstellung für die abwickelbaren Flächen findet sich in meiner Dissertation nicht, und es wird dort auch kein systematischer Bezug auf dieselben genommen. Doch habe ich gelegentlich (p. 102) auf einen 11. Typus hingewiesen, bei welchem die Kuspidalkurve die Ordnung 5 hat und 2 Spitzen besitzt, und die Doppelkurve in eine C_2 und eine C_3 zerspaltet wird. Die Existenz von diesem zu sich selbst reziproken Falle folgt ganz einfach daraus, dass, wie leicht zu sehen ist, auf einem K_2 Kurven C_5 mit 2 Spitzen existieren. Als einen Nebentypus zu dem allgemeinen Falle einer C_5 mit 2 Spitzen darf man wohl den Fall betrachten, wo die Kuspidalkurve durch die Relationen

$$\frac{x}{\alpha^3} = \frac{y}{\alpha^4} = \frac{z}{\alpha^5}$$

definiert werden kann. Der Punkt $\alpha = 0$ bedeutet dann für die C_5 einen dreifachen Punkt, der mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkte äquivalent ist.

17. Wir wollen jetzt nachweisen, wie neue Typen beim Zusammenfallen zweier oder dreier Erzeugenden mit der Leitgeraden zu erhalten sind.

1) Vereinigung einer einfachen Leitgeraden d_1 mit zwei Erzeugenden $\tau, \bar{\tau} : (d_1, \tau, \bar{\tau})$. Nimmt man für $\bar{L}$ eine Erzeugende der Regelfläche, so wird die R_6 auf eine C_5 abgebildet, welche einen Doppelpunkt in O hat und noch zwei Punkte auf $\bar{L}$ besitzt. Eine Tangente im Doppelpunkte darf nicht in der Ebene E enthalten sein, es sei denn, dass einer von den anderen Punkten auf $\bar{L}$ sich mit dem Doppelpunkte verenigt hat, so dass $\bar{L}$ Tangente wird. Im allgemeinen wird die Doppelkurve auf eine R_8 abgebildet, für welche L eine fünffache Leitgerade bezeichnet. Für diese R_8 ist $\bar{L}$ eine einfache Erzeugende, so dass, wie zu erwarten war, man 7 als Ordnung der Doppelkurve erhält. Sind nun die beiden Tangenten im Doppelpunkte in derselben Ebene durch L enthalten, so bekommt man eine R_7 statt einer R_8, weil L jetzt nicht mehr als vierfache Leitgerade sein kann. Die Ordnung der Doppelkurve wird mithin nur 7. Diese Erniedrigung wird dadurch erklärt, dass in diesem Falle τ und $\bar{\tau}$ dieselbe Torsalebene erhalten. Im reziproken Falle $(d_3, \tau, \bar{\tau})$ haben τ und $\bar{\tau}$ denselben Torsalpunkt. *2 Typen.*

2) Vereinigung einer doppelten Leitgeraden mit zwei Erzeugenden nebst einer gewöhnlichen doppelten Erzeugenden: $(d_2, \tau, \bar{\tau}) + g_2$. Für $\bar{L}$ wählt man hier g_2 und erhält als Bildkurve eine C_4 mit einem Doppelpunkte in O. Die C_4 trifft sonst nicht weder L noch $\bar{L}$. Im allgemeinen wird sowohl die Doppelkurve als die Doppeldevelopable auf eine R_3 abgebildet, für welche L bez. $\bar{L}$ eine dop-

pelte Leitgerade bedeutet. Die Ordnung bez. Klasse ist mithin 3. Nun kann es Fälle geben, wo die Ebene durch die Tangenten im Doppelpunkte entweder L oder $\bar{L}$ enthält. Die entsprechende R_3 wird dann durch eine R_2 ersetzt. Die Bedeutung hiervon ist, dass zwei zu einander reziproke Typen existieren, wo τ und $\bar{\tau}$ dieselbe Torsalebene bez. denselben Torsalpunkt besitzen. *2 Typen.*

3) Wie im verhergehenden Falle, aber ohne g_2: $(d_2, \tau, \bar{\tau})$. Als Bildkurve kann man eine C_5 erhalten, die einen Doppelpunkt in O und ausserdem noch einen Punkt auf sowohl L als $\bar{L}$ besitzt. Es gibt mehrere Unterfälle.

α) $p = 1$. Im allgemeinen wird sowohl die Doppelkurve als die Doppeldevelopable auf eine R_3 abgebildet, welche L bez. $\bar{L}$ als doppelte Leitgerade hat. Die C_5 liegt in diesem Falle auf einer F_2, und die R_3 wird durch eine zu dieser F_2 gehörenden Regelschar ersetzt, falls die Ebene durch die Tangenten im Doppelpunkte die Gerade L bez. $\bar{L}$ enthält. Man bekommt in solcher Weise zwei zu einander reziproken Fälle, bei denen τ und $\bar{\tau}$ dieselbe Torsalebene bez. denselben Torsalpunkt besitzen. *2 Typen.*

β) Für $p=0$ erhält man zwei entsprechende Fälle. Nur sind hier im allgemeinen L und $\bar{L}$ dreifache Leitlinien für die bez. Bisekantenregelflächen, so dass letztere vom Grade 4 sind usw. *2 Typen.*

γ) Hier kann aber der Doppelpunkt in einen Berührungsknoten übergehen. Beide Bisekantenregelflächen werden dann R_3, so dass 3 sowohl die Ordnung der Restdoppelkurve als die Klasse der Restdoppeldevelopablen ist. Es fallen hier für τ und $\bar{\tau}$ sowohl die Torsalebenen als die Torsalpunkte zusammen. Der Fall ist zu sich selbst reziprok. *Nur 1 Typus.*

δ) Im Falle eines Berührungsknotens liegt die C_5 auf einer F_2, und man hat zwei Spezialfälle, indem L bez. $\bar{L}$ Erzeugende dieser F_2 sein kann. Als entsprechende Bisekantenregelfläche tritt dann die andere Regelschar dieser F_2 auf. Man erhält zwei zu einander reziproken Fälle, je nachdem es die Ordnung der Restdoppelkurve oder die Klasse der Restdoppeldevelopablen ist, welche auf 2 reduziert wird. Im ersteren Falle entspringt für einen Querschnitt durch τ und $\bar{\tau}$ ein Oskulationsknoten. *2 Typen.*

4) Mit einer einfachen Leitgeraden haben sich drei Erzeugende vereinigt: $(d_1, \tau, \bar{\tau}, \bar{\bar{\tau}})$. Als Bildkurve kann man eine C_5 erhalten, welche einen dreifachen Punkt in O und ausserdem noch einen Punkt auf $\bar{L}$ besitzt. Im allgemeinen wird die Doppelkurve auf eine R_4 abgebildet, für welche L eine dreifache Leitgerade ist. Diese R_4 reduziert sich aber auf eine R_3, wenn L in einer Ebene durch 2 Tangenten im dreifachen Punkte enthalten wird; es wird ja dann L

nur eine doppelte Leitgerade für die fragliche Bisekantenregelfläche. Man erhält demnach einen Fall, wo zwei Torsalebenen, etwa für τ und $\bar{\tau}$, zusammenfallen. Im reziproken Falle (d_2, τ, $\bar{\tau}$, $\bar{\bar{\tau}}$) vereinigen sich zwei Torsalpunkte. *2 Typen.*

Auf die in dieser Nummer behandelte Klasse von Typen habe ich in meiner Dissertation (p. 47, 49) aufmerksam gemacht. Doch findet sich dort keine vollständige Angabe über die Anzahl der möglichen Fälle. In der Aufzählung der Typen (Diss., p. 60) nach der Beschaffenheit der Doppelkurve ist auf diese Fälle kein Bezug genommen, was als eine Inkonsequenz betrachtet werden muss.

III.

Bestimmung von Regelflächen durch Leitkurven.

