ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET THÉORIE DES DISTRIBUTIONS SUR LES GROUPES ABÉLIENS LOCALEMENT COMPACTS.

Par

J. RISS

à NANCY.

Introduction.

L'origine de ce travail réside en sa deuxième partie, qui est un essai d'extension aux groupes abéliens localement compacts de la théorie des distributions, que Mr. L. Schwartz a développée pour les espaces euclidiens [1].[1] Bien que la théorie des groupes prenne de plus en plus d'importance en mathématiques tant pures qu'appliquées il se peut que les résultats que nous obtenons ne présentent pas un grand intérêt en comparaison de celui qu'offrent les résultats de Mr. L. Schwartz, car les groupes auxquels nous généralisons la théorie des distributions sont loin d'être ceux que l'on rencontre pratiquemment; il est par contre possible que les notions que nous introduisons et que les méthodes utilisées permettent d'aborder des problèmes analogues à ceux que nous traitons dans des cas plus dignes de considération. Les deux notions que nous introduisons pour tout groupe abélien localement compact sont celles de dérivation et de fonction dérivable (ces deux notions ont d'ailleurs déjà été définies indépendamment de nous par Mr. G. W. Mackey [2]) et leur étude, qui constitue une ébauche de calcul différentiel sur les groupes, fait l'objet de la première partie de notre travail. On y trouvera en particulier:

a) Une étude de l'espace des représentations continues du groupe additif de la droite dans un groupe abélien localement compact. C'est un espace vectoriel en général de dimension infinie, que l'on peut encore considérer comme l'espace des dérivations sur le groupe ou comme l'espace tangent au groupe en son élément neutre.

---

[1] Les nombres entre [ ] renvoient à la bibliographie placée à la fin du travail.

b) Un théorème fondamental sur les fonctions continues et continûment dérivables, qui dit que pour toute telle fonction l'ensemble des dérivations qui annulent la fonction donnée sur un compact donné est un sous-espace vectoriel de codimension finie dans l'espace des dérivations.

c) Un théorème affirmant l'existence de fonctions continues et continûment indéfiniment dérivables non identiquement nulles et nulles en dehors d'un ensemble ouvert arbitrairement choisi non vide. Ce théorème est essentiel dans bien des questions et d'ailleurs faute de l'avoir démontré il eut été impossible de nier que notre généralisation de la théorie des distributions n'eût pas conduit dans certains cas à une théorie vide.

Quant à la deuxième partie de notre travail elle contient:

a) Une étude de l'espace vectoriel sur le corps des nombres complexes des fonctions à valeurs complexes, continues, continûment indéfiniment dérivables et nulles en dehors d'un compact, définies sur un groupe abélien localement compact. Il est défini sur cet espace une topologie d'espace vectoriel localement convexe à l'aide de topologies de convergence uniforme définies sur certains sous-espaces. Nous avons utilisé pour cela un procédé généralisant celui que Mrs. Dieudonné et Schwartz emploient pour définir les espaces $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$ [3] et l'étude de cette topologie se fait en partie à l'aide de théorèmes généraux sur les espaces vectoriels localement convexes donnés par Mr. Mackey [4], [5].

b) Une étude des distributions, c'est-à-dire du dual de l'espace vectoriel qui vient d'être considéré en a), ce qui comporte la définition de différentes topologies sur ce dual, de certaines opérations linéaires et l'étude de leur continuité dans les différentes topologies envisagées.

c) Une étude de distributions de types particuliers; parmi ces dernières les distributions à support ponctuel introduisent les opérateurs généralisés de dérivation.

d) Une définition et une étude sommaire de la transformation de Fourier des distributions. Ceci nécessite la considération d'un espace fonctionnel tel que les espaces correspondant à deux groupes en dualité soient isomorphes par transformation de Fourier. Les distributions pour lesquelles on pourra définir la transformation de Fourier sont alors les formes linéaires continues sur ce nouvel espace fonctionnel. Dans le cas général, contrairement au cas euclidien, les distributions ainsi définies ne sont pas toutes des distributions du type de celles considérées en b) et ceci pose un problème de comparison.

D'une façon générale nous utilisons la terminologie de Mr. N. Bourbaki et les résultats de ses «Eléments de Mathématique»; pour la théorie des groupes abéliens localement compacts on pourra consulter [6], [7], [8] et pour la théorie des espaces vectoriels [3], [4], [5], [9], [10].

Je voudrais en terminant exprimer toute ma reconnaissance à Mr. L. Schwartz pour les conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de la rédaction de ce travail et à Mr. N. Bourbaki pour l'ensemble des connaissances que j'ai pu acquérir grâce à lui.[1]

Les notations suivantes seront utilisées:

R groupe additif des nombres réels;

Z groupe additif des entiers rationnels;

T groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 (isomorphe à R/Z);

Q corps des nombres rationnels;

R^n, T^n, Z^n produits topologiques finis de groupes isomorphes respectivement aux groupes R, T, Z.

R^A produit topologique quelconque d'espaces vectoriels isomorphes à R;

$G, G', \ldots \hat{G}, \hat{G}', \ldots$ groupes abéliens localement compacts. D'une façon générale tous les groupes que nous considérerons seront abéliens localement compacts et nous supprimerons en général cette dénomination; une expression telle que «soit G un groupe» signifiera donc que G est abélien localement compact, mais par contre une expression telle que «soit G_1 un groupe déduit du groupe G par telle ou telle opération» n'entraînera pas que G_1 est abélien localement compact. Cette convention est faite pour simplifier l'exposé mais n'entraîne nullement que certains des résultats donnés ne sont valables que pour les groupes abéliens localement compacts.

Enfin nous rappelons les propriétés fondamentales suivantes:

1. Tout groupe G admet un dual $\hat{G}$, qui n'est autre par définition que le groupe abélien des représentations continues (caractères) de G dans le tore T. Muni de la topologie de la convergence compacte $\hat{G}$ est localement compact et son dual est G.

Pour tout sous-groupe H de G on définit dans $\hat{G}$ un sous-groupe orthogonal H^*: c'est l'ensemble des caractères sur G égaux à 1 sur H; H^* est un sous-groupe fermé de $\hat{G}$ et son orthogonal est l'adhérence de H dans G. Si $H_1 \subset H_2$ sont deux sous-

[1] Depuis la rédaction de ce travail nous avons trouvé un procédé permettant d'améliorer considérablement l'exposé de la première partie du chapitre 1 en le rendant indépendant du théorème de structure des groupes abéliens localement compacts ([6] page 110). Les résultats obtenus permettent de plus de démontrer ce théorème plus aisément, semble-t-il, que dans [6] et seront publiés ultérieurement.

groupes de G alors $H_1^* \supset H_2^*$ et si H_1 et H_2 sont fermés dans G alors H_2/H_1 et H_1^*/H_2^* sont groupe dual l'un de l'autre.

Si les $(H_\alpha)_{\alpha \in A}$ sont des sous-groupes fermés de G l'orthogonal de leur intersection est le sous-groupe fermé engendré par les $(H_\alpha^*)_{\alpha \in A}$.

Pour que H soit ouvert il faut et il suffit que H^* soit compact et on en déduit la caractérisation suivante de la composante connexe de 0 dans G: d'une part, comme dans tout groupe localement compact, la composante connexe K de 0 dans G est l'intersection des sous-groupes ouverts de G:[1] K^* est donc l'adhérence du sous-groupe de $\hat{G}$ engendré par les sous-groupes compacts de $\hat{G}$, soit encore l'adhérence de l'ensemble des éléments de $\hat{G}$ engendrant un sous-groupe relativement compact. Mais dans tout groupe $\hat{G}$ tout élément engendre un sous-groupe soit relativement compact soit discret[2], et si $\hat{x}$ engendre dans $\hat{G}$ un sous-groupe discret, donc isomorphe à Z, ce sous-groupe discret aura dans G un orthogonal H tel que G/H soit, comme dual de Z, isomorphe à T, donc connexe et ceci entraîne que H ne contient pas la composante connexe de 0 dans G[3]: ainsi dans $\hat{G}$ la réunion des éléments engendrant un sous-groupe relativement compact est le sous-groupe fermé orthogonal de la composante connexe de 0 dans G. En particulier pour que G soit connexe il faut et il suffit que dans $\hat{G}$ tous les sous-groupes cycliques soient infinis et discrets.

Pour tous $x \in G, \hat{x} \in \hat{G}$ nous désignerons par $\langle x, \hat{x} \rangle$ la valeur en x (resp. $\hat{x}$) du caractère $\hat{x}$ sur G (resp. x sur $\hat{G}$). Dans $\hat{G}$ comme dans G nous emploierons la notation additive pour la loi de groupe, de sorte que par définition on aura:

$$\langle x+y, \hat{x} \rangle = \langle x, \hat{x} \rangle \langle y, \hat{x} \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, \hat{x}+\hat{y} \rangle = \langle x, \hat{x} \rangle \langle x, \hat{y} \rangle.$$

2. Pour tout groupe G nous désignerons par $\mathfrak{L}(G)$ l'ensemble des représentations continues de G dans R. C'est un espace vectoriel sur R, sous-espace de l'espace vectoriel R^G de toutes les fonctions réelles définies sur G et dont les éléments seront appelées les formes linéaires continues sur G. Si H est un sous-groupe de G il existe une application canonique de $\mathfrak{L}(G)$ dans $\mathfrak{L}(H)$ $l \to \varrho_H(l)$ qui a tout $l \in \mathfrak{L}(G)$ associe sa restriction $\varrho_H(l)$ à H. Nous allons montrer que si H est ouvert dans G cette application $l \to \varrho_H(l)$ applique $\mathfrak{L}(G)$ sur $\mathfrak{L}(H)$ et qu'il existe au moins une application linéaire de $\mathfrak{L}(H)$ dans $\mathfrak{L}(G)$ inverse à droite de l'application $l \to \varrho_H(l)$: considérons pour cela la famille des sous-groupes K de G dont l'intersection avec H se réduit à $\{0\}$, ordonnée par inclusion cette famille est inductive et admet donc d'après le théo

---

[1] Cf. [11] page 33 exercice 18.
[2] Cf. [6] page 96 lemme 2.
[3] Cf. [11] page 33 exercice 21.

rème de Zorn des éléments maximaux; soit K l'un de ces éléments, pour tout $x \in G$ il existe alors un entier non nul n tel que $n x \in H + K$. Pour toute forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{L}(H)$ nous désignerons par $\varepsilon_{H,K}(\lambda)$ la seule représentation de G dans R définie par les conditions

$$\varepsilon_{H,K}(\lambda) = \begin{cases} \lambda \text{ sur } H \\ 0 \text{ sur } K \end{cases}.$$

Cette représentation est unique car $G/H+K$ a tout ses éléments d'ordre fini, elle est continue car sa restriction au sous-groupe ouvert H coincide avec λ et elle dépend linéairement de λ, ce qui achève de démontrer ce que nous avions en vue.

En particulier si G est discret et si l'élément a est d'ordre infini il existera une forme linéaire (continue) sur G non nulle en a, obtenue comme prolongement de la forme linéaire continue $n a \to n$ définie sur le sous-groupe ouvert engendré par a. Ce cas particulier est aussi une conséquence immédiate du théorème d'immersion de tout groupe abélien sans élément d'ordre fini dans un espace vectoriel sur Q et engendré par les éléments du groupe[1]; il en résulte de plus que l'espace $\mathfrak{L}(G)$ est dans ce cas isomorphe algébriquement à un produit R^A (tout espace vectoriel possède une base[2]) et devient topologiquement isomorphe à un produit topologique R^A si l'on munit $\mathfrak{L}(G)$ de la topologie de convergence simple. Il en résulte finalement que $\mathfrak{L}(G)$ est alors un espace de Baire (comme tout produit d'espaces métriques complets).

Chapitre premier.

Éléments de calcul différentiel dans les groupes abéliens localement compacts.

§ 1. L'espace des représentations continues du groupe additif des nombres réels dans un groupe abélien localement compact.

1. Pour obtenir d'une part une définition des opérations de dérivation dans un groupe G et d'autre part des fonctions définies sur G à valeurs complexes pour lesquelles ces opérations sont définies, nous procéderons par analogie avec leurs définitions dans un espace euclidien R^n d'élément générique $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: dans R^n on introduit d'une part la notion de dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ d'une fonction dérivable suivant tout x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ à l'aide desquelles d'autre part toute

[1] Cf. [15] page 25 th. 2 et ses corollaires.

[2] Cf. [16] page 33 th. 1.

combinaison linéaire à coefficients constants réels $u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ peut être interprétée (au moins sous l'hypothèse de continuité des dérivées partielles) comme la dérivée pour $t = 0$ de toute fonction $t \to f \circ \phi(t)$ de la variable réelle t composée d'une application $t \to \phi(t)$ de R dans R^n et de la fonction f, pourvu que l'application $t \to \phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t))$ soit définie au moins au voisinage de $t = 0$, que $\phi(0) = x$ et que pour tout i $\frac{d\phi_i}{dt}(0)$ existe et soit égal à u_i. Parmi ces dernières conditions la dérivabilité pour $t = 0$ des fonctions $\phi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ est essentielle et peut s'exprimer intrinsèquement en disant que pour toute forme linéaire $l(x)$ sur R^n la fonction $t \to l \circ \phi(t)$ doit être dérivable pour $t = 0$.

