ÜBER RATIONALE PUNKTE AUF KURVEN DRITTER ORDNUNG VOM GESCHLECHTE EINS.

Von

A. WIMAN

in LUND.

I.

1. In dieser Arbeit werden immer als Koeffizienten rationale Zahlen angenommen. Existiert ein rationaler Punkt auf der Kurve, so lässt sich ihre Gleichung bekanntlich stets rational auf die Gestalt

$$y^2 = f_3(x) \tag{1}$$

reduzieren. Von dieser Gleichung nehmen wir unseren Ausgangspunkt. Es erscheint vorteilhaft hier nicht notwendig die Weierstrassche Normalform anzunehmen. Je nach der Rationalität der Wurzeln e_1, e_2, e_3 von $f_3(x) = 0$ bekommen wir drei Fälle, für welche eine verschiedene Behandlung erforderlich ist. Diese Fälle ordnen wir hier nach den mit ihnen verbundenen steigenden Schwierigkeiten.

1) e_1, e_2, e_3 sind sämtlich rational.
2) Nur eine von den Zahlen e_1, e_2 und e_3 ist rational.
3) e_1, e_2, e_3 sind sämtlich irrational.

Wir erinnern hier zunächst an den von H. POINCARÉ eingeführten Begriff vom *Range einer Kurve*,[1] womit man die Minimalzahl von Basispunkten bezeichnet, aus denen sich sämtliche rationale Punkte herleiten lassen. Dass dieser Rang stets endlich ist, wurde später von L. J. MORDELL bewiesen.[2] Dagegen ist es noch nicht gelungen eine obere Grenze für den Rang zu bestimmen. Der

[1] Journal de Mathématiques, Ser. 5, Bd. 7 (1901).
[2] Proc. of the Cambridge Philos. Society, Bd. 21 (1922).

Hauptzweck von unseren Untersuchungen ist nun einen Beitrag zur Beantwortung der letzteren Frage zu geben. Für die obigen drei Fälle kennen wir von vornherein im Falle 1) zwei Basispunkte, im Falle 2) einen Basispunkt und im Falle 3) keinen Basispunkt. *In sämtlichen drei Fällen ist es nach unseren Methoden möglich Kurven mit noch vier unabhängigen Basispunkten zu bestimmen. Im Falle* 1) *lässt sich also der Rang sechs erreichen, im Falle* 2) *der Rang fünf und im Falle* 3) *der Rang vier.* Wenn wir als *Stufe einer Kurve* die Anzahl der nötigen Basispunkte von unendlicher Ordnung bezeichnen, so können wir die Sache einfacher so ausdrücken, *dass für die drei Fälle die übereinstimmende Eigenschaft gilt, dass es Kurven von der Stufe vier gibt.* Als ein Hauptproblem stellt sich jetzt die Aufgabe zu entscheiden, *in wie weit hier Kurven von noch höherer Stufe als vier vorkommen.* Diese Frage müssen wir jedoch unbeantwortet lassen. Einerseits haben wir keinen Beweis, dass vier die Maximalstufe ist; andererseits scheint die Bestimmung von Kurven von noch höherer Stufe, falls solche existieren, auf fast unüberwindliche Schwierigkeiten zu stossen.[1]

In der vorliegenden Arbeit beschränken wir uns auf die Behandlung des Falles 1). Nun sind bereits über den Fall 1) zwei Abhandlungen von uns veröffentlicht.[2] Kurven vom Range sechs mit mässigen Koeffizienten kennen wir aus unseren vorhergehenden Arbeiten nur zwei, nämlich eine nicht-harmonische und eine harmonische.[3] Ob es für den harmonischen Fall noch andere Kurven vom Range sechs gibt, erscheint zweifelhaft. Wir wollen im zweiten Abschnitt zu den in unseren früheren Arbeiten gegebenen harmonischen Kurven des Ranges fünf neue Fälle hinzufügen. Im dritten Abschnitt wollen wir die von uns erhaltenen neuen Resultate über nicht-harmonische Kurven vom Range sechs mitteilen.

2. Im Falle 1) ersetzen wir die Gleichung (1) durch

$$y^2 = x(x+a)(x+b). \tag{2}$$

Dies ist für eine bestimmte Kurve auf sechs Weisen möglich, so dass, falls 0, a und b nach der Grösse geordnet werden, man eine beliebige Reihenfolge erhalten kann. Wir erinnern jetzt an die bekannte Tatsache, dass, wenn r den

---

[1] Sieh hier eine inzwischen (Comptes rendus, 31 Mai 1948) erschienene Note von A. Wiman.

[2] »*Über den Rang von Kurven* $y^2 = x(x+a)(x+b)$», Acta math., Bd. 76 (1944). »*Über rationale Punkte auf Kurven* $y^2 = x(x^2 - c^2)$», Acta math., Bd. 77 (1945). Wenn wir hier diese Schriften zitieren, nennen wir dieselben »Rang von Kurven» bzw. »Rationale Punkte».

[3] »Rang von Kurven», S. 245; »Rationale Punkte», S. 317.

Rang der Kurve bezeichnet, die rationalen Punkte sich auf 2^{ν} Klassen verteilen.[1] Diese Klassen komponieren sich nach einer Abelschen Gruppe mit den Invarianten $2, 2, \ldots 2$. Dabei wird die Klasse, zu welcher ein rationaler Punkt gehört, durch die in den Faktoren x, $x + a$ und $x + b$ eingehenden Primzahlen charakterisiert. Da quadratische Faktoren hier ohne Bedeutung sind und folglich weggelassen werden können, lässt sich das Resultat erhalten, dass jede übrig bleibende Primzahl in erster Potenz und zwar an zwei Stellen auftritt. Am einfachsten verfahren wir jetzt, wenn wir die Primzahl als charakteristisch für die dritte Stelle betrachten. Hierzu kommt noch, dass für eine zweiteilige kubische Kurve markiert werden soll, ob der rationale Punkt auf der Ovale liegt. In einem solchen Falle werden zwei von den Grössen x, $x + a$ und $x + b$ negativ, und wir fügen zu ihren Charakteren das Zeichen — hinzu. Hat man, was immer bewirkt werden kann,

$$0 < a < b,$$

so sind diese Grössen x und $x + a$. Für die drei Punkte auf der Achse verschwindet eine von den Grössen x, $x + a$ und $x + b$. Auf die Frage, welche Primzahlen als Faktoren von dieser Grösse in ungerader Potenz eingehen, scheint die Antwort zunächst unbestimmt. Man bekommt dieselbe, indem man darauf Rücksicht nimmt, dass eine Primzahl entweder in keinem oder zwei von den drei Faktoren in ungerader Potenz auftreten soll. Es sei hier noch an den Zusammenhang erinnert, der zwischen den Charakteren von drei Punkten in gerader Linie besteht. Man erhält ja die Charaktere des dritten Punktes, indem man die entsprechenden Charaktere der beiden anderen Punkte mit einander multipliziert und dann nach den obigen Regeln reduziert.

In den beiden vorhergehenden Abhandlungen findet man mannigfache Beispiele zu den Entwicklungen dieser Nummer. Weitere folgen in der Fortsetzung dieser Arbeit.

3. Im zweiten Abschnitt von »Rang von Kurven» haben wir eine Methode gegeben, wodurch Kurven (2) von immer höherem Range sich bestimmen lassen. Bei dieser Methode wurde aus der Gesamtheit der Kurven (2) immer engere und engere Familien abgeschieden, und dass der Rang der Kurven bei jedem solchen Schritte durchschnittlich mit einer Einheit wuchs, wurde in den gegebenen Bei-

---

[1] Man vergleiche für diese Nummer »Rang von Kurven», S. 226 und »Rationale Punkte», S. 282.

spielen bestätigt. Wir werden indessen hier finden, dass *eine solche Erhöhung des Ranges keineswegs immer eintritt.* Es scheint also wünschenswert diese Frage einer mehr eingehenden Behandlung zu unterwerfen, und dies wird auch die Hauptaufgabe für diesen einleitenden Abschnitt. Bezüglich der Fälle 2) und 3) sei nur bemerkt, dass für ihre Behandlung modifizierte aber völlig analoge Methoden erforderlich sind.

Für einen rationalen Punkt der Kurve (2) hat man

$$x = ka, \tag{3}$$

und hieraus lässt sich die Relation

$$ka + b = k(k+1)\varkappa^2 \tag{4}$$

herleiten. Es sind hier k und $\varkappa$ rationale Zahlen. Den Inbegriff der Kurven, welchen man durch Fixierung des Parameters k bekommt, nennen wir eine *Familie erster Stufe.* Dem entsprechend kan man die Gesamtheit der Kurven (2) als *Familie nullter Stufe* bezeichnen. In gleicher Weise gehören zu einem zweiten rationalen Punkt der Kurve ein Parameter k_1 und eine Relation

$$k_1 a + b = k_1(k_1+1)\varkappa_1^2. \tag{5}$$

Es lassen sich jetzt a und b aus (4) und (5) bestimmen, und wir bekommen

$$a = \frac{k(k+1)\varkappa^2 - k_1(k_1+1)\varkappa_1^2}{k - k_1}; \tag{6}$$

$$b = \frac{k k_1((k_1+1)\varkappa_1^2 - (k+1)\varkappa^2)}{k - k_1}. \tag{7}$$

Das Kurvensystem

$$y^2 = x\left(x + \frac{k(k+1)\varkappa^2 - k_1(k_1+1)\varkappa_1^2}{k-k_1}\right)\left(x + k k_1 \frac{(k_1+1)\varkappa_1^2 - (k+1)\varkappa^2}{k-k_1}\right), \tag{8}$$

das wir in solcher Weise erhalten haben, bezeichnen wir, nach Fixierung der Parameter k und k_1, als eine *Familie zweiter Stufe.* Der nächste Schritt führt zu der Relation

$$k_2 a + b = k_2(k_2+1)\varkappa_2^2. \tag{9}$$

Es lassen sich jetzt a und b aus (4), (5) und (9) eliminieren, und es ergibt sich für die Parameter k, k_1 und k_2 die Bedingung

$$(k_1 - k_2)k(k+1)\varkappa^2 + (k_2 - k)k_1(k_1+1)\varkappa_1^2 + (k - k_1)k_2(k_2+1)\varkappa_2^2 = 0 \tag{10}$$

Das linke Glied muss mithin eine ternäre quadratische Nullform in x, x_1 und x_2 darstellen. Aus den Lösungen hierzu bekommen wir die Kurven einer *Familie der dritten Stufe.* Es lässt sich noch ein vierter Schritt nehmen, durch welchen zu (4), (5) und (9) noch

$$k_3 a + b = k_3 (k_3 + 1) x_3^2 \tag{11}$$

sich anschliesst. Wir erhalten jetzt eine *Kurvenfamilie der vierten Stufe*, falls diese vier Gleichungen mit einander verträglich sind. Als Bedingung hierfür ergibt sich, dass das folgende System Lösungen besitzt:

$$\left\{\begin{aligned} &(k_1 - k_2) k (k+1) x^2 + (k_2 - k) k_1 (k_1 + 1) x_1^2 + (k - k_1) k_2 (k_2 + 1) x_2^2 = 0; \\ &(k_1 - k_3) k (k+1) x^2 + (k_3 - k) k_1 (k_1 + 1) x_1^2 + (k - k_1) k_3 (k_3 + 1) x_3^2 = 0; \\ &(k_2 - k_3) k (k+1) x^2 + (k_3 - k) k_2 (k_2 + 1) x_2^2 + (k - k_2) k_3 (k_3 + 1) x_3^2 = 0; \\ &(k_2 - k_3) k_1 (k_1 + 1) x_1^2 + (k_3 - k_1) k_2 (k_2 + 1) x_2^2 + (k_1 - k_2) k_3 (k_3 + 1) x_3^2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Die linken Glieder von diesen vier Gleichungen bekommt man aber aus den ternären Bestandteilen eines Büschels von quaternären Formen in x, x_1, x_2 und x_3. Dieses Büschel muss also ein Nullbüschel bedeuten.[1] Übrigens definiert (12) eine elliptische Raumkurve vierter Ordnung, und die Glieder der Kurvenfamilie vierter Stufe entsprechen somit den rationalen Punkten dieser Kurve. Doch gelangt man zu derselben Kurve bei Zeichenänderungen von x, x_1, x_2 oder x_3. Die Aufsuchung von zu einem Nullbüschel führenden Parametern k, k_1, k_2 und k_3 kann Schwierigkeiten darbieten, wenn man nicht von einer bereits bekannten Kurve mit rationalen Punkten ausgeht. Für das einzige Nullbüschel, das im »Rang von Kurven» behandelt wird, hatten wir $k, k_1, k_2, k_3 = 1, -2, 2, -4$, und das Nullbüschel lässt sich durch das System

$$\left\{\begin{aligned} &4 x^2 - x_1^2 - 9 x_2^2 = 0; \\ &2 x^2 - 5 x_1^2 + 18 x_3^2 = 0; \\ &2 x^2 - 5 x_2^2 - 2 x_3^2 = 0; \\ &x_1^2 - x_2^2 - 4 x_3^2 = 0 \end{aligned}\right. \tag{13}$$

definieren. Zur Lösung $x = 13$, $x_1 = 10$, $x_2 = 8$, $x_3 = 3$ gehört eine Kurve vom Range sechs mit der Gleichung

$$y^2 = x (x + 46) (x + 292). \tag{14}$$

In arithmetischer Hinsicht ist diese Kurve gewiss eine von den am meisten bemerkenswerten Kurven dritter Ordnung.