18. Es gilt bekanntlich der Satz, dass drei sich nirgends schneidende Kurven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 als Leitkurven eine Regelfläche von der Ordnung $2\,n_1 n_2 n_3$ bestimmen. Haben die drei Leitkurven bez. eine Anzahl von α_1, α_2, α_3 Punkten paarweise gemein, so sondern sich von der eigentlichen Regelfläche die Kegel ab, die aus diesen Punkten über die jedesmalige dritte Kurve beschrieben werden, und wir erhalten die Ordnung $2\,n_1 n_2 n_3 - \alpha_1 n_1 - \alpha_2 n_2 - \alpha_3 n_3$. Im Falle $n_3 = 1$, wo wir also eine Leitgerade haben, müssen wir doch zwischen zwei verschiedenen Arten von Schnittpunkten der Kurven C_{n_1} und C_{n_2} unterscheiden. Wenn die Ebene durch die Tangenten der Kurven im Schnittpunkte die Leitgerade enthält, wird ja offenbar die Ordnung der Regelfläche um 2 reduziert. Hat man also f Schnittpunkte der letzteren Art, und ist t die Anzahl der übrigen Schnittpunkte, so bekommt man für den Grad der Regelfläche

$$(11) \qquad 2\,n_1 n_2 - \alpha_1 n_1 - \alpha_2 n_2 - t - 2f.$$

In einer Ebene durch die Leitgerade liegen $n_1 - \alpha_2$ bez. $n_2 - \alpha_1$ bewegliche Punkte der Kurven C_{n_1} und C_{n_2}. Wir haben hieraus eine $(n_1 - \alpha_2,\ n_2 - \alpha_1)$-Korrespondenz zwischen den beiden Kurven, und die Regelfläche entsteht aus den Verbindungsgeraden entsprechender Punkte. Wenn die beiden Leitkurven rational sind, so erhalten wir leicht die allgemeine Gestalt der Korrespondenzgleichung. Bedeuten f_1, φ_1, f_2, φ_2 ganze rationale Funktionen, und ist λ ein Parameter, der dem Ebenenbüschel durch die Leitgerade zugeordnet wird, so lassen sich die entsprechenden Punkte der C_{n_1} und C_{n_2} durch Relationen:

$$f_1(\alpha)+\lambda\varphi_1(\alpha)=0;\ f_2(\beta)+\lambda\varphi_2(\beta)=0$$

bestimmen. Als Korrespondenzgleichung ergibt sich demnach

$$f_1(\alpha)\varphi_2(\beta)-\varphi_1(\alpha)f_2(\beta)=0. \tag{12}$$

Lässt sich nun die Korrespondenz auflösen, so entspricht offenbar jedem Teiler eine besondere Regelfläche. Einen extremen Fall erhalten wir in der folgenden Weise. Es sei $n_1-\alpha_2=n_2-\alpha_1=n$, und es bestehe eine birationale Beziehung zwischen den Leitkurven, so dass Punkte in derselben Ebene durch die Leitgerade einander entsprechen; daneben soll eine von den Kurven (und also beide) eine Gruppe von n birationalen Transformationen zulassen, bei welcher der Parameter λ ungeändert wird. Man ersieht unmittelbar, dass bei solchen Bedingungen die Regelfläche in n Teile zerlegt wird, für welche die beiden Leitkurven einfach sind. Wenn die Leitkurven rational sind, bekommt man leicht zu jeder endlichen linearen Substitutionsgruppe einen entsprechenden Fall, indem man $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}=\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}=Z(x)$ wählt, wobei $Z(x)$ eine Grundfunktion der fraglichen Gruppe bedeuten soll. Die Relation (12) nimmt dann die Gestalt

$$Z(\beta)=Z(\alpha)$$

und wird offenbar befriedigt, wenn man für β eine beliebige Substitution der Gruppe in α einführt. Aber auch, wenn die Leitkurven nicht rational sind, lassen sich ähnliche Beispiele in mannigfacher Art konstruieren.

Die Korrespondenz zwischen den beiden Leitkurven wird natürlich nicht geändert, wenn wir auf dieselben birationale Transformationen ausführen, bei denen die zu dem Parameter λ gehörigen Punktgruppen ungeändert werden. Das Auftreten von Schnittpunkten zwischen den Leitkurven erniedrigt also zwar die Ordnung der Regelfläche, aber ist sonst nicht von wesentlicher Bedeutung.

Für gewisse λ-Werte fallen zwei oder mehrere Punkte der Kurve C_{n_1} zusammen; bei anderen gilt dasselbe für die Kurve C_{n_2}. Die Eigenschaften der Korrespondenz hängen nun besonders davon ab, wie oft solche Koinzidenzen bei demselben λ-Werte für beide Kurven eintreffen.

19. Im vorigen Abschnitte haben wir verschiedene Beispiele gefunden, wo die Regelfläche ausser der Leitgeraden noch zwei andere Leitkurven besitzt, welche je von den Erzeugenden nur in einem Punkte getroffen werden. Es muss natürlich möglich sein diese Regelflächen direkt zu bestimmen, ohne den Umweg

der Abbildung zu benutzen. Es handelte sich um Fälle, wo $n_1-\alpha_2=n_2-\alpha_1=2$, so dass die Leitkurven (2, 2)-deutig auf einander bezogen sind. Wenn die Polynome f_1, φ_1, f_2, φ_2 vom Grade 2 sind, so definiert (12) im allgemeinen eine elliptische Kurve. Da die Regelfläche dieser Kurve birational entspricht, so kann hier das Geschlecht bei rationalen Leitkurven höchstens 1 sein. Bei einem hinzukommenden Doppelpunkte in (12) wird aber die Regelfläche rational. Wenn in (α_1, β_1) ein solcher Doppelpunkt vorliegt, so entsprechen dem Werte $\alpha=\alpha_1$ zwei koinzidierende $\beta=\beta_1$ und umgekehrt. Dies verlangt eine Ebene durch die Leitgerade, welche beide Leitkurven berührt. Wir nennen eine solche Ebene eine e-Ebene. Ein spezieller Fall hiervon ist die in einem f-Punkte berührende Ebene. Existieren sogar zwei e-Ebenen, so muss die Regelfläche zerfallen. Wir haben hier Vorkommnisse, denen im vorigen Abschnitte eine Hauptrolle zukam. In einem f-Punkte kreuzen sich zwei Torsalen, deren gemeinsame Ebene die Leitgerade enthält. Gehört dagegen die e-Ebene zu keinem f-Punkte, so koinzidieren auch die Torsallinien, aber nicht die Torsalpunkte.

Die Regelfläche hat ganz verschiedene Eigenschaften in einem t-Punkte und einem f-Punkte. Durch einen t-Punkt gehen nämlich drei Erzeugende, so dass derselbe ein dreifacher Punkt der Fläche wird. Eine von diesen Erzeugenden liegt in der Ebene, welche durch die Tangenten der Leitkurven im t-Punkte bestimmt wird; die Ebene durch die Leitgerade und den t-Punkt enthält von jeder Leitkurve noch einen Punkt, und die beiden anderen Erzeugenden sind die Verbindungslinien dieser Punkte mit dem t-Punkte.

Auch die Restdoppelkurve trifft im Falle $n_1-\alpha_2=n_2-\alpha_1=2$ jede Erzeugende in nur einem Punkte. Dieselbe geht durch die t-Punkte und die Torsalpunkte in einer e-Ebene. Trifft die Verbindungslinie zweier t-Punkte die Leitgerade, so wird dieselbe eine doppelte Erzeugende der Regelfläche und scheidet von der Restdoppelkurve aus. Jede von den drei Doppelkurven ist offenbar eine hyperelliptische Kurve, da eine Ebene durch die Leitgerade nur zwei bewegliche Punkte ausschneidet. Sind die beiden Leitkurven rational, so kann die dritte Doppelkurve nur vom Geschlechte $P=1$ oder $P=0$ sein. Nun können die Torsalpunkte dieser Doppelkurve blos aus e-Ebenen herrühren. Hat die Regelfläche das Geschlecht $p=1$, so gibt es keine e-Ebene. Zur dritten Doppelkurve gehört dann kein Torsalpunkt, und dieselbe ist vom Geschlechte $P=1$. Im anderen Falle, wenn die Regelfläche rational ist, existiert eine einzige e-Ebene. Die dritte Doppelkurve besitzt zwei Torsalpunkte und ist rational, was auch von vornherein selbstverständlich ist.