Soit alors E un espace topologique quelconque et supposons donnée pour tout $x \in E$ une famille $\mathfrak{F}_x$ d'applications de R dans E définies au moins au voisinage de $t = 0$ et appliquant 0 sur x; par analogie avec ce que l'on vient de rappeler on pourra dire qu'une fonction $f(x)$ définie sur E et à valeurs complexes est dérivable en x si pour toute $\phi \in \mathfrak{F}_x$ la fonction de variable réelle $t \to f \circ \phi(t)$ est dérivable pour $t = 0$. Inversement si pour tout $x \in E$ on s'est donné une famille $\mathfrak{D}_x$ de fonctions à valeurs complexes définies au moins au voisinage de x on pourra considérer la famille $\mathfrak{F}_x$ des applications $t \to \phi(t)$ de R dans E définies au moins au voisinage de $t = 0$, appliquant 0 sur x et telles que pour toute $f \in \mathfrak{D}_x$ la fonction $t \to f \circ \phi(t)$ soit dérivable pour $t = 0$. Dans le cas où E est un groupe G de dual $\hat{G}$ les familles $\mathfrak{D}_x$ les plus intéressantes à étudier à ce point de vue sont sans doute celles qui pour tout $x \in G$ coincident avec l'ensemble des caractères $x \to \langle x, \hat{x} \rangle$ définis sur G par tout élément $\hat{x}$ de $\hat{G}$.

Parmi les applications dérivables de R dans G que l'on obtient alors figurent en particulier les représentations continues du groupe additif de R dans G, car si $\hat{r}$ est la représentation (continue) de $\hat{G}$ dans R duale de la représentation continue $t \to r(t)$ de R dans G on a[1]

$$\langle r(t), \hat{x} \rangle = \langle t, \hat{r}(\hat{x}) \rangle \tag{1}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d}{dt} \langle r(t), \hat{x} \rangle = 2\, i \pi \hat{r}(\hat{x}) \langle r(t), \hat{x} \rangle. \tag{2}$$

Nous nous limiterons momentanément à considérer ces applications dérivables de R dans G et définirons les familles $\mathfrak{F}_x$ comme les ensembles d'applications $t \to x + r(t)$ où r décrira l'ensemble $\mathfrak{R}(G)$ des représentations continues de R dans G; nous mon-

[1] La valeur commune des expressions figurant dans les deux membres de la relation (1) est de la forme exp. $(2\, i \omega \pi t \hat{r}(\hat{x}))$ où la constante réelle ω peut être choisie arbitrairement; nous prendrons toujours $\omega = 1$.

trerons d'ailleurs plus tard (chap. 1, § 3, th. 2) qu'il n'y a pas là de restrictions importantes si l'on fait abstraction de considérations tératologiques.

2. Le premier problème qui s'impose est donc celui d'une étude détaillée de $\mathcal{R}(G)$; la relation (1) établissant une correspondance biunivoque entre $\mathcal{R}(G)$ et $\mathcal{L}(\hat{G})$ il est équivalent d'étudier l'un ou l'autre de ces espaces. Dans la suite nous considérerons toujours $\mathcal{L}(\hat{G})$ comme muni de sa structure naturelle d'espace vectoriel sur R (cf. Introduction 2) et de la topologie compatible d'espace vectoriel localement convexe déterminée par la convergence compacte, qui fait d'ailleurs (G étant localement compact) de $\mathcal{R}(G)$ un espace complet. La relation (1) permet de transporter cette structure d'espace vectoriel localement convexe à l'ensemble $\mathcal{R}(G)$, qui sera dans toute la suite de ce travail considéré comme muni de cette structure.

Proposition 1. *La topologie de $\mathcal{L}(G)$ est identique à la topologie de convergence simple.*

En effet tout groupe G étant isomorphe à un produit direct $R^n \times G'$ d'un espace euclidien par un groupe possédant un sous-groupe ouvert compact[1] si H' désigne la réunion des sous-groupes compacts de G' l'espace $\mathcal{L}(G)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(R^n) \times \mathcal{L}(G'/H')$ car d'une part toute représentation continue de G' dans R s'annule sur H', et d'autre part tout compact de G'/H' est l'image canonique dans G'/H' d'un compact de G'[2]; de plus G'/H' est un groupe discret et $\mathcal{L}(R^n)$ est isomorphe à R^n, ce qui achève de démontrer la proposition.

Proposition 2. *Dans $\mathcal{R}(G)$ l'addition $r + r'$ et la multiplication $a r$ par $a \in R$ sont définies par: $(r + r')(t) = r(t) + r'(t)$ et $(a r)(t) = r(a t)$. La topologie de $\mathcal{R}(G)$ est la moins fine des topologies d'espace vectoriel localement convexe sur $\mathcal{R}(G)$ rendant continue l'application $(t, r) \to r(t)$ de $R \times \mathcal{R}(G)$ dans G; dans $\mathcal{R}(G)$ les ensembles $\mathcal{V}(K, V)$ des r appliquant le compact K de R dans le voisinage V de 0 dans G forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{R}(G)$ quand K décrit une famille quelconque de compacts de R à laquelle appartient au moins un voisinage de 0 et quand V décrit un système fondamental de voisinages de 0 dans G.*

En effet les relations écrites dans l'énoncé résultent de suite de la relation (1) et de la définition de la structure de $L(\hat{G})$. D'autre part la toplogie de G étant celle de la convergence compacte des fonctions $\hat{x} \to \langle x, \hat{x} \rangle$ définies sur $\hat{G}$ par les $x \in G$ la continuité de l'application $(t, r) \to r(t)$ résulte alors de la relation

$$\langle (r + r_0)(t + t_0), \hat{x} \rangle - \langle r_0(t_0), \hat{x} \rangle = \langle r_0(t_0), \hat{x} \rangle \left(\langle t, \hat{r}(\hat{x}) \rangle \langle t_0, \hat{r}(\hat{x}) \rangle \langle t, \hat{r}_0(\hat{x}) \rangle - 1 \right) \qquad (3)$$

---

[1] Cf. [6] page 110.

[2] Cf. [11] page 21 exercice 14.

car pour t_0 et r_0 donnés le second facteur du second membre de cette ralation convergera uniformément vers 0 sur tout compact de $\hat{G}$ pourvu que $\hat{r}$ converge vers 0 dans $\mathfrak{L}(\hat{G})$ et que t reste borné dans R. D'autre part si une topologie d'espace vectoriel localement convexe sur $\mathcal{R}(G)$ rend continue l'application $(t, r) \to r(t)$ elle la rendra continue au moins au point $(0, 0)$ ce qui en vertu de la relation (3) où l'on fait $t_0 = 0$ $r_0 = 0$ entraîne que, r décrivant un voisinage de 0 dans cette topologie et t un voisinage de 0 dans R, les nombres complexes $\langle r(t), \hat{x} \rangle = \langle t, \hat{r}(\hat{x}) \rangle$ doivent rester aussi voisins de 1 que l'on veut sur tout compact de $\hat{G}$, et il en résulte que la topologie considérée est alors plus fine que celle de $\mathcal{R}(G)$. Enfin la dernière partie de la proposition résulte du fait que pour t restant borné et $\hat{x}$ décrivant un compact de $\hat{G}$ les fonctions $\hat{r} \to \langle t, \hat{r}(\hat{x}) \rangle$ convergent uniformément vers 1 quand $\hat{r}$ converge vers 0 dans $\mathfrak{L}(\hat{G})$.

Définition 1. *On appellera application canonique de $\mathcal{R}(G)$ dans G application $r \to r(1)$.*

Proposition 3. *L'application canonique de $\mathcal{R}(G)$ dans G est une représentation continue de la structure de groupe sous-jacente à la structure de $\mathcal{R}(G)$. Le noyau de cette représentation est un sous-groupe totalement discontinu et l'image canonique de $\mathcal{R}(G)$ dans G est dense dans la composante connexe de 0 dans G.*[1]

La première partie de la proposition est une conséquence de la proposition précédente. En vertu de la relation (1) $r(1) = 0$ est équivalent à $\hat{r}(\hat{x}) \in Z$ quel que soit $\hat{x} \in \hat{G}$, donc le noyau de l'application canonique est isomorphe (prop. 1) à une partie du produit topologique $Z^{\hat{G}}$, lequel est totalement discontinu, d'où la seconde partie de la proposition.

Pour démontrer la dernière partie de la proposition il suffira de montrer que la composante connexe de 0 dans G et l'image canonique de $\mathcal{R}(G)$ dans G ont même sous-groupe orthogonal dans $\hat{G}$; or pour qu'un caractère soit égal à 1 sur l'image canonique de $\mathcal{R}(G)$ dans G il faut et il suffit d'après la relation (1) que ce caractère annule toutes les formes linéaires continues sur $\hat{G}$; mais en vertu du théorème de structure $\hat{G} = R^n \times G'$ ou G' possede un sous-groupe ouvert compact cette dernière condition signifie que le caractère considéré engendre dans $\hat{G}$ un sous-groupe relativement compact: en effet s'il en est ainsi toute forme linéaire continue sur $\hat{G}$ s'annule alors en ce caractère et sinon dans le quotient de $\hat{G}$ par le sous-groupe $\{0\} \times H'$, où

[1] La dernière partie de cette proposition a déjà été donnée par Mr. Mackey dans les Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 34, n° 4, p. 157. D'autre part on donnera plus loin un exemple où l'image canonique de $\mathcal{R}(G)$ est un sous-groupe strict de la composante connexe de 0 dans G.

H' désigne la réunion des sous-groupes compacts de G', l'image canonique de ce caractère sera un élément d'ordre infini et en conséquence (introduction 2) il n'annulera pas toutes les formes linéaires continues sur $\hat{G}$. D'où la proposition en vertu de la caractérisation de la composante connexe de 0 dans G qui a été rappelée en Introduction 1.

Si H est un sous-groupe fermé de G le sous-espace de $\mathcal{R}(G)$ dont les éléments appliquent R dans H est isomorphe à $\mathcal{R}(H)$ en vertu de la proposition 2 ou de l'isomorphisme de $\mathcal{L}(\hat{G}/H^*)$ et de $\mathcal{L}(\hat{H})$; nous noterons encore $\mathcal{R}(H)$ ce sous-espace de $\mathcal{R}(G)$ et tout espace $\mathcal{R}(G)$ étant complet il en résulte que $\mathcal{R}(H)$ est fermé dans $\mathcal{R}(G)$. Parmi les sous-groupes H de G les sous-groupes compacts H tels que $\mathcal{R}(H)$ soit de codimension finie dans $\mathcal{R}(G)$ joueront un rôle important dans la suite de ce travail; nous désignerons par $\mathcal{H}(G)$ la famille de ces sous-groupes.

Proposition 4. *La famille $\mathcal{H}(G)$ est dans G une base de filtre convergeant vers 0 et il en est de même dans $\mathcal{R}(G)$ des $\mathcal{R}(H)$ quand H décrit $\mathcal{H}(G)$.*

En effet si des H_i en nombre fini appartiennent à $\mathcal{H}(G)$ il en est de même de leur intersection H, car H est compact et $\mathcal{R}(H)$ n'est autre que l'intersection des $\mathcal{R}(H_i)$ donc est encore de codimension finie. D'autre part soit V un voisinage compact de 0 dans G et $\mathcal{V}$ le voisinage de 0 dans $\mathcal{R}(G)$ dont les élément appliquent le segment $[-1, +1]$ de R dans V; la topologie de $\mathcal{L}(\hat{G})$ étant celle de la convergence simple $\mathcal{V}$ contient un sous-espace vectoriel E de codimension finie, dont l'image canonique dans G a pour adhérence un sous-groupe compact H contenu dans V et tel que $\mathcal{R}(H)$, qui contient E, est de codimension finie; de plus $\mathcal{R}(H)$ est aussi contenu dans $\mathcal{V}$. D'où la proposition car si V décrit un système fondamental de voisinages de 0 dans G il en est de même de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{R}(G)$

Corollaire. *Pour tout sous-espace vectoriel fermé E et de codimension finie dans $\mathcal{R}(G)$ il existe $H \in \mathcal{H}(G)$ tel que $E \supset \mathcal{R}(H)$.*

En effet dans $\mathcal{R}(G)/E$ les images canoniques des $\mathcal{R}(H)$ quand H décrit $\mathcal{H}(G)$ forment une base de filtre convergeant vers 0, d'où la proposition car dans tout espace euclidien tout filtre convergeant et admettant une base de filtre formée de sous-espaces vectoriels contient un élément réduit à $\{0\}$.

Proposition 5. *Soit h une représentation continue du groupe G dans le groupe G'. L'application $r \to \bar{h}(r) = h \circ r$ de $\mathcal{R}(G)$ dans $\mathcal{R}(G')$ est une représentation continue.*[1]

[1] Comme nous l'a fait remarquer Mr. H. Cartan on peut montrer que $\bar{h}$ est toujours un homomorphisme de $\mathcal{R}(G)$ dans $\mathcal{R}(G')$.

En effet cette proposition est une conséquence évidente de la proposition 2 ou peut aussi s'établir directement à l'aide de la représentation duale $\hat{h}$ de G' dans G, car si des $\hat{r}' \in \mathfrak{L}(\hat{G}')$ convergent simplement vers 0 dans $\hat{G}'$ il en est de même des $\hat{r}' \circ \hat{h}$ dans $\hat{G}$.

