SUR LES INTÉGRALES ALGÉBRIQUES DE DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES[1]

PAR

G. HUMBERT

à PARIS.

1. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique, et soit $\varphi(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque; le problème qu'on se propose de traiter dans ce travail est le suivant:

Reconnaître si l'intégrale $I = \int \varphi(x, y)dx$, où y est liée à x par la relation $f(x, y) = 0$, est une fonction algébrique de x.

---

[1] Les résultats obtenus par M. HUMBERT ont déjà été trouvés par M. WEIERSTRASS bien des années auparavant et communiqués par lui dans son cours sur les fonctions abéliennes. Mais la méthode suivie par les deux savants est tout à fait différente. Chez M. WEIERSTRASS les conditions pour qu'une intégrale de la forme $\int R(x, y)dx$ soit une fonction algébrique de x découlent, comme simple corollaire, du théorème sur la réduction de chaque intégrale de la forme considérée à une somme d'intégrales normales de la première, de la seconde et de la troisième espèce. Pour effectuer cette réduction il faut et il suffit de connaître:

1° les coefficients des puissances négatives de t aux environs de tous les points analytiques pour lesquels le développement de $R(x_t, y_t)\dfrac{dx_t}{dt}$ contient en général des puissances négatives de t;

2° la valeur de $R(x, y)$ pour p points analytiques réguliers $(a_1, b_1), \ldots, (a_p, b_p)$ choisis arbitrairement.

Le théorème de M. WEIERSTRASS est cité, quoique sans démonstration, dans la thèse inaugurale de M. HETTNER (Berlin, 1877).

Le rédacteur en chef.

2. Abel a montré que si l'intégrale I est une fonction algébrique de x, elle s'exprime rationnellement en x et y, mais il n'a pas fait connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Ces conditions ont été données par Briot et Bouquet sous une forme très simple: pour que l'intégrale soit algébrique, il faut et il suffit 1° qu'elle n'admette pas de cycle polaire; 2° que ses périodes soient nulles.

Il est malheureusement impossible de vérifier directement si les conditions de la seconde catégorie sont ou non satisfaites: les périodes étant en effet les intégrales prises le long de certains contours finis, on obtient, en exprimant qu'elles sont nulles, des équations où figurent des intégrales définies qu'on ne peut, la plupart du temps, calculer qu'à l'aide de méthodes d'approximation; il en résulte que le critérium tiré de la considération des périodes n'est applicable que dans des cas simples, comme ceux qu'ont indiqués Briot et Bouquet.

Au contraire, les conditions de la première catégorie, qui expriment qu'il n'y a pas de cycles polaires, peuvent se vérifier sans difficulté; il suffit de calculer, dans le développement de chaque système de valeurs infinies de $\varphi(x, y)$, suivant les puissances croissantes, (entières ou fractionnaires) de $x - a$, aux environs du point $x = a$, le coefficient du terme en $\frac{1}{x - a}$, qui engendre un logarithme dans l'intégrale, et d'écrire que ce coefficient est nul.

Liouville, dans divers mémoires, a étudié la question à un tout autre point de vue: il suppose que l'intégrale I est liée à x par une relation algébrique $\psi(x, I) = 0$, à coefficients indéterminés, et cherche à déterminer ces coefficients de manière que la valeur de $\frac{dI}{dx}$ tirée de cette relation soit égale à $\varphi(x, y)$: il a pu ramener ainsi la question à la résolution d'un système d'équations linéaires.

Plus tard, M. Zeuthen, en supposant toujours l'intégrale algébrique, a indiqué un moyen sûr de trouver directement l'ordre de la relation $\psi(x, I) = 0$; il obtient ainsi la forme de cette relation à un nombre fini de constantes près, et, en écrivant que $\frac{dI}{dx}$ est égal à $\varphi(x, y)$, il détermine ces constantes, ou, si cette détermination est impossible, reconnaît que l'intégrale cherchée est transcendante (Comptes rendus, 1880).

M. Raffy, dans sa thèse de doctorat (Paris, 1883), a donné un autre procédé pour déterminer le degré de la relation $\psi(x, I) = 0$, par des opérations purement arithmétiques.

Ces méthodes ont l'inconvénient de ne pas fournir sous une forme explicite les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale soit algébrique; la méthode que nous allons développer nous semble remplir ce but, d'une manière relativement simple.

Elle repose sur la théorie des fonctions fuchsiennes, dont M. Poincaré a montré la liaision intime avec la théorie des intégrales abéliennes.

3. Soit p le genre de la courbe $f(x, y) = 0$; il résulte des recherches de M. Poincaré que les coordonnées, x et y, peuvent être considérées comme des fonctions fuchsiennes, de genre p, d'un paramètre t: nous choisirons des fonctions de la première famille.