Übrigens gilt ganz allgemein, wenn die Geschlechter der drei Doppelkurven mit P, P' und P'' bezeichnet werden,

$$p = P + P' + P''. \tag{13}$$

Nach der Formel von LÜROTH hat man als Anzahl sämtlicher Torsalen einer R_n vom Geschlechte p

$$2(n-2) + 4p.$$

Die Verteilung der Torsalpunkte zwischen der Leitgeraden und den drei Doppelkurven erfolgt nach dem Korrespondenzsatze von ZEUTHEN in der folgenden Weise:

$$2(p-1) + 2(n-4);$$
$$2(p-1) - 4(P-1);$$
$$2(p-1) - 4(P'-1);$$
$$2(p-1) - 4(P''-1).$$

Identifizieren wir die beiden erhaltenen Ausdrücke für die Anzahl der Torsalen, so ergibt sich (13). Für $p > 1$ kann höchstens eine von den Doppelkurven rational sein, und zwar im hyperelliptischen Falle. Ein besonderer Fall ist hier $n=6$ und $p=2$. Die Regelfläche kann dann keine von der Leitgeraden verschiedene rationale Doppelkurve besitzen. Doch gibt es eine Möglichkeit die Relation (13) zu befriedigen, indem eine Doppelkurve sich mit der Leitgeraden vereinigt, so dass wir eine Leitgerade mit Berührung erhalten, und die anderen beiden vom Geschlechte 1 sind. Eine leichte Überlegung zeigt, dass letztere Kurven dann ebene C_3 sein müssen.

20. Setzen wir in (11) $n_1 - \alpha_2 = n_2 - \alpha_1 = 2$, so ergibt sich als Grad der Regelfläche

$$2(n_1 + n_2 - f) - t. \tag{14}$$

Hier wollen wir uns besonders mit den Fällen beschäftigen, wo der Ausdruck (14) $= 6$ wird.

Sind die Leitkurven rationale nicht ebene C_3, so erhalten wir hierfür die Bedingung $t + 2f = 6$. Die höchste Anzahl von Schnittpunkten ist aber 5, ohne dass die C_3 zusammenfallen müssen. Man hat demnach, wenn die R_6 sich nicht zerlegen lassen soll, $t=4$, $f=1$. Nun kann die Leitgerade von der Verbindungslinie zweier t-Punkte oder sogar von zwei solchen Linien getroffen werden. Geschieht dies, so erhalten wir die Fälle 7: δ und 11: β_1 mit einer oder zwei doppelten Erzeugenden.

Hat man als Leitkurven ebene C_3 mit einem Doppelpunkte, so werden die 4 t-Punkte durch den gemeinsamen Doppelpunkt ersetzt. Durch diesen Punkt gehen 4 Ebenen, welche je eine Tangente von jeder C_3 enthalten. Falls die Schnittgerade zweier solcher Ebenen die Leitlinie trifft, wird dieselbe eine doppelte Erzeugende. Hierdurch erklären sich die Fälle 12: δ_1 und 12: β_3 mit einer oder zwei doppelten Erzeugenden.

Nehmen wir nun an, die Leitkurven seien eine C_2 und eine C_3, so erhalten wir als Bedingung für eine R_6 $t+2f=4$. Da höchstens 3 Schnittpunkte vorkommen können, so hat man nur die Möglichkeiten $f=1$ oder $f=2$. Ist die C_3 rational, so muss $f=1$ sein, wenn die R_6 nicht zerlegt werden soll. Für die verschiedenen Möglichkeiten von rationalen R_6, welche man hier bekommt, begnügen wir uns mit einem Hinweis auf den vorigen Abschnitt. Ist dagegen die C_3 eine ebene Kurve vom Geschlechte 1, so müssen die Treffpunkte der Leitkurven in der Schnittlinie ihrer Ebenen liegen und also höchstens 2 sein. Es muss also hier $f=2$ sein. Man findet leicht, dass von dem Schnittpunkte der C_2-Ebene mit der Leitgeraden eine doppelte Erzeugende nach dem in dieser Ebene liegenden C_3-Punkte ausgeht, der nicht zu den beiden f-Punkten gehört. Als einen besonderen Fall ist es anzusehen, wenn die C_3-Tangente in diesem Punkte die Leitgerade trifft. In dieser Weise lassen sich die Typen 13: γ und 15: β_2 konstruieren.

Zuletzt betrachten wir den Fall, wo beide Leitkurven C_2 sind. Wenn die Regelfläche eine R_6 sein soll, erhält man dann die Bedingung $t+2f=2$. Man erhält hierzu zwei Lösungen:

1) $t=2$, $f=0$;
2) $t=0$, $f=1$.

Für $t=2$ hat man im allgemeinen 1 als Geschlecht der Regelfläche; doch wird das Geschlecht 0, falls eine e-Ebene existiert. Werden die t-Punkte und die Leitlinie in derselben Ebene enthalten, so wird die Verbindungsgerade der t-Punkte eine doppelte Erzeugende. Man bekommt in dieser Weise zwei elliptische und zwei rationale Typen. Den elliptischen Typus mit einer doppelten Erzeugenden findet man in 13: γ. Die beiden rationalen Typen hat man in 8: γ und 10: γ.

Für $f=1$ ist die R_6 immer rational. In einer C_2-Ebene liegt ausser dem

f-Punkte noch ein Punkt P der anderen C_2. Die Gerade, welche von P nach dem Schnittpunkte der C_2-Ebene mit der Leitlinie geht, ist offenbar eine doppelte Erzeugende der R_6. Da es zwei C_2-Ebenen gibt, so erhalten wir für die Regelfläche zwei doppelte Erzeugende. Den allgemeinen Fall haben wir in 9: δ. Einen speziellen Fall, und zwar noch einmal 10: γ, erhalten wir, wenn die Tangente im Punkte P die Leitgerade trifft. Gilt letztere Eigenschaft für beide C_2-Ebenen, so bekommen wir den Fall 11: β_3. Zuletzt sei bemerkt, dass wir den Nebentypus 12: γ_4 erhalten, falls die C_2 einander berühren, und die gemeinsame Tangente die Leitgerade trifft.

In ähnlicher Weise lassen sich die Fallunterscheidungen behandeln, wenn der Grad nicht 6 ist oder die Regelfläche sich zerlegen lässt.

21. Wir wollen jetzt in einem etwas komplizierteren Falle die Bedingungen für die Zerlegbarkeit der Regelfläche aufsuchen. Die Leitkurven seien eine C_2 und eine C_4 erster Spezies vom Geschlechte 1, welche die Leitgerade nicht treffen. Haben die C_2 und die C_4 α Schnittpunkte, von denen keiner ein f-Punkt ist, so ist die Fläche vom Grade $16-\alpha$, und dieselbe geht doppelt durch die C_4, viermal durch die C_2 und $(8-\alpha)$-mal durch die Leitgerade. Im allgemeinen findet man 8 als die Anzahl der Torsalpunkte auf der C_4. Dieselben lassen sich ja als Schnittpunkte der C_4 mit den beiden durch die Leitgerade gehenden Berührungsebenen an die C_2 erhalten. Ist p das Geschlecht der Regelfläche, so soll diese Anzahl auch $2(p-1)$ sein. Man findet mithin $p=5$.

Soll nun die Regelfläche zerlegbar sein, so darf auf der C_4 kein Torsalpunkt auftreten. Die besprochenen zwei Tangentialebenen an die C_2 müssen also beide die C_4 doppelt berühren. Die Ebenen von letzterer Eigenschaft sind bekanntlich die Tangentialebenen an die $4\,K_2$, welche die C_4 enthalten. Man hat hier zwei Möglichkeiten:

1) Die Ebenen gehören zu zwei verschiedenen K_2. Die Leitgerade ist eine gemeinschaftliche Tangente dieser K_2.