Conformément à la proposition précédente nous poserons la définition:

Définition 2. *Soit h une représentation continue de G dans G', on appellera représentation canoniquement associée à h de $\mathfrak{R}(G)$ dans $\mathfrak{R}(G')$ et on notera $\bar{h}$ l'application $r \to h \circ r$.*

Théorème 1. *Soit h l'homomorphisme canonique de G sur son quotient G/H par un sous-groupe compact H, l'application $\bar{h}$ est alors un homomorphisme de $\mathfrak{R}(G)$ sur $\mathfrak{R}(G/H)$.*

En effet soit $\hat{h}$ la représentation duale de h, c'est-à-dire l'application canonique du sous-groupe ouvert H^* de $\hat{G}$ dans $\hat{G}$; le théorème sera démontré si nous établissons que l'application ϱ_{H^*} qui associe à toute forme linéaire sur $\hat{G}$ sa restriction à H^* est un homomorphisme de $\mathfrak{L}(\hat{G})$ sur $\mathfrak{L}(H^*)$. Or d'une part la proposition 5 montre que ϱ_{H^*} est continue; d'autre part le paragraphe 2 de l'introduction montre que ϱ_{H^*} est une représentation continue de $\mathfrak{L}(\hat{G})$ sur $\mathfrak{L}(H^*)$ qui admet une application linéaire inverse ε telle que si des λ convergent vers 0 dans $\mathfrak{L}(H^*)$ les $\varepsilon(\lambda)$ convergent vers 0 dans $\mathfrak{L}(\hat{G})$, ce qui achève de démontrer ce que nous voulions.

Le noyau de l'homomorphisme $\bar{h}$ étant $\mathfrak{R}(H)$ nous identifierons souvent $\mathfrak{R}(G)/\mathfrak{R}(H)$ à $\mathfrak{R}(G/H)$ quand H sera un sous-groupe compact de G.

3. En tant qu'espace vectoriel sur R l'espace $\mathfrak{R}(G)$ possède un dual qui est l'espace des formes linéaires continues sur $\mathfrak{R}(G)$. Si $f(r)$ est une telle forme linéaire continue il existe en vertu de la proposition 1 un système fini de caractères $\hat{x}_i$ sur G tels que

$$|f(r)| \leq A \sup_i . |\hat{r}(\hat{x}_i)|$$

où A est une constante positive, $f(r)$ s'annule donc en même temps que les $\hat{r}(\hat{x}_i)$ et par suite en est une combinaison linéaire. La topologie de $\mathfrak{R}(G)$ peut donc être considérée comme la topologie faible définie par les formes linéaires $r \to \hat{r}(\hat{x})$.

D'autre part en vertu du théorème de structure $G = R^n \times G'$ ou G' possède un sous-groupe ouvert compact l'espace $\mathfrak{R}(G)$ apparait comme produit d'un espace euclidien et d'un espace $\mathfrak{L}(H)$ où H est un groupe discret, de sorte que, d'après introduction 2, $\mathfrak{R}(G)$ est dans tous les cas un espace de Baire. On en déduit:

Proposition 6. *Si une famille de formes linéaires continues sur $\mathcal{R}(G)$ est bornée en tout point elle est équicontinue et les éléments de cette famille dépendent linéairement d'un nombre fini d'entre eux.*

En effet $\mathcal{R}(G)$ étant un espace de Baire les éléments de toute famille de formes linéaires ponctuellement bornées sont alors uniformément majorées dans un ouvert[1] et sont donc équicontinues. La topologie de $\mathcal{R}(G)$ étant de plus une topologie faible ces formes linéaires s'annulent alors toutes sur un sous-espace vectoriel de codimension finie contenu dans un voisinage de 0 sur lequel elles sont uniformément majorées, d'où la proposition.

4. On appellera polynôme sur G tout élément de l'algèbre[2] tensorielle symétrique $\mathcal{D}(G)$ construite sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(G)$. Tout polynôme sur G admet donc une représentation

$$P = \sum c_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \cdots l_n^{\alpha_n}$$

à l'aide d'éléments $l_1, l_2, \ldots, l_n$ linéairement indépendants de $\mathcal{L}(G)$ et détermine sur G la fonction (indépendante de la représentation choisie pour P)

$$P(x) = \sum c_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} l_1^{\alpha_1}(x)\, l_2^{\alpha_2}(x) \cdots l_n^{\alpha_n}(x).$$

Nous allons montrer que si $P(x)$ est identiquement nul en x c'est que P est l'élément 0 de $\mathcal{D}(G)$. Exprimons en effet P comme ci-dessus à l'aide d'éléments indépendants de $\mathcal{L}(G)$ et supposons $P(x) = 0$ quel que soit x, alors pour tous $x \in G$, $y \in G$, $n \in Z$ on aura $P(x + ny) = 0$; or $P(x + ny)$ est un polynôme sur Z dont le coefficient du terme du premier degré est

$$\frac{\partial P}{\partial l_1}(x)\, l_1(y) + \frac{\partial P}{\partial l_2}(x)\, l_2(y) + \cdots + \frac{\partial P}{\partial l_n}(x)\, l_n(y)$$

et qui doit être identiquement nul et comme les éléments $l_1, l_2, \ldots, l_n$ sont indépendants il en résulte que pour tout i la fonction $\dfrac{\partial P}{\partial l_i}(x)$ est identiquement nulle. Par itération de ce procédé on en déduit que si $P(x)$ est identiquement nul, qu'il en est encore de même de tous les coefficients $c_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$ car

$$\alpha_1!\, \alpha_2! \cdots \alpha_n!\, c_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} P}{\partial l_1^{\alpha_1}\, \partial l_2^{\alpha_2} \cdots \partial l_n^{\alpha_n}}.$$

En vertu de cette propriété nous identifierons toujours l'élément P de $\mathcal{D}(G)$ avec la fonction $P(x)$ qu'il détermine sur G et nous appellerons cette fonction un polynôme.

---

[1] Cf. [12] page 77 th. 2.

[2] Sur le corps des nombres complexes.

§ 2. Les fonctions dérivables.

Définition 1. *On dira qu'une fonction à valeurs complexes $x \to f(x)$ définie sur un groupe G est dérivable en x suivant la représentation $r \in \mathcal{R}(G)$ si la fonction de la variable réelle t $t \to f(x + r(t))$ est dérivable pour $t = 0$ et sa dérivée sera dite la dérivée de f en x suivant r; on la notera $d_r f(x)$.*

Si $d_r f(x)$ existe en tout $x \in A \subset G$ et suivant tout $r \in \mathcal{A} \subset \mathcal{R}(G)$ on dira que f est $\mathcal{A}$-dérivable en tout point de A; si $\mathcal{A} = \mathcal{R}(G)$ (resp. $A = G$; resp. $\mathcal{A} = \mathcal{R}(G)$ et $A = G$) on dira simplement que f est dérivable en tout point de A (resp. $\mathcal{A}$-dérivable; resp. dérivable). Voici trois exemples de fonctions dérivables:

a) les fonctions caractéristiques des ensembles à la fois ouverts et fermés; toutes les dérivées de ces fonctions sont nulles;

b) les formes linéaires sur G, car si $l(x)$ est une telle forme linéaire sur G et si $t \to r(t)$ est une représentation continue de R dans G, alors $t \to l \circ r(t)$ est un endomorphisme de R, de sorte que $d_r l(x) = l \circ r(1)$;

c) les caractères sur G, car nous avons déjà établi que $d_r \langle x, \hat{x} \rangle = 2 i \pi \hat{r}(\hat{x}) \langle x, \hat{x} \rangle$.

Alors que dans les espaces euclidiens toute fonction dérivable est continue il n'en est plus en général de même dans un groupe, même connexe: soit par exemple G un groupe connexe dans lequel le sous-groupe H image canonique de $\mathcal{R}(G)$ soit distinct de G[1], sur un tel groupe toute fonction à valeurs complexes et constante sur les classes suivant H est dérivable (toutes ses dérivées sont nulles) et ne saurait être continue que si elle était constante (H est dense dans G d'après la proposition 3 du § 1).

Aussi nous limiterons-nous dans la suite de ce chapitre aux fonctions satisfaisant à la définition suivante:

Définition 2. *On dira qu'une fonction est continûment dérivable si elle est dérivable, continue ainsi que chacune de ses dérivées. On désignera par $\mathcal{E}_1(G)$ l'ensemble de ces fonctions définies sur le groupe G.*

Théorème 1. *Si f est continûment dérivable sur G, l'application $r \to d_r f(x)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{R}(G)$.*

La partie algébrique de ce théorème se démontre classiquement, en vertu de la continuité des dérivées, à l'aide de la fonction différentiable de deux variables réelles

---

[1] C'est le cas du dual de Q (si r est représentation continue de G dans G' telle qu'il existe un sous-groupe fermé strict H de G dont l'image $r(H)$ dans G' est dense, alors $\hat{r}(\hat{G}')$ ne rencontre H^* qu'en 0 donc est distinct de $\hat{G}$).

$(t, u) \to f(x + r(t) + s(u))$. D'autre part l'espace $\mathcal{R}(G)$ étant un espace de Baire la continuité de l'application linéaire $r \to d_r f(x)$ résulte de la continuité des fonctions $r \to n(f(x + r(1/n)) - f(x))$ dont elle est la limite quand l'entier n augmente indéfiniment.[1]

Supposons maintenant que dans les conditions du théorème précédent on fasse décrire à x un ensemble compact de G, comme par hypothèse les formes linéaires $r \to d_r f(x)$ sont bornées en tout point r quand x décrit un compact il en résulte qu'elles sont équicontinues (proposition 6 du § 1) et comme G est localement compact on en déduit que l'application $(x, r) \to d_r f(x)$ est continue sur $G \times \mathcal{R}(G)$. Quant à la possibilité de munir l'espace $\mathcal{E}_1(G)$ d'une topologie telle que l'application $(x, r, f) \to d_r f(x)$ soit continue elle est théoriquement exacte mais en dehors du cas où $\mathcal{R}(G)$ est de dimension finie on est alors conduit à des considérations dans le genre de celles qui feront l'objet du § 1 du chapitre 2 et c'est pourquoi nous n'insisterons pas sur cette question.

Définition 3. *On appellera sous-groupe des périodes d'une fonction f définie sur le groupe G le plus grand sous-groupe $P(f)$ de G tel que f soit constante sur les classes suivant ce sous-groupe.*

Si pour tout $s \in G$ et toute fonction f définie sur G on désigne par f_s la fonction définie par $f_s(x) = f(x - s)$ il est immédiat que la condition nécessaire et suffisante pour que s appartienne à $P(f)$ est que $f_s = f$. Pour toute fonction continue $P(f)$ est un sous-groupe fermé; nous allons montrer que si f appartient à $\mathcal{E}_1(G)$ la composante connexe de 0 dans $P(f)$ n'est autre que l'adhérence de l'image canonique dans G du sous-espace vectoriel de $\mathcal{R}(G)$ défini par $d_r f(x) = 0$ quel que soit $x \in G$. En effet si $d_r f(x)$ est identiquement nulle en x la fonction de la variable réelle t $t \to f(x + r(t))$ est pour tout x constante car sa dérivée est nulle, donc $r(t) \in P(f)$ pour tout $t \in R$, et inversement si pour tout $t \in R$ $r(t)$ appartient à $P(f)$ alors $d_r f(x)$ est identiquement nulle; d'où résulte ce que nous voulions démontrer à l'aide de la proposition 3 du § 1 appliquée à $P(f)$.

Théorème 2. *Soit H un sous-groupe compact contenu dans le sous-groupe des périodes de la fonction f appartenant à $\mathcal{E}_1(G)$. Considérée comme définie sur G/H la fonction f appartient encore à $\mathcal{E}_1(G/H)$, de plus si chaque dérivée de f est bornée sur G le sous-groupe $P(f)$ appartient au filtre engendré par $\mathcal{H}(G)$.*

En effet désignons par h l'application canonique de G sur G/H et soit F la fonction sur G/H définie par $f = F \circ h$, comme pour toute représentation $r \in \mathcal{R}(G/H)$

[1] Cf. [12] page 81 exercice 14 et [11] page 15 proposition 13.

il existe $r' \in \mathcal{R}(G)$ telle que $r' \circ h = r$ on en déduit que la fonction F_r définie sur G/H par $d_{r'} f = F_r \circ h$ n'est autre que $d_r F$; d'autre part les fonctions F et $d_r F$ sont continues sur G/H car les fonctions $f = F \circ h$ et $d_{r'} f = (d_r F) \circ h$ sont continues sur G[1], d'où la première partie de la proposition.

De plus les formes linéaires $r \to d_r f(x)$ sur $\mathcal{R}(G)$ sont continues et si elles forment une famille ponctuellement bornées quand x décrit G alors elles sont équicontinues et s'annulent sur un même sous-espace vectoriel E de codimension finie (proposition 6 du § 1) dans $\mathcal{R}(G)$, lequel contient donc un sous-espace $\mathcal{R}(H)$ avec $H \in \mathcal{H}(G)$ (corollaire de la proposition 4 du § 1): mais le sous-groupe des périodes de f contient l'image canonique de E dans G, d'où la seconde partie de la proposition.