Le polygone R_0, générateur de ces fonctions, jouira des propriétés suivantes: il a $4p$ côtés; les côtés opposés sont conjuguées deux à deux, c. à. d. transformés l'un dans l'autre par une des substitutions du groupe fuchsien correspondant, G; et la somme de ses angles est égale à 2π.

De plus, ab et $a'b'$ étant deux côtés opposés, tels que les points a' et b' correspondent respectivement à a et b par la substitution qui transforme ab en $a'b'$, si l'on décrit R_0 en partant de a, dans le sens ab, on parcourt le côté $a'b'$ dans le sens $b'a'$.

Cela posé, remplaçons dans l'intégrale I, x et y par leurs valeurs en fonction fuchsienne de t, et désignons par $\varphi(t)$ la fonction $\varphi(x(t), y(t))$, il viendra:

$$I = \int \varphi(t) \frac{dx}{dt} dt.$$

$\varphi(t)$ est une fonction fuchsienne de t; $\frac{dx}{dt}$ est une fonction thétafuchsienne du premier degré, c. à. d. telle qu'on ait:

$$F\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right) = F(t) \, . \, (\gamma t + \delta)^2$$

en désignant par $\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$ une des substitutions de G, et en supposant $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Cela résulte immédiatement de ce que la fonction $x(t)$ ne change pas si l'on y opère la substitution précédente.

On aura donc, en posant:

$$\theta(t) = \varphi(t)\frac{dx}{dt},$$

pour l'expression de I:

$$I = \int \theta(t)dt$$

$\theta(t)$ étant également une fonction thétafuchsienne du premier degré.

4. L'intégrale I, si elle est algébrique, sera, d'après Abel, une fonction rationnelle de x et y, c. à. d. une fonction fuchsienne de t, et réciproquement; la question est ainsi ramenée à la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale d'une fonction thétafuchsienne du premier degré soit une fonction fuchsienne.

Soit donc

$$I(t) = \int \theta(t)dt.$$

I devant être une fonction uniforme de t, dans l'intérieur du cercle fondamental, il est tout d'abord nécessaire que les résidus de $\theta(t)$, à l'intérieur du polygone R_0, soient nuls.

Ces conditions reviennent aux premières conditions de Briot et Bouquet: le résidu de $\theta(t)$ relatif à un infini α de cette fonction est en effet égal à la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int \theta(t)dt$ le long d'un petit contour entourant le point α. Soient a, b les coordonnées du point d'argument α sur la courbe $f(x, y) = 0$; supposons d'abord que ce point ne soit pas un point critique pour la fonction y, de x, définie par la relation $f(x, y) = 0$. Quand, dans le plan des quantités t, le point t décrit un contour élémentaire autour du point α, le point x, dans le plan des quantités x, décrit *une seule fois* un contour élémentaire autour du point a, et comme on a

$$\theta(t) = \varphi(x, y)\frac{dx}{dt},$$

l'intégrale $\int \theta(t)dt$ le long du contour considéré, est égale à l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$ le long d'un petit contour entourant le point a, qui est un infini de $\varphi(x, y)$, et de I, c. à. d. égale au produit de $2\pi i$ par le résidu de la fonction $\varphi(x, y)$, considérée comme fonction de x, pour le point $x = a$; ou encore à la *période polaire* de I, pour le point $x = a$.

Si le point a est un point critique de la fonction y, on aura, aux environs de la valeur $t = \alpha$:

$$x - a = (t - \alpha)^q \xi(t);\ y - b = (t - \alpha)^r \eta(t);$$

ξ et η étant deux fonctions ne devenant ni nulles ni infinies pour $t = \alpha$; q et r désignant deux entiers positifs. Il en résultera pour $\varphi(x, y)$ une expression de la forme $(t - a)^{-s}\chi(t)$, s étant un entier négatif. Quand t décrit un petit cercle autour du point α, x décrit q fois un petit contour autour du point a; aux environs de ce point, on aura d'ailleurs pour $\varphi(x, y)$ un développement de la forme:

$$\varphi(x, y) = A(x - a)^{-\frac{s}{q}} + B(x - a)^{\frac{1-s}{q}} + \ldots + H(x - a)^{-1} + \ldots$$

et la valeur de l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$, quand x décrit q fois un contour élémentaire autour du point a sera égal à $2qi\pi H$, c. à. d. à la *période polaire* de I, pour le point $x = a$.

Il en résulte que, dans tous les cas, les conditions obtenues en écrivant que les résidus de $\varphi(x, y)\dfrac{dx}{dt}$ dans l'intérieur de R_0, sont nuls, expriment que l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$ n'a pas de *période polaire,* ce qui revient aux premières conditions de Briot et Bouquet.

