ZUR THEORIE DES FLÄCHENPOTENTIALS

VON

J. WEINGARTEN
in BERLIN.

Im neunten Abschnitt der *allgemeinen Lehrsätze in Beziehung auf die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte* verweist GAUSS bei der Besprechung der Unstetigkeiten der zweiten Differentialquotienten des Potentials einer in einem endlichen Raum stetig vertheilten Masse, auf ein in späteren Abschnitten bewiesenes Theorem, aus dem die Bestimmung des Betrages dieser Unstetigkeiten hervorgeht. Der Beweis des Theorems selbst erfordert einen gewissen Aufwand an analytischen Hilfsmitteln der Discussion. Es scheint aber, dass die in den ersten eilf Abschnitten der Lehrsätze entwickelten Mittel sowohl für die Ermittelung der Werthe der fraglichen Unstetigkeiten, wie für den Beweis des betreffenden Theorems selbständig ausreichen.

Wir bestimmen die Lage eines Punkts P im unbegrenzt ausgedehnten Raum durch die drei rechtwinklichen Coordinaten x_1, x_2, x_3. Bezeichnet U eine Function des Orts in diesem Raume, die in allen Theilen desselben als eindeutig, endlich und stetig veränderlich vorausgesetzt wird, so ist der Werth der Function U in jedem bestimmten Punkte P mit dem Grenzwerth derjenigen Werthe vertauschbar welche die Function U in einem veränderlichen Punkte P' annimmt, der dem Punkte P in willkürlicher Weise bis zum Zusammenfallen beider Punkte angenähert wird. Diese Vertauschbarkeit findet nicht mehr statt wenn die Eindeutigkeit, Endlichkeit und Stetigkeit der Function U nur in *einzelnen* Theilen des Raums vorausgesetzt wird, welche durch bestimmte Flächen von einander geschieden sind, insofern es sich um das Verhältniss in Punkten dieser Scheidungsflächen handelt. Für das Folgende wird es nur erfordert den Fall in Betracht zu ziehen, dass diese Theile gebildet seien aus dem von einer einzelnen geschlossenen Fläche S begrenzten Raum und demjenigen Raum der ausserhalb dieser Fläche liegt. Ist eine Function U für jeden *innerhalb* dieser Theile liegenden Punkt P eindeutig, endlich und stetig bestimmt, so wird bei der Annäherung eines veränderlichen Punktes P' an einen bestimmten Punkt P der Grenzfläche S die Function U des Ortes P' sich einem anderen Grenzwerthe nähern können, wenn der Punkt P' nur Punkte des *inneren* Raums durchläuft, als derjenige ist, der erreicht wird, wenn der Punkt P' nur auf einem Wege durch Punkte des *äusseren* Raums zu dem Punkte P geführt wird. Wir werden diese beiden Grenzwerthe durch Hinzufügung der Indices i und a als U^i und U^a von einander unterscheiden, und es wird unanstössig sein, von diesen beiden Werthen den ersteren als den Werth von U auf der *inneren* Seite von S im Punkte P, den zweiten als den Werth von U auf der *äusseren* Seite von S im Punkte P zu bezeichnen.

Wird nunmehr unter der Function U das Potential V einer innerhalb S mit der nach der Stetigkeit veränderlichen Dichtigkeit k vertheilten Masse verstanden, so sind nach den Entwickelungen der eilf ersten Abschnitte der *Lehrsätze* sowohl V selbst, wie auch die drei ersten Derivirten dieser Function nach den Coordinaten des Punktes P im ganzen Raume eindeutige, endliche und stetige Functionen des Orts P oder der Coordinaten x_1, x_2, x_3. Dagegen sind die sechs zweiten Derivirten von V nur endlich stetig und bestimmt in allen Punkten des inneren und äusseren Raums der Fläche S, so nahe diese Punkte auch derselben liegen, nicht aber in Punkten P dieser Fläche selbst. Aber auch die Bestimmtheit dieser zweiten Derivirten von V fällt fort für Punkte P' sowohl des inneren als des äusseren Raums von S, welche einem Punkte P_0 dieser Fläche, in welchem eine bestimmte Normale oder Tangentialebene nicht Statt hat, über jede Grenze genähert gedacht werden. Dieser Umstand ist aus den Grundlagen der von Gauss gegebenen Formeln für diese Derivirten ohne Weiteres ersichtlich, wenngleich ihn Gauss an der betreffenden Stelle nicht besonders hervorhebt.