[1] Die durch ein Nullbüschel definierte Kurve soll also hier einen rationalen Punkt besitzen, für welchen keine von den Koordinaten x_i verschwindet.

4. In »Rang von Kurven» wurde ohne Beweis angenommen, dass der Hauptbestandteil der Kurven einer gewissen Familie von derselben Stufe wie die Familie ist, und diese Eigenschaft wurde auch in den dort gegebenen Beispielen bestätigt. Es ist die Richtigkeit dieser Voraussetzung, welche wir jetzt prüfen wollen. Wir sehen leicht ein, dass hierfür die folgenden zwei Bedingungen erforderlich sind. Einerseits müssen die in Übereinstimmung mit der vorhergehenden Nummer eingeführten Basispunkte ein System von rationalen Punkten erzeugen, das von demselben Range wie die Anzahl der Basispunkte ist. Die andere Bedingung bezieht sich auf die drei Punkte der Achse, welche ja mit dem unendlich entfernten Punkte ein endliches System von vier rationalen Punkten des Ranges zwei bilden. Keiner von diesen Punkten darf nämlich zu jenem erstgenannten System gehören. Wie es scheint, lässt letztere Bedingung sich immer befriedigen. In anderer Weise verhält es sich mit der ersten Bedingung. Bereits unter den Familien der zweiten Stufe gibt es nämlich Ausnahmefälle, in denen die zugehörigen Kurven nur von der ersten Stufe sind; hier wird von der Möglichkeit abgesehen, dass für gewisse Kurven der Familie der Rang durch das Auftreten von neuen Basispunkten erhöht werden kann.[1]

Die zu einem rationalen Punkte (3) gehörenden endgültigen Charaktere für die Faktoren $x, x+a$ und $x+b$ können wir nicht ohne weiteres herstellen, da wir die in diesen Faktoren eingehenden Primzahlen nicht kennen, und nur ein Teil von der in Nr. 2 beschriebenen Reduktion lässt sich ausführen. Nach (3 und (4) können wir von

$$ka,\ (k+1)a,\ k(k+1)$$

ausgehen. Hiervon kommen wir nach den in Nr. 2 gegebenen Regeln zu

$$k+1,\ k,\ a. \tag{15}$$

Im Vorübergehen erinnern wir daran, dass hier nicht notwendig $x, x+a$ und $x+b$ nach steigender Grösse geordnet sind. Ähnliche Resultate bekommen wir für die etwa folgenden Basispunkte mit Parametern k_1, k_2 oder k_3. Bleiben wir bei der zweiten Stufe, so ist die Frage ob (15) und

$$k_1+1,\ k_1,\ a \tag{16}$$

die Charaktere für identische oder verschiedene Klassen bezeichnen. Wenn wir (15) und (16) komponieren, so bekommen wir eine Klasse mit den Charakteren

[1] In dieser Arbeit bezeichnen wir eine Kurve als vom Range r, wenn wir bewiesen haben, dass die Kurve mindestens den Rang r hat. Im allgemeinen dürfte dann auch r der richtige Rang sein.

$$(17) \qquad (k+1)(k_1+1),\ k k_1,\ 1,$$

wo also a nicht länger auftritt. Die Fragestellung ist nun, in wie weit (17) die Charaktere für die Einheitsklasse bedeuten kann. Zur Antwort mag es genügen auf den Fall hinzuweisen, wo k, $k+1$, k_1 und k_1+1 sämtlich Quadrate rationaler Zahlen darstellen. Zu dem Ende brauchen wir nur zu setzen

$$(18) \qquad k = \frac{4m^2n^2}{(m^2-n^2)^2},\quad k+1 = \frac{(m^2+n^2)^2}{(m^2-n^2)^2},\quad k_1 = \frac{4m_1^2n_1^2}{(m_1^2-n_1^2)^2},\quad k_1+1 = \frac{(m_1^2+n_1^2)^2}{(m_1^2-n_1^2)^2}$$

mit der hinzutretenden Bedingung[1]

$$(19) \qquad m_1^2 - n_1^2 = m^2 - n^2,$$

welche sich natürlich in mannigfacher Weise befriedigen lässt. Sogar für Familien vierter Stufe kann es eintreffen, dass die zugehörigen Kurven regelmässig nur von der ersten Stufe sind. Als erforderliche Bedingungen hierfür hat man, dass in

$$(20) \qquad \begin{cases} (k+1)(k_1+1),\ k k_1,\ 1; \\ (k+1)(k_2+1),\ k k_2,\ 1; \\ (k+1)(k_3+1),\ k k_3,\ 1 \end{cases}$$

lauter Einheitscharaktere auftreten. Um einen solchen Fall herzustellen, braucht man ja nur ein Lösungssystem für

$$(21) \qquad m^2 - n^2 = m_1^2 - n_1^2 = m_2^2 - n_2^2 = m_3^2 - n_3^2$$

zu kennen. Ist etwa 105 der gemeinsame Wert der Ausdrücke in (21), so erhalten wir z. B. ein solches System in

$$m = 53,\ n = 52,\ m_1 = 19,\ n_1 = 16,\ m_2 = 13,\ n_2 = 8,\ m_3 = 11,\ n_3 = 4.$$

Zu dieser Frage sei weiter nur bemerkt, dass wir im dritten Abschnitt bei dem natürlichen Gange unserer Untersuchungen auf Familien vierter Stufe stossen, bei denen die zugehörigen Kurven in der Regel von der dritten Stufe sind.

Was nun die Charaktere für die Punkte auf der Achse betrifft, so sind diese nach den in Nr. 2 gegebenen Regeln:

1) für $x = 0$ $\qquad ab,\ a,\ b \equiv 1,\ b,\ a;$
2) für $x + a = 0$ $\qquad -a,\ -a(b-a),\ b-a \equiv -(b-a),\ -1,\ a;$
3) für $x + b = 0$ $\qquad -b,\ -(b-a),\ b(b-a) \equiv -(b-a),\ -b,\ 1.$

[1] Beim Vergleich der Grössen (18) ist es ja vorteilhaft, dass dieselben einen gemeinsamen Nenner besitzen.

Hierbei ist zu bemerken, dass, falls nicht sämtliche Grössen a, b und $b-a>0$ sind, das endgültige Auftreten des Charakters — an anderen Stellen als hier oben erfolgt. Für a, b und $b-a$ erhalten wir Ausdrücke aus (6) und (7), in denen zwei beliebig zu wählende Quadrate x^2 und x_1^2 eingehen. Wir setzen jetzt voraus, dass durch den Einfluss dieser Quadrate in jenen Ausdrücken normaliter Primzahlfaktoren eingehen, welche sowohl von einander als auch von den Faktoren k, $k+1$, k_1, k_1+1, k_2, k_2+1, k_3 und k_3+1 verschieden sind, und dass diese Faktoren im allgemeinen in erster Potenz auftreten. Hierin liegen Annahmen, die uns ziemlich selbstverständlich erscheinen, für welche aber ein strenger Beweis vielleicht nicht ohne recht weitläufige Auseinandersetzungen sich ausführen lässt. Unter den jetzigen Voraussetzungen gehören die drei Punkte auf der Achse zu verschiedenen Klassen, und keine von diesen Klassen hat Repräsentanten in dem System, das durch die Basispunkte $x=ka$, $k_1a, \ldots$ erzeugt wird.

5. Es ist in Nr. 2 bemerkt, dass die Gleichung einer Kurve in sechs verschiedenen Weisen in der Gestalt (2) gegeben werden kann. Die Frage ist nun, wie die sechs zugehörigen Werte des Parameters k von einander abhängen. Wenn die Faktoren x und $x+a$ ihre Rollen wechseln, so ist $x+a$ durch x_1 zu ersetzen, und (2) geht in

$$y^2 = x_1(x_1-a)(x_1+b-a) \tag{2_1}$$

über. Aus $x=ka$ bekommt man

$$x_1 = -(k+1)(-a), \tag{3_1}$$

und es wird mithin k durch

$$k^{(1)} = -(k+1) \tag{22}$$

ersetzt.[1] Weiter vertauschen wir $x+a$ und $x+b$ mit einander, so dass (2) in

$$y^2 = x(x+b)(x+a) \tag{2_2}$$

umgeändert wird. Nehmen wir jetzt zwei Punkte x und x_2 auf der Kurve, deren Verbindungslinie durch den Anfangspunkt geht, so gilt die Relation

$$x x_2 = ab.$$

Aus $x=ka$ folgt mithin

$$x_2 = \frac{b}{k}. \tag{3_2}$$

[1] Es ist (22) mit (10) »Rang von Kurven», S. 237 identisch.

Zur Gestalt (2_2) der Kurvengleichung gehört also, obwohl nach Übergang zu einem anderen Punkt, der Parameterwert

$$k^{(2)} = \frac{1}{k}. \tag{23}$$

In derselben Weise wie (2) in (2_1) lässt sich (2_2) in

$$y^2 = x_2 (x_2 - b)(x_2 - (b - a)) \tag{2_3}$$

umformen. Als mitfolgende Substitution für den Parameter ergibt sich

$$k^{(3)} = -(1 + k^{(2)}) = -\frac{k + 1}{k}. \tag{24}$$

Es lässt sich noch die Kurvengleichung in zwei Weisen umformen, indem die beiden letzten Faktoren in (2_1) und (2_3) vertauscht werden. Diese Vertauschungen werden von den Parameteränderungen

$$k^{(4)} = \frac{1}{k^{(1)}} = -\frac{1}{k + 1}, \tag{25}$$

$$k^{(5)} = \frac{1}{k^{(3)}} = -\frac{k}{k + 1} \tag{26}$$

begleitet. Die sechs Parameterwerte

$$k,\ -(k + 1),\ \frac{1}{k},\ -\frac{k + 1}{k},\ -\frac{1}{k + 1},\ -\frac{k}{k + 1} \tag{27}$$

führen mithin zu derselben Familie erster Stufe. *Ebenso, wenn es sich um Familien höherer Stufe handelt, bleibt die Familie ungeändert, wenn die Parameter irgend einer von den Substitutionen (27) unterworfen werden.*

Durch die Punkte $1, 0, -\frac{1}{2}, -1, -2$ wird die reelle Achse in sechs Abschnitte zerlegt, so dass, wie auch k gewählt wird, die sechs Grössen (27) sich auf die sechs Abschnitte verteilen. Doch ist zu bemerken, dass in einem Falle die sechs Grössen, zwei und zwei, sich in $1, -\frac{1}{2}$ und -2 vereinigen. Ausgeschlossene Werte für k sind 0 und -1. Die drei Abschnitte, in welche diese Punkte die reelle Axe teilt, besitzen die Eigenschaft, dass, falls von den Parametern k, k_1 und k_2 je einer zu jedem Abschnitt gehört, so wird die ternäre quadratische Form (10) definit und kann also keine Nullform bedeuten.[1] Auf höchstens zwei von den Intervallen können mithin die k-Werte, die den rationalen

[1] Vergl. »Rang von Kurven», s. 246.

Punkten einer Kurve (2) entsprechen, verlegt werden. Es ist soeben in dieser Nummer von sechs verschiedenen Gestalten der Kurvengleichung die Rede gewesen. Diesen entsprechen die sechs möglichen Vertauschungen der drei Intervalle. Es sei zuletzt bemerkt, dass hier nicht auf die Modifikationen eingegangen worden ist, welche nötig werden können, wenn unter den Grössen $\pm a$, $\pm b$, $\pm (b-a)$ Quadrate auftreten.[1]

II.