5. Supposons ces conditions remplies, $I(t)$ sera, dans le cercle fondamental, fonction uniforme de t. Si c'est une fonction fuchsienne, considérons, le long du périmètre de R_0, l'intégrale $J = \int\limits_{R_0} I(t)\theta(t)dt$, où $\theta(t)$ désigne une fonction thétafuchsienne holomorphe de degré un: il existe p de ces fonctions, linéairement distinctes, si p est le genre des fonctions fuchsiennes considérées. Je dis que l'intégrale J est nulle.

Soient en effet ab et $a'b'$ deux côtés opposés de R_0, transformés l'un dans l'autre par la substitution $\left(t, \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$ et posons $t_1 = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$.

Les éléments de J, relatifs à deux points correspondants t et t_1, sur les côtés ab et $a'b'$ sont $I(t)\theta(t)dt$ et $-I(t_1)\theta(t_1)dt_1$.

Or on a:

$$\begin{aligned} I(t_1) &= I(t), \\ \theta(t_1) &= \theta(t)(\gamma t + \delta)^2, \\ dt_1 &= dt(\gamma t + \delta)^{-2}, \end{aligned}$$

donc:

$$I(t_1)\theta(t_1)dt_1 = I(t)\theta(t)dt$$

et par suite l'intégrale J est nulle le long de R_0. En d'autres termes, la somme des résidus de la fonction $I(t)\theta(t)$ est nulle dans l'intérieur de R_0.

$\theta(t)$ étant une fonction holomorphe, les infinis de $I(t)\theta(t)$ sont ceux de $I(t)$, c. à. d. de $\Theta(t)$, et les résidus correspondants se calculent sans difficulté quand on connaît le développement de $\Theta(t)$ suivant les puissances croissantes de $t - \alpha$, autour du pôle $t = \alpha$.

En donnant successivement à $\theta(t)$ les valeurs $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\ldots$, $\theta_p(t)$ des p fonctions thétafuchsiennes holomorphes de degré un, linéairement distinctes, on obtient ainsi p équations, exprimant que la somme des résidus, dans l'intérieur de R_0, des fonctions $I(t)\theta_i(t)$ est nulle. Nous désignerons ces équations sous le nom d'équations (E).

6. Les équations (E) sont elles suffisantes pour que l'intégrale $I(t)$ soit une fonction fuchsienne? Il serait aisé de démontrer qu'il n'en est rien; nous allons d'ailleurs donner une interprétation analytique de ces équations, au point de vue de la nature de la fonction I.

Si la somme des résidus de chacune des p fonctions $I(t)\theta_i(t)$ dans l'intérieur de R_0 est nulle, la fonction $I(t)$ sera égale à une fonction fuchsienne augmentée d'une fonction linéaire et homogène des intégrales $\int\theta_1(t)dt$, $\int\theta_2(t)dt$, $\ldots$, $\int\theta_p(t)dt$.

Pour démontrer cette proposition importante, nous supposerons, dans le but d'abréger l'exposition, qu'on a $p = 2$: la méthode est d'ailleurs absolument générale.

L'intégrale $I(t)$ est, par hypothèse, une fonction uniforme de t; or on a, $\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$ désignant toujours une des substitutions du groupe G:

$$\Theta\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right) = \Theta(t)(\gamma t + \delta)^2$$

ou:

$$\Theta\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right) \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right) = \Theta(t); \text{ et, puisque } I = \int\Theta(t)dt:$$

$$I\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right) = I(t) + m$$

m étant une constante. Le groupe G dérive des $2p$ substitutions fondamentales qui transforment l'un dans l'autre les côtés opposés de R_0; si p est égal à 2, on aura quatre substitutions, et il viendra:

$$I\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) = I(t) + m_i. \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

Si l'on désigne par $G_k(t)$ l'intégrale $\int \theta_k(t)dt$, on aura de même:

$$\begin{aligned} G_1\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) &= G_1(t) + \Omega_{1i}, \\ G_2\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) &= G_2(t) + \Omega_{2i}. \end{aligned} \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

Les quantités m, Ω_1 et Ω_2 sont les périodes des intégrales I, G_1 et G_2.

Cela posé, je dis que l'on peut déterminer deux constantes, λ_1 et λ_2, telles que la fonction

$$I(t) + \lambda_1 G_1(t) + \lambda_2 G_2(t)$$

soit une fonction fuchsienne. Il faut pour cela que cette fonction ne change pas si l'on y remplace t par $\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}$, c. à. d. qu'on ait:

$$(\mathrm{A}) \qquad \left|\begin{aligned} m_1 + \lambda_1 \Omega_{11} + \lambda_2 \Omega_{21} &= 0, \\ m_2 + \lambda_1 \Omega_{12} + \lambda_2 \Omega_{22} &= 0, \\ m_3 + \lambda_1 \Omega_{13} + \lambda_2 \Omega_{23} &= 0, \\ m_4 + \lambda_1 \Omega_{14} + \lambda_2 \Omega_{24} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Il s'agit de montrer que ces quatre équations en λ_1, λ_2 sont compatibles, si les résidus de chacune des fonctions $I(t)\theta_1(t)$ et $I(t)\theta_2(t)$ ont une somme nulle, c. à. d. si les intégrales $\int I(t)\theta_1(t)dt$ et $\int I(t)\theta_2(t)dt$ sont nulles le long de R_0.

