SUR CERTAINS POLYNÔMES
QUI VÉRIFIENT UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE
DU SECOND ORDRE
ET SUR LA THEORIE DES FONCTIONS DE LAMÉ

PAR

T. J. STIELTJES

À LEYDE.

1. Dans les Comptes rendus de l'académie des sciences de Berlin, Année 1864 (et dans son Traité des fonctions sphériques, Tome I, pag. 472 e. s., 2[de] Édit.) M. HEINE a démontré la proposition suivante.

Soient A et B deux polynômes donnés en x, le premier du degré $p+1$, le second du degré p au plus — ces polynômes étant d'ailleurs tout à fait généraux et n'étant assujettis à aucune condition, et considérons l'équation différentielle:

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + 2B\frac{dy}{dx} + Cy = 0 \tag{1}$$

où C est un polynôme en x du degré $p-1$ au plus.

Alors il existe toujours certaines déterminations particulières du polynôme C, telles que l'équation (1) admette comme intégrale un polynôme en x du degré n. Le nombre de ces déterminations et des polynômes correspondants y s'élève à

$$(n.p) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+p-1)}{1.2.3\dots(p-1)}$$

$$(n.1) = 1.$$

Ce théorème constitue le fondement principal de la théorie générale des fonctions de LAMÉ qu'on doit à M. HEINE. Dans cette théorie la fonction B n'est pas indépendante de A, car l'on a $B = \frac{1}{4}\frac{dA}{dx}\cdot$ M. HEINE fait voir que la détermination du polynôme C dépend d'un système d'équations algébriques de degrés supérieurs et que l'équation finale qu'on obtient en éliminant toutes les inconnues sauf une, est *au plus* du degré $(n.p)$. En outre on voit qu'à chaque détermination de C correspond un polynôme déterminé y du degré n.

Mais on voit moins facilement que le degré de l'équation finale d'où dépend le polynôme C atteint effectivement le degré $(n.p)$. M. HEINE a levé cette difficulté en faisant voir par un calcul de proche en proche que, même en soumettant les polynômes A et B à certaines conditions particulières, il existe effectivement $(n.p)$ polynômes du degré n qui satisfont à une équation différentielle de la forme (1).

Je me propose de démontrer, dans ce qui suit, la proposition suivante. Lorsque les racines $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ de l'équation $A = 0$ sont réelles et inégales et qu'en posant:

$$\frac{B}{A} = \frac{\alpha_0}{x - a_0} + \frac{\alpha_1}{x - a_1} + \ldots + \frac{\alpha_p}{x - a_p} \tag{2}$$

les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont positives, alors les $(n.p)$ déterminations du polynôme C sont toutes réelles ainsi que les polynômes correspondants y du degré n. Soit y_1 un de ces derniers polynômes, les racines de $y_1 = 0$ sont réelles et inégales et distribuées dans les p intervalles des racines de $A = 0$.

Le nombre des manières dont on peut distribuer n quantités dans p intervalles est évidemment égal à $(n.p)$ — et j'ajoute maintenant que les racines des polynômes y représentent en effet toutes ces distributions, en sorte qu'un tel polynôme est parfaitement caractérisé par la distribution de ses n racines dans les p intervalles des racines $a_0, a_1, \ldots, a_p$ de $A = 0$.

2. Soient, sur un axe $0X$, $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_p$ les points dont les abscisses sont $a_0, a_1, \ldots, a_p$ et prenons encore, dans un quelconque des p intervalles déterminés par ces points (p. e. $(A_0 - A_1)$), n points $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dont les abscisses sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Cela posé,

considérons l'expression suivante, où l'on considère seulement les valeurs absolues des distances des divers points:

$$\Pi = \left|\begin{array}{l} \quad [A_0X_1 \times A_0X_2 \times A_0X_3 \ldots A_0X_n]^{\alpha_0} \\ \times [A_1X_1 \times A_1X_2 \times A_1X_3 \ldots A_1X_n]^{\alpha_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \times [A_pX_1 \times A_pX_2 \times A_pX_3 \ldots A_pX_n]^{\alpha_p} \\ \times X_1X_2 \times X_1X_3 \times X_1X_4 \ldots \times X_1X_n \\ \qquad \cdot \times X_2X_3 \times X_2X_4 \ldots \times X_2X_n \\ \qquad\qquad\qquad \times X_3X_4 \ldots \times X_3X_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times X_{n-1}X_n. \end{array}\right|$$

Cette expression est toujours positive et s'évanouit seulement quand deux des points $X_1, X_2, \ldots, X_n$ coïncident ou lorsqu'un de ces points vient se confondre avec l'une des limites de l'intervalle $(A_0 \text{-} A_1)$. En considérant les points $X_1, X_2, \ldots, X_n$ comme variables, mais restant toujours dans l'intervalle $A_0 \text{-} A_1$, il est évident que les divers facteurs de l'expression Π restent compris entre certaines limites, et les exposants $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ étant *positifs*, on voit que Π reste toujours inférieur à une certaine limite. Par conséquent, pour une certaine position des points $X_1, X_2, \ldots, X_n$ l'expression Π devient *maximum*.

On peut interpréter cela de la manière suivante. Concevons que les points fixes $A_0, \ldots, A_p$ soient des points matériels, la masse de A_k étant α_k, et que de même les points mobiles (sur oX) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ soient des points matériels dont la masse soit égale à l'unité. Alors, si deux points matériels se repoussent en raison directe de leurs masses, et en raison inverse de leur distance, $\log \Pi$ est le potentiel, et le maximum de Π correspond à une position d'équilibre stable.