6. Für eine harmonische Kurve lässt sich bekanntlich (2) durch die einfachere Gleichung

$$y^2 = x(x^2 - c^2) \tag{28}$$

ersetzen, wo c ein Produkt von lauter verschiedenen Primzahlen bedeutet. Die sonst von uns bei diesen Untersuchungen benutzte Methode scheint in diesem speziellen Falle zu versagen. Diese Methode besteht ja darin zu immer engeren Kurvenfamilien mit durchschnittlich steigendem Range zu übergehen. Die Spezialität des harmonischen Falles führt auch mit sich, dass Kurven vierter Stufe hier selten vorkommen. Uns ist nur das einzige Beispiel

$$c = 2.3.7.17.41 \tag{29}$$

bekannt.[2] Wir wollen deshalb hier unsere Aufmerksamkeit hauptsächlich den Kurven dritter Stufe, d. h. vom Range fünf, zuwenden. Auch die Aufgabe Kurven von diesem Range aufzusuchen ist übrigens mit ernsthaften Schwierigkeiten verbunden.

Im ersten Abschnitt von »Rang von Kurven» haben wir zuerst Beispiele harmonischer Kurven vom Range vier gegeben. In der Arbeit »Rationale Punkte» ist der zweite Abschnitt den Fällen $c = p$ und $c = 2p$ gewidmet, wobei besonders auf die Kurven vom Range vier die Aufmerksamkeit gelenkt wurde. Wichtiger für unsere gegenwärtige Bestrebungen ist der dritte Abschnitt der letztgenannten Arbeit. Es gilt hier gewisse Folgen von vier ganzen Zahlen in arithmetischer Progression, durch welche mit äusserst seltenen Ausnahmen Kurven (28) vom Range vier sich bestimmen lassen. Die drei Typen, von denen die Rede ist, sind die folgenden:

$$m^2, \quad \frac{2m^2 + n^2}{3}, \quad \frac{m^2 + 2n^2}{3}, \quad n^2; \tag{30}$$

[1] Wir verweisen hier auf »Rang von Kurven», S. 238.

[2] Sieh »Rationale Punkte», S. 317.

$$(30_1) \qquad 3\,m^2,\ 2\,m^2+n^2,\ m^2+2\,n^2,\ 3\,n^2;$$

$$(30_2) \qquad -3\,m^2,\ -2\,m^2+n^2,\ -m^2+2\,n^2,\ 3\,n^2.$$

Es unterscheiden sich (30) und (30_1) in Bezug auf m und n darin, dass in (30) weder m noch n den Faktor 3 enthält, in (30_1) dagegen 3 Faktor von entweder m oder n ist. Es ist zulässig $n > m$ anzunehmen. Für c bekommt man in den drei Fällen:

$$(31) \qquad c = \frac{n^2-m^2}{3}\cdot\frac{2\,m^2+n^2}{3}\cdot\frac{m^2+2\,n^2}{3};$$

$$(31_1) \qquad c = 3\,(n^2-m^2)\,(2\,m^2+n^2)\,(m^2+2\,n^2);$$

$$(31_2) \qquad c = \pm\,3\,(m^2+n^2)\,(n^2-2\,m^2)\,(2\,n^2-m^2).$$

Hierbei denken wir uns die etwa in diesen Ausdrücken auftretenden quadratischen Faktoren ausgeschieden. In (31_2) gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem $n^2 \gtrless 2\,m^2$.

7. Als hauptsächliche Hilfsmittel, um in der Arbeit »Rationale Punkte» Kurven vom Range fünf aufzusuchen, dienten uns die Folgen (30), (30_1) und (30_2). Zu den dortigen Resultaten wollen wir hier nur einige Bemerkungen hinzufügen. Um zu beweisen, dass für eine Kurve (28), zu welcher eine gewisse Folge geführt hat, der Rang den Wert fünf erreicht, braucht man ja nur einen neuen von den bereits bekannten unabhängigen Basispunkten zu kennen. Nach der Methode, die sich auf diesem Umstande gründen lässt, ist es uns jedoch nur gelungen zwei Kurven (28) vom Range fünf herzuleiten, und zwar für $c = 2.3.5.7.17.43$ und $c = 2.3.7.11.19.67$.[1] Eine andere und wichtigere Möglichkeit für die Erhöhung des Ranges ergibt sich, wenn zwei (oder mehrere) Folgen zu derselben Kurve führen. Unter den Kurven, welche diese Bedingung erfüllen, findet man, wie wir in der obengenannten Arbeit nachgewiesen haben, die sechs Fälle:

$$(32) \qquad \begin{cases} 1)\ c = 2.3.11.19; \quad 2)\ c = 2.3.73.97; \quad 3)\ c = 2.3.97.193; \\ 4)\ c = 2.3.7.17.31; \quad 5)\ c = 2.3.7.17.41; \quad 6)\ c = 2.3.11.17.41.43. \end{cases}$$

Von diesen Kurven ist 5) schon in (29) als die einzige uns bekannte Kurve (28) vom Range sechs hervorgehoben. Es ist auffallend, dass für sämtliche von uns in »Rationale Punkte» besprochene Kurven von einem Range > 4 c die Faktoren 2 und 3 und überhaupt wenigstens vier Primfaktoren enthält. Dies scheint einen

[1] Sieh »Rationale Punkte», S. 308.

Sprung von den Verhältnissen beim Range vier zu bezeichnen, wo wir ja Kurven kennen, für welche in c nur eine einzige Primzahl eingeht.[1] In der vorliegenden Arbeit findet hierin nur die Änderung statt, dass wir eine Kurve vom Range fünf gefunden haben, für welche c den Faktor 3 nicht enthält.

Wenn man $c = 2.3.7.17.31$ *ausnimmt, so hat man in* (32) *nur die ersten Glieder von Scharen, in denen die Kurven einen Rang* > 4 *besitzen.* Hierbei ist die Schar, die mit $c = 2.3.7.17.41$ anfängt, wesentlich dichter als die übrigen. Der Unterschied ist zu vergleichen mit der Dichtigkeit der Nullstellen für eine Nullform (10) und für ein Nullbüschel (12). Die diesbezüglichen Untersuchungen in unserer Schrift »Rationale Punkte» sind in zweierlei Hinsichten zu ergänzen, da einerseits die in Rede stehende Eigenschaft für $c = 2.3.11.17.41.43$ dort keine Erwähnung gefunden hat, und andererseits von den drei Scharen, die sich an $c = 2.3.11.19$ anschliessen, nur eine behandelt wurde.

Zu $c = 2.3.11.17.41.43$ führen die Folgen[2]

$$(33) \qquad \begin{cases} 1369, \ 1394, \ 1419, \ 1444; \\ \ \ 25, \ \ 722, \ 1419, \ 2116. \end{cases}$$

Die erste schreiben wir allgemeiner

$$u^2, \ \frac{2u^2 + 4v^2}{3}, \ \frac{u^2 + 8v^2}{3}, \ 4v^2$$

mit der Differenz $\frac{4v^2 - u^2}{3}$. Für das zweite und dritte Glied in der zweiten Folge ergibt sich dann $2v^2$ und $\frac{u^2 + 8v^2}{3}$. Als vollständige zweite Folge erhalten wir jetzt, da die Differenz dieser auf einander folgenden Glieder $\frac{u^2 + 2v^2}{3}$ ist,

$$\frac{4v^2 - u^2}{3}, \ 2v^2, \ \frac{u^2 + 8v^2}{3}, \ \frac{2u^2 + 10v^2}{3}.$$

Nun sollen das erste und letzte Glied Quadrate bezeichnen; überdies ist, wie man leicht sieht, das letzte Glied eine gerade Zahl. Es gelten also Relationen

$$(34) \qquad 4v^2 - u^2 = 3w^2; \ \ 2u^2 + 10v^2 = 12t^2.$$

Durch (34) wird nun eine elliptische Raumkurve vierter Ordnung definiert. Auf dieser Raumkurve kennen wir die rationalen Punkte $u = v = w = t = 1$ und $u = 37$,

[1] $c = 41, 137, 761$. Sieh »Rationale Punkte», S. 294.
[2] Sieh »Rationale Punkte», S. 320.

$v = 19$, $w = 5$, $t = 23$, und durch Zeichenänderungen bekommt man hieraus noch andere. Nach bekannten Methoden kann man jetzt in der Aufsuchung von rationalen Punkten fortschreiten, und von diesen lässt sich in entsprechender Weise, wie es hier im Ausgangsfalle möglich ist, zu neuen Kurven vom Range fünf übergehen.

Zu $c = 2.3.11.19$ gelangen wir von nicht weniger als vier Folgen, nämlich[1]

$$(35)\qquad \begin{cases} 16, & 19, & 22, & 25; \\ 16, & 27, & 38, & 49; \\ 3, & 11, & 19, & 27; \\ 529, & 578, & 627, & 676. \end{cases}$$

Die letzte Folge, welche übrigens hier nicht weiter in Betracht kommt, gehört zu den seltenen Folgen, durch welche die Stufe nur mit einer Einheit erhöht wird.[2] Welches Paar von den drei übrig bleibenden Folgen man auch wählt, so lässt dasselbe sich fortsetzen, so dass man in solcher Weise *drei Systeme von Kurven des Ranges fünf bekommt, die von der Anfangskurve* $c = 2.3.11.19$ *ausgehen.* Da der Fall mit den beiden ersten Folgen schon in unserer hier oben zitierten Arbeit behandelt worden ist, so können wir uns auf die zwei Paare beschränken, welche die dritte Folge und eine von den beiden anderen enthalten. Nun lässt sich die dritte Folge so schreiben

$$3u^2,\ 2u^2 + 9v^2,\ u^2 + 18v^2,\ 27v^2.$$

Für die erste Folge bekommen wir jetzt als zweites und drittes Glied $u^2 + 18v^2$ bzw. $4u^2 + 18v^2$ und hieraus als Differenz $3u^2$. Für die Folge erhält man also den Ausdruck

$$-2u^2 + 18v^2,\ u^2 + 18v^2,\ 4u^2 + 18v^2,\ 7u^2 + 18v^2.$$

Für die zweite Folge ergibt sich nun leicht

$$-2u^2 + 18v^2,\ 27v^2,\ 2u^2 + 36v^2,\ 4u^2 + 45v^2.$$

In diesen Folgen bezeichnen das erste und das letzte Glied Quadrate. Es bestehen also Relationen

$$(36)\qquad -2u^2 + 18v^2 = w^2;\ 7u^2 + 18v^2 = t^2;\ 4u^2 + 45v^2 = s^2.$$

Hier bedeuten sowohl die erste und die zweite als die erste und die dritte Gleichung elliptische Raumkurven vierter Ordnung, für welche schon aus (35) ratio-

[1] Sieh »Rationale Punkte», S. 310.

[2] Sieh »Rationale Punkte», S. 308.

nale Punkte bekannt sind. Aus diesen lassen sich in bekannter Weise andere herleiten, denen neue Kurven vom Range fünf entsprechen.

Unter den harmonischen Kurven vom Range fünf scheint also der Fall $c = 2.3.11.19$ eine besonders ausgezeichnete Stellung einzunehmen. Für $c = 2.3.11.17.41.43$ erlauben wir uns noch die Bemerkung, dass hier die Verhältnisse mit denjenigen, wo c nur vier Primzahlen enthält, analog sind, da bei den obigen Erörterungen sowohl 2 und 17 als 3 und 11 immer als Produkte auftreten.