2) Die Ebenen gehören zu demselben K_2. Die Leitgerade geht durch die K_2-Spitze.

Es ist hier die Frage, ob die Regelfläche unzerlegbar vom Geschlechte 1 ist, oder ob sie sich in zwei Regelflächen, welche beide vom Geschlechte 1 sind, zerlegen lässt. Im letzteren Falle muss auch die (2, 4)-Korrespondenz, welche die Ebenen durch die Leitgerade zwischen der C_2 und der C_4 vermitteln, zerlegbar sein. Dies verlangt aber, dass die 4 von einer solchen Ebene ausgeschnittenen Punkte der C_4 zwei Paare einer rationalen Involution bilden müssen. Bekanntlich erzeugen die Verbindungslinien solcher Paare eine Regelschar. Da in einer Ebene durch die Leitgerade zwei Linien dieser Schar liegen sollen, so muss die Schar aus den Erzeugenden eines K_2 bestehen. Im Falle 1 ist also die Regelfläche nicht zerlegbar. Dagegen kann man im Falle 2 ohne Schwierigkeit eine birationale Korrespondenz zwischen den Punkten der C_2 und den Erzeugenden des K_2 herstellen, so dass entsprechende Elemente in einer und derselben Ebene durch die Leitgerade liegen, und zwar gelingt dies auf zwei Weisen.

Die Bedingungen, damit die Regelfläche zerfalle, sind somit die folgenden:

a) Die Leitgerade soll durch die Spitze von einem der 4 K_2 gehen, welche die C_4 enthalten.

b) Die beiden Tangentialebenen an den K_2, welche die Leitgerade enthalten, sollen auch von dem Kegelschnitte berührt werden.

IV.

Regelflächen mit einer Leitkurve, die zweimal von den Erzeugenden getroffen wird.

22. Die Untersuchung von solchen Regelflächen mit einer Leitgeraden war das wesentliche Hilfsmittel im 2. Abschnitt. Dabei handelte es sich fast ausschliesslich um den Fall, wo die Leitkurve eine C_4 ist, welche die Leitgerade nicht trifft. Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall und nehmen als Leitkurve eine C_{m+k} vom Geschlechte P, welche k Punkte auf der Leitgeraden hat. Für den Rang der zugehörigen abwickelbaren Fläche finden wir, wenn keine Rückkehrpunkte vorkommen, $2(m+k+P-1)$. Die Leitgerade trifft also diese Fläche in $2(m+P-1)$ Punkten, wobei von den k Schnittpunkten mit der Kuspidalkurve abgesehen wird. Die Regelfläche enthält mithin $2(m+P-1)$ Erzeugende, welche Tangenten der Leitkurve darstellen. Die Ebene durch eine solche Tangente und die Leitgerade enthält noch $m-2$ Punkte der Leitkurve, welche ausserhalb der Leitgeraden belegen sind. Verbindet man diese Punkte mit dem Berührungspunkte der Tangente, so bekommt man $m-2$ Torsallinien der Regelfläche, deren Ebenen die Leitlinie enthalten. Die Gesamtzahl von derartigen Torsalerzeugenden ist mithin $2(m-2)(m+P-1)$. Zwischen dem Ebenenbüschel durch die Leitgerade und den Linien der Regelfläche besteht nun eine $\left(1, \frac{m(m-1)}{2}\right)$-Korrespondenz, für welche eben diese $2(m-2)(m+P-1)$ Koinzi-

denzen von 2 Linien auftreten. Man erhält hiernach für das Geschlecht der Regelfläche

$$p = \frac{1}{2}(m-2)(m+2P-3). \tag{15}$$

Man findet, dass diese Zahl jedesmal um 1 reduziert wird, wo die Ebenen durch die Leitlinie für zwei Tangenten der Leitkurve zusammenfallen, wie wir ja hierauf zahlreiche Beispiele im 2. Abschnitte haben.

Eine allgemeinere Klasse von Bisekantenregelflächen erhält man, wenn man die Leitkurve in irgend einer Weise birational transformiert und nachher in entsprechender Weise Punktpaare durch gerade Linien verbindet. Die wesentliche Eigenschaft wird beibehalten, dass die Punkte der Leitkurve in Gruppen zu je m zerlegt werden, welche paarweise Erzeugende der Regelfläche bestimmen. Die Leitkurve wird immer noch eine $(m-1)$-fache Kurve der Regelfläche. Zwei Erzeugende, welche von einem Punkte der Leitkurve nach zwei anderen ausgehen, werden stets von einer dritten, und zwar der Verbindungsgeraden dieser letzteren Punkte, begleitet. Hieraus folgt für $m \geqq 3$, dass *die Regelfläche eine dreifache Developable besitzt.* Ist insbesondere $m=4$, so hat die Regelfläche sowohl eine dreifache Kurve als eine dreifache Developable.

Nehmen wir die Leitkurve rational, so lässt sich dieselbe birational in eine nicht ebene C_3 transformieren. Die neue Bisekantenregelfläche kann, von etwaigen mehrfachen Erzeugenden abgesehen, keine andere mehrfache Kurve als die $(m-1)$-fache C_3 besitzen. Dieselbe muss also vom Grade $2(m-1)$ sein. Auch ersieht man unmittelbar, dass die Klasse der zugehörigen dreifachen Developablen $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ sein muss. Für $m=4$, wo es sich um eine R_6 handelt, *erhält man mithin sowohl die dreifache C_3 als auch eine dreifache Developable von der Klasse 3.* Dabei kann das Geschlecht der R_6 sowohl 1 als 0 sein, wie aus den Betrachtungen über die ursprüngliche Regelfläche in Nummer 7 ersichtlich ist. Es folgt auch aus den dortigen Entwicklungen, dass unter Umständen die R_6 in eine R_2 und eine R_4 oder sogar in $3\,R_2$ zerfallen kann. Im letzteren Falle geht durch jeden C_3-Punkt eine Erzeugende zu jeder R_2, und in der gleichen Weise verteilen sich die drei Erzeugenden, welche in einer beliebigen Ebene der dreifachen Developablen liegen.

Ein anderes Beispiel erhält man, wenn man als Leitkurve eine C_4 vom Geschlechte 1 wählt, und dieselbe so birational in eine andere C_4 transformiert, dass vier Punkte in einer Ebene nicht länger diese Eigenschaft beibehalten. Die R_8, von welcher in Nummer 13 die Rede war, wird dann in eine neue R_8 übergehen, welche sowohl eine dreifache Kurve von der Ordnung 4 als auch eine dreifache Developable von der Klasse 4 besitzt. Diese R_8, welche gewöhnlich vom Geschlechte 3 ist, kann in speziellen Fällen in eine R_2 und eine R_6 oder in $2\,R_2$ und eine R_4 zerlegt werden. Im letzteren Falle gelten ähnliche Verhältnisse wie die oben für die $3\,R_2$ beschriebenen.

Die im Falle einer Leitgeraden auftretenden doppelten Torsalen mit zusammenfallenden Torsalebenen, welche, wie die Beispiele im 2. Abschnitt zeigen, bei Erniedrigung des Geschlechtes eine entscheidende Rolle spielen, werden für die transformierten Regelflächen im allgemeinen gewöhnliche doppelte Erzeugende.

Der Inbegriff der Bisekanten einer rationalen Leitkurve lässt sich leicht birational in das Strahlenfeld einer Ebene überführen. Man braucht ja nur die Kurve in einen Kegelschnitt zu transformieren. Einer Regelfläche, welche die Leitkurve $(m-1)$-fach enthält, entspricht dann eine ebene Kurve von der Klasse $m-1$. Insbesondere ist der Kegelschnitt, als Liniengebilde betrachtet, das Bild der zur Leitkurve gehörigen abwickelbaren Fläche. Die Theorie der ebenen Kurven lässt sich somit auf ein solches System von Bisekantenregelflächen übertragen. Besonders einfach lässt sich dies für den Fall ausführen, wo die Leitkurve eine C_3 ist.

