ÜBER DIE DARSTELLUNG WILLKÜRLICHER FUNCTIONEN.

Auszug eines Briefes an Herrn G. Mittag-Leffler

VON

C. RUNGE
in BERLIN.

Der Beweis, dass sich jede willkürliche stetige Function einer reellen Veränderlichen x in eine für alle in Betracht kommenden Werthe von x gleichmässig convergente Summe von rationalen Functionen entwickeln lässt, kann durch folgende elementare Betrachtungen geführt werden.

Die Function

$$\frac{1}{1 + x^{2n}}$$

ist für $|x| \leqq 1 - \delta$ (wo δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet) beliebig wenig von 1, für $|x| \geqq 1 + \delta$ beliebig wenig von Null verschieden, vorausgesetzt dass für n eine hinreichend grosse positive ganze Zahl gewählt wird.

Es bildet diese Function eine Art discontinuirlichen Factors, mit dessen Hilfe ich zunächst einen gleichmässig convergenten Ausdruck für eine gebrochene Linie herstellen werde.

Seien y_1 und y_2 zwei eindeutige stetige Functionen von x, welche für $x = 1$ denselben Werth besitzen, so wird

$$y_2 + \frac{1}{1 + x^{2n}}(y_1 - y_2)$$

für $0 \leqq x \leqq 1$ beliebig wenig von y_1 und für $1 \leqq x \leqq 1 + k$ beliebig wenig von y_2 verschieden sein, sobald n hinreichend gross gewählt ist, (k ist dabei eine beliebige positive Grösse).

Denn zunächst kann man δ so klein annehmen, dass für

$$1 - \delta \leqq x \leqq 1 + \delta$$

y_1 und y_2 beliebig wenig von einander verschieden sind, und in Folge dessen

$$y_2 + \frac{1}{1 + x^{2n}}(y_1 - y_2),$$

da $\frac{1}{1 + x^{2n}} < 1$ ist, beliebig wenig von y_1 und y_2 abweicht. Alsdann, nachdem δ in dieser Weise festgesetzt ist, kann man n so gross wählen, dass

$$\frac{1}{1 + x^{2n}}$$

für $0 \leqq x \leqq 1 - \delta$ beliebig wenig von 1 und für $1 + \delta \leqq x \leqq 1 + k$ beliebig wenig von 0 abweicht, und in Folge dessen

$$y_2 + \frac{1}{1 + x^{2n}}(y_1 - y_2)$$

beliebig genau mit y_1 resp. y_2 übereinstimmt.

Setzt man nun voraus, dass die Entwicklung in eine gleichmässig convergente Summe von rationalen Functionen für y_1 und y_2 möglich sei, und bezeichnet mit $R_n^{(1)}(x)$, $R_n^{(2)}(x)$ die Summen der ersten n Glieder in den Ausdrücken für y_1 resp. y_2, so ist

$$R_n(x) = R_n^{(2)}(x) + \frac{1}{1 + x^{2n}}[R_n^{(1)}(x) - R_n^{(2)}(x)]$$

eine rationale Function von x, welche für das Intervall $0 \leqq x \leqq 1 + k$ beliebig genau mit derjenigen stetigen Function übereinstimmt, welche von 0 bis 1 durch y_1, von 1 bis $1 + k$ durch y_2 definirt ist.

Daraus folgt, dass $\lim\limits_{n} R_n(x)$ oder, was dasselbe ist,

$$R_1(x) + [R_2(x) - R_1(x)] + [R_3(x) - R_2(x)] + \dots$$

eine gleichmässig convergente Darstellung dieser Function bildet.

Die Punkte o, 1, $1 + k$ sind hierbei nicht wesentlich. Setzt man

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{x - a}{a_1 - a}\right)^{2n}} \quad \text{statt} \quad \frac{1}{1 + x^{2n}},$$

so treten a, a_1, $a_1 + k$ (drei beliebige Grössen) an Stelle von o, 1, $1 + k$.