Zuletzt lässt sich fragen, warum, wenn noch eine zweite Folge zu einer Kurve (28) führt, der Rang nicht durch diese wie durch die erste um zwei erhöht wird. Nun kennen wir wirklich Fälle, wo eine solche Erhöhung eintritt, aber nur bei der Kurve (29) mit $c = 2.3.7.17.41$, für welche ja auch der Rang sechs ist. Zur Beleuchtung mögen hier die fünf zu dieser Kurve gehörenden Folgen aufgeschrieben werden. Dabei werden neben jede Folge die Charaktere gegeben, die sich unmittelbar aus ihr herleiten lassen.[1]

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{ll} -27, 7, 41, 75. & -41, -7, 3;\ 7, 41, 3;\ -1, -1, 7.41. \\ -48, -7, 34, 75. & -3, -7, 2.17;\ -3, -2.17, 7;\ 2.7.17, 1, 1. \\ 27, 34, 41, 48. & 3, 2.17, 41;\ 2.17, 41, 3;\ 41, 3, 2, 17. \\ 4, 123, 242, 361. & 1, 3.41, 2;\ 3.41, 2, 1;\ 2, 1, 3.41. \\ -507, -82, 343, 768. & -3, -2.41, 7;\ -3, -7, 2.41;\ 2.7.41, 1, 1. \end{array}\right.$$

Aus fünf Folgen lässt sich in zehn Weisen ein Paar herausnehmen. Denkt man sich nun, dass von den Folgen nur ein solches Paar bekannt ist, so hat man in fünf Fällen Basispunkte für den Rang fünf und in den übrigen fünf Fällen Basispunkte für den Rang sechs. Von der zweiten Art sind die Paare, die man durch Kombination der ersten mit der vierten oder fünften, der zweiten mit der fünften, der dritten mit der vierten und der vierten mit der fünften Folge bekommt. Das Kriterium für den Rang fünf oder sechs gründet sich ja darauf, ob durch Komposition der zu den beiden Folgen gehörenden Charaktere ein Charakter für einen von den drei Punkten auf der Achse herauskommt oder nicht. Nun treten in den Charakteren der letzteren drei Punkte sämtliche in $2.3.7.17.41$ eingehenden Primzahlen auf.[2] Da für die erste, vierte und fünfte Folge (37) die Primzahl 17 nicht in den Charakteren auftritt, so kann natürlich 17 nicht durch Komposition der Charaktere zweier von diesen Folgen eingeführt werden. In

[1] Sieh »Rationale Punkte», S. 317.

[2] Man vergleiche »Rationale Punkte», S. 297.

gleicher Weise verhält es sich betreffend die Primzahl 7 für die dritte und vierte Folge. Das Sachverhältnis lässt sich auch so ausdrücken, dass für die erste, vierte und fünfte Folge (37) 17 und für die dritte und vierte 7 als gemeinsame Faktoren in den Differenzen auftreten. Andere c-Werte, zu denen Folgenpaare mit gemeinsamen Faktoren für die Differenzen (in ungerader Potenz) führen, sind uns nicht bekannt. Doch ist diese Eigenschaft nicht notwendig, um zu dem Range sechs zu gelangen, wie sich aus der zweiten und fünften Folge (37) ersehen lässt; auch hier sind uns andere Beispiele unbekannt.

8. Ausser den in der vorhergehenden Nummer behandelten Kurven, die sich an Folgen (31), (31_1) oder (31_2) anlehnen, kennen wir nur noch sechs harmonische Kurven (28) vom Range fünf, und zwar hat man für dieselben

$$(38)\begin{cases} 1)\ c = 2.3.5.7.11.13.17; \quad 2)\ c = 2.3.5.7.13.17.19; \quad 3)\ c = 2.5.7.11.13.17.19; \\ 4)\ c = 2.3.5.7.11.19.23; \quad 5)\ c = 2.3.5.7.11.13.19.23; \quad 6)\ c = 2.3.5.7.19.41. \end{cases}$$

Es liegt nahe die sechs Kurven (38) mit den sechs Kurven (32) zu vergleichen. Wie wir gefunden haben, sind fünf von den Kurven (32) Anfangsglieder von Kurvenscharen vom Range fünf; eine Analogie hierzu bei den Kurven (38) scheint nicht zu existieren. Weiter bemerkt man, dass in (38) die c-Werte mehr Primfaktoren (wenigstens sechs) als in (32) (höchstens sechs) enthalten. Für fünf von den Kurven (38) hat c keinen grösseren Primzahlfaktor als 23; unter den Kurven (32) gilt dies nur für $c = 2.3.11.19$. Besonders der letzte Umstand veranlasst die Vermutung, dass die grössere Mehrzahl der Kurven (28) vom Range fünf nicht in Zusammenhang mit den in der vorhergehenden betrachteten Folgen steht. Man konnte hier auch an neue Kurven (28) vom Range sechs denken. Doch scheint eine Aufsuchung solcher Kurven ohne besondere Hilfsmittel ziemlich aussichtslos.

Es ist der Nachweis zu erbringen, dass die Kurven (38) vom Range fünf sind. Zu diesem Ende gilt es auf jeder Kurve drei rationale Punkte zu bestimmen, welche als Basispunkte von einander unabhängig sind. Aus denselben lässt sich dann ein System rationaler Punkte vom Range drei herleiten. Wenn nun keiner von den drei Punkten auf der Achse Charaktere mit zu diesem System gehörigen Punkten gemeinsam hat, so ist der Rang fünf, und es treten als Basispunkte für die rationalen Punkte auf der Kurve noch zwei Punkte auf der Achse hinzu. Für die drei Basispunkte, die wir aufsuchen werden, kommt in keinem Falle in den Charakteren das Zeichen — vor, d. h. dieselben liegen stets auf dem unpaaren Zuge der Kurve. Wenn wir von diesen drei Punkten ausgehen, so lassen sich mithin nur Punkte auf dem unpaaren Zuge erreichen. Auf der Achse gehört zu diesem Zug nur der Punkt $x - c = 0$, für welchen, wenn wir $c = 2\,c_1$ schreiben, wir die Charaktere

(39) $$c_1,\ 1,\ 2$$

haben. Durch Komposition der Charaktere für die drei Ausgangspunkte bekommt man ausser dem Einheitscharakter vier neue Charaktere. Die Bedingung für den Rang fünf ist nun, dass keiner von den letzteren Charakteren mit (39) übereinstimmen darf. Auch für diese Charaktere bestimmen wir in der folgenden Nummer bei der Behandlung der besonderen Kurven (38) repräsentierende Punkte, wenn dies sich ohne all zu grosse Schwierigkeiten ausführen lässt. Hierin liegt ja eine Garantie für Fehlrechnungen. Von jedem in solcher Weise erhaltenen Repräsentanten für eine Klasse von rationalen Punkten einer Kurve lassen sich nun Repräsentanten für drei neue Klassen erhalten, und zwar durch die dritten Schnittpunkte der drei geraden Linien, die den Punkt mit den drei Punkten auf der Achse verbinden. Da auf dieses Verhältnis früher, und besonders ausführlich für $c = 2.3.7.17.41$ (»Rationale Punkte», S. 318), eingegangen worden ist, begnügen wir uns hier mit dieser Bemerkung.

9. Bei dem jetzt folgenden Beweise, dass die Kurven (38) vom Range fünf sind, werden zuerst die drei Basispunkte P_1, P_2, P_3 durch die Werte für $x - c$, x und $x + c$ angegeben, wobei etwa gemeinsame Faktoren für sich ausserhalb der Klammer geschrieben werden. Es folgen die Charaktere K_1, K_2, K_3, für welche diese Punkte Repräsentanten sind, sowie die Charaktere $K_{1,2}, \ldots$, welche sich hieraus durch Komposition herleiten lassen. Da wir in keinem von den behandelten Fällen zum Charakter (39) kommen, so ist hiermit der gewünschte Beweis erbracht. Zum Schluss werden auch für die Charaktere $K_{1,2}, \ldots$ repräsentierende Punkte $P_{1,2}, \ldots$ gegeben.

1. $c = 2.3.5.7.11.13.17.$

Betreffend diese Kurve, welche das erste uns bekannte Beispiel einer Kurve (28) vom Range fünf bezeichnet, können wir auf unsere frühere Behandlung verweisen.[1]

2. $c = 2.3.5.7.13.17.19.$

(P_1)	$(78,\ 95,\ 112)\ 2.3.5.7.13.19;$
(P_2)	$(57,\ 91,\ 125)\ 3.5.7.13.19;$

[1] »Rang von Kurven», S. 233.

(P_3)	$(170,\ 189,\ 208)\ 2.3.5.7.13.17.$
(K_1)	$2.3.13,\ 5.19,\ 7;$
(K_2)	$3.19,\ 7.13,\ 5;$
(K_3)	$2.5.17,\ 3.7,\ 13;$
$(K_{1,2})$	$2.5.7,\ 1,\ 13.19;$
$(K_{1,3})$	$7.17,\ 13.19,\ 3.5;$
$(K_{2,3})$	$2.13.17.19,\ 5,\ 3;$
$(K_{1,2,3})$	$17,\ 3,\ 7.19.$
$(P_{1,2})$	$(70,\ 529,\ 988)\ \frac{2.5.7.13.19}{3^2};$
$(P_{1,3})$	$(119,\ 247,\ 375)\ \frac{3.5.7.13.17.19}{8^2};$
$(P_{2,3})$	$(8398,\ 9245,\ 10092)\ \frac{2.3.5.13.17.19}{11^2}.$

3. $c = 2.5.7.11.13.17.19.$

(P_1)	$(45,\ 133,\ 221)\ \frac{5.7.13.17.19}{2^2};$
(P_2)	$(68,\ 133,\ 198)\ 2.7.11.17.19;$
(P_3)	$(117,\ 152,\ 187)\ 2.11.13.17.19.$
(K_1)	$5,\ 7.19,\ 13.17;$
(K_2)	$17,\ 7.19,\ 2.11;$
(K_3)	$13,\ 2.19,\ 11.17;$
$(K_{1,2})$	$5,\ 17,\ 2.11.13;$
$(K_{1,3})$	$5,\ 2.7.13,\ 11;$
$(K_{2,3})$	$2.13,\ 7.17,\ 1;$
$(K_{1,2,3})$	$2.5.17,\ 13.19,\ 1.$
$(P_{1,2})$	$(20,\ 153,\ 286)\ 2.5.11.13.17;$
$(P_{1,3})$	$(5,\ 2912,\ 5819)\ \frac{2.5.7.11.13}{3^2};$
$(P_{2,3})$	$(26,\ 1071,\ 2116)\ 2.7.13.17;$
$(P_{1,2,3})$	$(170,\ 247,\ 324)\ 2.5.13.17.19.$

Die hier behandelte Kurve unterscheidet sich von den übrigen uns bekannten Kurven (28) des Ranges fünf darin, dass 3 nicht in den Faktoren von c eingeht.

4. $c = 2.3.5.7.11.19.23.$

(P_1)	$(22,\ 57,\ 92)\ 2.3.11.19.23;$
(P_2)	$(77,\ 96,\ 115)\ 2.3.5.7.11.23;$
(P_3)	$(95,\ 128,\ 161)\ 2.5.7.19.23.$

(K_1)	2.11, 3.19, 23;
(K_2)	7.11, 2.3, 5.23;
(K_3)	5.19, 2, 7.23;
$(K_{1,2})$	7, 19, 2.5;
$(K_{1,3})$	5.11, 3, 2.7.19;
$(K_{2,3})$	11.19, 3.5.7, 1;
$(K_{1,2,3})$	2, 5.7, 19.23.
$(P_{1,2})$	$(28, 6859, 13690)\ \frac{2.5.7.19}{3^2}$;
$(P_{1,3})$	(220, 243, 266) 2.3.5.7.11.19;
$(P_{2,3})$	$(209, 945, 1681)\ \frac{3.5.7.11.19}{4^2}$;
$(P_{1,2,3})$	(1682, 1715, 1748) 2.5.7,19.23.

5. $c = 2.3.5.7.11.13.19.23.$

(P_1)	(39, 77, 115) 3.5.7.11.13.23;
(P_2)	(23, 78, 133) 2.3.7.13.19.23;
(P_3)	(133, 138, 143) 2.3.7.11.13.19.23.
(K_1)	3.13, 7.11, 5.23;
(K_2)	23, 2.3.13, 7.19;
(K_3)	7.19, 2.3.23, 11.13;
$(K_{1,2})$	7, 2.11.23, 3.5.13.19;
$(K_{1,3})$	11.19.23, 2.13, 3.5.7;
$(K_{2,3})$	13. 7.19, 11.23;
$(K_{1,2,3})$	3.11, 19, 5.
$(P_{1,2})$	$(343, 2024, 3705)\ \frac{2.3.5.7.11.13.19.23}{41^2}$;
$(P_{1,3})$	$(4807, 6656, 8505)\ \frac{2.3.5.7.11.13.19.23}{43^2}$;
$(P_{2,3})$	$(13, 133, 253)\ \frac{7.11.13.19.23}{2^2}$.

6. $c = 2.3.5.7.19.41.$

(P_1)	(6, 41, 76) 2.3.19.41;
(P_2)	(123, 128, 133) 2.3.7.19.41;
(P_3)	(205, 224, 243) 2.3.5.7.41.
(K_1)	2.3, 41, 19;
(K_2)	3.41, 2, 7.19;
(K_3)	5.41, 2.7, 3;
$(K_{1,2})$	1, 1, 2.7.41;

$(K_{1,3})$	5, 3.7, 2.19.41;
$(K_{2,3})$	5.7, 3, 19;
$(K_{1,2,3})$	2.5.7, 41, 3.
$(P_{1,2})$	(4, 289, 574) 2.7.41;
$(P_{1,3})$	(500, 1029, 1558) $\frac{2.3.5.7.19.41}{23^2}$;
$(P_{2,3})$	(4235, 5547, 6859) $\frac{3.5.7.19}{4^2}$.