23. Wir haben schon viele Beispiele gefunden, wo die in der vorigen Nummer betrachtete Bisekantenregelfläche sich zerlegen lässt. Insbesondere ist dies der Fall, wenn die Leitkurve eine involutorische Transformation in sich zulässt, bei welcher die Verbindungsgerade entsprechender Punkte die Leitlinie L trifft. Wir wollen den Fall betrachten, wo diese Transformation sich durch eine axiale Kollineation vermitteln lässt. Dabei ist L die eine Axe; die andere können wir mit L_1 bezeichnen. Die Kollineation muss offenbar jede Ebene durch L in sich selbst überführen. Eine Gerade der Ebene wird dann in eine andere Gerade der Ebene, welche denselben Treffpunkt mit L hat, transformiert. Nur die Geraden, welche beide Axen treffen, werden invariant. Suchen wir jetzt die Bisekantenregelfläche der Leitkurve, für welche L eine Leitlinie ist, so besteht diese aus zwei Teilen. Erstens hat man aus den Verbindungsgeraden entsprechender Punkte bei der Kollineation eine Regelfläche, deren Erzeugende beide Axen treffen. Es bleibt übrig eine Regelfläche, deren Erzeugende bei der Kollineation paarweise vertauscht werden, wobei einem Paare sowohl derselbe Punkt als dieselbe Ebene in Bezug auf L zugeordnet wird. Für einen Querschnitt der Regel-

fläche entstehen Berührungsknoten aus den Paaren, welche L in demselben Punkt wie der Querschnitt schneiden. Für letztere Regelfläche ist also L eine Berührungsleitgerade.

Diese Auseinandersetzungen wollen wir durch ein Beispiel beleuchten, das ich schon vor vielen Jahren gegeben habe[1], und wobei es sich um eine R_6 vom Geschlechte $p=2$ handelt. Die Leitkurve sei eine nicht hyperelliptische C_6 vom Geschlechte 4, welche in einer (2, 1)-Korrespondenz mit einem Gebilde vom Geschlechte 2 steht. Zwei Koinzidenzen sollen dabei stattfinden. Eine solche C_6 muss den Schnitt zwischen einer F_2 und einer F_3 darstellen. Den Gleichungen dieser Flächen können wir die Gestalt

$$(16)\qquad \begin{gathered} xz + yw = 0 \\ f_3(y, w) + y\,\varphi_2(x, z) + w\,\psi_2(x, z) = 0 \end{gathered}$$

geben. Für die axiale Kollineation haben wir

$$(17)\qquad x' = -x;\quad y' = y;\quad z' = -z;\quad w' = w.$$

Die beiden Punkte $y=z=w=0$ und $x=y=w=0$ sind die Koinzidenzpunkte. Als Axe L nehmen wir $y=w=0$ mit den beiden Koinzidenzpunkten. Die Axe L_1 ist somit $x=z=0$.

Es ergibt sich unmittelbar, dass die Verbindungsgeraden der Punkte, welche einander bei der Kollineation entsprechen, eine R_5 erzeugen, für welche L eine dreifache und L_1 eine doppelte Leitgerade bedeuten. Es lässt sich weiter erschliessen, dass die übrig bleibende Bisekantenregelfläche von L aus eine R_6 vom Geschlechte $p=2$ sein muss, für welche die C_6 eine Doppelkurve und L eine doppelte Berührungsleitgerade darstellen.

Es gibt doch einen speziellen Fall, wo die R_6 in 2 K_3 vom Geschlechte 1 degeneriert. Man bemerkt, dass in (16) die Gleichung 3. Grades vermöge der Gleichung 2. Grades verschiedene Gestalten annehmen kann. Hat man dann

$$\varphi_2(x, z) = a(x-\alpha z)^2;\quad \psi_2(x, z) = b(x-\alpha z)^2,$$

so kann man auch eine Form finden, wo

---

[1] *Über die algebraischen Kurven von den Geschlechtern p=4, 5 und 6, welche eindeutige Transformationen in sich besitzen.* Bihang till Kungl. Sv. Vet.-Akad. Handl., Bd. 21 (1895), p. 9. Dortselbst (p. 26) ist noch ein anderer Fall gegeben, wo die Rolle der F_2 von einem K_2 übernommen wird.

$$\varphi_2(x, z) = a(x + \alpha z)^2; \quad \psi_2(x, z) = b(x + \alpha z)^2.$$

Hierin liegt die einzige Bedingung, dass die Koeffizienten für x^2 und z^2 in $\varphi_2(x, z)$ und $\psi_2(x, z)$ dasselbe Verhältniss haben sollen. In zwei Weisen bekommt man dann die C_6 als Schnitt der F_2 mit einem K_3. Die Spitzen der K_3 liegen auf L und sind durch $x - \alpha z = 0$ bez. $x + \alpha z = 0$ bestimmt. Für die beiden K_3 ist L eine Wendeerzeugende, längs welcher dieselben einander oskulieren. In diesem Falle geht die C_6 durch zwei Perspektivitäten in sich über, bei denen das Zentrum in einer von den K_3-Spitzen liegt, und die Ebene durch die andere Spitze und die Axe L_1 bestimmt wird.

Im obigen Beispiel hätte man auch die C_6 als die Abbildung einer Regelfläche vom Geschlechte $p=4$ nach den im 1. Abschnitte auseinandergesetzten Prinzipien auffassen können. Für den Grad n erhält man 10, 9 oder 8, je nachdem die zweite Fundamentalgerade $\bar{L}$ mit der C_6 0, 1 oder 2 Punkte gemeinsam hat. Für die R_n ist $\bar{L}$ eine $(n-6)$-fache Erzeugende und L eine $(n-4)$-fache Leitgerade. Es liegt nahe hier an eine allgemeine Aufgabe von analoger Art wie die im 2. Abschnitte behandelte zu denken. In dem zuletzt betrachteten Falle, wo drei doppelte Kurven der Regelfläche auf eine R_5 vom Geschlechte 2 und zwei K_3 vom Geschlechte 1 abgebildet werden, erhält man eine Bestätigung der Relation (13).

24. Die erste Herleitung des obigen R_6-Typus gab ich in meiner Dissertation (p. 58) mit Benutzung der Abbildungsmethode. Einen anderen dort gegebenen R_6-Typus mit $p=2$ werden wir in dieser Nummer nach einer etwas abweichenden Methode wiederfinden. Nimmt man bei der Abbildung einer R_6 mit doppelter Leitlinie als Fundamentalgerade $\bar{L}$ eine gewöhnliche Erzeugende, so bekommt man eine C_5, welche $\bar{L}$ in 3 Punkten und L in einem Punkte trifft. Da hier $p=2$ sein soll, so liegt die C_5 auf einer F_2, und $\bar{L}$ muss eine Erzeugende dieser F_2 darstellen. Bei dem in der vorigen Nummer behandelten Fall ist die F_3 ein K_2, der seine Spitze im Punkte O hat. Die C_5 geht einfach durch die Spitze und trifft überdies jede Erzeugende des K_2 in 2 Punkten. Damit der Grad der Regelfläche nur 6 sei, muss die Tangente der C_5 in der K_2-Spitze der Fundamentalebene E angehören.

Wie leicht zu finden ist, wird die Restdoppelkurve auf eine R_8 abgebildet, für welche L eine vierfache Leitgerade und $\bar{L}$ eine doppelte Erzeugende bedeuten. Dieselbe ist also eine C_6, und man kann auch bestätigen, dass ihr Geschlecht, wie es in der vorigen Nummer der Fall war, im allgemeinen 4 ist.