Or soient toujours $a_i b_i$ et $a'_i b'_i$ deux côtés opposés de R_0, tels que ab se transforme en $a'b'$ par la substitution $\left(t, \frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right)$; on a évidemment, pour la partie de l'intégrale $\int I(t)\theta_k(t)dt$ qui correspond à ces côtés, la valeur:

$$m_i \int_{a_i}^{b_i} \theta_k(z)\,dz. \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1, 2, 3, 4 \\ k=1, 2 \end{smallmatrix}\right)$$

Désignons l'intégrale qui figure dans cette expression par ω_{ki}; on aura donc:

$$(\mathrm{B})\qquad \begin{cases} m_1\omega_{11} + m_2\omega_{12} + m_3\omega_{13} + m_4\omega_{14} = 0, \\ m_1\omega_{21} + m_2\omega_{22} + m_3\omega_{23} + m_4\omega_{24} = 0. \end{cases}$$

Si l'on écrit que l'intégrale $\int G_k(t)\theta_l(t)$ est nulle le long de R_0 (la fonction $G_k(t)\theta_l(t)$ est en effet holomorphe dans R_0), on aura de même en donnant à k et l les valeurs 1 et 2, les quatre équations:

$$(\mathrm{C})\qquad \begin{cases} \Omega_{11}\omega_{11} + \Omega_{12}\omega_{12} + \Omega_{13}\omega_{13} + \Omega_{14}\omega_{14} = 0, \\ \Omega_{21}\omega_{11} + \Omega_{22}\omega_{12} + \Omega_{23}\omega_{13} + \Omega_{24}\omega_{14} = 0, \\ \Omega_{11}\omega_{21} + \Omega_{12}\omega_{22} + \Omega_{13}\omega_{23} + \Omega_{14}\omega_{24} = 0, \\ \Omega_{21}\omega_{21} + \Omega_{22}\omega_{22} + \Omega_{23}\omega_{23} + \Omega_{24}\omega_{24} = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant la première équation (B) et les deux premières équations (C); si les déterminants qu'on peut former en combinant 3 des colonnes de la matrice:

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \end{matrix}$$

ne sont pas tous nuls, on tirera de ces équations les valeurs proportionnelles de ω_{11}, ω_{12}, ω_{13}, ω_{14}.

La deuxième équation (B) et les deux dernières équations (C) montrent alors qu'on aura des valeurs proportionnelles identiques pour ω_{21}, ω_{22}, ω_{23}, ω_{24}.

Il en résulte qu'on pourra former une fonction $\theta(t) = \mu_1\theta_1(t) + \mu_2\theta_2(t)$, μ_1 et μ_2 étant des constantes, telle que les quantités ω correspondantes soient toutes nulles, c. à. d. telles que l'intégrale $\int \theta(t)dt$ soit nulle le long de chacun des côtés du polygone R_0.

Je dis que, dans ce cas, l'intégrale $G(t) = \int \theta(t)dt$ serait une fonction fuchsienne de t. Evaluons en effet $G\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right)$. On a:

$$G\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) - G(t) = \int_t^{\frac{\alpha_i t+\beta_i}{\gamma_i t+\delta_i}} \theta(t)dt.$$

Soit Ω_i la valeur commune des deux membres; Ω_i est la valeur de $\int\theta(t)dt$ le long d'une ligne qui joint deux points quelconques, transformés l'un de l'autre par la substitution $\left(t, \frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right)$: si l'un de ces points est un sommet de R_0, le second sera également un sommet, et l'intégrale pourra être prise le long du périmètre du polygone, entre ces deux points. L'intégrale Ω_i sera donc une somme d'intégrales ω, et sera par suite égale à zéro. On en conclut que $G(t)$ est bien une fonction fuchsienne, résultat absurde puisque $G(t)$ est holomorphe dans le polygone R_0.

Pour échapper à cette conclusion, il faut nécessairement admettre que les déterminants formés avec 3 colonnes quelconques de la matrice (D) sont nuls: c'est précisément la condition pour que les équations (A) se réduisent à deux d'entre elles.

Ces équations d'ailleurs, donneront toujours pour λ_1 et λ_2 des valeurs finies; il ne pourrait en être autrement que si les déterminants d'ordre deux formés avec la matrice

$$\begin{matrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \end{matrix}$$

étaient tous nuls, ce qui est impossible, car, autrement, on formerait une fonction

$$\mu_1 G_1(t) + \mu_2 G_2(t),$$

pour laquelle toutes les périodes seraient nulles.