III.

10. In diesem Abschnitte werden wir zur Behandlung des allgemeinen Falles der Kurven (2) übergehen. Hier steht zur Verfügung die bereits im zweiten Abschitte von »Rang von Kurven» entwickelte Methode für die Absonderung von Kurvenfamilien erster, zweiter, dritter und vierter Stufe. Für uns sind hier die Familien wichtig, deren Kurven in der Regel von derselben Stufe wie die betreffende Familie sind. Nicht für alle Kurvenfamilien gilt ja eine solche Eigenschaft, wie aus der 4. Nummer der vorliegenden Arbeit hervorgeht. Nun lassen sich hier leicht Kurven dritter Stufe, d. h. vom Range fünf, welche ja den rationalen Punkten von Nullformen (10) zugeordnet sind, in beliebiger Menge herstellen. Wenn man aber zu den in unserer soeben zitierten Abhandlung erhaltenen Ergebnissen betreffend die Kurven vom Range sechs übergeht, so findet man, mit Ausnahme der Kurve (14), nur Kurven mit sehr grossen Werten für die Konstanten a und b. Mehr zugänglich ist die in unserer später erschienenen Arbeit »Rationale Punkte» gegebene harmonische Kurve (29) mit $c = 2.3.7.17.41 = = 29274$. Man kann die Gleichung dieser Kurve in die Gestalt (2) mit $a = 29274$, $b = 58548$ überführen. Auch diese Werte für a und b sind also sehr viel grösser als diejenigen für die Kurve (14), für welche man ja $a = 46$, $b = 292$ hat, und es lässt sich von vornherein nicht gern bezweifeln, dass es Kurven (2) vom Range sechs geben muss, welche eine Zwischenstellung zwischen den obigen beiden Kurven einnehmen. Derartige Kurven zu bestimmen ist nun eine Hauptaufgabe für die folgenden Entwicklungen. Im Vorübergehen bemerken wir hier noch, dass die Lösung dieser Aufgabe uns nicht ohne Überwindung von recht erheblichen Schwierigkeiten gelungen ist.

Aus den vorhergehenden Entwicklungen wissen wir, dass die Familien vierter Stufe in enger Beziehung zu gewissen Büscheln von quaternären Formen zweiter Ordnung stehen, deren vier ternäre Glieder sich in der Gestalt (12) schreiben lassen. Hier gilt es zunächst solche Kombinationen der vier rationalen Parameter k, k_1, k_2 und k_3 zu bestimmen, dass man Nullbüschel bekommt. Man kann bei der Behandlung dieser Aufgabe auf Schwierigkeiten stossen. Für ein Nullbüschel ist es z. B. nicht ausreichend, dass sämtliche vier eingehende ternäre Glieder Nullformen sind. Es lässt sich fragen, wie man mit Hilfe einer bereits bekannten rationalen Nullstelle eines Nullbüschels andere rationale Nullstellen herleiten kann. Auf ein erstes Mittel hierzu haben wir in »Rang von Kurven», S. 250 hingewiesen, nämlich die Additionstheoreme in der Theorie der elliptischen Funktionen. Doch kommt man wohl hier einfacher durch mehr geometrische Auseinandersetzungen zum Ziel. Wie an der soeben zitierten Stelle hervorgehoben wird, lässt sich durch (12) eine Raumkurve vierter Ordnung vom Geschlechte eins in den homogenen Veränderlichen x, x_1, x_2 und x_3 definieren. Bei der gewöhnlichen eindeutigen Darstellung der Punkte dieser Kurve durch einen Parameter u möge dem Argument $u = 0$ ein Punkt in einer Koordinatenebene entsprechen. Da für die Punkte in diesen Ebenen die Schmiegungsebenen immer stationär sind, so ist die Summe der Argumente für vier durch eine Ebene ausgeschnittene Punkte $\equiv 0 \pmod{\omega, \omega_1}$, wo ω und ω_1 die Grundperioden bezeichnen. Nun erhält man aus einem rationalen Punkt, wenn für ihn keine der Grössen $x_i = 0$, durch Zeichenänderungen insgesamt acht rationale Punkte. Ist u das Argument für den Ausgangspunkt, so findet man leicht als Argumente für sämtliche acht Punkte:

$$(40) \qquad \pm u, \ \pm u + \frac{\omega}{2}, \ \pm u + \frac{\omega_1}{2}, \ \pm u + \frac{\omega + \omega_1}{2}.$$

Dabei liegen die vier Punkte mit dem Zeichen — auf den Verbindungslinien des Ausgangspunktes mit den Spitzen der vier Kegel, welche durch die vier Gleichungen (12) definiert werden; dies folgt ja daraus, dass die Berührungsebene eines Kegels längs einer Erzeugenden auch die Kurve in den beiden Schnittpunkten berührt. Man versteht auch jetzt, dass, wie man auch zwei Punkte (40) mit verschiedenen Zeichen durch eine gerade Linie verbindet, so geht die Verbindungslinie durch eine von den vier Kegelspitzen.

Eine Ebene kann nun in drei verschiedenen Weisen drei gemeinsame Punkte mit der Kurve in Punkten (40) haben. Entweder sind die drei Punkte verschieden, oder berührt bzw. oskuliert die Ebene in einem Punkte, so dass zwei bzw. sämtliche drei Punkte zusammenfallen. Bezüglich der Lage des vierten Schnittpunktes gibt es hier zwei Möglichkeiten, indem die drei Punkte (40) entweder ein gemeinsames Zeichen + oder — haben können oder nicht. Im letzteren Falle ist offenbar auch der vierte Schnittpunkt ein Punkt (40), und man bekommt für zwei von den vier Punkten das Zeichen + und für die beiden anderen das Zeichen —. Gilt aber dasselbe Zeichen für die drei ursprünglichen Punkte, so erhält man in dem vierten Schnittpunkt einen neuen rationalen Punkt, und zwar gibt es für diesen Punkt die möglichen Argumente:

$$(41)\qquad \pm 3u, \quad \pm 3u + \frac{\omega}{2}, \quad \pm 3u + \frac{\omega_1}{2}, \quad \pm 3u + \frac{\omega + \omega_1}{2}.$$

Wir denken uns jetzt einen Punkt der Kurve mit dem Argumente u und den Koordinaten $\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ und fragen, durch welche Zeichenänderungen für die $\varkappa_i$ man zu Punkten (40) mit dem Zeichen + bzw. — für u kommt. Eine leichte Überlegung gibt uns die Antwort, dass bei zwei Zeichenänderungen das Zeichen + und bei einer Zeichenänderung (oder drei) das Zeichen — gilt.

Für das in »Rang von Kurven» eingehend behandelte Nullbüschel (13) sind die Punkte der Kurve in der Ebene $\varkappa_2 = 0$ rational. Es ist dies ein Beispiel eines für uns besonders wichtigen Spezialfalles, in welchem die Schnittpunkte der Kurve mit einer Ebene $\varkappa_i = 0$ rational sind. Wählen wir für einen Punkt in dieser Ebene das Argument $u = 0$, so bekommen wir für die drei anderen Punkte der Ebene $u = \frac{\omega}{2}, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega + \omega_1}{2}$. Es ist hier vorteilhaft einen von den drei Punkten, durch welche hier oben eine Ebene festgelegt wurde, in diese Ebene zu verlegen. Für den vierten Schnittpunkt hat man dann zu wählen unter den Argumenten

$$(42)\qquad \pm 2u, \quad \pm 2u + \frac{\omega}{2}, \quad \pm 2u + \frac{\omega_1}{2}, \quad \pm 2u + \frac{\omega + \omega_1}{2}.$$

Die durch ein Nullbüschel (12) definierte Kurve lässt sich birational in eine Kurve (1) transformieren, für welche sämtliche Grössen e_1, e_2 und e_3 rational sind. Jedem rationalen Punkt u folgen ja rationale Punkte $u + \frac{\omega}{2}$, $u + \frac{\omega_1}{2}$, $u + \frac{\omega + \omega_1}{2}$. Im allgemeinen ist die Kurve von der ersten Stufe und vom Range drei. Nicht ohne Interesse ist die Frage, ob unter den in Rede stehenden Kurven auch höhere Stufen als die erste Vertreter haben. Da die Koeffizienten in (12) sehr spezialisiert sind, ist wohl dies nicht zu erwarten.

11. Wir wollen die in der vorhergehenden Nummer entwickelten Methoden durch ein Beispiel beleuchten und nehmen dabei unseren Ausgangspunkt von der Kurve

$$(43)\qquad y^2 = x(x+2)(x+6).^{1}$$

[1] Sieh »Rang von Kurven», S. 240, 246.

Auf dieser Kurve, die nur von der ersten Stufe ist, bemerken wir die rationalen Punkte:

$$x = 2,\ y = 8;\quad x = -4,\ y = 4;\quad x = 6,\ y = 24;\quad x = -3,\ y = 3.$$

Da $a = 2$, $b = 6$, so erhalten wir für diese Punkte nach (3) und (4):

$$(44)\qquad k = 1,\ \varkappa = 2;\quad k_1 = -2,\ \varkappa_1 = 3;\quad k_2 = 3,\ \varkappa_2 = 1;\quad k_3 = -\frac{3}{2};\ \varkappa_3 = 2.$$

Das System (12) nimmt hier die Gestalt:

$$(45)\qquad \begin{cases} 5\varkappa^2 - 2\varkappa_1^2 - 18\varkappa_2^2 = 0; \\ 4\varkappa^2 + 20\varkappa_1^2 - 9\varkappa_3^2 = 0; \\ 6\varkappa^2 - 20\varkappa_2^2 - \varkappa_3^2 = 0; \\ 12\varkappa_1^2 + 8\varkappa_2^2 - 5\varkappa_3^2 = 0. \end{cases}$$

Wir legen eine Ebene durch die drei Punkte:

$$\varkappa,\ \varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \varkappa_3 = 2,\ 1,\ 1,\ 2;\quad 2,\ -1,\ 1,\ -2;\quad 2,\ 1,\ -1,\ -2.$$

Als Gleichung dieser Ebene ergibt sich

$$(46)\qquad \varkappa + \varkappa_3 - 2(\varkappa_1 + \varkappa_2) = 0.$$

Wenn wir hieraus den Ausdruck für $\varkappa_3$ in die dritte Gleichung (45) einführen, so bekommen wir

$$5\varkappa^2 - 4\varkappa_1^2 - 24\varkappa_2^2 - 8\varkappa_1\varkappa_2 + 4\varkappa\varkappa_1 + 4\varkappa\varkappa_2 = 0.$$

Diese Gleichung geht, nach Wegschaffung von $\varkappa^2$ vermittelst der ersten Gleichung (45), in

$$\varkappa_1^2 + 3\varkappa_2^2 + 4\varkappa_1\varkappa_2 - 2\varkappa(\varkappa_1 + \varkappa_2) = 0$$

über. Nach Ausziehung des Faktors $\varkappa_1 + \varkappa_2$ erhält man hieraus

$$(47)\qquad \varkappa_1 + 3\varkappa_2 - 2\varkappa = 0.$$

Aus (47) und der ersten Gleichung (45) lässt sich jetzt $\varkappa$ eliminieren, und es ergibt sich als Resultat

$$\varkappa_1^2 + 9\varkappa_2^2 - 10\varkappa_1\varkappa_2 = (\varkappa_1 - \varkappa_2)(\varkappa_1 - 9\varkappa_2) = 0.$$

Wir haben also für den vierten Schnittpunkt der $\varkappa$-Kurve mit der Ebene (46) $\varkappa_1 = 9\varkappa_2$, woraus, mit Hilfe von (46) und (47),

$$(48)\qquad \varkappa = 6,\ \varkappa_1 = 9,\ \varkappa_2 = 1,\ \varkappa_3 = 14.$$

Führt man die erhaltenen Werte in (6) und (7) ein, so ergibt sich $a = -30$, $b = 102$, also die Kurve

$$y^3 = x(x - 30)(x + 102).$$

Auch mit dieser Kurve, deren Gleichung sich leicht in die Gestalt

$$y^2 = x(x + 30)(x + 132)$$

transformieren lässt, haben wir früher (»Rang von Kurven», S. 246) Bekanntschaft gemacht. Dieselbe ist, wie überhaupt die Kurven der Familie, zu welcher (45) den Aufschluss gibt, nur vom Range fünf. Einen Beweis hierfür wollen wir jetzt in einem allgemeineren Zusammenhange geben.