In Folge der Stetigkeit der ersten Derivirten der Function V in allen Punkten des Raums bestehen unter Annahme der im Vorhergehenden angenommenen Bezeichnungsweise die drei Gleichungen, welche aus der nachstehenden Gleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial V}{\partial x_\lambda}\right)^i = 0$$

durch Einsetzung der Zahlen 1, 2, 3 für den Index λ gebildet werden in jedem Punkte (x_1, x_2, x_3) der Fläche S. Setzt man in diese Gleichung anstatt der Coordinaten x_1, x_2, x_3 die Coordinaten

$$x_1 + dx_1, \; x_2 + dx_2, \; x_3 + dx_3$$

eines dem Punkte (x_1, x_2, x_3) unendlich nahe benachbarten Punktes dieser Fläche, und subtrahirt sie selbst von der so entstandenen neuen Gleichung, so ergiebt sich offenbar die fernere:

$$(1) \qquad \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^i\right] dx_1 + \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_\lambda}\right)^i\right] dx_2$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial x_\lambda}\right)^i\right] dx_3 = 0,$$

welche in jedem Punkte P der Fläche S für alle Werthe der unendlich kleinen Verschiebungen dx_1, dx_2, dx_3 die zu einem unendlich nahe benachbarten Punkte in dieser Fläche führen, besteht; solche Punkte P_0 ausgenommen, in denen eine bestimmte Normale an die Fläche S nicht Statt hat, in welchen Punkten die angedeuteten zweiten Derivirten ihre Bestimmtheit verlieren. Bezeichnet man durch α_μ den Winkel, welchen die im Punkte P nach der äusseren Seite von S errichtete Normale mit der Axe der x_μ bildet, so folgt aus der Gleichung (1) dass die Coefficienten der Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 in derselben den Cosinus der betreffenden Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ proportional sind, und dass daher

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\right)^i = m_\lambda \cos \alpha_\mu$$

wenn m_λ einen von dem ursprünglich gewählten Index λ und den Coordinaten x_1, x_2, x_3 abhängigen Factor bezeichnet. Für die linke Seite vorstehender Gleichung findet die Vertauschbarkeit der Indices λ und μ statt, daher auch für die rechte, und es wird

$$m_\lambda \cos \alpha_\mu = m_\mu \cos \alpha_\lambda$$

sein. Es stellen hiernach die gleichen Quotienten

$$\frac{m_\lambda}{\cos\alpha_\lambda} = \frac{m_\mu}{\cos\alpha_\mu}$$

einen von der Wahl der Indices λ oder μ unabhängigen Werth dar, der mit ρ bezeichnet sein möge. Man hat alsdann,

$$m_\lambda = \rho\cos\alpha_\lambda$$

und folglich:

$$(2)\qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\right)^i = \rho\cos\alpha_\lambda\cos\alpha_\mu.$$

Die Bestimmung der Grösse ρ selbst erfolgt nunmehr sofort aus den Differentialgleichungen denen die Function V für alle Punkte des inneren und des äusseren Raumes von S bis in die unmittelbare Nähe von S genügt. Aus der aus diesen Differentialgleichungen unmittelbar zu folgernden Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right)^i + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right)^i + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right)^i = 4\pi k$$

folgt unter Benutzung der Gleichung (2) für $(\lambda, \mu) = (1, 1), (2, 2), (3, 3)$:

$$\rho = 4\pi k,$$

und hieraus die Bestimmung des Betrags der Unstetigkeit des zweiten auf die Variablen x_λ, x_μ bezüglichen Differentialquotienten von V durch die Gleichung

$$(3)\qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right)^i = 4\pi k\cos\alpha_\lambda\cos\alpha_\mu.$$

Mit Hilfe der bisherigen Entwickelungen ist es leicht die Giltigkeit des von Gauss an der erwähnten Stelle angedeuteten Theorems zu erweisen.

Bezeichnen ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Coordinaten eines Punktes Π der in einem gegebenen endlichen Flächenstück Σ gelegen ist, $d\sigma$ ein unbestimmtes Element dieses Flächenstücks, ferner x_1, x_2, x_3 die Coordinaten irgend eines Punktes P im Raume und schliesslich r die Entfernung zwischen Π und P. Alsdann ist das Integral

$$J = \int \frac{h d\sigma}{r}$$

ausgedehnt über alle Elemente des Flächenstücks Σ, in welchem h eine eindeutige, endliche und stetige Function des Ortes in diesem Flächenstück bezeichnet, eine im ganzen Raum eindeutige, endliche und stetige Function der Coordinaten x_1, x_2, x_3. Die Differentialquotienten von J nach diesen Coordinaten sind zwar für alle Punkte P ausserhalb Σ eindeutig, endlich und stetig, dagegen unstetig für Punkte Π innerhalb Σ. Es handelt sich um den Nachweis dieser Unstetigkeiten und um die Bestimmung ihres Betrages.