Corollaire. *Si f appartenant à $\mathcal{E}_1(G)$ est de plus à support compact il existe $H \in \mathcal{H}(G)$ tel que f soit constante sur les classes suivant H et considérée comme définie sur G/H f appartient à $\mathcal{E}_1(G/H)$.*

En effet toutes les dérivées de f sont alors bornées et le sous-groupe des périodes de f est compact, donc en vertu du théorème précédent il appartient à $\mathcal{H}(G)$; il suffit alors de prendre pour H n'importe quel sous-groupe contenu dans $P(f)$ et appartenant à $\mathcal{H}(G)$.

Par exemple si G est produit topologique de groupes compacts connexes $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, pour toute f appartenant à $\mathcal{E}_1(G)$ il existera une partie finie $\Lambda(f) \subset \Lambda$ telle que f soit constante sur les classes suivant le produit des $(G_\lambda)_{\lambda \notin \Lambda(f)}$. Les théorèmes précédents permettent aussi de trouver des conditions pour qu'une fonction presque-périodique sur un groupe G soit prolongeable en une fonction continûment dérivable sur le groupe compact attaché à G[2]; par exemple si $G = R$ on trouve qu'il est nécessaire que le module des exposants de la fonction considérée ait une base finie.

Définition 4. *On appellera opérateur de dérivation associé à $r \in \mathcal{R}(G)$ l'application $f \to d_r f$ définie sur l'espace $\mathcal{E}_1(G)$ et à valeurs dans l'espace des fonctions continues.*

Les opérateurs de dérivation obéissent à certaines règles de calcul formel dont deux peuvent être considérées en un sens, qui va être précisé, comme caractéristiques: la première de ces règles est la permutabilité des opérateurs de dérivation et des opérateurs de translation $f \to f_s$ et la seconde est celle qui donne la dérivée d'un produit $d_r(fg) = f d_r g + g d_r f$; nous n'en donnerons pas les démonstrations qui se font comme dans le cas de G euclidien. Considérons alors sur l'espace $\mathcal{E}_1(G)$ et sur l'espace

---

[1] Cf. [13] page 53 th. 1.

[2] Cf. [6] chapitre VII.

$\mathsf{C}(G)$ des fonctions continues sur G deux topologies d'espace vectoriel localement convexe satisfaisant aux conditions suivantes:

a) L'application $\hat{x} \to \langle x, \hat{x} \rangle$ de G dans $\mathcal{E}_1(G)$ est continue.

b) L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathcal{E}_1(G)$.[1]

c) Les opérations de dérivation sont des applications continues de $\mathcal{E}_1(G)$ dans $\mathsf{C}(G)$.

d) La topologie de $\mathsf{C}(G)$ entraîne la convergence ponctuelle en au moins un point de G.

Dans ces conditions les seules représentations d'espace vectoriel topologique de $\mathcal{E}_1(G)$ dans $\mathsf{C}(G)$ qui permutent aux translations et satisfont à la formule du produit écrite ci-dessus sont les applications $f \to d_{r'} f + i\, d_{r''} f$. En effet

a) Si $f \to df$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques sur G telle que la fonction composée $\hat{x} \to d\langle x, \hat{x} \rangle$ soit continue sur G et si de plus on a $d(fg) = f(0)\, dg + g(0)\, df$ on en déduit que $\hat{x} \to d\langle x, \hat{x} \rangle$ est une représentation continue de $\hat{G}$ dans le groupe additif des nombres complexes et en conséquence qu'il existe r' et r'' appartenant à $\mathcal{R}(G)$ tels que pour tout polynôme trigonométrique f on ait $df = d_{r'} f + i\, d_{r''} f$.

b) Si les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{E}_1(G)$ et si les applications $f \to d_r f$ de $\mathcal{E}_1(G)$ dans $\mathsf{C}(G)$ sont continues, la topologie de $\mathsf{C}(G)$ satisfaisant à la condition d) alors la forme linéaire considérée en a) se prolonge à tout l'espace $\mathcal{E}_1(G)$ par la formule $df = d_{r'} f + i\, d_{r''} f$.

c) Si $f \to Df$ est une application linéaire de $\mathcal{E}_1(G)$ dans $\mathsf{C}(G)$ satisfaisant aux conditions indiquées ci-dessus alors $f \to df = Df(0)$ est sur $\mathcal{E}_1(G)$ une forme linéaire du type de celles qui viennent d'être étudiées et en vertu de la permutabilité des opérateurs de dérivation ainsi que de $f \to Df$ avec les opérateurs de translation on en déduit que $Df = d_{r'} f + i\, d_{r''} f$.

Relativement à ce résultat il se pose la question de savoir s'il existe des topologies satisfaisant aux conditions données en a) b) c) d): or on montre aisément que si l'on munit $\mathcal{E}_1(G)$ de la topologie de la convergence compacte des fonctions et de chacune de leurs dérivées et $\mathsf{C}(G)$ de la topologie de la convergence compacte alors les conditions a) b) d) sont vérifiées, quant à la condition b) elle l'est alors aussi et ceci sera démontré plus loin (proposition 2 du § 3). Faisons aussi la remarque suivante qui nous sera souvent utile: muni de la topologie de la convergence compacte des fonctions et de chacune de leurs dérivées l'espace $\mathcal{E}_1(G)$ est complet; en

---

[1] Rappelons qu'on appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire, à coefficients complexes, de caractères.

effet si Φ est un filtre de Cauchy sur cet espace il est alors filtre de Cauchy sur $\mathsf{C}(G)$ muni de la topologie de convergence compacte et il en est encore de même de $d_r \Phi$ quel que soit $r \in \mathcal{R}(G)$, dans $\mathsf{C}(G)$ Φ et $d_r \Phi$ ont donc des limites f et f_r et on a $f_r = d_r f$ car pour tout $x \in G$ les fonctions de variable réelle t $t \to f(x + r(t))$ convergent alors uniformément sur tout compact suivant le filtre Φ vers la fonction $f(x + r(t))$ ainsi que les fonctions $d_r f(x + r(t))$ vers $f_r(x + r(t))$.

2. Définition 5. *On dira qu'une fonction f est h fois continûment dérivable si tout opérateur composé de k dérivations successives est défini pour la fonction f quel que soit $k \leq h$. Un tel opérateur sera dit une dérivation d'ordre k et s'il est composé de $d_{r_1}, d_{r_2}, \ldots, d_{r_k}$ on le notera $d^k_{r_1 r_2 \cdots r_k}$; la fonction $d^k_{r_1 r_2 \cdots r_k} f$ sera dite une dérivée d'ordre k de f.*

Remarque: On notera qu'en vertu de la définition 4 si une fonction est k fois continûment dérivable toutes ses dérivées d'ordre au plus égal à k, ainsi qu'elle-même, sont continues. D'autre part pour ne pas être obligé de faire constamment des répétitions dans les hypothèses nous introduirons un opérateur de dérivation d'ordre 0 défini par $D^0 f = f$.

Dans la suite nous désignerons par $\mathcal{E}_h(G)$ l'ensemble des fonctions h fois continûment dérivables et considérerons les espaces définis comme suit:

$\mathcal{B}_h(G)$ et $\mathcal{D}_h(G)$ désignerons les sous-espaces respectifs de $\mathcal{E}_h(G)$ dont les éléments ont toutes leurs dérivées d'ordre au plus égal à h bornées ou dont les éléments sont à support compact.

$\mathcal{E}^+_h(G)$, $\mathcal{B}^+_h(G)$, $\mathcal{D}^+_h(G)$ désignerons les sous-espaces respectifs de $\mathcal{E}_h(G)$, $\mathcal{B}_h(G)$, $\mathcal{D}_h(G)$ dont les éléments sont positifs.

$\mathcal{E}(G)$, $\mathcal{B}(G)$, $\mathcal{D}(G)$, $\mathcal{E}^+(G)$, $\mathcal{B}^+(G)$, $\mathcal{D}^+(G)$ désignerons les sous-espaces respectivement communs quel que soit h aux espaces $\mathcal{E}_h(G)$, $\mathcal{B}_h(G)$, $\mathcal{D}_h(G)$, $\mathcal{E}^+_h(G)$, $\mathcal{B}^+_h(G)$, $\mathcal{D}^+_h(G)$.

3. On appellera polynôme de dérivation sur G tout élément de l'algèbre tensorielle symétrique $D(G)$ sur le corps des nombres complexes construite sur l'espace vectoriel des dérivations du premier ordre d_r. Tout polynôme de dérivation D admet donc une représentation

$$D = \sum c_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} d^{\alpha_1}_{r_1} d^{\alpha_1}_{r_1} \cdots d^{\alpha_n}_n$$

et définit dans $\mathcal{E}(G)$ un opérateur

$$f \to D(f) = \sum c_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} d^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}_{r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \cdots r_n^{\alpha_n}} f$$

indépendant de la représentation choisie pour D. Nous allons montrer que si $D(f)=0$ quelle que soit la fonction f alors D est l'élément neutre de $D(G)$: en effet on aura alors en particulier pour tout caractère $x \to \langle x, \hat{x}\rangle$

$$\overline{\langle x, \hat{x}\rangle}\, D(x, \hat{x}) = \sum c_{a_1 a_2 \cdots a_n} (2\, i\, \pi\, \hat{r}_1(\hat{x}))^{a_1} (2\, i\, \pi\, \hat{r}_2(\hat{x}))^{a_2} \cdots (2\, i\, \pi\, \hat{r}_n(\hat{x}))^{a_n}$$

donc dans $\mathcal{D}(G)$ le polynôme

$$P = \sum c_{a_1 a_2 \cdots a_n} (2\, i\, \pi\, \hat{r}_1)^{a_1} (2\, i\, \pi\, \hat{r}_2)^{a_2} \cdots (2\, i\, \pi\, \hat{r}_n)^{a_n}$$

n'est autre que 0, de sorte que si les $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ont été choisis linéairement indépendants dans $\mathcal{R}(G)$ les coefficients $c_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ sont tous nuls, donc $D=0$. De plus ce qui précéde prouve que l'application $D \to \mathfrak{F} D$ de $D(G)$ dans $\mathcal{D}(\hat{G})$ définie par $(\mathfrak{F} D)(\hat{x}) = \langle x, \hat{x}\rangle\, D(\overline{\langle x, \hat{x}\rangle})$ est un isomorphisme de ces deux algèbres obtenu par prolongement de l'application $d_r \to -2\, i\, \pi\, \hat{r}$. $\mathfrak{F} D$ sera dit le polynôme sur $\hat{G}$ transformé de Fourier du polynôme de dérivation D sur G; cette dénomination ainsi que la notation employée seront justifiées plus tard.

Si l'on convient de considérer l'espace $\mathcal{R}(G)$ comme plongé dans $D(G)$ par l'isomorphisme $r \to d_r$, toute représentation continue e du groupe G dans le groupe G' définit alors une représentation de l'algèbre $D(G)$ dans l'algèbre $D(G')$ obtenue par prolongement de la représentation $\bar{e}$ de $\mathcal{R}(G)$ dans $\mathcal{R}(G')$ canoniquement associée à e; nous noterons encore $\bar{e}$ cette représentation. Si f' est alors un élément de $\mathcal{E}(G')$ la fonction composée $f' \circ e$ appartient à $\mathcal{E}(G)$ et pour tout $D \in D(G)$ on a

$$D(f' \circ e) = (\bar{e}(D)(f')) \circ e.$$

En particulier il est évident que pour tout système fini (D_i) de polynômes de dérivation sur G il existe un espace euclidien R^n, une représentation continue e de R^n dans G et des polynômes de dérivation D'_i sur R^n tels que pour chaque i on ait $D_i = \bar{e}(D'_i)$.

§ 3. Existence et propriétés des fonctions dérivables à support compact. Applications.

1. Pour établir l'existence de fonctions appartenant à l'espace $\mathcal{E}(G)$ et à support contenu dans un ouvert donné nous utiliserons un procédé de composition qui peut être défini comme suit: soient G (resp. G') un groupe sur lequel est définie une fonction $f(x)$ (resp. $f'(x')$) et $x' \to e(x')$ une application de G' dans G, nous posons formellement:

$$f \underset{e}{*} f' = \int_{G'} f(x - e(x'))\, f'(x')\, d x'.$$

Proposition 1. *Soient:*

a) $f(x)$ *une fonction définie sur le groupe* G *et* $\mathcal{A}$*-dérivable, continue ainsi que ses dérivées* $d_r f(x)$ *pour tout* $r \in \mathcal{A}$.

b) $f'(x')$ *une fonction définie sur le groupe* G' *à support compact,* $\mathcal{A}'$*-dérivable, continue ainsi que ses dérivées* $d_{r'} f'(x')$ *pour tout* $r' \in \mathcal{A}'$.

c) $x' \to e(x')$ *une représentation continue de* G' *dans* G, $r' \to \bar{e}(r')$ *la représentation de* $\mathcal{R}(G')$ *dans* $\mathcal{R}(G)$ *canoniquement associée à* e.