Wir gehen von der Voraussetzung aus, dass (12) eine Lösung besitzt, für welche einerseits $\varkappa$ und $\varkappa_3$, andererseits $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ gleiche Werte erhalten. Das Verhältnis zwischen diesen Werten bezeichnen wir mit n. Als Bedingungen für die Lösung ergibt sich aus der ersten und letzten Relation (12):

$$(k_1 - k_2) k (k + 1) n^2 + (k_2 - k) k_1 (k_1 + 1) + (k - k_1) k_2 (k_2 + 1) = 0;$$
$$(k_1 - k_2) k_3 (k_3 + 1) n^2 + (k_2 - k_3) k_1 (k_1 + 1) + (k_3 - k_1) k_2 (k_2 + 1) = 0.$$

Hier können wir in beiden Relationen den Faktor $k_1 - k_2$ vernachlässigen und erhalten alsdann:

$$(49) \qquad \begin{cases} k(k + 1) n^2 - k(k_1 + k_2 + 1) + k_1 k_2 = 0; \\ k_3 (k_3 + 1) n^2 - k_3 (k_1 + k_2 + 1) + k_1 k_2 = 0. \end{cases}$$

Nach Subtraktion und Beseitigung des Faktors $k - k_3$ bekommen wir hieraus

$$(50) \qquad (k + k_3 + 1) n^2 - (k_1 + k_2 + 1) = 0.$$

Zu diesen Gleichungen hat man die Speziallösung

$$(51) \qquad k = 1, \; k_1 = -n, \; k_2 = 2n - 1, \; k_3 = -\frac{2n - 1}{n}.$$

Diese Festsetzungen stimmen für $n = 2$ mit (44) überein. Die Ausgangskurve (43) wird hier durch die allgemeinere Kurve

$$(52) \qquad y^2 = x(x + n)(x + n(2n - 1))$$

ersetzt, welche, wie man leicht findet, ebenfalls von der ersten Stufe und vom Range drei ist. Führt man die Parameter (51) in (12) ein, so bekommt man als Resultat:

$$(53)\quad \begin{cases} (3n-1)\varkappa^2 - n(n-1)^2\varkappa_1^2 - n(n+1)(2n-1)\varkappa_2^2 = 0; \\ 2n(n-1)\varkappa^2 + n^2(3n-1)\varkappa_1^2 - (n+1)(2n-1)\varkappa_3^2 = 0; \\ n(n+1)\varkappa^2 - n^2(3n-1)\varkappa_2^2 - (n-1)^2\varkappa_3^2 = 0; \\ n^2(n+1)\varkappa_1^2 + 2n^2(n-1)\varkappa_2^2 - (3n-1)\varkappa_3^2 = 0. \end{cases}$$

Für $n = 2$ stimmt dieses System mit (45) überein. Ohne grössere Schwierigkeit lassen sich jetzt die entsprechenden Rechnungen für den allgemeinen Fall wie oben für $n = 2$ ausführen, um neue Kurven in den jeweiligen Familien zu bestimmen. Doch gelingt es auf diese Weise nicht neue Kurven vom Range sechs zu entdecken. Die Bedingung hierfür ist ja, dass die drei Charaktere in (20) von einander unabhängig sein sollen. Für die drei Charaktere hat man:

$$(54)\quad \begin{cases} -2(n-1),\ -n,\ 1 \equiv -2(n-1),\ -n,\ 1; \\ 4n,\ 2n-1,\ 1 \equiv n,\ 2n-1,\ 1; \\ -\dfrac{2(n-1)}{n},\ -\dfrac{2n-1}{n},\ 1 \equiv -2(n-1),\ -(2n-1),\ n. \end{cases}$$

Nimmt man hier das Produkt aller drei Charaktere, so bekommt man den Einheitscharakter. *Durch die Parameter (51) wird also eine Schar von Kurvenfamilien vierter Stufe definiert, in denen die einzelnen Kurven regelmässig nur dritter Stufe sind. Ausnahmsweise gibt es sogar in der Schar Familien, deren Kurven nur zweiter Stufe, also vom Range vier, sind.* Dies trifft zu, wenn in (54) ein Charakter den Einheitscharakter bedeutet; die beiden anderen müssen dann gleich sein. Als Beispiel betrachten wir den mittleren Charakter. Schreiben wir hier $n = u^2$, $2n - 1 = v^2$, so ergibt sich die Relation

$$v^2 = 2u^2 - 1.$$

Eine Lösung hierzu ist $u = 5$, $v = 7$. Für $n = 25$ sind mithin die in der Familie vierter Stufe eingehenden Kurven nur von der zweiten Stufe.

12. Um neue Kurven vom Range sechs zu erhalten, die nicht mit sehr grossen Werten für a und b behaftet sind, müssen wir mithin nach anderen Auswegen suchen. Es liegt dann nahe zu fragen, ob hier nicht etwa eine spezielle Eigenschaft des Systems (13), welches zu dem uns bereits bekannten Beispiel (14) Aufschluss gegeben hat, von Bedeutung ist. In dieser Hinsicht fällt zunächst der Umstand auf, dass für (13) die Punkte in der Ebene $\varkappa_2 = 0$ rational sind; man findet ja für $\varkappa_2 = 0$

$$\varkappa_1^2 = 4\varkappa^2 = 4\varkappa_3^2.$$

Als eine nahe liegende Verallgemeinerung kann man hier

$$\varkappa_1^2 = m^2 \varkappa^2 = n^2 \varkappa_3^2$$

annehmen, wo m und n irgendwelche rationale Zahlen bedeuten. In dieser Allgemeinheit wollen wir jedoch die Frage nicht aufnehmen. Wir setzen vielmehr $m = n$, wie in dem Falle von welchem wir unseren Ausgangspunkt genommen haben. Hierdurch wird auch die Behandlung wesentlich vereinfacht. Hat man nun eine Lösung für k, k_1, k_2 und k_3 erhalten, für welche die obige Bedingung befriedigt wird, so gilt es noch zu prüfen, inwieweit für diese Lösung (12) sich als ein eigentliches Nullbüschel herausstellt; aus rationalen Punkten in einer Ebene $\varkappa_i = 0$ folgt ja keineswegs die Existenz von anderen rationalen Punkten der $\varkappa$-Kurve.

Wird das Gleichungssystem (12) durch

$$\varkappa_2 = 0, \ \varkappa_1 = n, \ \varkappa = \varkappa_3 = 1 \tag{55}$$

befriedigt, so ergibt sich daraus gewisse Relationen zwischen den Parametern k_i. Als eine erste Relation haben wir

$$(k - k_2)\, k_3\, (k_3 + 1) + (k_2 - k_3)\, k\, (k + 1) = 0$$

oder nach Ausscheidung des Faktors $k - k_3$

$$k_2\,(k + k_3 + 1) - k\, k_3 = 0. \tag{56}$$

Aus (12) erhält man noch:

$$\begin{cases} (k_1 - k_2)\, k\, (k + 1) + n^2 (k_2 - k)\, k_1 (k_1 + 1) = 0; \\ (k_1 - k_2)\, k_3\, (k_3 + 1) + n^2 (k_2 - k_3)\, k_1 (k_1 + 1) = 0. \end{cases} \tag{57}$$

Hieraus bekommt man, nach Subtraktion und Wegschaffung des Faktors $k - k_3$,

$$(k_1 - k_2)\,(k + k_3 + 1) = n^2 k_1 (k_1 + 1). \tag{58}$$

Man findet jetzt leicht rationale Ausdrücke in k, k_1 und n^2 für k_2 und k_3. So erhält man aus der ersten Gleichung (57)

$$k_2 = k\, k_1 \cdot \frac{k + 1 - n^2 (k_1 + 1)}{k\,(k + 1) - n^2 k_1 (k_1 + 1)}. \tag{59}$$

Diesen Ausdruck für k_2 kann man in (56) einführen und dann k_3 bestimmen. Doch wird in den folgenden Entwicklungen nur zu einem Spezialfall von dieser allgemeinen Lösung Hinsicht genommen.

13. Wir beschränken uns nämlich auf den Fall, wo für die Parameter k_i und n Ausdrücke von der folgenden Art gelten:

$$(60)\qquad k = h,\ k_1 = -(h+1),\ k_2 = h(h+1),\ k_3 = -\frac{(h+1)^2}{h},\ n = \frac{h+1}{h}.$$

Für $h = 1$ ergibt sich hieraus $k, k_1, k_2, k_3 = 1, -2, 2, -4$, also der von uns früher behandelte Fall. Führen wir in (12) für die k_i die Werte aus (60) ein, so erhalten wir das System:

$$(61)\qquad \begin{cases} (h+1)^2 x^2 - h^2 x_1^2 - (2h+1)(h^2+h+1)x_2^2 = 0; \\ h^2(h+1)x^2 - h^2(2h^2+2h+1)x_1^2 + (h+1)(2h+1)(h^2+h+1)x_3^2 = 0; \\ (h+1)x^2 - (2h^2+2h+1)x_2^2 - (h+1)x_3^2 = 0; \\ h^2(x_1^2 - x_2^2) - (h+1)^2 x_3^2 = 0. \end{cases}$$

Für $h = 1$ geht dieses System in (13) über, wie es ja sein soll. In (61) sind die einzelnen linken Glieder Nullformen. Für das ganze System lässt sich aber nicht schliessen, dass es ein eigentliches Nullbüschel bezeichnet, d. h. dass, ausser den rationalen Punkten für $x_2 = 0$, andere rationale Nullstellen existieren. Nun lässt sich die letzte Relation (61) unmittelbar auf die Pythagoreische Gleichung zurückführen. Die Lösungen lassen sich mithin in einer von den beiden Gestalten

$$(62)\qquad \begin{cases} x_1 = (h+1)(\mu^2+\nu^2),\ x_2 = (h+1)\,2\mu\nu,\ x_3 = h(\mu^2-\nu^2); \\ x_1 = (h+1)(\mu^2+\nu^2),\ x_2 = (h+1)(\mu^2-\nu^2),\ x_3 = h\,2\mu\nu \end{cases}$$

schreiben, wobei man μ und ν als teilerfremde ganze rationale Zahlen annehmen kann, von denen eine gerade und die andere ungerade ist. Führt man diese Lösungen in die vorletzte Relation (61) ein, so erhält man entweder

$$(63)\qquad x^2 = 4\mu^2\nu^2(h+1)(2h^2+2h+1) + (\mu^2-\nu^2)^2 h^2$$

oder

$$(63_1)\qquad x^2 = (\mu^2-\nu^2)^2(h+1)(2h^2+2h+1) + 4\mu^2\nu^2 h^2.$$

Für jede Kombination von μ und ν bedeuten (63) und (63_1) elliptische Kurven 3. Ordnung in x und h. Man sieht unmittelbar, dass für diese Kurven zwei Paare von rationalen Punkten existieren, nämlich $h = 0$, $x = \pm 2\mu\nu$ und $h = -1$, $x = \pm(\mu^2-\nu^2)$, bzw. $h = 0$, $x = \pm(\mu^2-\nu^2)$ und $h = -1$, $x = \pm 2\mu\nu$. Die Kurven sind, so viel man sehen kann, von der zweiten Stufe. Doch können wir uns einen eigentlichen Beweis hierfür ersparen, da dies für die folgenden Entwicklungen von keiner Bedeutung ist. Es gilt jetzt mit Hilfe der bereits bekannten rationalen Punkte andere rationale Punkte der Kurven (63) und (63_1) aufzusuchen; diesen Punkten entsprechen dann Kurven von Familien vierter Stufe. Nun wissen wir bereits, dass eine solche Familie nicht notwendig auch *Kurven* von der vierten Stufe zu enthalten braucht; Beispiele hierfür haben wir ja in der 11. Nummer. Zunächst gilt es festzustellen, inwieweit die drei Klassen mit den Charakteren (20) von einander unabhängig sind, wenn für k, k_1, k_2 und k_3 die Ausdrücke (60) gelten. Für (20) bekommt man dann

$$(64)\quad \begin{cases} -h(h+1),\ -h(h+1),\ 1 \equiv -1,\ -1,\ h(h+1); \\ (h+1)(h^2+h+1),\ h^2(h+1),\ 1 \equiv h^2+h+1,\ 1,\ h+1; \\ -\dfrac{(h+1)(h^2+h+1)}{h},\ -(h+1)^2,\ 1 \equiv -h(h+1)(h^2+h+1),\ -1,\ 1. \end{cases}$$