Le théorème énoncé plus haut, sur la signification des équations (E) est donc démontré.

7. Ces équations peuvent se mettre sous une forme plus commode au point de vue des applications.

Le résidu de la fonction $I(t)\theta_i(t)$, relatif à un infini, $t = \alpha$, de I, est en effet égal à la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int I(t)\theta_i(t)dt$$

le long d'un contour infiniment petit, enveloppant le point $t = \alpha$; or en désignant toujours par $G_i(t)$ la fonction $\int\theta_i(t)dt$, on a, en intégrant par parties:

$$\int I(t)\theta_i(t)dt = I(t)G_i(t) - \int\theta(t)G_i(t)dt.$$

La fonction $I(t)G_i(t)$ étant uniforme a la même valeur à l'origine et à la fin du contour; le résidu de $I(t)\theta_i(t)$, pour le pôle $t=\alpha$, est donc égal, et de signe contraire, au résidu de $\theta(t)G_i(t)$ pour le même pôle, et les équations (E) exprimeront que la somme des résidus de cette dernière fonction, dans le polygone R_0, est nulle.

8. Appliquons maintenant ces résultats à l'intégrale $\int\varphi(x, y)dx$; x et y étant liées par la relation de genre p, $f(x, y) = 0$.

On sait que les fonctions thétafuchsiennes holomorphes de degré un,

$$\theta_1(t),\ \theta_2(t),\ \ldots,\ \theta_p(t),$$

ont les expressions suivantes:

$$\theta_i(t) = \frac{dx}{dt}\frac{P_i(x, y)}{f'_y} \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$

x et y étant remplacées dans le second membre par leurs valeurs en fonction fuchsienne de t, et $P_i(x, y)$ désignant le premier membre de l'équation d'une courbe de degré $n-3$ adjointe à la courbe $f=0$, supposée de degré n.

On aura alors

$$G_i(t) = \int\theta_i(t)dt = \int\frac{dx}{dt}\frac{P_i(x, y)}{f'_y}dt$$

et par suite, dans le plan des quantités x, il viendra:

$$G_i(x) = \int\frac{P_i(x, y)}{f'_y}dx.$$

G_i sera donc une intégrale abélienne de première espèce.

Quant à la valeur de l'intégrale $\int\theta(t)G_i(t)dt$, le long d'un contour infiniment petit enveloppant un pôle de $\theta(t)$, elle est égale, d'après le raisonnement fait au n° 4, à la période polaire de l'intégrale

$$\int\varphi(x, y)G_i(x)dx,$$

correspondant à un infini, $x = a$, de la fonction $I(x)$.

L'intégrale

$$I = \int \varphi(x, y)dx$$

sera donc égale à une fonction rationnelle de x et y, augmentée d'une intégrale abélienne de première espèce, si la somme des périodes polaires de l'intégrale $\int \varphi(x, y)G_i(x)dx$, dans tout le plan, est égale à zéro. On peut par suite énoncer le théorème suivant.

Théorème I. *Soient: $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique de genre p; $\varphi(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; $G_1, G_2, \ldots, G_p$ p intégrales abéliennes de première espèce distinctes, appartenant à la courbe $f = 0$.*

Pour que l'intégrale $I = \int \varphi(x, y)dx$ se réduise à une fonction rationnelle de x, y, augmentée d'une intégrale de première espèce, il faut et il suffit:

1° que cette intégrale n'admette aucune période polaire;

2° que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales $\int \varphi(x, y)G_i(x)dx$ soit nulle.

9. Les dernières conditions s'expriment aussi aisément que les premières et évidemment sans aucun signe d'intégration si les premières sont satisfaites; il suffit, dans le développement de la fonction $\varphi(x, y)G_i(x)$, autour d'un point $x = a$, qui est un infini de l'intégrale I, de calculer le coefficient du terme en $\frac{1}{x - a}$.

On ne doit pas perdre de vue que I devient infini pour $x = \infty$ si le numérateur de $\varphi(x, y)$ n'est pas d'un degré inférieur de deux unités au moins, au degré du numérateur, et l'on devra en posant $x = \frac{1}{x'}$ calculer également le coefficient de $\frac{1}{x'}$ dans le développement de $\frac{\varphi\left(\frac{1}{x'}, y\right)}{x'^2}$, aux environs du point $x' = 0$.

Nous allons donner un exemple simple de l'application du théorème I.