Die Frage ist nun, ob diese Doppelkurve, d. h. die R_8, zerfallen kann. Letzteres ist nur möglich in zwei Regelflächen, welche jede die C_5 einfach enthalten. Nun hat eine Kurve vom Geschlechte 2 blos eine Schar g_2^1, und diese wird hier durch die Erzeugenden des K_2 ausgeschnitten. Sollen also andere die C_5 einfach enthaltenden Bisekantenregelflächen existieren, so können dieselben nicht rational sein. Die einzige Möglichkeit für die Zerlegung der R_8 ist dann in zwei R_4 vom Geschlechte 1. Trifft ein solches Zerfallen der R_8 ein, so muss die C_5 eine Vierergruppe von eindeutigen Transformationen in sich zulassen, wobei die 4 Punkte in einer Ebene durch die Leitgerade unter sich vertauscht werden. Den drei von der Identität verschiedenen Operationen der Vierergruppe entsprechen der K_2 und die beiden R_4.

Dass eine solche Vierergruppe existieren kann, ist leicht nachzuweisen. Der Ebenenbüschel durch L schneidet aus dem K_2 je zwei Erzeugende, d. h. Punktpaare der g_2^1, aus, welche bei der Vierergruppe in einander übergehen. Die beiden berührenden Ebenen schneiden aber nur je ein solches Paar aus, das also invariant bleibt. Betrachten wir die Normalgleichung

$$y^2 = f_6(x)$$

einer Kurve des Geschlechtes $p=2$. Die invarianten Paare seien den Werten $x=0$ und $x=\infty$ zugeordnet. Man erkennt dann, dass die Gleichung die spezielle Gestalt

$$y^2 = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d \tag{18}$$

haben muss. Sehen wir von der Transformation $y'=-y$, $x'=x$ ab, die jedes Paar der g_2^1 in sich überführt, so enthält die Vierergruppe die Operationen

$$y' = y, \quad x' = -x \tag{19}$$

und

$$y' = -y, \quad x' = -x. \tag{20}$$

Zu jeder von diesen gehören zwei Koinzidenzen, indem für (19) die Punkte mit $x=0$ und für (20) diejenigen mit $x=\infty$ invariant bleiben. Dies stimmt damit überein, dass die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte ein Gebilde vom Geschlechte 1 erzeugen sollen. Eine Kurve vom Geschlechte 2 führt man leicht birational in eine auf einem K_2 belegene C_5 über, und sogar so, dass ein beliebiger Kurvpunkt in die K_2-Spitze transformiert wird. Dies gilt also auch, wenn die Kurve einer Gleichung (18) genügt. Der Relation $x'=-x$ in (19) und (20) entspricht eine Involution zwischen den Erzeugenden des K_2. Diese lässt sich durch die Doppelelemente, welche den Werten $x=0$ und $x=\infty$ entsprechen, festlegen. Nimmt man also L als Schnittgerade der Berührungsebenen in diesen Elementen, so bestimmt der Ebenenbüschel durch L die Involution. Es ist also L eine Leitgerade für die beiden R_4, deren Erzeugende die einander in (19) und (20) entsprechenden Punktpaare vereinigen. Man findet leicht, dass die andere Leitgerade einer R_4 durch einen der auf $\overline{L}$ belegenen C_5-Punkte gehen muss; den anderen C_5-Punkt vereinigt dann eine Erzeugende mit der K_2-Spitze. Aus diesen Resultaten ist ersichtlich, dass den beiden R_4 zwei ebene C_3 vom Geschlechte 1 als Doppelkurven der R_6 entsprechen.

Mit den beiden in dieser und der vorigen Nummer beschriebenen und den dazu reziproken haben wir *die 4 R_6-Typen für $p=2$ mit singulärer Leitgerade*, deren Existenz wir in Nummer 16 behaupteten. Hierin liegt eine Ergänzung zu den Resultaten, welche wir im 2. Abschnitte für $p=0$ und $p=1$ hergeleitet haben.

25. In dieser Arbeit haben wir schon eine Menge von Beispielen über das Zerfallen der Bisekantenregelfläche hergeleitet, wenn in den Ebenen durch die Leitgerade 4 bewegliche Punkte der Leitkurve liegen. Wir wollen versuchen, diese Resultate unter einem allgemeineren Gesichtspunkte aufzufassen. Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, die Leitkurve sei rational. Wie in Nummer 18 erhält man zwischen den Punkten, welche in derselben Ebene durch die Leitgerade belegen sind, eine Korrespondenz, welche durch eine Gleichung von der Gestalt

$$\frac{f(\alpha)\,\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\,f(\beta)}{\alpha-\beta}=0 \tag{21}$$

ausgedrückt wird, wobei f und φ ganze rationale Funktionen bezeichnen. Das linke Glied vom (21) zerlegen wir in ein Produkt von irreduzibeln Faktoren

$$\chi_1(\alpha,\beta)\cdot\chi_2(\alpha,\beta)\,\ldots\,\chi_l(\alpha,\beta). \tag{22}$$

Gewisse Faktoren $\chi(\alpha,\beta)$ können symmetrisch sein, so dass $\chi(\alpha,\beta)=\chi(\beta,\alpha)$. Jedem von diesen entspricht eine besondere Bisekantenregelfläche. Ist dagegen der Faktor $\chi(\alpha,\beta)$ nicht symmetrisch, so muss auch $\chi(\beta,\alpha)$ dem Produkt (22) angehören. Erst dem Produkte $\chi(\alpha,\beta)\cdot\chi(\beta,\alpha)$, das ja symmetrisch wird, entspricht hier eine Bisekantenregelfläche. Für diese Fläche ist die Leitkurve eine mehrfache Kurve. Betrachten wir nun eine birationale Abbildung dieser mehrfachen Kurve auf eine einfache Kurve, so lässt sich letztere Kurve, den Faktoren $\chi(\alpha, \beta)$ und $\chi(\beta, \alpha)$ entsprechend, in zwei irreduzible Kurven auflösen.

Es gibt Fälle von beliebig hoher Ordnung, wo die Faktoren in (22) alle ersten Grades in α und β sind. Wie in Nummer 18 ist es ja möglich, $\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}$ als eine Grundfunktion $Z(\alpha)$ einer beliebigen endlichen linearen Substitutionsgruppe zu wählen. Die Relation (21) bekommt dann die Gestalt

$$\frac{Z(\alpha) - Z(\beta)}{\alpha - \beta} = 0. \tag{23}$$

Zu jeder von der Identität verschiedenen Operation s der Gruppe bekommt man eine Lösung von (23), wobei α linear durch β ausgedrückt wird. Ist hier s involutorisch, so gehört zu s eine Regelfläche, welche die Leitkurve einfach enthält. Die nicht involutorischen Operationen treten in zu einander inversen Paaren, s und s^{-1}, auf. Zu jedem solchen Paare gehört eine Regelfläche, für welche die Leitkurve eine gewöhnliche Doppelkurve darstellt. Nun gibt es zyklische Gruppen und Diedergruppen von beliebig hoher Ordnung. *Es kann also keine obere Grenze für die Anzahl der Bestandteile existieren, in welche eine Bisekantenregelfläche mit einer Leitgeraden sich zerlegen lässt.*

Entsprechende Verhältnisse gelten, wenn das Geschlecht p der Leitkurve > 0 ist. Wir betrachten insbesondere den Fall, dass eine Kurve eine Gruppe von eindeutigen Transformationen in sich besitzt, so dass, falls ν die Ordnung der Gruppe bezeichnet, die ν bei der Gruppe zusammengehörigen Punkte eine $(\nu, 1)$-Korrespondenz mit einer rationalen Kurve vermitteln. Es ist dann auch eine $(\nu, 1)$-Korrespondenz mit einem Ebenenbüschel möglich. Wir können mithin eine birational entsprechende Leitkurve erhalten, so dass die Ebenen durch die Leitgerade die Systeme von ν bei der Gruppe in einander übergehenden Punkten ausschneiden. Es ist klar, dass die obigen Auseinandersetzungen für $p=0$ im Wesentlichen auch für diesen Fall gültig bleiben.