Durch Komposition erhält man aus (64) noch vier Klassen mit den Charakteren

$$(64_1)\quad \begin{cases} -(h^2+h+1),\ -1,\ h(h+1)^2 \equiv -(h^2+h+1),\ -1,\ h; \\ h(h+1)(h^2+h+1),\ 1,\ h(h+1) \equiv h^2+h+1,\ h(h+1),\ 1; \\ -h(h+1)(h^2+h+1)^2,\ -1,\ h+1 \equiv -h,\ -(h+1),\ 1; \\ h(h+1)(h^2+h+1)^2,\ 1,\ h(h+1)^2 \equiv h+1,\ h,\ 1. \end{cases}$$

Als Bedingung dafür, dass die drei Klassen (64) von einander unabhängig sind, hat man, dass keine Klasse (64) oder (64_1) die Einheitsklasse bedeutet. Nun ist ersichtlich, dass die vier Klassen, für welche $h^2 + h + 1$ endgültig unter den Charakteren auftritt, sich nie zur Einheitsklasse reduzieren lassen. Es bleiben übrig die erste Klasse (64) und die beiden letzten Klassen (64_1). Das Resultat ist also, dass die Einheitsklasse nur in den folgenden drei Fällen in (64) oder (64_1) vorkommt:

$$1)\ h(h+1) = -u^2;\quad 2)\ h = -u^2,\ u^2 - 1 = v^2;\quad 3)\ h+1 = u^2,\ u^2 - 1 = v^2.$$

Die Fälle 2) und 3) gehen in einander über, wenn man h durch $-(h+1)$ ersetzt. Als Lösungen bekommt man:

$$1)\ h = \frac{-\mu^2}{\mu^2+\nu^2};\quad 2)\ h = \frac{-(\mu^2+\nu^2)^2}{(\mu^2-\nu^2)^2}\ \text{ oder }\ h = \frac{-(\mu^2+\nu^2)^2}{4\mu^2\nu^2};$$

$$3)\ h = \frac{4\mu^2\nu^2}{(\mu^2-\nu^2)^2}\ \text{ oder }\ h = \frac{(\mu^2-\nu^2)^2}{4\mu^2\nu^2}.$$

Hierbei können μ und ν als ganze rationale Zahlen angenommen werden. Im allgemeinen sind also die drei Klassen (64) von einander unabhängig; Ausnahmen hierzu gibt es nur für die soeben angegebenen sehr speziellen h-Werte.[1]

[1] In den Fällen, die wir hier zur besonderen Behandlung aufnehmen werden, kommen solche Ausnahmewerte nicht vor.

Um neue rationale Punkte auf den Kurven (63) und (63_1) aufzusuchen, können wir damit anfangen, dass wir von den zwei bereits bekannten rationalen Punktpaaren je einen Punkt auswählen, welche wir durch eine gerade Linie verbinden. Einen neuen rationalen Punkt bekommen wir dann in dem dritten Schnittpunkt. Aus den Werten für diesen Punkt von h und $\varkappa$ lassen sich dann $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ aus (62) bestimmen. Da för k, k_1, k_2 und k_3 (60) gilt, so erhält man jetzt a und b aus (6) und (7). Wir führen hier die Rechnungen nicht aus, da man in solcher Weise nur zu Kurven (2) vom Range fünf gelangt. Dass der Rang sechs nicht erreicht wird, steht in Zusammenhang damit, dass a keine Primzahl enthält, die nicht bereits in den Grössen k_i und $k_i + 1$ auftritt.

In ganz anderer Weise verhält es sich, wenn wir den dritten Schnittpunkt für eine Tangente in einem der von vornherein bekannten rationalen Punkte aufsuchen. Wir wählen etwa den Punkt $h = 0$, $\varkappa = 2\mu\nu$ auf der Kurve (63). Für die Tangente bekommen wir

$$\varkappa = 3\mu\nu h + 2\mu\nu.$$

Der gesuchte Schnittpunkt hat die Koordinaten

$$h = -\frac{7\mu^2\nu^2 + (\mu^2-\nu^2)^2}{8\mu^2\nu^2}, \quad \varkappa = -\frac{5\mu^2\nu^2 + 3(\mu^2-\nu^2)^2}{8\mu\nu}.$$

Für den einfachen Fall $\mu = 2$, $\nu = 1$, auf welchen wir uns in der Fortsetzung beschränken, erhalten wir hieraus

$$h = -\frac{37}{32}, \quad \varkappa = -\frac{47}{16}.$$

Für diesen h-Wert geht (60) in

(65) $$k = -\frac{37}{32}, \quad k_1 = \frac{5}{32}, \quad k_2 = \frac{185}{32^2}, \quad k_3 = \frac{25}{37\cdot 32}$$

über. Aus (62) ergibt sich

$$\varkappa_1 = -\frac{25}{32}.$$

Es lassen sich jetzt a und b aus (6) und (7) bestimmen. Wir bekommen

$$a = -\frac{185.17.23}{2^{16}}, \quad b = \frac{185.5.641}{2^{21}}.$$

Für die gesuchte Kurvengleichung ist hier eine Verinfachung möglich, da man x durch $\frac{x}{2^{22}}$ und y durch $\frac{y}{2^{33}}$ ersetzen kann. Nach dieser Substitution erhält man

(66) $$y^2 = x(x - 2^6.185.17.23)(x + 2.185.5.641).$$

Schreiben wir hier noch $2.185\,x$ für x und $2.185\,y$ für y, so bekommt man die Umformung

(66_1) $$y^2 = 2.185\,x(x - 32.17.23)(x + 5.641).$$

Zu beachten ist noch, dass

$$b - a = \frac{185}{2^{21}}(5.641 + 32.17.23) = \frac{185}{2^{21}} \cdot 3.13^2.31.$$

Es gilt jetzt zu beweisen, dass *die Kurve* (66) *vom Range sechs ist.* Zunächst findet man, dass die vier Basispunkte $x = k_i a$ von einander unabhängig sind und also ein System rationaler Punkte vom Range vier erzeugen. Es gehört ja hier h nicht zu den oben aufgezählten Ausnahmewerten, für welche die drei Klassen (64) nicht von einander unabhängig sind, und a enthält als Faktoren die beiden Primzahlen 17 und 23, welche in keiner von den Grössen k_i und $k_i + 1$ vorkommen. Die in den k_i auftretenden Primzahlen sind, wie wir hier oben sehen, 2, 5 und 37. In $k_2 + 1$ und $k_3 + 1$ findet man noch den Faktor $1209 = 3.13.31$. Man bemerke, dass die drei Primzahlen 3, 13 und 31 hier nicht isoliert in den Charakteren auftreten, sondern nur als Faktoren des Produktes 1209. Weiter enthält a den Faktor 17.23, b den Faktor 641 und $b - a$ den Faktor 3.31. In $b - a$ kommt noch die Primzahl 13 in Quadrat vor; für die Charaktere ist aber dies von keiner Bedeutung. Wir verstehen hieraus, dass wir in den drei Punkten auf der Achse Repräsentanten für drei Klassen besitzen, welche nicht in dem durch die vier Basispunkte $x = k_i a$ erzeugten System vom Range vier vorkommen. Wenn wir kombinieren, entsteht ein System vom Range sechs. Wir bekommen mithin für die Kurve (66) den Rang sechs.

In ähnlicher Weise lassen sich offenbar zu rationalen Punkten der Kurven (63) und (63_1) Kurven (2) vom Range sechs in unbegrenzter Anzahl aufsuchen. Mit den oben angewandten Hilfsmitteln dürfte es jedoch kaum möglich sein, wenn z. B. für a und b ganze rationale Zahlen gewünscht werden, niedrigere Beträge für diese als in dem angegebenen Beispiel (66) zu erhalten.

14. Nun haben wir aber schon, wenn auch mit Benutzung eines anderen Ausgangspunktes, in (14) eine Kurve vom Range sechs mit wesentlich niedrigeren

Beträgen für a und b gefunden, und das zugehörige Nullbüschel (13) bekommt man aus (61) für $h = 1$. Die Lösung $\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 = 13, 10, 8, 3$ von (13), die zur Kurve (14) führt, finden wir, wenn wir (62) und (63) betrachten, für $\mu = 2, \nu = 1$ wieder. Die Kurve

$$\varkappa^2 = 16(h+1)(2h^2+2h+1)+9h^2 \tag{67}$$

besitzt also noch die rationalen Punkte $h = 1$, $\varkappa = \pm 13$, und andere rationale Punkte dieser Kurve lassen sich, wenn wir die Gleichung (67) in näheren Betracht ziehen, ohne Schwierigkeit entdecken. Wir denken hier zunächst an die Punktpaare $h = 3$, $\varkappa = \pm 41$; $h = -\frac{1}{2}$, $\varkappa = \pm \frac{5}{2}$; $h = -\frac{3}{2}$, $\varkappa = \pm \frac{1}{2}$. Bei der Aufsuchung von rationalen Punkten stehen uns also als Ausgangspunkt sechs Punktpaare zur Verfügung, nämlich

$$\left\{\begin{array}{l} h=3,\ \varkappa=\pm 41;\quad h=1,\ \varkappa=\pm 13;\quad h=0,\ \varkappa=\pm 4; \\ h=-\frac{1}{2},\ \varkappa=\pm\frac{5}{2};\quad h=-1,\ \varkappa=\pm 3;\quad h=-\frac{3}{2},\ \varkappa=\pm\frac{1}{2}. \end{array}\right. \tag{68}$$

Doch sind diese Paare nicht von einander unabhängig. Dies sieht man daraus, dass man in drei Weisen gerade Linien ziehen kann, welche mit drei Paaren je einen gemeinsamen Punkt besitzen. Als solche gerade Linien kann man nehmen:

$$1)\ \varkappa = 3h+4\ \left(h=0,\ \varkappa=4;\ h=-\frac{1}{2},\ \varkappa=\frac{5}{2};\ h=-\frac{3}{2},\ \varkappa=-\frac{1}{2}\right);$$

$$2)\ \varkappa = 5h+8\ \left(h=1,\ \varkappa=13;\ h=-1,\ \varkappa=3;\ h=-\frac{3}{2},\ \varkappa=\frac{1}{2}\right);$$

$$3)\ \varkappa = 11h+8\ \left(h=3,\ \varkappa=41;\ h=-\frac{1}{2},\ \varkappa=\frac{5}{2};\ h=-1,\ \varkappa=-3\right).$$

In diesen Gleichungen ist es erlaubt das Zeichen für $\varkappa$ zu ändern, wodurch eine Linie durch die in bezug auf die Achse symmetrische ersetzt wird. Für die Kurve (67) ist wohl also die Stufe drei. Da, wie man leicht sieht, die Kurven (63) und (63_1) einteilig sind, so benutzen wir die Gelegenheit zu bemerken, dass uns noch kein Bespiel einer *einteiligen* Kurve (1) von einer höheren Stufe als drei bekannt ist. Wenn die Sache sich wirklich so verhält, so steht dies in guter Übereinstimmung mit einer Maximalstufe vier.

Zu neuen Kurven vom Range sechs kommen wir nicht, wenn wir in (60) $h = -\frac{1}{2}$ oder $h = -\frac{3}{2}$ setzen. Für $h = -\frac{1}{2}$ hat man ja $k = k_1 = -\frac{1}{2}$; k und k_1 sind also nicht verschieden. Die Kurve, zu welcher man für $h = -\frac{3}{2}$ geführt wird, ist

$$y^2 = x(x+36)(x+57).$$

Hier fehlen charakteristische Primzahlen für $a = 36$ und $b - a = 21$. Der Rang dieser Kurve ist auch nur vier. *Dagegen erhalten wir eine neue Kurve vom Range sechs für* $h = 3$. Aus (60) ergibt sich für diesen h-Wert

$$k = 3,\ k_1 = -4,\ k_2 = 12,\ k_3 = -\frac{16}{3}.$$

Die Grössen k_i und $k_i + 1$ enthalten in erster Potenz nur die Primzahlen 3 und 13. Es ist $\varkappa = 41$, und aus dem ersten System (62) bekommen wir $\varkappa_1 = 20$, $\varkappa_2 = 16$, $\varkappa_3 = 9$. Man kan jetzt a und b aus (6) und (7) bestimmen und findet als Gleichung der gesuchten Kurve

$$y^2 = x(x + 36.61)(x + 48.283).$$

Wenn man x durch $4x$ und y durch $8y$ ersetzt, geht diese Gleichung in die einfachere Gestalt

$$y^2 = x(x + 9.61)(x + 12.283) \tag{69}$$

über. Der gemeinsame Faktor 3 von 9 und 12 lässt sich hier ausserhalb der Faktoren rechts bringen, wodurch (69) in

$$y^2 = 3x(x + 3.61)(x + 4.283) \tag{69$_1$}$$

übergeht. Da

$$4.283 - 3.61 = 949 = 13.73,$$

so besitzen a, b und $b - a$ bzw. die charakteristischen Primfaktoren 61, 283 und 73. Andererseits gehört h nicht zu den in der vorhergehenden Nummer aufgezählten Ausnahmefällen. Der Rang der Kurve (69) muss mithin sechs sein.