10. Soit

$$\varphi(x, y) = \frac{Q(x, y)}{R(x, y)},$$

Q et R étant deux polynômes entiers, tels que le degré de Q soit inférieur de deux unités à celui de R: l'intégrale

$$I = \int \varphi(x,\ y)\, dx$$

ne devient infinie que pour des valeurs finies de x, et ces valeurs sont celles qui annulent simultanément $R(x,\ y)$ et $f(x,\ y)$. Pour que l'intégrale $\int \varphi(x,\ y) dx$, ou, dans le plan des t, pour que l'intégrale

$$\int \frac{Q(x,\ y)}{R(x,\ y)} \frac{dx}{dt} dt,$$

se réduise à une fonction rationnelle de x, y, augmentée d'une intégrale de première espèce, il faut tout d'abord que les pôles de la fonction $\frac{Q(x,\ y)}{R(x,\ y)} \frac{dx}{dt}$ soient des pôles d'ordre au moins égal à 2; cela résulte de ce que les résidus correspondant à ces pôles doivent être nuls. En d'autre termes, la courbe $R = 0$ doit avoir avec la courbe $f = 0$ un contact du premier ordre au moins, en tous les points, non situés sur la courbe $Q = 0$, où elle la rencontre; si, en un de ces points, $Q = 0$ a avec $f = 0$ un contact d'ordre μ, $R = 0$ devra y avoir avec $f = 0$ un contact d'ordre ν, ν étant tel qu'on ait $\nu \geqq \mu + 2$, ou $\nu \leqq \mu$.

Admettons, pour fixer les idées, que la courbe $R = 0$ touche la courbe $f = 0$, en un certain nombre de points, de coordonnées a_1, b_1; a_2, b_2; ... et que la courbe $Q = 0$ passe par tous les autres points communs aux deux premières; les infinis de l'intégrale I seront les points a_1, a_2, ... Supposons, pour simplifier, que ces points ne soient pas des points critiques pour la fonction y de x, qui vérifie l'équation $f(x, y) = 0$.

Nous devons écrire en premier lieu que la période polaire, pour le point $x = a$, de l'intégrale I est nulle, c. à. d. que dans le développement de $\varphi(x,\ y)$ suivant les puissances croissantes de $x - a = h$, le coefficient du terme $\frac{1}{h}$ s'annule.

Or on a:

$$\frac{Q(x,\ y)}{R(x,\ y)} = \frac{Q(a,\ b) + hQ'(a,\ b) + \ldots}{\frac{h^2}{2} R''(a,\ b) + \frac{h^3}{6} R'''(a,\ b) + \ldots}$$

en posant:

$$Q'(a,\ b) = \frac{\partial Q}{\partial a} + \frac{\partial Q}{\partial b} y',$$

$$R''(a,\ b) = \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} + 2\frac{\partial^2 R}{\partial a\,\partial b} y' + \frac{\partial^2 R}{\partial b^2} y'^2 + \frac{\partial R}{\partial b} y'',$$

$$R'''(a,\ b) = \frac{\partial^3 R}{\partial a^3} + 3\frac{\partial^3 R}{\partial a^2 \partial b} y' + 3\frac{\partial^3 R}{\partial a\,\partial b^2} y'^2 + \frac{\partial^3 R}{\partial b^3} y'^3$$

$$+ 3\frac{\partial^2 R}{\partial a\,\partial b} y'' + 3\frac{\partial^2 R}{\partial b^2} y'y'' + \frac{\partial R}{\partial b} y''',$$

y', y'', y''' étant les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$ au point a, b.

Le coefficient de $\frac{1}{h}$ est égal, dans le développement de $\frac{Q}{R}$, à

$$\frac{2}{3R''^2}[3Q'R'' - QR'''];$$

on doit donc avoir la première série d'équations:

$$3Q'(a,\ b)R''(a,\ b) - Q(a,\ b)R'''(a,\ b) = 0. \qquad \left(a, b = \begin{cases} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}\right)$$

Les valeurs de y', y'', y''' se calculent à l'aide de la relation $f(x, y) = 0$.

Il faut maintenant calculer le terme en $\frac{1}{h}$ dans le développement de $\varphi(x,\ y)G_i(x)$; comme il n'y a pas de terme en $\frac{1}{h}$ dans $\varphi(x, y)$, et que le terme en $\frac{1}{h^2}$ est égal à $\frac{2Q}{R''}$, on aura, pour le terme cherché:

$$\frac{2Q(a,\ b)}{R''(a,\ b)}\frac{dG_i}{da},$$

$\frac{dG_i}{da}$ étant la dérivée pour $x = a$, de la fonction

$$G_i = \int \frac{P_i(x,\ y)}{f'_y} dx;$$

cette dérivée est donc

$$\frac{P_i(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial b}(a, b)}.$$

On aura ainsi la seconde série d'équations:

$$\frac{Q(a_1, b_1)P_i(a_1, b_1)}{R''(a_1, b_1)\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_1, b_1)} + \frac{Q(a_2, b_2)P_i(a_2, b_2)}{R''(a_2, b_2)\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_2, b_2)} + \ldots = 0.$$

La somme s'étend à toutes les valeurs de a et b qui annulent simultanément $R(x, y)$ et $f(x, y)$, sans annuler $Q(x, y)$; en mettant successivement à la place de P_i les fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_p$, on obtient p équations dans cette seconde série; rappelons que les polynômes

$$P_1(x, y), \; P_2(x, y), \; \ldots$$

sont les premiers membres des équations de p courbes d'ordre $n - 3$, adjointes à la courbe $f = 0$, et linéairement distinctes.