Dans ces conditions la fonction $f \underset{e}{*} f'$ *est définie sur* G, $(\mathcal{A} + \bar{e}(\mathcal{A}'))$*-dérivable continue ainsi que chacune de ses dérivées* $d_{r''} f$ *pour tout* $r'' \in (\mathcal{A} + \bar{e}(\mathcal{A}'))$ *et pour tout tel* r'' *on a quels que soient* $r \in \mathcal{A}$ *et* $r' \in \mathcal{A}'$ *satisfaisant à* $r'' = r + \bar{e}(r')$:

$$d_{r''} f \underset{e}{*} f' = (d_r f) \underset{e}{*} f' + f \underset{e}{*} (d_{r'} f').$$

En effet f' étant à support compact donc aussi toutes ses dérivées, définie continue que les fonctions $d_{r'} f'$, f, $d_r f$, toutes les intégrales qui vont être écrites existeront et représenteront des fonctions continues en vertu de l'uniforme continuité sur tout compact de toute fonction continue. Posons $F(x) = f \underset{e}{*} f'$ on a par définition

$$F(x + r''(t)) = \int_{G'} f(x + r(t) - e(x' - r'(t))) f'(x') \, dx'$$

d'où en vertu de l'invariance de l'intégrale par translation

$$F(x + r''(t)) = \int_{G'} f(x + r(t) - e(x')) f'(x' + r'(t)) \, dx'$$

et la proposition se déduit directement de cette relation à l'aide des théorèmes classiques de dérivation sous le signe $\int$.[1]

Remarque 1. Le procédé de composition $f \underset{e}{*} f'$ se rattache à la notion générale de régularisation des fonctions, sur un espace dans lequel opère un groupe localement compact de transformations $x \to x'(x)$, à l'aide d'une fonction définie sur le groupe de transformations et de l'intégrale de Haar sur ce groupe: $F(x) = \int_{G'} f(x'(x)) f'(x') \, dx'$. Dans le cas particulier envisagé ici on a $x'(x) = x - e(x')$.

Remarque 2. Lorsque $G = G'$ et que e est l'application identique la proposition prouve que tout produit de composition appartient à $\mathcal{E}(G)$ dès que l'un de ses facteurs est continu et que l'autre appartient à $\mathcal{D}(G)$; en fait la même démonstration prouve qu'il suffit alors que le premier facteur soit sommable sur tout compact.

[1] Remarquons que cette proposition entraîne que pour toute f dérivable suivant r, continue ainsi que $d_r f$ on a $\int d_r f(x) \, dx = d_r \int f(x) \, dx = 0$ (prendre $G' = G$, $e(x) = x$ et $f'(x) = 1$).

En combinant cette proposition avec les résultats acquis antérieurement nous allons établir le théorème fondamental suivant:

Théorème 1. *Quel que soit l'ouvert $\Omega \subset G$ il existe $f \in \mathcal{D}^+(G)$, non identiquement nulle et à support contenu dans Ω.*

Soit en effet $a \in \Omega$ et U un voisinage compact de 0 tel que $a + 3U \subset \Omega$ et soient d'après la proposition 4 du § 1 H un sous-groupe fermé de G contenu dans U et appartenant à la famille $\mathcal{H}(G)$ et E un supplémentaire de $\mathcal{R}(H)$ dans $\mathcal{R}(G)$; E est un espace euclidien, prenons dans E un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 compact et tel que $r \in \mathcal{V}$ entraîne $r(1) \in U$. Si $f(x)$ est une fonction continue positive définie sur G non identiquement nulle et à support contenu dans $a + U$ et $f'(r)$ une fonction appartenant à $\mathcal{D}^+(E)$ non identiquement nulle et à support contenu dans $\mathcal{V}$, on aura en désignant par e l'application $(h, r) \to h + r(1)$ de $H \times E$ dans G une fonction cherchée F en posant

$$F(x) = f \underset{e}{*} f' = \int_{H \times E} f(x - h - r(1)) f'(r) \, dh \, dr$$

car F est positive non identiquement nulle, à support contenu dans $a + U + U + + H \subset a + 3U \subset \Omega$ et qui en vertu de la proposition 1 appartient à $\mathcal{E}(G)$ car sur $H \times E$ la fonction $f'(r)$ est dérivable suivant $\mathcal{R}(H) \times \mathcal{R}(E)$ ainsi que toutes ses dérivées d'ordre quelconque et l'application $\bar{e}$ applique cet espace sur $\mathcal{R}(G)$.

De ce théorème nous allons déduire quelques résultats importants sur l'approximation des fonctions dans certains espaces. Pour simplifier l'exposé nous dirons qu'une fonction θ définie sur un groupe G est une fonction U-régularisante si elle est continue, positive, à support compact contenu dans le voisinage compact U de 0 et si son intégrale est égale à 1; l'importance de ces fonctions provient du fait que si f est une autre fonction continue définie sur le groupe on a

$$f * \theta(x) - f(x) = \int (f(x - y) - f(x)) \, \theta(y) \, dy$$

d'où

$$|f * \theta(x) - f(x)| \leq \sup_{y \in U} |f(x - y) - f(x)|$$

et de ce que les fonctions régularisées $f * \theta$ jouissent en général des propriétés de l'une et de l'autre des fonctions f et θ. A l'aide de cette notion on peut dire que le théorème précédent est équivalent à l'existence de fonctions U-régularisantes appartenant à $\mathcal{D}(G)$ et ceci quel que soit U. Enonçons simplement le lemme suivant qui est une conséquence triviale de l'uniforme continuité sur tout compact de toute fonction continue et du théorème 1:

Lemme. *Les polynômes trigonométriques régularisés (resp. les fonctions continûment indéfiniment dérivables régularisées) sont denses dans l'espace des polynômes trigonométriques (resp. dans $\mathcal{E}_h(G)$ quel que soit $0 \leq h \leq \infty$* [1]*) muni de la topologie de convergence compacte des fonctions et de chacune de leurs dérivées (resp. dérivées d'ordre au plus égal à h).*

Proposition 2. *Les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{E}_h(G)$ quel que soit $0 \leq h \leq \infty$ muni de la topologie de convergence compacte des fonctions et de chacune de leurs dérivées d'ordre au plus égal à h.*

D'après le lemme précédent il suffit de montrer que pour toute régularisante θ les polynômes trigonométriques $\varpi * \theta$ sont denses dans l'espace des $f * \theta$ $f \in \mathcal{E}(G)$ muni de la topologie de convergence compacte des fonctions et de leurs dérivées. Mais en vertu des relations

$$D(f * \theta) - D(\varpi * \theta) = (f - \varpi) * D\theta,$$

où D est un polynôme quelconque de dérivation, ceci est alors une conséquence triviale de la proposition à démontrer dans le cas de $h = 0$.[2]

En donnant au théorème 1 la forme plus précise suivante nous pourrons établir l'existence sur G de partitions de l'unité en éléments de $\mathcal{D}^+(G)$.

Proposition 3. *Soit B un voisinage compact du compact A, il existe $f \in \mathcal{D}^+(G)$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$ sur A et $f = 0$ en dehors de B.*

Soit en effet U un voisinage de 0 dans G tel que $A + 3U \subset B$ et soit f' une fonction continue égale à 1 sur $A + U$, nulle en dehors de $A + 2U$ et comprise entre 0 et 1; toute U-régularisée de f' par une fonction de $\mathcal{D}(G)$ satisfait à la question.

2. Définition 1. *On appelle recouvrement ouvert relativement compact localement fini d'un espace (localement compact) E tout recouvrement de E à l'aide d'ensembles ouverts, relativement compacts et dont seul un nombre fini rencontre chaque compact de E.*

Pour tout groupe G il existe de tels recouvrement car si V est un voisinage symétrique ouvert relativement compact de 0 dans G engendrant le sous-groupe ouvert H de G, la famille des ensembles $V^n \cap \complement \overline{V^{n-1}}$ $(n \geq 1)$ est un tel recouvrement pour H et d'autre part tout compact de G/H est fini.

---

[1] Nous convenons que pour $h = \infty$ $\mathcal{E}_h(G)$ n'est autre que $\mathcal{E}(G)$.

[2] Pour $h = 0$ la proposition est une conséquence du théorème de Weierstrass-Stone (cf. [14] page 55 th. 3) car pour tout couple d'éléments distincts x, y de G il existe un caractère $\hat{x}$ tel que $\langle y, \hat{x} \rangle \neq \langle x, \hat{x} \rangle$.

On démontre aussi que pour tout tel recouvrement $\Omega = (\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ il existe un autre tel recouvrement dépendant du même ensemble d'indices $\Omega' = (\Omega'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$ on ait $\bar{\Omega}'_\lambda \subset \Omega_\lambda$: on dit que Ω' est un recouvrement subordonné à Ω.[1]

Définition 2. *On appelle partition de l'unité subordonnée à un recouvrement ouvert relativement compact localement fini $\Omega = (\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ toute famille de fonctions $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ dépendant du même ensemble d'indices, telle que pour tout λ le support de f_λ soit contenu dans Ω_λ et telle que la somme des f_λ soit égale à* 1.

Proposition 4. *Pour tout recouvrement ouvert relativement compact localement fini du groupe G il existe une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement et dont les éléments appartiennent à $\mathcal{D}^+(G)$.*

Soit en effet Ω' un recouvrement subordonné à Ω et soit de même Ω'' subordonné à Ω'. Il existe en vertu de la proposition 3 pour tout indice λ tel que $\bar{\Omega}''_\lambda \subset \Omega_\lambda$ une fonction $f_\lambda \in \mathcal{D}^+(G)$ égale à 1 sur Ω''_λ et nulle en dehors de Ω'_λ. Comme pour tout ouvert relativement compact de G la somme des $f_\lambda(x)$ ne dépend effectivement que d'un nombre fini de λ la somme $F(x)$ des $f_\lambda(x)$ est comme chaque f_λ un élément de $\mathcal{D}^+(G)$ et est en chaque point supérieure à 1 (comme au moins une des f_λ); les quotients des $f_\lambda(x)$ par $F(x)$ constituent alors une partition cherchée.

3. Dans le but d'étendre aux groupes les relations qui lient dans un espace euclidien la transformée de Fourier d'une fonction sommable ainsi que ses dérivées aux transformées de Fourier de ces dernières, nous aurons besoin de certains théorèmes d'approximation dans l'espace des fonctions appartenant à $\mathcal{E}(G)$ et qui sont sommables ainsi que certaines de leurs dérivées, quand l'espace considéré est muni d'une topologie de convergence des fonctions et de leurs dérivées dans $L^1(G)$.[2] L'existence de fonctions satisfaisant aux propriétés indiquées dans la proposition 3 et qui sont utiles dans les questions d'approximation locale ne peut être d'aucun service quand on considère des procédés d'approximation du type de ceux qui viennent d'être indiqués; ceci tient au fait qu'avec les notations de la proposition 3 si le compact B est trop petit voisinage de A alors les fonctions considérées dans cette

---

[1] On commence par se ramener au cas d'un compact en considérant pour tout compact K l'ensemble des Ω_λ rencontrant K, puis on peut appliquer la proposition 3 page 65 de [12]. Pour ces questions voir aussi: [18].

[2] On rappelle que pour tout $p \geq l$ on désigne habituellement par $L^p(G)$ l'espace des fonctions à p-ième puissance sommable sur G muni de la norme $(\int |f|^p\,dx)^{\frac{1}{p}}$ que l'on désigne par $\|f\|_p$. Pour $p = \infty$ $\|f\|_\infty$ n'est autre que le plus petit des a tels que $|f(x)| \leq a$ presque partout.

proposition auront des dérivées trés grandes à l'extérieur de A; toutefois lorsque le compact B n'est pas imposé a priori on a la propriété suivante:

Proposition 5. *Soient A un compact de G et $(D_i)_{1\le i\le n}$ un système fini de polynômes de dérivation sur G tous indépendants de D^0. Pour tout $\varepsilon>0$ il existe alors $f\in\mathcal{D}^+(G)$ majorée par 1, égale à 1 sur A et telle que pour tout $i=1,2,\dots n$ on ait $\|D_i f\|_\infty<\varepsilon$.*

Soit en effet R^p un espace euclidien et e une représentation continue de R dans G telle qu'il existe des opérateurs de dérivation $(D_i')_{1\le i\le n}$ sur R^p satisfaisant à $\bar{e}(D_i')=D_i$. Choisissons une fois pour toute $\phi\in\mathcal{D}^+(R^p)$ telle que $\|\phi\|_1=1$ et pour toute $f\in\mathcal{D}^+(G)$ posons

$$f_\lambda=\lambda^p f \underset{e}{*} (\phi\circ\varepsilon_\lambda)$$

où ε_λ désigne l'endomorphisme $x\to\lambda x$ de R^p $(\lambda\in R)$, donc $\phi\circ\varepsilon_\lambda(x)=\phi(\lambda x)$; on a alors

$$\|f_\lambda\|_\infty\le\|f\|_\infty\cdot\|\lambda^p\phi\circ\varepsilon_\lambda\|_1=\|f\|_\infty$$

et

$$\|D_i f_\lambda\|_\infty\le\|f\|_\infty\,\|\lambda^p\,\bar{\varepsilon}_\lambda(D_i')\,\phi\circ\varepsilon_\lambda\|_1=\|f\|_\infty\,\|\bar{\varepsilon}_\lambda(D_i')\,\phi\|_1$$

mais $\bar{\varepsilon}_\lambda(D_i')\,\phi$ est en λ un polynôme sans terme constant donc converge vers 0 avec λ. On peut donc trouver λ assez petit pour que pour tout $i=1,2,\dots n$ on ait $\|\bar{\varepsilon}_\lambda(D_i')\,\phi\|_1\le\varepsilon$; ayant ainsi choisi λ on prendra ensuite f bornée par 1 et égale à 1 au moins sur $A-e\circ\bar{\varepsilon}_\lambda^{1}(S)$ où S est le support de la fonction ϕ; la fonction f_λ satisfait alors aux conditions voulues.