Wir setzen zunächst voraus, dass das Flächenstück Σ keinen Punkt enthalte, in welchem nicht eine bestimmte Normale an Σ statt hat, deren nach einer gewählten Seite zeigende Richtung mit der Axe der x_λ wiederum den Winkel α_λ bilden möge, und dass in keinem Punkte dieses Flächenstücks $\cos \alpha_1$ verschwinde. Man ergänze, was stets in willkürlicher Weise möglich ist, das Flächenstück Σ durch Hinzufügung eines neuen Stücks Σ' zu einer geschlossenen Fläche S, deren *äussere* Seite in Σ diejenige sei nach welcher die Richtung der Normalen gewählt worden. Innerhalb des von S umschlossenen Raumes vertheile man eine Masse mit der nach der Stetigkeit veränderlichen Dichtigkeit k, bei welcher Vertheilung man k im Übrigen als willkürliche Function des Ortes (x_1, x_2, x_3) innerhalb S wählen kann, wenn man diese Function nur der Bedingung gemäss bestimmt, dass in allen Punkten Π der inneren Seite des ursprünglichen Flächenstücks Σ die Bedingung

$$k = \frac{h}{\cos \alpha_1} \tag{4}$$

erfüllt wird. Ist V das Potential der nunmehr innerhalb S vertheilten Masse in irgend einem Punkte (x_1, x_2, x_3) des Raums, dt ein unbestimmtes Element des von S eingeschlossenen Raumes, η_1, η_2, η_3 seine Coordinaten, R der Abstand dieses Elements vom Punkte (x_1, x_2, x_3), so besteht bekanntlich die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -\int \frac{k \cos \alpha_1 \, d\sigma}{r} + \int \frac{\partial k}{\partial \eta_1} \frac{dt}{R},$$

in welcher sich das erste Integral über alle Flächenelemente von S, das zweite über alle Raumelemente des von S eingeschlossenen Raums bezieht. Das erste Integral selbst lässt sich zerlegen in den über die Elemente von Σ zu erstreckenden Theil, der der Gleichung (4) zufolge mit J identisch ist, und in den über die Elemente von Σ' zu erstreckenden Theil, welcher durch J' bezeichnet werde. Das über den von S eingeschlossenen Raum erstreckte Integral, welches das Potential einer in diesem Raum mit der Dichtigkeit $\frac{\partial k}{\partial \eta_1}$ vertheilten Masse darstellt, sei schliesslich durch W bezeichnet. Die vorstehende Gleichung geht alsdann über in die folgende:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -J - J' + W.$$

Aus ihr ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda} = -\frac{\partial J}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial J'}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial W}{\partial x_\lambda}.$$

Bezieht man diese Gleichung zunächst auf einen Punkt H der Fläche Σ welcher der äusseren Seite von Σ angehört, alsdann auf den nämlichen Punkt H der inneren Seite, und subtrahirt die erhaltenen Resultate, so erhält man in Rücksicht darauf, dass die Differentialquotienten von J' und W im betreffenden Raumtheil durchgängig eindeutig, endlich und stetig sind

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^i = -\left[\left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^i\right],$$

und mit Hilfe der Gleichung (3)

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^i = -4\pi k \cos \alpha_1 \cos \alpha_\lambda$$

d. h. in Folge von (4)

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^a - \left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^i = -4\pi h \cos\alpha_\lambda.$$

Bezeichnet n die Abscisse eines auf der Normale in Π gelegenen Punktes P, so ergiebt sich aus dieser Gleichung ohne Weiteres die folgende:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial n}\right)^a - \left(\frac{\partial J}{\partial n}\right)^i = -4\pi h,$$

welche das in Rede stehende Theorem ausdrückt. Wenngleich in der Entwickelung desselben vorausgesetzt wurde, dass in der ganzen Ausdehnung von Σ kein Punkt Π vorhanden sei, in welchem nicht eine bestimmte Normale existirte, so ist diese Voraussetzung für das Bestehen des Theorems selbst unwesentlich. Es genügt das Eintreten dieser Voraussetzung in einem *endlichen* den Punkt Π, für den die Unstetigkeit bestimmt werden soll, umgebenden Gebiet von Σ, da die Theile von J welche endlich von Π entfernten Elementen der Fläche Σ entsprechen, zu dieser Unstetigkeit keinen Beitrag liefern. Ebenso unwesentlich erscheint die Voraussetzung des Nichtverschwindens von $\cos\alpha_1$ in allen Punkten von Σ. Sie ist nur erforderlich für Punkte in endlicher Umgebung des betreffenden Punktes Π und stets erfüllt, wenn man unter der Richtung der x_1 diejenige nothwendig existirende Coordinatenrichtung versteht, für welche in diesem Punkte $\cos\alpha_1$ nicht verschwindet. Das Bestehen einer bestimmten Normale in dem betrachteten Punkte erweist sich als die einzige nothwendige und hinreichende Bedingung des Bestehens des in Rede stehenden Theorems, unabhängig von den in diesem Punkte übrigens stattfindenden Krümmungsverhältnissen.