PERIODISCHE FUNKTIONEN UND SYSTEME VON UNENDLICH VIELEN LINEAREN GLEICHUNGEN.

Von

OSKAR PERRON

in TÜBINGEN.

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn STÄCKEL).

...... In § 3 Ihrer soeben in den Acta Mathematica, Band 37, S. 59 ff. erschienenen Arbeit fragen Sie nach denjenigen Lösungen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des Gleichungssystems

$$(5) \qquad \sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

welche zugleich einer Differenzengleichung r^{ter} Ordnung

$$(9) \qquad a_{n+r} = \lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \cdots + \lambda_{r-1} a_{n+r-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

genügen, wo dann die λ_ν als Unbekannte anzusehen sind. Natürlich soll die Zahl r so gewählt sein, dass a_n nicht schon einer Differenzengleichung von geringerer als der r^{ten} Ordnung mit konstanten Coefficienten genügt; insbesondere ist also $\lambda_0 \neq 0$.

Diese Frage lässt sich vollständig beantworten, wenn man auf die Differenzengleichung (9) die LAGRANGE' sche Auflösungsmethode anwendet. An Stelle der Unbekannten $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_{r-1}$ führe man die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_r$ der Gleichung

$$(A) \qquad \varrho^r = \lambda_0 + \lambda_1 \varrho + \cdots + \lambda_{r-1} \varrho^{r-1}$$

als neue Unbekannte ein. Wegen $\lambda_0 \neq 0$ sind diese Wurzeln $\neq 0$, und wie sich weiter unten zeigen wird, müssen sie notwendig auch von einander verschieden sein. Nimmt man das einstweilen als bewiesen an, so erhält man als LAGRANGE' sche Lösung von (9):

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{r} C_\nu \varrho_\nu^n, \tag{9 a}$$

wo die C_ν gewiss $\neq 0$ sind, weil sonst a_n einer Differenzengleichung von geringerer als der r^{ten} Ordnung genügen würde.

Führt man nun (9 a) in Ihre Gleichungen (5) ein, so kommt:

$$\sum_{\nu=1}^{r} C_\nu \sum_{t=1}^{\infty} \varrho_\nu^{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0,$$

oder also

$$\sum_{\nu=1}^{r} C_\nu \varrho_\nu^{n+1} \frac{e^{\varrho_\nu} - 1}{\varrho_\nu c} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{5 a}$$

Das sind unendlich viele lineare Gleichungen für die r Unbekannten $\frac{e^{\varrho_\nu c} - 1}{\varrho_\nu c}$. Die r ersten dieser Gleichungen haben die Determinante

$$\begin{vmatrix} C_1 \varrho_1 & \cdots & C_r \varrho_r \\ C_1 \varrho_1^2 & \cdots & C_r \varrho_r^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_1 \varrho_1^r & \cdots & C_r \varrho_r^r \end{vmatrix},$$

welche $\neq 0$ ist; also muss

$$\frac{e^{\varrho_\nu c} - 1}{\varrho_\nu c} = 0$$

sein, und dann sind auch die Gleichungen (5 a) *sämtlich* erfüllt. Daraus folgt nun

$$\varrho_\nu = \frac{2 \pi i k_\nu}{c},$$

wo die k_ν positive oder negative ganze Zahlen sind. Nach (9 a) ist also

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{r} C \left(\frac{2 \pi i k_\nu}{c}\right)^n.$$

Damit ist die Frage gelöst. Setzt man den gefundenen Wert von a_n in Ihre Gleichung (1) ein, so kommt:

$$P(z) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{r} C_\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2\pi i k_\nu z}{c}\right)^n$$

$$= a_0 + \sum_{\nu=1}^{r} C_\nu \left(e^{\frac{2\pi i k_\nu z}{c}} - 1\right) = C_0 + \sum_{\nu=1}^{r} C_\nu e^{\frac{2\pi i k_\nu z}{c}}.$$

Somit hat sich ergeben, dass Ihr Ansatz (9) alle periodischen Funktionen liefert, welche in der Form

$$P(z) = C_0 + \sum_{\nu=1}^{r} C_\nu e^{\frac{2\pi i k_\nu z}{c}}$$

enthalten sind, aber auch nur diese. Soll c eine *primitive* Periode sein, so dürfen die k_ν keinen gemeinsamen Teiler haben, eine Bedingung, die sowohl notwendig als hinreichend ist.