26. Die Entwicklungen der vorigen Nummer erhalten eine neue Bedeutung, wenn wir die Leitkurve als Bild einer Regelfläche nach dem Abbildungsverfahren unseres 1. Abschnittes auffassen. Die Doppelkurve lässt sich dann in solcher Weise zerlegen, dass die Bestandteile den symmetrischen Faktoren $\chi(\alpha, \beta)$ in (22) bez. den Paaren $\chi(\alpha, \beta) \cdot \chi(\beta, \alpha)$ von nicht symmetrischen Faktoren entsprechen. Sei n der Grad einer Regelfläche mit einer k-fachen Leitgeraden. Eine Erzeu-

gende trifft dann die Doppelkurve in $n-k-1$ Punkten, wenn von der Leitgeraden abgesehen wird. *Hat man $p=0$, so gibt es für beliebig grosse $(n-k)$-Werte Fälle, wo die Doppelkurve so zerlegt wird, dass jeder Teil von einer Erzeugenden entweder in einem oder in zwei Punkten getroffen wird. Dasselbe gilt offenbar für* $p=1$, da es auch in diesem Falle eindeutige Transformationsgruppen einer Kurve in sich von beliebig hoher Ordnung gibt. Für höhere Geschlechter hat man nach A. Hurwitz für die Ordnung einer solchen Gruppe die obere Grenze $84(p-1)$. Eine entsprechende Möglichkeit wie die obige für $p=0, 1$ dürfte dann nicht stattfinden; doch erfordert der Beweis hierfür auch einen Überblick über die $(2, 2)$-Korrespondenzen, welche auf der Kurve vorkommen können.

Nach den vorhergehenden Entwicklungen könnten wir wohl die Eigenschaften der Doppelkurve, wenn von der Leitlinie weggesehen wird, in wesentliche und minder wesentliche einteilen. Als wesentliche sind dann solche zu bezeichnen, welche von der $(n-k-1, n-k-1)$-Korrespondenz zwischen den Erzeugenden in derselben Ebene durch die Leitlinie abhängen. Für $p=0$ haben wir bereits einen Ausdruck für diese Korrespondenz in der Relation (21). Zur näheren Beleuchtung der Frage wollen wir einige Bemerkungen für den rationalen Fall hinzufügen. Als Fundamentallinien L und $\overline{L}$ wählen wir bez. $x=y=0$ und $y=z=0$. Wir können dann die Koordinaten der Bildkurve durch einen Parameter in der folgenden Weise

$$\frac{x}{g(\alpha)\cdot f(\alpha)}=\frac{y}{g(\alpha)\cdot\varphi(\alpha)}=\frac{z}{\varphi_1(\alpha)\cdot\psi(\alpha)}=\frac{w}{\omega(\alpha)} \tag{24}$$

darstellen, wobei $g(\alpha), \ldots$ ganze rationale Funktionen bedeuten. In (21) kommen nur die Funktionen f und φ vor; nur diesen kommt also eine wesentliche Bedeutung zu. Betreffend die übrigen Funktionen bestimmt $g(\alpha)=0$ die Argumente für diejenigen Erzeugenden der Regelfläche, welche von $\overline{L}$ im Schnittpunkte O mit L getroffen werden. Es soll $\varphi_1(\alpha)=0$ die Punkte der Bildkurve auf $\overline{L}$ bezeichnen, so dass $\varphi_1(\alpha)$ ein Faktor von $g(\alpha)\cdot\varphi(\alpha)$ sein muss. Man sieht, wie man durch Wahl der Funktionen in mannigfaltiger Weise die Erzeugenden bestimmen kann, welche mit $\overline{L}$ zusammenfallen oder von $\overline{L}$ in anderen Punkten als O getroffen werden. Auch lassen sich durch Veränderung der Funktionen singuläre Erzeugende erhalten. Es ist mithin leicht verständlich, dass man, wenn man die weniger wesentlichen Eigenschaften für die Doppelkurve hinzuzieht, eine sehr beträchtliche Anzahl von Typen erhalten kann.

Durch Analogieschlüsse versteht man, dass die Verhältnisse für höhere Geschlechter ähnlich sein müssen, *dass also die Möglichkeiten für die Zerlegung der Doppelkurve im Wesentlichen nur von dem Geschlechte der Regelfläche und der Anzahl von Erzeugenden, welche in einer Ebene durch die Leitgerade liegen, abhängen.* Erst in zweiter Instanz ist der Grad der Regelfläche oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Vielfachheit der Leitgeraden von Bedeutung. Ebenso ist es mit dem Auftreten von singulären Erzeugenden. Dies hindert nicht, dass man dadurch, wie aus dem 2. Abschnitte hervorgeht, eine grosse Menge von Typen erhalten kann. Es ist aber die Parallelität, mit welcher diese Typen in den einzelnen Unterabteilungen auftreten, die wir hier als das Wesentliche hervorheben wollen. Die Bedingung für diese Parallelität ist die Existenz der $(n-4)$-fachen Leitgeraden. Dass wir daneben eine $(n-4)$-fache Erzeugende annahmen, ist dagegen von weniger wesentlichen Bedeutung. Wir sehen also, *wie das Hauptproblem für die Doppelkurve einer Regelfläche mit einer Leitlinie sich in Spezialprobleme nach den beiden Zahlen $n-k$ und p auflöst.*

Wie man entsprechende Überlegungen für die Doppeldevelopable ausführen kann, indem man in (24) die Rollen für die Geraden $x=y=0$ und $y=z=0$ vertauscht, dürfte ohne weitere Erklärungen verständlich sein. Als bedeutungsvolle Zahl tritt hier k, d. h. die Vielfachheit der Leitlinie, statt $n-k$ auf.

27. Wenn von mehrfachen Erzeugenden abgesehen wird, ist offenbar $n-k-1$ die höchste Anzahl der Bestandteile, in welche die Doppelkurve aufgelöst werden kann. Im 2. Abschnitt haben wir gesehen, wie für $n-k=4$ diese Anzahl sich in mehrfacher Weise erreichen lässt. Nun ist es aus den vorangehenden Entwicklungen ersichtlich, dass für diese höchste Anzahl von besonderen Doppelkurven es eine Gruppe von der Ordnung $n-k$ mit lauter zu sich selbst inversen Operationen existieren muss, welche die $n-k$ in derselben Ebene durch die Leitline belegenen Erzeugenden in einander überführt. *Es muss demnach $n-k$ eine Potenz von 2 sein.* Im rationalen Fall ist aber die Vierergruppe die umfassendste Gruppe, welche die oben hervorgehobene Bedingung befriedigt. Weiter gehende Beispiele muss man mithin bei nicht rationalen Regelflächen suchen. Dagegen erhält man Beispiele von rationalen Regelflächen mit einer Auflösung der Doppelkurve in $n-k-2$ verschindene Kurven bei den R_7 und R_9 mit einer einfachen Leitgeraden. Es gibt also hier Fälle, wo *eine* Doppelkurve die Erzeugenden zweimal und *drei* bez. *fünf* Doppelkurven dieselben nur einmal treffen. Diese Beispiele sind den Diedergruppen von der Ordnung 6 und 8 zugeordnet.