Wir wollen noch zwei Kurven vom Range sechs darstellen, indem wir von rationalen Punkten der Kurve (67) ausgehen. Als Verbindungslinie der Punkte $h = -1$, $\varkappa = 3$ und $h = -\frac{3}{2}$, $\varkappa = -\frac{1}{2}$ bekommt man die gerade Linie

$$\varkappa = 7h + 10.$$

Für den dritten Schnittpunkt dieser Geraden mit (67) erhalten wir $h = \frac{7}{4}$, $\varkappa = \frac{89}{4}$ Für die Parameter k_i finden wir jetzt aus (60)

$$k = \frac{7}{4},\ k_1 = -\frac{11}{4},\ k_2 = \frac{77}{16},\ k_3 = -\frac{121}{28}.$$

Die in den Grössen k_i und $k_i + 1$ auftretenden Primfaktoren sind 7, 11, 3 und 31 Aus (62) erhalten wir

$$\varkappa_1 = \frac{55}{4},\ \varkappa_2 = 11,\ \varkappa_3 = \frac{21}{4}.$$

Die Berechnung von a und b nach (6) und (7) gibt

$$a = \frac{77.17}{4}, \quad b = \frac{77.11.547}{256}.$$

Die Gleichung der gesuchten Kurve lässt sich schreiben

$$y^2 = x(x + 77.17.64)(x + 77.11.547). \tag{70}$$

Eine einfache Umformung führt (70) in

$$y^2 = 77\, x(x + 17.64)(x + 11.547) \tag{70$_1$}$$

über. Man hat

$$11.547 - 17.64 = 4929 = 3.31.53.$$

Charakteristische Primfaktoren von a, b und $b - a$ sind also bzw. 17, 547 und 53, und *man hat für die Kurve* (70) *den Rang sechs.*

Wir suchen jetzt den dritten Schnittpunkt mit (67) für die Tangente im Punkte $h = -\frac{1}{2}$, $\varkappa = \frac{5}{2}$. Die Gleichung dieser Tangente ist

$$5\,\varkappa + h - 12 = 0.$$

Für den gesuchten Schnittpunkt hat man

$$h = -\frac{32}{25}, \quad \varkappa = \frac{332}{125}.$$

Aus (60) folgt jetzt

$$k = -\frac{32}{25}, \quad k_1 = \frac{7}{25}, \quad k_2 = \frac{224}{625}, \quad k_3 = \frac{49}{800}.$$

Die in ungerader Potenz auftretenden Primfaktoren von den k_i und $k_i + 1$ sind 2, 7 und 849. Man bekommt aus (62)

$$\varkappa_1 = -\frac{35}{25}, \quad \varkappa_2 = -\frac{28}{25}, \quad \varkappa_3 = -\frac{96}{25}.$$

Man findet jetzt aus (6) und (7)

$$a = -\frac{224.13.157}{5^8}, \quad b = \frac{224.112.13.31}{5^{10}}.$$

Da gemeinsame quadratische Faktoren von a und b sich ausscheiden lassen, so lässt die Gleichung der Kurve sich schreiben

$$y^2 = x(x - 14.13.25.157)(x + 14.13.31.112). \tag{71}$$

In analoger Weise wie in vorhergehenden Fällen lässt sich (71) durch

$$(71_1) \qquad y^2 = 182\,x(x - 25.157)(x + 31.112)$$

ersetzen. Da

$$31.112 + 25.157 = 7397 = 13.569,$$

so ist ersichtlich, dass a, b und $b - a$ bzw. die Primfaktoren 157, 31 und 569 enthalten. Man schliesst daraus, *dass auch die Kurve* (71) *den Rang sechs besitzt.*

15. Nur ein einzelner anderer Fall einer Kurve (63) oder (63_1), die von der dritten Stufe zu sein scheint, ist uns bekannt, nämlich (63) für $\mu = 4$, $\nu = 1$. Setzt man diese Werte in (63) ein, so bekommt man

$$(72) \qquad \varkappa^2 = 64(h + 1)(2h^2 + 2h + 1) + 225\,h^2.$$

Auf dieser Kurve liegen, ausser den bereits bekannten Punkten $h = 0$, $\varkappa = \pm 8$ und $h = -1$, $\varkappa = \pm 15$, noch das Punktpaar $h = -3$, $\varkappa = \pm 19$. In völlig analoger Weise wie in der vorhergehenden Nummer erhalten wir nun

$$k = -3,\ k_1 = 2,\ k_2 = 6,\ k_3 = \frac{4}{3};$$
$$\varkappa = 19,\ \varkappa_1 = -34,\ \varkappa_2 = -16,\ \varkappa_3 = -45;$$
$$a = 18.53,\ b = 12.419.$$

Wir bekommen also eine Kurve mit der Gleichung

$$(73) \qquad y^2 = x(x + 18.53)(x + 12.419).$$

Da hier a und b den gemeinsamen Faktor 6 besitzen, so lässt sich (73) in

$$(73_1) \qquad y^2 = 6\,x(x + 3.53)(x + 2.419)$$

überführen. Weiter hat man

$$2.419 - 3.53 = 679 = 7.97.$$

Man hat also als Primfaktoren in a, b und $b - a$ bzw. 53, 419 und 97. Da hier in den Grössen k_i und $k_i + 1$ nur die Primzahlen 2, 3 und 7 auftreten, so findet man, dass *der Rang der Kurve* (73) *sechs ist.*

Wir wollen noch, mit Ausgangspunkt von einem rationalen Punkte der Kurve (72), ein zweites Beispiel einer Kurve (2) vom Range sechs geben. Als Gleichung der Vereinigungsgeraden von den Punkten $h = 0$, $\varkappa = 8$ und $h = -3$, $\varkappa = -19$ bekommt man

$$\varkappa = 9\,h + 8.$$

Für den dritten Schnittpunkt dieser Geraden mit (72) ergibt sich $h = -\frac{1}{8}$, $\varkappa = \frac{55}{8}$. Nach den in den früheren Fällen angewandten Methoden erhalten wir jetzt

$$k = -\frac{1}{8}, \quad k_1 = -\frac{7}{8}, \quad k_2 = -\frac{7}{64}, \quad k_3 = \frac{49}{8};$$

$$\varkappa = \frac{55}{8}, \quad \varkappa_1 = \frac{119}{8}, \quad \varkappa_2 = 7, \quad \varkappa_3 = -\frac{15}{8};$$

$$a = 7 \cdot \frac{29}{8}, \quad b = -\frac{49.167}{4096}.$$

Hieraus ergibt sich als Gleichung der Kurve

$$(74) \qquad y^2 = x(x + 7.29.512)(x - 49.167)$$

oder in etwas abgeänderter Gestalt

$$(74_1) \qquad y^2 = 7x(x + 29.512)(x - 7.167).$$

Nun hat man

$$7.167 + 29.512 = 16017 = 3.19.281.$$

Also enthalten a, b und $b - a$ bzw. die Primfaktoren 29, 167 und 281. In den k_i und $k_i + 1$ kommen dagegen nur die Primzahlen 2, 3, 7 und 19 vor. In gewohnter Weise können wir also schliessen, dass *die Kurve* (74) *vom Range sechs ist.*

16. Unter den Kurven vom Range sechs, deren Gleichungen wir in der vorliegenden Arbeit gegeben haben, nimmt die harmonische (29) eine Stellung für sich ein. In den übrigen sieben Fällen, also für (14), (66), (69), (70), (71), (73) und (74), gilt es, dass die Parameter k_i sich durch (60) ausdrücken lassen, und zwar für $h = 1, -\frac{37}{32}, 3, \frac{7}{4}, -\frac{32}{25}, -3$ und $-\frac{1}{8}$. Dabei haben wir die Gleichungen in solcher Weise geschrieben, dass man für a und b möglichst kleine ganze rationale Zahlen bekommt. In sämtlichen diesen Fällen finden wir für a und b gemeinsame Faktoren. Bei Betrachtung der Ausdrücke (6) und (7) für a und b sieht man ein, dass derartige Faktoren besonders aus den Zählern von $h(h + 1)$ zu erwarten sind. Die sieben Kurven, um welche es sich hier handelt, verteilen sich, wie wir oben gesehen haben, auf zwei spezielle Klassen von Kurven des Ranges sechs, indem die fünf ersten rationalen Punkten von (67) und die zwei übrigen rationalen Punkten von (72) entsprechen. Zu bemerken ist hierbei, dass für die Entdeckung der Kurve (66) eine Spezialisierung von μ und ν in (63) nicht erforderlich war, um dadurch über einen neuen Basispunkt zu verfügen. Man hätte also hier allgemeiner verfahren können, ohne bei der Herleitung der Kurve $\mu = 2$, $\nu = 1$ zu setzen. Als Resultat würde man dann eine Klasse von Kurven erhalten, für welche der Rang sechs zu erwarten wäre, und von dieser Klasse würde (66) als Spezialfall für $\mu = 2$, $\nu = 1$ zu betrachten sein. Wenn wir in solcher Weise allgemein die Koordinaten h und $\varkappa$ der rationalen Punkte von (63) und (63_1) durch μ und ν ausdrücken, so würden wir offensichtlich andere Klassen von Kurven (2) des Ranges sechs erhalten. Den rationalen Punkten, welche überdies auf den Kurven (67) und (72) liegen, entsprechen dagegen nur vereinzelte Kurven vom Range sechs.

Unter den hier oben aufgezählten Kurven vom Range sechs wollen wir besonders die Fälle (14), (69) und (73) hervorheben. Für diese hat man für h die ganzzahligen Werte 1, 3 und -3 und für a und b die kleinsten Beträge. Es ist wohl also erlaubt zu sagen, dass wir in diesen Kurven einfachere Beispiele für den Rang sechs als in den vier übrigen besitzen. Da man kaum Gründe zu erwarten hat, dass hierin durch Aufsuchung von mehr Kurven des Ranges sechs Änderung eintreten wird, so wollen wir hier noch am Ende dieser Arbeit die Gleichungen dieser Kurven wiedergeben:

$$y^2 = x(x + 46)(x + 292);$$
$$y^2 = x(x + 9.61)(x + 12.283);$$
$$y^2 = x(x + 18.53)(x + 12.419).$$

Unsere Versuche Kurven (2) vom Range sechs herzuleiten, ohne dass für die Parameter k_i eine Relation (60) gültig zu sein braucht, sind nur für sehr grosse Beträge von a und b gelungen, wenn wir nämlich für a und b ganze rationale Zahlen voraussetzen.

Zuletzt lässt sich nach den h-Werten fragen, welche mit Ausgangspunkt von (60) zu Kurven (2) vom Range sechs führen. Diese Frage gilt, wie man unmittelbar sieht, die rationalen Lösungen von (63) und (63_1) bei festgesetztem h. Dabei hat man zunächst mit den drei Veränderlichen $\varkappa$, μ und ν zu tun. Wenn wir aber für die Glieder den gemeinsamen Nenner ν^4 einführen, so gehen (63) und (63_1) in Relationen zwischen $\bar{\varkappa} = \frac{\varkappa}{\nu^2}$ und $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\nu}$ über, durch welche elliptische Kurven vierter Ordnung definiert werden. Zu diesen Kurven gibt es immer vier rationale Punkte, und zwar für $\bar{\mu} = 0, \infty$ oder $\bar{\mu} = \pm 1$, je nachdem es sich um (63) oder (63_1) handelt. Man findet auch leicht, dass die Kurven sich birational in Kurven dritter Ordnung vom Typus (2) transformieren lassen, wobei wir die vier rationalen Punkte in dem unendlich entfernten Punkt und den drei Punkten auf der Achse wiederfinden. Die Antwort auf die von uns aufgestellte Frage beruht also darauf, ob die in Rede stehenden Kurven noch andere rationale Punkte als die vier bereits bekannten besitzen.