De cette proposition on déduit le lemme suivant:

Lemme. *Soient $(f_\lambda)_{\lambda\in A}$ un famille de fonctions appartenant à $\mathcal{E}(G)$ et $(r_i)_{1\le i\le n}$ des éléments de $\mathcal{R}(G)$ tels que:*

a) $d^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}_{r_1^{\alpha_1}r_2^{\alpha_2}\dots r_n^{\alpha_n}} f_\lambda$ *soit sommable pour tout λ et tout système d'entiers $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n$ tels que $0\le\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=|\alpha|\le h$,*

b) $\sup_{|\alpha|\le h}\sup_{\lambda\in A}\left\|d^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}_{r_1^{\alpha_1}r_2^{\alpha_2}\dots r_n^{\alpha_n}} f_\lambda\right\|_1<+\infty,$

c) *quel que soit $\varepsilon>0$ il existe un compact A de G tel que les intégrales des fonctions $d^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}_{r_1^{\alpha_1}r_2^{\alpha_2}\dots r_n^{\alpha_n}} f_\lambda$ en dehors de A soient majorées par ε. Alors il existe $g\in\mathcal{D}^+(G)$ telle que $\sup_{|\alpha|\le h}\sup_{\lambda\in A}\|D_i f_\lambda-D_i(g f_\lambda)\|_1\le\varepsilon$.*

En effet posons $D^\alpha=d^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}_{r_1^{\alpha_1}r_2^{\alpha_2}\dots r_n^{\alpha_n}}$ alors si $(\alpha)!=\alpha_1!\,\alpha_2!\,\dots\,\alpha_n!$

$$D^\alpha g f=g\,D^\alpha f+\sum_{(\beta)+(\gamma)=(\alpha);\ (\gamma)\ne 0}\frac{(\alpha)!}{(\beta)!\,(\gamma)!}D^\beta f\,D^\gamma g$$

où si (β) et (γ) désignent respectivement les systèmes d'entiers $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ et $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ $(\beta)+(\gamma)$ désigne le système $\beta_1+\gamma_1, \beta_2+\gamma_2, \ldots, \beta_n+\gamma_n$. On en déduit

$$\| D^\alpha f - D^\alpha (g f) \|_1 \leq \| (g-1) D^\alpha f \|_1 + \sum \frac{(\alpha)!}{(\beta)!\,(\gamma)!} \| D^\beta f\, D^\gamma g \|_1$$

si alors g est égal à 1 sur un ouvert relativement compact Ω on a

$$\| D^\alpha f - D^\alpha (g f) \|_1 \leq \int_{\complement \Omega} | D^\alpha f |\, d x + \sum \frac{(\alpha)!}{(\beta)!\,(\gamma)!} \sup_{x \in \Omega}. | D^\gamma g(x) |\, \| D^\beta f \|_1$$

d'où le lemme en vertu de la proposition 5 et des hypothèses.

Proposition 6. *Soit f une fonction définie sur G, bornée et mesurable; pour toute fonction $g \in \mathcal{E}_1(G)$ sommable ainsi que sa dérivée $d_r g$ la fonction $f * g$ est continûment dérivable suivant r et on a $d_r(f * g) = f * d_r g$.*

En effet d'après le lemme il existe une suite de fonctions $g_n \in \mathcal{D}(G)$ telle que $\| g_n - g \|_1 + \| d_r g_n - d_r g \|_1$ tende vers 0 avec $1/n$. D'après la proposition 1 on a alors $d_r(f * g_n) = (d_r f) * g_n$; ainsi $f * g$ est limite uniforme des $f * g_n$ dont les dérivées $d_r(f * g_n)$ convergent uniformément vers $f * d_r g$; d'où la proposition.

Un raisonnement semblable donne de suite la proposition suivante que nous nous contenterons d'énoncer:

Proposition 7. *Soient $f \in \mathcal{B}(G)$ et g sommable sur G; alors $f * g$ est dérivable et on a $d_r(f * g) = (d_r f) * g$.*

Corollaire. *Soient $f \in \mathcal{B}(G)$ et $g \in \mathcal{E}(G)$, g et $d_r g$ étant de plus sommables; alors $d_r(f * g) = f * d_r g = g * d_r f$.*

En effet la première de ces deux égalités résulte de la proposition 6 et la seconde de la proposition 7.

Appliquons en particulier le corollaire au cas où f est un caractère et g une fonction de $\mathcal{E}(G)$ sommable ainsi que sa dérivée $d_r g$, on a

$$\langle x, \hat{x} \rangle * d_r g = \langle x, \hat{x} \rangle \overline{\mathfrak{F}(d_r g)}$$ [1]

et

$$g * d_r \langle x, \hat{x} \rangle = 2 i \pi \hat{r}(\hat{x}) \overline{\mathfrak{F}(g)}$$

d'où

$$\mathfrak{F}(d_r g) = -2 i \pi \hat{r}(\hat{x}) \mathfrak{F}(g)$$

[1] Pour toute f sommable sur G rappelons que la transformée de Fourier de f est définie par $\mathfrak{F} f = \int f(x) \langle x, \hat{x} \rangle\, d x$.

et c'est pour cette raison que nous avons introduit la notation $-2i\pi\hat{r} = \mathfrak{F} d_r$ à l'aide de laquelle on peut alors écrire $\mathfrak{F}(d_r g) = \mathfrak{F} d_r \mathfrak{F}(g)$.

Inversement soit $l \in \mathfrak{L}(G)$ et soit f une fonction sommable ainsi que lf, si f_n est une suite de fonctions continues à support compact qui convergent dans $L^1(G)$ vers f ainsi que la suite lf_n vers lf, les fonctions $\mathfrak{F}(f_n)$ convergent alors uniformément vers $\mathfrak{F}f$ et les fonctions $d_{\hat{l}}(\mathfrak{F}f_n) = 2i\pi\mathfrak{F}(lf_n)$ convergent uniformément vers $2i\pi\mathfrak{F}(lf)$, d'où la relation

$$d_{\hat{l}}(\mathfrak{F}f) = 2i\pi\mathfrak{F}(lf).$$

4. Nous terminerons ce chapitre en étudiant et caractérisant les applications dérivables de R dans G:

Théorème 2. *Si $t \to \phi(t)$ est une application de R dans G telle que pour tout caractère $\hat{x}$ sur G $t \to \langle \phi(t), \hat{x} \rangle$ appartienne à $\mathcal{E}_1(R)$ alors il en est de même de $t \to f \circ \phi(t)$ quelle que soit $f \in \mathcal{E}_1(G)$, l'application $t \to \phi(t)$ est continue et il existe une application $t \to r_t$ de R dans $\mathfrak{R}(G)$ telle que $\frac{d}{dt}(f \circ \phi) = (d_{r_t} f) \circ \phi$.*

a) Montrons d'abord que toute application $t \to \phi(t)$ de R dans G telle que $t \to \langle \phi(t), \hat{x} \rangle$ soit continue quel que soit le caractère $\hat{x}$ sur G est continue. Premièrement R et T étant des espaces métriques complets et $\hat{G}$ un espace de Baire et les applications partielles $t \to \langle \phi(t), \hat{x} \rangle$ et $\hat{x} \to \langle \phi(t), \hat{x} \rangle$ étant continues il en résulte que pour tout t_0 il existe au moins un $\hat{x}_0$ tel que l'application $(t, \hat{x}) \to \langle \phi(t), \hat{x} \rangle$ soit continue en $(t_0, \hat{x}_0)$, mais cette application étant une représentation en $\hat{x}$ il en résulte[1] que cette application est alors continue sur le sous-ensemble $\{t_0\} \times \hat{G}$ de $R \times \hat{G}$, car d'une part l'application partielle $t \to \langle \phi(t), \hat{x} \rangle$ est continue et d'autre part $|\langle \phi(t), \hat{x} + \hat{y} \rangle - - \langle \phi(t), \hat{x} \rangle|$ est indépendant de $\hat{x}$. Ceci ayant lieu quel que soit t_0 on en déduit la continuité de $(t, \hat{x}) \to \langle \phi(t), \hat{x} \rangle$, ce qui entraîne alors l'uniforme continuité des fonctions $t \to \langle \phi(t), \hat{x} \rangle$ quand $\hat{x}$ décrit un compact de $\hat{G}$, c'est-à-dire la continuité de $t \to \phi(t)$.

b) Posons alors

$$\frac{d}{dt}\langle \phi(t), \hat{x} \rangle = 2i\pi \langle \phi(t), \hat{x} \rangle \, \omega(t, \hat{x})$$

on a de suite

$$\omega(t, \hat{x} + \hat{y}) = \omega(t, \hat{x}) + \omega(t, \hat{y})$$

et

$$\overline{\omega(t, \hat{x})} = \omega(t, \hat{x})$$

[1] Cf. [12] page 83 exercice 20 (dans l'énoncé de cet exercice l'un des deux espaces E, F qui y figurent peut être supposé seulement espace de Baire et non nécessairement métrique complet).

donc pour tout t $\hat{x} \to \omega(t, \hat{x})$ est une représentation de G dans R et cette représentation est limite d'une suite de fonctions continues, donc $\hat{G}$ étant un espace de Baire, elle est continue. Pour tout t il existe donc $r_t \in \mathcal{R}(G)$ tel que

$$\omega(t, \hat{x}) = \hat{r}_t(\hat{x}).$$

Mais comme de plus, $\langle \phi(t), \hat{x} \rangle \in \mathcal{E}_1(R)$ il en résulte que $\omega(t, \hat{x})$ est continue par rapport à t; donc pour tout $\hat{x}$ l'application $t \to \hat{r}_t(\hat{x})$ est continue et comme la topologie de $\mathcal{J}(\hat{G})$ est précisément la topologie de convergence simple il en résulte que $t \to \hat{r}_t$ est une application continue de R dans $\mathcal{R}(G)$.

c) D'autre part pour montrer que quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{E}_1(G)$ la fonction $f \circ \phi$ appartient à $\mathcal{E}_1(R)$ il nous suffira en vertu du théorème 1 de le montrer pour toute $f \in \mathcal{D}(G)$; de plus si $H \in \mathcal{H}(G)$ et si h est l'homomorphisme canonique de G sur G/H l'application $t \to h \circ \phi(t)$ est telle que pour tout caractère $\hat{x}$ sur G/H $(\hat{x} \in H^*)$ la fonction $t \to \langle h \circ \phi(t), \hat{x} \rangle$ appartient à $\mathcal{E}_1(R)$, alors le théorème 2 du § 2 prouve qu'il suffit d'établir la dernière partie de la proposition lorsque $\mathcal{R}(G)$ est de dimension finie.

Prenons alors une suite de polynômes trigonométriques ϖ_n convergeant uniformément sur tout compact vers f ainsi que la suite $d_r \varpi_n$ vers $d_r f$ pour tout $r \in \mathcal{R}(G)$ (proposition 2), comme $\mathcal{R}(G)$ est de dimension finie on en déduit de suite que la suite $d_r \varpi_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{R}(G) \times G$ vers $d_r f$; l'application $t \to \phi(t)$ étant continue les fonctions $\varpi_n \circ \phi$ convergeront uniformément sur tout compact vers $f \circ \phi$ et les fonctions $(d_{r_t} \varpi_n) \circ \phi$ convergeront uniformément vers $(d_{r_t} f) \circ \phi$, mais par définition de r on a $(d_{r_t} \varpi_n) \circ \phi = \frac{d}{dt} \langle \phi(t), \hat{x} \rangle$; on en déduit classiquement que $(d_{r_t} f) \circ \phi$ est la dérivée de $f \circ \phi$ et que cette dérivée est continue.

Pour toute application dérivable $t \to \phi(t)$ de R dans G l'application $t \to r_t$ telle que $\frac{d}{dt} f \circ \phi = (d_{r_t} f) \circ \phi$ peut être appelée l'application dérivée de l'application ϕ et nous la noterons encore $\delta \phi$. Quels que soient les endomorphismes e et e' de G et les applications dérivables ϕ et ϕ' de R dans G l'application $\psi = e \circ \phi + e' \circ \phi'$ est encore une application dérivable et on a $\delta \psi = \bar{e}(\delta \phi) + \bar{e}'(\delta \varphi')$, de sorte que si $\delta \phi' = \delta \phi$ l'application $\psi = \phi' - \phi$ est telle que $\delta \psi = 0$ ce qui entraîne que ψ est constante; plus particulièrement si $\delta \psi$ est constante ψ est à une translation près élément de $\mathcal{R}(G)$.