Si les fonctions Q et R vérifient les deux séries d'équations qui précèdent, l'intégrale $\int \frac{Q(x, y)}{R(x, y)} dx$, est nécessairement égale à une fonction rationnelle de x, y, augmentée d'une intégrale de première espèce, appartenant à la courbe $f(x, y) = 0$.

Il nous reste maintenant afin de terminer l'examen du problème primitif, à chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que les intégrales de première espèce disparaissent dans l'expression de l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$, qui se réduira ainsi à une fonction rationnelle de x, y.

11. Revenons à cet effet à l'intégrale

$$I(t) = \int \theta(t)dt.$$

Si cette intégrale est uniforme, et si les équations que nous avons désignées par (E) sont vérifiées, on aura:

$$I(t) = F(t) + \lambda_1 G_1(t) + \lambda_2 G_2(t) + \ldots + \lambda_p G_p(t),$$

$F(t)$ étant une fonction fuchsienne et $G_i(t)$ désignant toujours l'intégrale

$\int \theta_i(t)dt$. Nous allons chercher à quelles conditions doit satisfaire $\theta(t)$, pour qu'on ait

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 0.$$

Soit à cet effet $\zeta(t)$ une fonction thétafuchsienne du premier degré, n'ayant dans R_0 qu'un pôle double, $t = \beta$. On voit comme au n° 5 que l'intégrale $\int I(t)\zeta(t)dt$ est nulle le long du périmètre de R_0, si $I(t)$ est une fonction fuchsienne, c. à. d. se réduit à $F(t)$.

En considérant successivement p fonctions telles que $\zeta(t)$, que nous désignerons par

$$\zeta_1(t),\ \zeta_2(t),\ \ldots,\ \zeta_p(t),$$

admettant respectivement pour infinis doubles les quantités

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_p,$$

on obtient ainsi p équations, auxquelles satisfait l'intégrale $I(t)$, dans le cas où elle se réduit à une fonction fuchsienne.

Nous allons montrer maintenant que si ces équations sont vérifiées, I est nécessairement une fonction fuchsienne.

On a en effet:

$$\int_{R_0} I(t)\zeta_i(t)dt = \int_{R_0} F(t)\zeta_i(t)dt + \int_{R_0}[\lambda_1 G_1(t) + \ldots + \lambda_p G_p(t)]\zeta_i(t)dt.$$

Or la première intégrale du second membre est nulle, puisque $F(t)$ est une fonction fuchsienne; la deuxième est égale à $2\pi i$ multiplié par la somme des résidus dans R_0 de la fonction

$$(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \ldots + \lambda_p G_p)\zeta_i.$$

Cette fonction n'a pas d'autre pôle que le pôle double β_i; d'ailleurs le résidu de $\zeta_i(t)$ par rapport à ce pôle est nul, car l'intégrale $\int \zeta_i(t)dt$ est nulle le long de R_0, par cela seul que $\zeta_i(t)$ est une fonction thétafuchsienne de degré un. Soit A_i le coefficient, nécessairement différent de zéro, de $\frac{1}{(t-\beta_i)^2}$ dans le développement de $\zeta_i(t)$ suivant les puissances croissantes de $t - \beta_i$.

Le résidu de

$$(\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \ldots)\zeta_i$$

par rapport au pôle β_i sera ainsi égal à la valeur, pour $t = \beta_i$, de la fonction

$$A_i\left(\lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial t} + \ldots\right);$$

c. à. d. de

$$A_1[\lambda_1 \theta_1(\beta_i) + \lambda_2 \theta_2(\beta_i) + \ldots].$$

On a donc les p relations:

$$\lambda_1 \theta_1(\beta_i) + \lambda_2 \theta_2(\beta_i) + \ldots + \lambda_p \theta_p(\beta_i) = 0. \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$

Or les quantités β_i sont arbitraires; si on les choisit de manière à ne pas annuler le déterminant des relations précédentes, c. à. d. de manière à ne pas annuler une même fonction thétafuchsienne holomorphe de degré un, on tirera nécessairement de ces relations

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 0.$$

12. On peut, comme au n° 7 mettre les conditions précédentes sous une autre forme; soit en effet

$$H_i(t) = \int \zeta_i(t)\,dt;$$

$H_i(t)$ est une fonction uniforme de t, dans le cercle fondamental, puisque le résidu de $\zeta_i(t)$ correspondant au pôle double β_i, est nul. Il en résulte qu'au lieu d'écrire que la somme des résidus dans R_0, de la fonction $I(t)\zeta_i(t)$ est nulle, on peut écrire le même résultat pour la fonction $\theta(t) H_i(t)$.