Gesetzt nun es solle in dem Intervalle $a \leqq x \leqq a'$ eine gebrochene Linie dargestellt werden, deren Eckpunkten die Abscissen $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ entsprechen; d. h. es soll eine gleichmässig convergente Summe von rationalen Functionen hergestellt werden, welche

$$\begin{array}{llll} \text{für} \quad a \leqq x \leqq a_1 & \text{mit} \quad \alpha_1(x - a_1) + b_1 & \\ \text{für} \quad a_1 \leqq x \leqq a_2 & \text{mit} \quad \alpha_2(x - a_2) + b_2 & [b_2 = b_1 - \alpha_2(a_1 - a_2)] \\ \text{für} \quad a_2 \leqq x \leqq a_3 & \text{mit} \quad \alpha_3(x - a_3) + b_3 & [b_3 = b_2 - \alpha_3(a_2 - a_3)] \\ & \text{etc.} & \end{array}$$

übereinstimme.

Indem man $y_1 = \alpha_1(x - a_1) + b_1$, $y_2 = \alpha_2(x - a_2) + b_2$ setzt, erhält man einen Ausdruck, welcher von $x = a$ bis a_2 mit der gebrochenen Linie, von $x = a_2$ bis a' dagegen mit $\alpha_2(x - a_2) + b_2$ übereinstimmt.

Indem man alsdann den so gewonnenen Ausdruck mit y_1 bezeichnet und $y_2 = \alpha_3(x - a_3) + b_3$ setzt, erhält man einen neuen Ausdruck, der bis $x = a_3$ mit der gebrochenen Linie, von a_3 bis a' aber mit $\alpha_3(x - a_3) + b_3$ übereinstimmt.

Dies Verfahren fortsetzend erhält man schliesslich die Darstellung der gebrochenen Linie.

Sei $y_1 = \lim\limits_n R_n^{(1)}(x)$ diese Darstellung und werde y_2 gleich derjenigen linearen Function von x gesetzt, welche für $x = a$ und $x = a'$ mit y_1 übereinstimmt, so liefert

$$R_n(x) = y_2 + \frac{1}{1 + \left(\frac{2x - (a + a')}{2(a' - a)}\right)^{2n}} (R_n^{(1)}(x) - y_2)$$

eine rationale Function, welche für $a \leqq x \leqq a'$ beliebig genau mit y_1, für $x \leqq a$ und $x \geqq a'$ dagegen beliebig genau mit y_2 übereinstimmt.

Denn aus der Bildungsweise von $R_n^{(1)}(x)$ ist leicht ersichtlich, dass es im Endlichen endlich bleibt, im Unendlichen aber wie $a_{\lambda+1}(x - a') + b_{\lambda+1}$ (die lineare Function, welche der letzten Seite entspricht) unendlich wird, woraus denn das Übrige wie oben gefolgert wird. $\lim\limits_n R_n(x)$ stellt, wenn ich mich so ausdrücken darf, eine geschlossene gebrochene Linie dar, d. h. eine solche, bei der die beiden äussersten Seiten Theile derselben Graden sind und sich in's Unendliche erstrecken.

Einer jeden Curve, die eine eindeutige stetige Function repräsentirt, kann man eine gebrochene Linie einzeichnen, die sich ihr beliebig genau anschliesst. Denn nimmt man die Seiten derselben hinreichend klein an, so muss die Differenz der beiden Ordinaten gleicher Abscisse kleiner sein als die grösste Werthschwankung der Ordinaten der Curve in dem einer Seite entsprechenden Intervall und muss mithin wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Function mit dem Intervall zugleich beliebig klein werden.

Da man nun andrerseits, wie oben nachgewiesen, sich durch rationale Functionen einer gebrochenen Linie beliebig genau anschliessen kann, so folgt dasselbe für eine beliebige stetige eindeutige Function.

Wenn die Function sich für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ an ein und dieselbe grade Linie beliebig genau anschliesst, so kann man sich ihr durch eine »geschlossene gebrochene» Linie beliebig genau annähern, und kann daher eine rationale Function $R_n(x)$ bilden, welche für alle reellen Werthe von x beliebig wenig $\left(\text{z. B. um weniger als } \frac{1}{n}\right)$ von der Function verschieden ist.

Das ist insbesondere der Fall, wenn die Function für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ sich demselben endlichen Werthe nähert. Dann ist $\lim\limits_n R_n(x)$ oder, was dasselbe ist, $R_1(x) + [R_2(x) - R_1(x)] +$ etc. für die ganze reelle Axe mit Einschluss der Unendlichkeit gleichmässig convergent.