Unter den eindeutigen Transformationsgruppen einer elliptischen Kurve in sich befinden sich auch Abelsche G_8 vom Typus (2, 2, 2). Wenn u in gewöhnlicher Weise den Parameter, ω_1 und ω_2 die Fundamentalperioden bedeuten, so kann man die Operationen einer solchen Gruppe in der Gestalt

$$u' \equiv \pm u, \ \pm u + \frac{\omega_1}{2}, \ \pm u + \frac{\omega_2}{2}, \ \pm u + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tag{25}$$

erhalten. Für die drei von der Identität verschiedenen Substitutionen mit dem Zeichen + existieren keine Koinzidenzen. Ihnen müssen darum Doppelkurven vom Geschlechte 1 entsprechen. In gleicher Weise entsprechen den 4 übrigen mit dem Zeichen —, bei denen je 4 Koinzidenzen vorkommen, rationale Doppelkurven. *Es existieren mithin für $n-k=8$ Regelflächen vom Geschlechte 1, für welche die Doppelkurve in 4 rationale und 3 elliptische Kurven zerfällt. Dies ist sogar für $k=2$ möglich, so dass die fragliche Eigenschaft schon bei einer R_{10} mit einer doppelten Leitlinie eintreffen kann.*

Wir wollen die Bedingungen für die Bildkurve einer solchen R_{10} aufsuchen. Dieselbe wird, wenn für $\bar{L}$ eine Erzeugende genommen wird, eine C_9, welche einen Punkt auf L und 7 Punkte auf $\bar{L}$ besitzt. Es gilt die allgemeine Bedingung, dass die Argumente für die 9 Punkte in einer Ebene eine konstante Summe haben müssen. Die Ebenen $x=0$ und $y=0$ enthalten je 8 nicht gemeinsame Punkte. Diese sollen in einander durch die Substitutionen (25) übergehen. Dann gilt dasselbe für jede Ebene des Büschels mit der Axe L. Die Ebene $z=0$ hat 7 gemeinsame Punkte mit der Ebene $y=0$, und die Argumentensummen für die beiden übrigen Punktpaare müssen übereinstimmen. Für die Ebene $w=0$ müssen die Argumente so genommen werden, dass dieselben nicht zu einer Ebene des durch $x=0$, $y=0$, $z=0$ bestimmten Bündels gehören.

Hat die Regelfläche keine doppelte Erzeugende, so lässt sich beweisen, dass die 4 rationalen Doppelkurven von der Ordnung 4 und die 3 elliptischen von der Ordnung 6 sind. Man findet auch, dass doppelte Erzeugende nicht in grösserer Anzahl als 3 auftreten können; dabei sind Doppeltorsalen mit gemeinsamer Ebene nicht ausgeschlossen. Eine Doppelkurve kann nicht von niedrigerer Ordnung als 4 sein, weil ja in einer Ebene durch die Leitgerade die Schnittpunkte von 4 Erzeugendenpaaren ihr angehören müssen. Die doppelten Erzeugenden müssen sich demnach von den elliptischen Doppelkurven ausscheiden, und zwar in solcher Weise, dass die Ordnung keiner Doppelkurve < 4 wird. Doch gibt es auch eine andere Möglichkeit, indem eine von den rationalen Doppelkurven unter Ausstossung von drei doppelten Erzeugenden sich mit der Leitgeraden zu einer doppelten Berührungsleitlinie vereinigen kann.

28. Diesen letzteren am meisten spezialisierten Fall wollen wir näher untersuchen. Dabei muss offenbar die g_2^1, welche der Ebenenbüschel mit der Axe $\bar{L}$ erzeugt, vermittelst einer von den vier Operationen in (25) mit dem Zeichen $-$, etwa $u' \equiv -u$, sich definieren lassen. Die zu dieser g_2^1 gehörigen Punktpaare liegen dann in geraden Linien von dem Schnittpunkte O der Axen L und $\bar{L}$ aus. Diese Geraden erzeugen einen K_4, für welchen $\bar{L}$ eine dreifache Erzeugende darstellt. Die Bildkurve C_9 muss durch die Spitze O dieses K_4 gehen, wobei dieTangente der Fundamentalebene E angehören muss. Projiziert man die C_9 von einem Punkte der Geraden $\bar{L}$ auf eine ebene Kurve, so müssen offenbar, wenn von der Spur der Geraden $\bar{L}$ weggesehen wird, die Doppelpunkte dieser Kurve von *wirklichen* Doppelpunkten der C_9 herrühren. Die Spur von $\bar{L}$ liefert einen siebenfachen Punkt, in welchem drei Paare von Zweigen, den drei durch $\bar{L}$ gehenden Schalen des K_4 entsprechend, einander berühren. Dieser Punkt ist demnach mit $21+3=24$ gewöhnlichen Doppelpunkten äquivalent. Damit aber die C_9 vom Geschlechte 1 sei, müssen noch drei Doppelpunkte hinzukommen. Für die R_{10} bedeutet dies, dass dieselbe drei doppelte Erzeugende besitzen muss, was wir bereits oben hervorgehoben haben.

Wir können weiter zeigen, dass sogar alle drei von diesen Doppellinien in Doppeltorsalen mit gemeinsamer Ebene übergehen können. Erstens kann man für die Lage der drei Doppelpunkte der C_9 drei beliebige Erzeugende des K_4 wählen. Der Einfachheit halber mag die Ebene $w=0$ alle drei Doppelpunkte enthalten. Dann tritt die Bedingung auf, dass unter den Argumenten für die Punkte der C_9 (Man denke etwa an die Darstellung durch Produkte von σ-Funktionen), welche in der Ebene $w=0$ liegen, drei Paare $\pm u_1$, $\pm u_2$, $\pm u_3$ auftreten. Da noch drei Argumente zu unserer Verfügung stehen, können wir offenbar u_1, u_2, u_3 beleibig nehmen, und insbesondere in solcher Weise, dass dieselben zu Erzeugenden des K_4 gehören, für welche die Berührungsebenen die Gerade L enthalten. Im letzteren Falle entsprechen aber den Doppelpunkten Doppeltorsalen mit gemeinsamer Ebene.

Für die fraglichen Erzeugenden des K_4 sollen, da weniger als acht verschiedene Punkte in der zugehörigen Ebene durch L liegen, Koinzidenzen bei den Substitutionen (25) auftreten. Gehören diese etwa zu $u' \equiv -u + \frac{\omega_1}{2}$, so findet man die Lösungen

$$u \equiv \frac{\omega_1}{4},\quad \frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_1}{2} \equiv -\frac{\omega_1}{4};\quad \frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_2}{2},\ \frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2} \equiv -\frac{\omega_1}{4} - \frac{\omega_2}{2}. \tag{26}$$

Man findet mithin zwei Paare $\frac{\omega_1}{4}$, $-\frac{\omega_1}{4}$ und $\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_2}{2}$, $-\frac{\omega_1}{4} - \frac{\omega_2}{2}$, welche zu zwei Erzeugenden des K_4 gehören. Für beide Paare haben wir die Differenz $\equiv \frac{\omega_1}{2}$; es gilt demnach für die Argumente $u' \equiv u + \frac{\omega_1}{2}$. Folglich ist die Verbindungsgerade das Bild von einem Punkte einer elliptischen Doppelkurve. Gehen nun die Punkte in einen Doppelpunkt zusammen, so muss die Ordnung dieser Doppelkurve um eins erniedrigt werden.

Offenbar kommen wir zu entsprechenden Resultaten für die Substitutionen $u' \equiv -u + \frac{\omega_2}{2}$ und $u' \equiv -u + \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2}$. Die Koinzidenzpunkte verteilen sich in Paare, für welche man $u' \equiv u + \frac{\omega_2}{2}$ bez. $u' \equiv u + \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2}$ hat. Wenn die Punkte eines Paares zusammenrücken, ist es also hier eine andere elliptische Doppelkurve, deren Ordnung erniedrigt wird. Wir haben auch hier die Eigenschaft gefunden, dass an den K_4 von L aus drei doppelt berührende Ebenen ausgehen, welche den drei Substitutionen $u' \equiv -u + \frac{\omega_1}{2}$, $-u + \frac{\omega_2}{2}$, $-u + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ beigeordnet sind. Für den Fall dreier Doppeltorsalen erhält man hiernach zwei Möglichkeiten. Erstens kann in jeder der drei letzteren Ebenen ein Doppelpunkt der Bildkurve belegen sein. Die drei elliptischen Doppelkurven sind dann alle von der Ordnung 5. Es ist aber auch möglich, dass in einer Ebene zwei Doppelpunkte und in einer anderen ein Doppelpunkt liegen. Die elliptischen Doppelkurven sind dann bez. von den Ordnungen 4, 5, 6.

Upsala 30. April 1931.