Ich muss Ihnen jetzt noch zeigen, dass die Annahme, die Gleichung (A) habe mehrfache Wurzeln, unzulässig ist. Nehmen Sie zu dem Zweck an, die von einander verschiedenen Wurzeln seien $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_k$, und dabei sei ϱ_ν eine r_ν-fache Wurzel, sodass $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = r$ ist; speciell mag $r_1 > 1$ sein. Dann ergibt die LAGRANGE'sche Lösung von (9):

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{k} \varrho_\nu^n P_\nu(n), \tag{9 b}$$

wobei $P_\nu(n)$ ein Polynom vom $(r_\nu - 1)^{\text{ten}}$ Grad ist (nicht von geringerem, sonst würde a_n einer Differenzengleichung von geringerer als der r^{ten} Ordnung genügen). Setzt man nun (9 b) in (5) ein, so kommt:

$$\sum_{\nu=1}^{k} \sum_{t=1}^{\infty} \varrho_\nu^{n+t} P_\nu(n+t) \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{5 b}$$

Nun ist bekanntlich

$$P_\nu(n+t) = P_\nu(n) + \frac{t}{1!} \Delta P_\nu(n) + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 P_\nu(n) + \cdots$$
$$+ \frac{t(t-1)\cdots(t-r_\nu+2)}{(r_\nu-1)!} \Delta^{r_\nu - 1} P_\nu(n).$$

Führt man das in (5 b) ein, so lässt sich die Summation nach t ausführen, und man erhält:

$$\sum_{\nu=1}^{k} \varrho_\nu^{n+1} \left\{ P_\nu(n) \frac{e^{\varrho_\nu c} - 1}{\varrho_\nu c} + \Delta P_\nu(n) \frac{e^{\varrho_\nu c}}{1!} + \cdots + \Delta^{r_\nu - 1} P_\nu(n) \frac{(\varrho_\nu c)^{r_\nu - 2} e^{\varrho_\nu c}}{(r_\nu - 1)!} \right\} = 0 \; (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Das sind unendlich viele lineare Gleichungen für die r Unbekannten

$$\text{(B)} \qquad \frac{e^{\varrho_\nu c} - 1}{\varrho_\nu c}, \; \frac{e^{\varrho_\nu c}}{1!}, \; \frac{\varrho_\nu c \, e^{\varrho_\nu c}}{2!}, \; \frac{(\varrho_\nu c)^{r_\nu - 2} e^{\varrho_\nu c}}{(r_\nu - 1)!} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots k).$$

Die r ersten dieser Gleichungen haben die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 P_1(0) & \varrho_1 \Delta P_1(0) & \ldots & \varrho_1 \Delta^{r_1 - 1} P_1(0) & \varrho_2 P_2(0) & \varrho_2 \Delta P_2(0) & \ldots \\ \varrho_1^2 P_1(1) & \varrho_1^2 \Delta P_1(1) & \ldots & \varrho_1^2 \Delta^{r_1 - 1} P_1(1) & \varrho_2^2 P_2(1) & \varrho_2^2 \Delta P_2(1) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varrho_1^r P_1(r-1) & \varrho_1^r \Delta P_1(r-1) & \cdots & \varrho_1^r \Delta^{r_1 - 1} P_1(r-1) & \varrho_2^r P_2(r-1) & \varrho_2^r \Delta P_2(r-1) & \cdots \end{vmatrix},$$

welche $\neq 0$ ist, wie Sie unter Beachtung des Umstandes, dass $P_\nu(n)$ *genau* vom $(r_\nu - 1)^{\text{ten}}$ Grad ist, leicht erkennen. Daher müssen die Unbekannten (B) verschwinden; wegen $r_1 > 1$ muss also insbesondere $e^{\varrho_1 c} = 0$ sein, was aber unmöglich ist. W. z. b. w.