13. Pour appliquer ces résultats à l'intégrale $\int \varphi(x, y)\,dx$, il faut d'abord chercher l'expression de $H_i(t)$ en fonction de x.

H_i étant une intégrale qui n'a qu'un infini, on voit sans difficulté que, dans le plan des quantités x, cette intégrale est une intégrale abélienne de seconde espèce, et l'on a ainsi:

$$H_i(x) = \int \frac{\Omega_i(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(h_i x + k_i y + l_i)}\,dx,$$

$h_i x + k_i y + l_i = 0$ étant l'équation d'une tangente quelconque à la courbe $f = 0$; $\Omega_i(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe de degré $n - 2$, adjointe à la précédente supposée de degré n, et la coupant aux points, autres que le point de contact, où elle est rencontrée par la tangente considérée.

Il en résulte, comme au n° 8, que les conditions qu'on vient de trouver, expriment que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales

$$\int \varphi(x, y) H_i(x) dx$$

est nulle. On peut donc énoncer finalement la proposition suivante qui résume notre théorie.

Théorème II. *Soient: $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique de genre p; $\varphi(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; $G_1, G_2, \ldots, G_r$, p intégrales abéliennes de première espèce distinctes; $H_1, \ldots, H_p$, p intégrales de deuxième espèce appartenant à la courbe $f = 0$.*

Pour que l'intégrale $\int \varphi(x, y) dx$ se réduise à une fonction rationnelle de x, y, il faut et il suffit:

1° que cette intégrale n'ait pas de période polaire;

2° que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales $\int \varphi(x, y) G_i(x) dx$ soit nulle;

3° que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales $\int \varphi(x, y) H_i(x) dx$ soit également nulle.[1]

La période polaire d'une intégrale $\int F(x, y) dx$, pour un infini $x = a$ de cette intégrale est ainsi définie: supposons que pour revenir à la même valeur de $F(x, y)$ il faille faire décrire à la variable x q fois un contour infiniment petit autour du point a; la période polaire sera la valeur que prend l'intégrale quand la variable décrit q fois ce contour.

Si a n'est pas un point critique pour la fonction y, qui vérifie la relation $f(x, y) = 0$, la fonction $F(x, y)$ se développera suivant les puissances croissantes entières de $x - a$, et la période polaire sera égale à $2\pi i$ fois le résidu correspondant.

Si a est un point critique, il sera nécessaire de calculer les développements de y et $F(x, y)$ suivant les puissances croissantes et fractionnaires

[1] Il faut toutefois, pour que les conditions 3° soient suffisantes, que les points de la courbe $f = 0$ où les p fonctions H_i deviennent infinies, ne soient pas sur une même courbe de degré $n - 3$ adjointe à la courbe $f = 0$ (n° 11).

de a; le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ dans le dernier développement fournira la période polaire.[1]

Comme les conditions 2°, les conditions 3° ne renferment aucun signe d'intégration si les conditions 1° sont vérifiées.

14. En appliquant ces principes à l'exemple traité au n° 9, on trouve aisément pour la troisième série d'équations, les p relations suivantes, où c_i, d_i sont les coordonnées du point de la courbe $f = 0$ où H_i devient infini:

$$\frac{2Q(a_1, b_1)\Omega_i(a_1, b_1)}{R''(a_1, b_1)\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_1, b_1)[h_i a_1 + k_i b_1 + l_i]} + \frac{2Q(a_2, b_2)\Omega_i(a_2, b_2)}{R''(a_2, b_2)\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_2, b_2)[h_i a_2 + k_i b_2 + l_i]} + \ldots$$

$$= \frac{Q(c_i, d_i)\Omega_i(c_i, d_i)}{R(c_i, d_i)\frac{\partial f}{\partial d_i}(c_i, d_i)\, k\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i$ étant, au point c_i, d_i, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, déduite de l'équation $f(x, y) = 0$.

15. Remarque. Les conditions données par le théorème II ont une signification simple, qui résulte immédiatement de tout ce qui précède.

Supposons l'intégrale $\int \varphi(x, y)dx$ décomposée par le procédé classique en intégrales abéliennes de première, de seconde et de troisième espèce.

Les conditions 1° expriment que les intégrales de troisième espèce disparaissent;

les conditions 2°, que la somme des intégrales de seconde espèce se réduit à une fonction rationnelle de x, y;

les conditions 3°, que les intégrales de première espèce disparaissent à leur tour.

---

[1] Cf. Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques*, p. 176—177.