Mais pour une position d'équilibre, dont l'existence résulte de ce qui précède (et qui est unique comme on le verra plus loin), on doit avoir:

$$(3) \qquad \frac{\alpha_0}{x_k - a_0} + \frac{\alpha_1}{x_k - a_1} + \ldots + \frac{\alpha_p}{x_k - a_p} + \frac{1}{x_k - x_1} + \ldots + \frac{1}{x_k - x_{k-1}}$$
$$+ \frac{1}{x_k - x_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{x_k - x_n} = 0. \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

J'observe maintenant qu'on a d'après (2):

$$\frac{a_0}{x_k - a_0} + \frac{a_1}{x_k - a_1} + \dots + \frac{a_p}{x_k - a_p} = \frac{B(x_k)}{A(x_k)}$$

et en posant:

$$(4) \qquad y = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

il vient:

$$\frac{y'}{y} - \frac{1}{x - x_k} = \frac{1}{x - x_1} + \dots + \frac{1}{x - x_{k-1}} + \frac{1}{x - x_{k+1}} + \dots + \frac{1}{x - x_n}$$

d'où

$$\left(\frac{2y''}{y'}\right)_{x = x_k} = \frac{1}{x_k - x_1} + \dots + \frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{x_k - x_{k+1}} + \dots + \frac{1}{x_k - x_n}.$$

On voit donc que les conditions d'équilibre (3) reviennent à ce que l'expression:

$$\frac{y''}{2y'} + \frac{B}{A}$$

on encore $Ay'' + 2By'$ s'évanouit pour $x = x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Le polynôme $Ay'' + 2By'$ du degré $n + p - 1$ est donc divisible par y et en désignant le quotient par $-C$ on a:

$$Ay'' + 2By' + Cy = 0.$$

Le polynôme y du degré n défini par la relation (4) est donc un de ceux dont l'existence fait l'objet de la proposition de M. Heine.

Il est clair que s'il existait une seconde position d'équilibre, n'importe que cet équilibre fût stable ou non, on en déduirait aussitôt un autre polynôme y qui satisfait à une équation différentielle telle que (1).

3. Dans ce qui précède nous avons supposé que les points X_1, X_2, ..., X_n étaient renfermés dans l'intervalle $(A_0 \cdot A_1)$. Mais il est clair qu'en se donnant à priori une distribution quelconque de ces points dans les p intervalles, et en limitant la variabilité de ces points par la condition qu'ils doivent rester toujours dans les intervalles où ils se trouvent d'abord, on peut répéter mot à mot les raisonnements précédents et il existe donc $(n.p)$ polynômes du degré n différents qui satisfont à une équation de la forme (1).

Les polynômes correspondants C sont aussi différents; en effet on aurait autrement une équation de la forme (1) dont les deux intégrales seraient des polynomes y_1, y_2 ce qui est impossible parce qu'on en déduirait la relation absurde:

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = Const.\ e^{-\int \frac{2B}{A} dx} = Const.\ (x-a_0)^{-2\alpha_0}(x-a_1)^{-2\alpha_1}\dots(x-a_p)^{-2\alpha_p}.$$

Nous voyons maintenant aussi qu'en se donnant la distribution des racines $x_1, \dots, x_n$ dans les p intervalles il y a seulement une position d'équilibre et cet équilibre correspondant au maximum du potentiel est stable.

En effet d'après les recherches de M. Heine le nombre des polynômes y ne peut surpasser $(n.p)$.

4. Considérons maintenant plus particulièrement les fonctions de Lamé, dont voici la définition d'après M. Heine.

Soit

$$\psi(x) = (x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_p)$$

alors la fonction de Lamé de l'ordre p et du degré n est une fonction entière du degré n des quantités:

$$A_0 = \sqrt{x-a_0},\ A_1 = \sqrt{x-a_1},\ \dots,\ A_p = \sqrt{x-a_p}$$

qui satisfait à une équation différentielle de la forme:

$$\psi(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}\psi'(x)\frac{dy}{dx} + \theta(x)y = 0$$

où $\theta(x)$ est un polynôme en x du degré $p-1$.

Ces fonctions se distribuent en classes de la manière suivante.

Soit $\psi_1(x)$ un diviseur quelconque de $\psi(x)$, alors on considère comme appartenant à la même classe toutes les fonctions qui sont de la forme:

$$\sqrt{\psi_1(x)}\ V(x)$$

$V(x)$ étant un polynôme en x. Naturellement le degré de $\psi_1(x)$ doit être de même parité que n.

L'équation différentielle à laquelle satisfait le polynôme $V(x)$ devient:

$$\psi(x)\frac{d^2V}{dx^2} + \left(\frac{1}{2}\psi'(x) + \frac{\psi(x)\psi_1'(x)}{\psi_1(x)}\right)\frac{dV}{dx} + \eta(x)V = 0;$$

elle est de la forme (1). En supposant réelles et inégales les quantités $a_0, a_1, \ldots, a_p$, notre proposition devient applicable; on a en effet:

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)}$$

en sorte que les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ n'ont d'autres valeurs que $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. Le degré de V étant k, les $(k.p)$ fonctions appartenant à la même classe sont donc réelles, et les racines des diverses équations $V = 0$ se trouvent distribuées de toutes les manières possibles dans les p intervalles des racines de l'équation $\psi(x) = 0$.

On doit ce dernier théorème à M. F. KLEIN (Mathematische Annalen, T. XVIII). La démonstration de M. KLEIN n'a rien de commun avec les considerations qui précèdent, et ne s'applique pas à notre proposition plus générale.

Leyde, Novembre 1884.