Wenn die Function für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ sich nicht derselben Graden anschliesst, so wird man nach dem Vorgehenden eine rationale Function $R_n(x)$ bilden können, welche in dem Intervall $-n$ bis $+n$ sich weniger als $\frac{1}{n}$ von der Function unterscheidet. Dann convergirt $\lim\limits_n R_n(x)$ innerhalb jeder noch so grossen Strecke gleichmässig und stellt die Function dar. Aber der Bereich der gleichmässigen Convergenz schliesst nicht nothwendig die Unendlichkeit in sich. — Diese Darstellung kann man verwerthen zur Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

bei vorgeschriebenen Grenzbedingungen, nämlich zur Herstellung einer Lösung, welche für $\eta = 0$ gleich einer vorgeschriebenen stetigen Function von ξ wird und zugleich für positive Werthe von η stetig ist.

Wenn die vorgeschriebene Function für $x = +\infty$ und $x = -\infty$ sich demselben endlichen Werthe nähert (diesen Fall will ich hier allein betrachten), so werden die zur Darstellung verwendeten rationalen Functionen $R_n(x)$ nur für complexe Werthe von x unendlich, und da die Functionen reell sind, so sind die Unendlichkeitsstellen paarweise conjugirt. Seien $c_1, c_2, \ldots, c_r$ die unterhalb der reellen Axe gelegenen, $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_r$ die ihnen conjugirten oberhalb gelegenen. Zerlegt man nun $R_n(x)$ in Partialbrüche und bezeichnet mit $r_n(x)$ das Aggregat der in $c_1, c_2, \ldots, c_r$ unendlich werdenden Glieder, so wird

$$R_n(x) - r_n(x)$$

nur noch in $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_r$ unendlich. Verwandle ich nun hier alle von x unabhängigen Grössen in ihre conjugirten, wodurch $r_n(x)$ in $\bar{r}_n(x)$ übergeht, $R_n(x)$ aber ungeändert bleibt, so resultirt, dass

$$R_n(x) - \bar{r}_n(x)$$

nur in $c_1, c_2, \ldots, c_r$ unendlich wird. Folglich ist $\bar{r}_n(x)$ das Aggregat, der in $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_r$ unendlich werdenden Glieder, und mithin ist

$$R_n(x) - r_n(x) - \bar{r}_n(x)$$

constant, weil es an keiner Stelle mehr unendlich wird. Die Constante ist reell, denn es sind $r_n(x)$ und $\bar{r}_n(x)$ für reelle Werthe von x conjugirt und daher ist ihre Summe reell.

Man hat also

$$R_n(x) = r_n(x) + \bar{r}_n(x) + C.$$

Die reellen Theile von $r_n(x)$ un $\bar{r}_n(x)$ sind für reelle Werthe von x einander gleich, folglich ist der reelle Theil von $2r_n(x) + C$ für reelle

Werthe von x gleich $R_n(x)$ und also der reelle Theil von $2r_n(\xi + \eta i) + C$ eine Lösung der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, welche für $\eta > 0$ stetig ist und für $\eta = 0$ der vorgeschriebenen Function beliebig nahe kommt. Bezeichnet man ihn mit u_n, so wird $\lim_n u_n$ für $\eta \geqq 0$ und alle Werthe von ξ gleichmässig convergiren und die verlangte Lösung darstellen. Dies bedarf der näheren Ausführung, ich begnüge mich indessen hier darauf hinzuweisen, dass man auf diesem elementaren Wege die verlangte Integration auszuführen im Stande ist.

Ferner bemerke ich, dass man die Form der zur Darstellung verwendeten Functionen $R_n(x)$ auf mannigfache Weise vereinfachen kann, wenn man die von mir in dem Aufsatze *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* (Acta mathematica, Bd. 6) auseinandergesetzte Methode darauf anwendet, vermöge deren z. B. $R_n(x)$ durch eine andere für alle reellen Werthe sich beliebig wenig von ihr unterscheidende reelle Function ersetzt werden kann, die nur an einer Stelle und an der zu ihr conjugirten unendlich wird.