Ces indications et le théorème qui précède permettent de caractériser complètement les applications dérivables de R dans G $t \to \phi(t)$, pour lesquelles quelle que soit $f \in \mathcal{E}_1(G)$ $f \circ \phi$ appartient à $\mathcal{E}_1(R)$, comme suit: $t \to \phi(t)$ est composée d'une application $t \to \Phi_t$ de R dans $\mathcal{R}(G)$ et de l'application canonique de $\mathcal{R}(G)$ dans G. L'application $t \to \Phi_t$ de R dans $\mathcal{R}(G)$ est définie à une constante additive près (si on lui impose d'être continue, ce qui se peut toujours) et est l'intégrale de $\delta\phi$. Signalons enfin que l'on peut définir et étudier d'une façon toute semblable des applications dérivables d'un groupe G dans un autre G', qu'il existe un théorème général de dérivations des applications composées et que les résultats obtenus généralisent parfaitement ceux du cas $G=R$ quand G est connexe.

Chapitre deuxième.

Les distributions sur les groupes abéliens localement compacts.

§ 1. L'espace topologique $\mathcal{D}(G)$.

1. La théorie des distributions sur un groupe G est, comme l'a définie Mr. L. Schwartz dans le cas de G euclidien [1], l'étude d'une classe de fonctionnelles linéaires définies sur l'espace $\mathcal{D}(G)$ et des opérations qui peuvent y être définies, en ayant pour but de généraliser la notion de fonction indéfiniment dérivable. Les définitions et propriétés que nous donnerons seront telles que dans le cas de G euclidien elles se réduiront à celles qui ont été données par Mr. Schwartz, mais en vertu même de la généralisation que nous nous proposons de faire nous ne pourrons pas pousser cette étude aussi profondément que dans le cas euclidien. Nous utiliserons largement la théorie des espaces vectoriels topologiques et tous les résultats dont nous nous servirons sont démontrés dans l'un ou l'autre des mémoires auxquels nous référerons (certains de ces mémoires donnent des résultats relatifs aux espaces vectoriels sur le corps des nombres réels, résultats qui peuvent être étendus sans difficulté aux espaces vectoriels sur le corps des nombres complexes). C'est d'ailleurs l'emploi systématique de cette théorie qui nous a conduit à modifier la définition des distributions telle que nous l'avions donnée dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (T. 227 p. 809).

2. Nous désignerons par $\mathcal{D}(A;\Gamma)$ le sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{D}(G)$ dont les éléments ont leur support contenu dans A et qui admettent le sous-groupe Γ de G comme sous-groupe de leur groupe de périodes; lorsque $\Gamma=\{0\}$ nous écrirons simplement $\mathcal{D}(A)$ pour $\mathcal{D}(A;\{0\})$. Parmi les sous-espaces que l'on vient de définir ceux, pour lesquels A est un compact et Γ un sous-groupe appartenant à la famille $\mathcal{H}(G)$, jouent un rôle fondamental et pour les distinguer des autres sans avoir besoin de le préciser chaque fois nous leur réserverons la notation $d(K;H)$ où K est le compact A et H le sous-groupe Γ. Les sous-espaces $d(K;H)$ seront toujours considérés comme munis de la topologie de convergence uniforme des fonctions et de chacune de leurs dérivées de sorte que si $r_1, r_2, \ldots, r_p$ est un système de représentations continues de R dans G qui composées avec l'application canonique de G sur G/H forment une base de $\mathcal{R}(G/H)$ la topologie de $d(K; H)$ est définissable par la famille de semi-normes

$$\sup_{0 \leq a_1+a_2+\cdots+a_p \leq n} \left\| d^{a_1+a_2+\cdots+a_n}_{r_1^{a_1} r_2^{a_2} \ldots r_p^{a_p}} \right\|_\infty .$$

En vertu d'une remarque faite antérieurement cas espaces sont complets et comme l'origine de ces espaces possède un système fondamental de voisinages qui est dénombrable, ce sont des espaces ($\mathfrak{F}$) [3].

Il est clair par définition que les ensembles bornés de $d(K; H)$ sont formés de fonctions bornées dans leur ensemble ainsi que chacune de leurs dérivées; d'autre part en vertu du théorème d'Ascoli[1] les ensembles relativement compacts d'un $d(K; H)$ sont les ensembles bornés dont les éléments sont équicontinus ainsi que chacune de leurs dérivées, ce qui entraîne de suite trivialement que tout ensemble relativement compact engendre un convexe fermé qui est compact.[2] En général un ensemble borné d'un $d(K; H)$ n'est pas relativement compact; cette particularité se présente quand G est euclidien (en vertu de la formule des accroissements finis) et cette remarque nous permettra de montrer plus tard que la topologie que nous introduirons sur l'espace des distributions coincide dans le cas euclidien avec la topologie de Mr. L. Schwartz.

Définition 1. *On appelle distribution sur G toute forme linéaire sur $\mathcal{D}(G)$ dont la restriction à chaque sous-espace $d(K; H)$ est continue. L'espace vectoirel de toutes les distributions sera noté $\mathcal{D}'(G)$.*

Comme exemple de distributions citons:

a) Les distributions-mesures $f \to \mu(f)$ associées aux mesures sur G, dont la mesure de masse $+1$ placée à l'origine, définie par $\delta(f) = f(0)$, sera dite la mesure de Dirac. Comme pour toute fonction continue à support compact f et pour toute mesure μ $\mu(f)$ est la limite des $\mu(f * \theta)$ quand le support de la régularisante θ tend vers 0, on en déduit en prenant les fonctions θ dans $\mathcal{D}(G)$ que si μ est nulle en tant que distribution elle l'est aussi en tant que mesure; la correspondance établie entre mesures et distributions-mesures est donc biunivoque.

b) Les dérivées de mesure définies par une mesure μ et un polynôme de dérivation D par $f \to \mu(Df)$, parmi lesquelles les doublets ou dérivées de la mesure de Dirac.

---

[1] Cf. [14] page 43 théorème 1.

[2] Cette propriété est d'ailleurs valable dans tout espace localement convexe complet.

c. Les sommes de dérivées de mesures $f \to \sum \mu_\lambda (D_\lambda f)$ dans lesquelles seul un nombre fini de D_λ n'est pas réduit à 0 sur chaque $\mathcal{D}(G; H)$ pour $H \in \mathcal{H}(G)$.

Les espaces $d(K; H)$ étant des espaces $(\mathcal{F})$ les distributions peuvent être caractérisées par l'une ou l'autre des propriétés suivantes et qui sont équivalentes à la définition 1[1]:

a) Une distribution est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(G)$ qui reste bornée sur tout compact de tout $d(K; H)$.

b) Une distribution est un forme linéaire sur $\mathcal{D}(G)$ qui reste bornée sur toute suite de $\mathcal{D}(G)$ contenue dans un $d(K; H)$ et qui y converge vers 0.

Nous allons maintenant montrer que l'on peut définir sur $\mathcal{D}(G)$ une topologie d'espace vectoriel localement convexe pour laquelle les seules formes linéaires continues sont les distributions. Pour cela rappelons qu'étant donné un espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel E' de son dual algébrique toute topologie d'espace vectoriel localement convexe sur E pour laquelle le dual de E est E' s'obtient de la façon suivante[2]: on considère sur E' la topologie faible qui y est définie par E, $\sigma(E', E)$, c'est-à-dire la topologie de convergence simple des fonctions $x \to x'(x)$ où $x \in E$ et $x' \in E'$, les topologies cherchées sont alors celles qui correspondant à la convergence uniforme des fonctions $x' \to x'(x)$ dans les familles de parties convexes et faiblement compactes de E', la réunion des parties d'une telle famille engendrant E'. Parmi ces topologies il en existe:

a) Une moins fine: la topologie faible $\sigma(E, E')$ ou de convergence simple.

b) Une plus fine: la topologie forte $\tau(E, E')$ ou de convergence uniforme dans la famille de toutes les parties convexes et faiblement compactes.

A l'aide de ces notions on peut énoncer:

Proposition 1. *Sur $\mathcal{D}(G)$ les trois topologies suivantes sont identiques:*

a) *La topologie forte $\tau(\mathcal{D}(G), \mathcal{D}'(G))$, soit $\mathcal{T}_1$.*

b) *La plus fine des topologies d'espace vectoriel localement convexe pour lesquelles les ensembles bornés des sous-espaces $d(K; H)$ sont bornés, soit $\mathcal{T}_2$.*

c) *La plus fine des topologies d'espace vectoriel localement convexe induisant sur chaque $d(K; H)$ une topologie moins fine que la sienne, soit $\mathcal{T}_3$.*[3]

En effet, montrons d'abord l'identité de $\mathcal{T}_1$ et de $\mathcal{T}_2$: soit pour cela T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(G)$ continue dans la topologie $\mathcal{T}_2$, elle est donc bornée sur les com-

[1] Cf. [3].
[2] Cf. [4] page 198 th. VII—4 et [5] page 523 th. 4.
[3] Cf. [5] page 524 théorème 7.

pacts des $d(K; H)$ et par conséquent est une distribution $\mathcal{T}_2$ est donc moins fine que $\mathcal{T}_1$; mais inversement les compacts des $d(K; H)$ sont bornés dans la topologie faible définie sur $\mathcal{D}(G)$ par $\mathcal{D}'(G)$, donc aussi dans la topologie forte $\mathcal{T}_1$ [1], de sorte que $\mathcal{T}_2$ est aussi plus fine que $\mathcal{T}_1$. D'autre part si T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(G)$ continue pour la topologie $\mathcal{T}_3$ ses restrictions aux $d(K; H)$ sont continues pour les topologies de ces espaces et T est donc une distribution, de sorte que $\mathcal{T}_3$ est moins fine que $\mathcal{T}_1$; mais inversement $\mathcal{T}_1$ induit sur chaque $d(K; H)$ une topologie pour laquelle toute forme linéaire continue est d'après le théorème de Hahn-Banach prolongeable en une forme linéaire sur $\mathcal{D}(G)$ continue pour la topologie $\mathcal{T}_1$, il en résulte que pour cette topologie induite les formes linéaires continues sont continues pour la topologie des espaces $d(K; H)$ et comme ces espaces sont munis d'une topologie forte [2] on en déduit que la topologie induite par $\mathcal{T}_1$ est moins fine que leur topologie, d'où la proposition.

Désormais quand nous parlerons de $\mathcal{D}(G)$ il sera toujours considéré comme muni de la topologie que l'on vient d'y définir et si l'on remarque que la topologie de convergence uniforme des fonctions et de chacune de leurs dérivées induit sur chaque $d(K; H)$ sa topologie on en déduit:

Corollaire. *La topologie de $\mathcal{D}(G)$ induit sur chaque $d(K; H)$ sa topologie.*

De ce corollaire résulte les caractérisations suivantes des voisinages de 0 dans $\mathcal{D}(G)$ et des semi-normes continues dans cet espace:

Pour que V soit un voisinage ouvert convexe de 0 dans $\mathcal{D}(G)$ il faut et il suffit qu'il en soit de même de sa trace sur chaque $d(K; H)$; quelque soit le voisinage U de 0 dans $d(K; H)$ il existe un voisinage ouvert convexe de 0 dans $\mathcal{D}(G)$ dont la trace sur $d(K; H)$ est contenue dans U.

Pour qu'une semi-norme sur $\mathcal{D}(G)$ soit continue il faut et il suffit que ses restrictions aux $d(K; H)$ soient continues; quelle que soit la semi-norme $p(f)$ sur $d(K; H)$ il existe une semi-norme continue sur $\mathcal{D}(G)$ dont la restriction à $d(K; H)$ majore $p(f)$.

De ces résultats on déduit de suite que pour qu'une application linéaire de $\mathcal{D}(G)$ dans un espace vectoriel topologique soit continue il faut et il suffit que ses restrictions aux sous-espaces $d(K; H)$ le soient; mais les $d(K; H)$ étant des espaces $(\mathfrak{F})$ il suffit alors que les ensembles bornés de chaque $d(K; H)$ soient transformés en ensembles bornés. Mais à un point de vue général l'espace $\mathcal{D}(G)$ est un espace que Mr. Mackey appelle «relatively strong and boundedly closed» c'est-à-dire muni d'une

[1] Cf. [5] page 524 théorème 7.
[2] Cf. [5] page 527 théorème 10.

topologie forte pour laquelle toutes les formes linéaires bornées sont continues, et l'un de ses théorèmes[1] (valable en particulier dans le cas des espaces $(\mathfrak{F})$) dit que pour un tel espace une application linéaire dans un autre espace vectoriel topologique est continue dès qu'elle transforme tout ensemble borné en un ensemble borné. Il se trouve d'ailleurs que les deux critères de continuité que nous venons d'indiquer coincident ici en vertu de la proposition suivante:

Proposition 2. *Pour qu un ensemble soit borné dans $\mathcal{D}(G)$ il faut et il suffit qu'il soit contenu dans un $d(K; H)$ et qu'il y soit borné.*

Il suffit évidemment de montrer que si des f forment un ensemble borné dans $\mathcal{D}(G)$ qu'elles ont leur support contenu dans un compact fixe et qu'il existe $H \in \mathcal{H}(G)$ qui est un groupe de périodes pour chacune d'elles.

Or si les f d'un ensemble borné B de $\mathcal{D}(G)$ n'avaient pas leur support contenu dans un compact fixe il existerait pour tout voisinage compact U de 0 dans G une suite x_n d'éléments de G telle que deux quelconques des ensembles $x_n + U$ ne se rencontrent pas et telle que sur $x_n + U$ il existe au moins une $f_n \in B$ non identiquement nulle; la fonctionnelle

$$\sup. \left(n \left(\sup_{x - x_n \in U} |f_n(x)|\right)^{-1} \cdot \sup_{x - x_n \in U} |f(x)|\right)$$

ne serait donc pas bornée sur B, ce qui est absurde car elle induit sur chaque $d(K; H)$ une semi-norme continue; comme il en est de même pour tout $r \in \mathcal{R}(G)$ de la fonctionnelle $\|d_r f\|_\infty$ on en déduit que $\sup_{f \in B} \|d_r f\|_\infty$ est bornée en tout r de $\mathcal{R}(G)$, donc que lorsque x décrit G et f B les formes linéaires sur $\mathcal{R}(G)$ $r \to d_r f(x)$ sont bornées, ce qui entraîne qu'elles s'annulent toutes sur un même sous-espace vectoriel de codimension finie de $\mathcal{R}(G)$ et enfin l'existence du sous-groupe H cherché (proposition 5 du § 1 du chapitre 1, corollaire de la proposition 4 du même §).

Comme exemples de transformations linéaires continues de $\mathcal{D}(G)$ nous citerons: les dérivations, la multiplication par un élément quelconque de $\mathcal{E}(G)$ la composition avec une fonction continue à support compact et toute opération de moyenne relativement à un sous-groupe compact Γ définie par $f \to f_\Gamma = \int_\Gamma f(x + \gamma)\, d\gamma$. Sur ces transformations on peut faire les remarques qui suivent:

a) Si $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une partition de l'unité sur G dont les éléments appartiennent à $\mathcal{D}(G)$ la famille $(a_\lambda f)_{\lambda \in \Lambda}$ est pour toute $f \in \mathcal{D}(G)$ sommable et de somme f et ceci uniformément par rapport à f sur tout borné de $\mathcal{D}(G)$.

---

[1] Cf. [5] page 527 théorème 8.

b) Quand le support U des fonctions U-régularisantes a tend vers 0 les fonctions $a * f$ convergent vers f dans $\mathcal{D}(G)$ et uniformément sur tout compact de $\mathcal{D}(G)$ (l'uniformité de la convergence résulte de l'uniforme continuité des fonctions et de chacune de leurs dérivées quand ces dernières restent dans un compact de $\mathcal{D}(G)$).

c) Quand le sous-groupe compact Γ tend vers 0 les fonctions f_Γ convergent vers f dans $\mathcal{D}(G)$ et uniformément sur tout borné de $\mathcal{D}(G)$.

Pour tout sous-groupe compact Γ la fonction f_Γ ($f \in \mathcal{D}(G)$) peut être considérée comme appartenant à $\mathcal{D}(G/\Gamma)$; nous allons montrer qu'à ce point de vue l'application $f \to f_\Gamma$ est un homomorphisme de $\mathcal{D}(G)$ sur $\mathcal{D}(G/\Gamma)$. En vertu de la relation $(f_\Gamma)_\Gamma = f$ il résulte de suite que l'application $f \to f_\Gamma$ est une application de $\mathcal{D}(G)$ sur $\mathcal{D}(G/\Gamma)$; elle est aussi trivialement continue. Pour montrer que c'est un homomorphisme il suffit alors de montrer que la topologie $\mathcal{T}$ induite sur le sous-espace $\mathcal{D}(G;\Gamma)$ de $\mathcal{D}(G)$ par la topologie de $\mathcal{D}(G)$ est moins fine que celle qui peut être construite à partir des sous-espaces $d(K;H) \subset \mathcal{D}(G;\Gamma)$ comme a été construite celle de $\mathcal{D}(G)$. Or ceci résulte de ce que ces deux topologies induisent sur chaque $d(K;H) \subset \mathcal{D}(G;\Gamma)$ la même topologie; d'où la proposition suivante.

Proposition 3. *L'application $f \to f_\Gamma$ est un homomorphisme de $\mathcal{D}(G)$ sur $\mathcal{D}(G/\Gamma)$ quel que soit le sous-groupe compact Γ.*

Remarquons que la démonstration donnée de cette proposition montre que toute forme linéaire sur $\mathcal{D}(G)$ continue sur les $d(K;H) \subset \mathcal{D}(G;\Gamma)$ coincide sur $\mathcal{D}(G;\Gamma)$ avec la restriction d'une distribution; à l'aide de ce qui a été dit ceci est en effet une conséquence du théorème de Hahn-Banach, mais plus particulièrement ici c'est aussi une conséquence de la possibilité de prolonger à $\mathcal{D}(G)$ une forme linéaire définie sur $\mathcal{D}(G;\Gamma)$ à l'aide de la projection $f \to f_\Gamma$ de $\mathcal{D}(G)$ sur $\mathcal{D}(G;\Gamma)$.

3. Nous nous proposons maintenant de montrer que $\mathcal{D}(G)$ est un espace complet; pour cela nous nous appuierons sur le lemme suivant:

Lemme. *Soit G un espace localement compact admettant un recouvrement ouvert relativement compact localement fini. L'espace $L(G)$ des fonctions continues à support compact est complet quand on le munit de la plus fine topologie d'espace vectoriel localement convexe induisant la topologie de convergence uniforme sur chaque sous-espace vectoriel $L(K)$ dont les éléments ont leur support contenu dans le compact K.*

Soit en effet $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un recouvrement de G du type indiqué; alors pour toute application $\lambda \to c_\lambda$ de Λ dans R^+ la fonctionnelle sur $L(G)$

$$c(f) = \sum_\lambda c_\lambda \sup_{x \in \Omega_\lambda} |f(x)|$$

est une semi-norme continue; il va en résulter que tout filtre de Cauchy sur $L(G)$, qui définit toujours un élément de l'espace de toutes les fonctions continues sur G, est convergent dans $L(G)$. Soient en effet Φ un filtre de Cauchy sur $L(G)$ et ϕ sa limite dans la topologie de convergence uniforme; pour toute fonction continue θ sur G $\theta\Phi$ est encore un filtre de Cauchy sur $L(G)$ car $f \to \theta f$ est un endomorphisme de $L(G)$ et $\theta\phi$ est la limide ce filtre dans la topologie de convergence uniforme, mais si θ est à support compact $\theta\phi$ est aussi la limite de $\theta\Phi$ dans $L(G)$; dans ce qui suit on suppose θ ainsi choisie et de plus $0 \leq \theta \leq 1$, de sorte que $c(\theta f) \leq c(f)$. Si alors $\bar{c}$ désigne le prolongement par continuité de c au complété de $L(G)$ on aura $c(\theta\phi) = \bar{c}(\theta\phi) \leq \bar{c}(\phi)$ et si ϕ n'était pas à support compact on aboutirait à une contradiction car il serait aisé de choisir les c_λ pour que $c(\theta\phi)$ ne reste pas borné quand θ varie dans les conditions indiquées.

Proposition 4. *L'espace $\mathcal{D}(G)$ est complet.*

En effet si Φ est un filtre de Cauchy sur $\mathcal{D}(G)$ il est aussi filtre de Cauchy sur l'espace $L(G)$ introduit au lemme précédent et il en est de même de $D\Phi$ quel que soit le polynôme de dérivation D sur G; soit ϕ la limite de Φ et soit ϕ_D celle de $D\Phi$; le topologie de $L(G)$ entraînant la convergence uniforme on a classiquement par récurrence sur l'ordre des opérateurs de dérivation $\phi_D = D\phi$, d'où la proposition.

4. Nous terminerons ce paragraphe en étendant à l'espace $\mathcal{D}(G \times G')$ une propriété classique du cas de G et G' euclidiens.

Proposition 5. *L'image par l'application $(f, f') \to ff'$ de $\mathcal{D}(G) \times \mathcal{D}(G')$ dans $\mathcal{D}(G \times G')$ engendre un sous-espace vectoriel partout dense.*

Il est clair qu'il suffira de démontrer que:

a) Toute $f'' \in \mathcal{D}(G \times G')$ appartient à un sous-espace $d(K \times K'; H \times H')$.

b) Le sous-espace de $\mathcal{D}(G \times G')$ engendré par les ff' a une trace dense dans un $d(K_1 \times K_1'; H \times H')$ où K_1 (resp. K_1') est un voisinage de K (resp. K').

Or a) résulte de ce que tout compact de $G \times G'$ est contenu dans un compact produit d'un compact de G par un compact de G' et d'autre part de ce que tout sous-espace vectoriel de codimension finie de $\mathcal{R}(G \times G')$ contient le produit de deux tels sous-espaces définis respectivement dans $\mathcal{R}(G)$ et $\mathcal{R}(G')$. Quant à b) cela résulte des remarques suivantes:

b') Si θ et θ' sont des fonctions régularisantes définies respectivement sur G et G', alors $\theta\theta'$ est une régularisante sur $G \times G'$, pour tout produit ff' on a $(ff') * (\theta\theta') = (f * \theta)(f' * \theta')$ et pour toute $f'' \in \mathcal{D}(G \times G')$ les $f'' * (\theta\theta')$ convergent vers f'' dans $\mathcal{D}(G \times G')$ quand les supports de θ et θ' tendent vers 0.

b'') On a $D(f'' * \theta\theta') - D(\sum_k (f_k * \theta)(f'_k * \theta')) = (f'' - \sum_k f_k f'_k) * D\theta\theta'$, de sorte que la proposition est une conséquence de la même proposition exprimée pour les espaces de fonctions continues sur G G' et $G \times G'$ munis de la topologie de convergence compacte.[1]

§ 2. L'espace $\mathcal{D}'(G)$ des distributions.

Ce paragraphe contient l'extension aux distributions de certaines propriétés des fonctions de $\mathcal{E}(G)$ et d'opérations sur ces fonctions; on y définit ensuite diverses topologies sur $\mathcal{D}'(G)$ relativement auxquelles sera étudiée la continuité des opérations qui auront été définies.

1. Etant donné un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(\Omega)$ de $\mathcal{D}(G)$ où Ω est un ouvert de G toute forme linéaire définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et continue sur chaque $d(K;H) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ sera dite une distribution sur l'ouvert Ω; une telle distribution ne peut pas en général être prolongée en une distribution sur G. On a toutefois le résultat suivant:

Proposition 1. *Soit $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de distributions définies respectivement dans les ouverts Ω_λ de réunion Ω et telles que dans $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu$ T_λ et T_μ coincident. Alors il existe une distribution T et une seule définie dans Ω et coincidant avec T_λ dans Ω_λ.*

a) Supposons que les Ω_λ forment un recouvrement relativement compact et localement fini de Ω et soit $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition de l'unité sur Ω subordonnée à ce recouvrement et dont les éléments appartiennent à $\mathcal{D}(G)$; alors la distribution cherchée dans Ω ne peut être que

$$T(f) = \sum_\lambda T_\lambda(a_\lambda f)$$

et cette fonctionnelle linéaire qui dans chaque $\mathcal{D}(\Omega_{\lambda_0})$ coincide avec T_{λ_0}, car si $f \in \mathcal{D}(\Omega_{\lambda_0})$ on a alors

$$T(f) = \sum_\lambda T_{\lambda_0}(a_\lambda f) = T_{\lambda_0}(\sum_\lambda a_\lambda f) = T_{\lambda_0}(f)$$

est continue dans chaque $d(K;H) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ car chacune des applications $f \to a_\lambda f$ l'est et de plus seul un nombre fini des a_λ n'est pas nul sur K; ainsi T est effectivement une distribution dans Ω.

b) Si les Ω_λ ne forment pas un recouvrement localement fini relativement compact de Ω, soit $(\Omega'_\alpha)_{\alpha \in A}$ un tel recouvrement et extrayons de la famille de tous les ouverts relativement compacts $\Omega_\lambda \cap \Omega'_\alpha$ un recouvrement localement fini de Ω soit

---

[1] I. Dieudonné: Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences t. 205, 1937, page 593.

$(\Omega''_\beta)_{\beta\in B}$ et pour tout β définissons dans Ω''_β une distribution T_β restriction à $\mathcal{D}(\Omega''_\beta)$ de toute T_λ telle que $\Omega''_\beta \subset \Omega_\lambda$; si la distribution cherchée existe elle doit alors pouvoir être définie par les T_β et d'après a) il en est bien ainsi; d'où la proposition.

Corollaire. *Pour toute distribution sur G il existe un plus grand ouvert dans lequel elle est nulle. Le complémentaire de cet ouvert sera dit le support de la distribution.*

Ce corollaire découle de suite de la proposition 1 en considérant la famille $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ des ouverts dans lesquels T est nulle et en définissant dans chacun d'eux une distribution $T_\lambda = 0$; la restriction de T à la réunion des Ω_λ coincide alors avec l'extension des T_λ à cette réunion et est donc nulle.

Remarque. Pour toute mesure μ sur G le support de μ en tant que distribution est identique à son support en tant que mesure, car $\mathcal{D}(G)$ est dense dans $L(G)$, toute fonction de $L(G)$ pouvant de plus être approchée par des fonctions de $\mathcal{D}(G)$ dont le support est arbitrairement voisin de celui de la fonction donnée.

Comme pour une raison analogue le support d'une fonction continue est identique à son support en tant que mesure, il est encore le même que son support en tant que distribution.

D'autre part soit $a \in \mathcal{E}(G)$ égale à 1 sur un voisinage du support de la distribution T, on a alors $T(af) = T(f)$ pour toute $f \in \mathcal{D}(G)$.

2. Tout endomorphisme continue $f \to e(f)$ de $\mathcal{D}(G)$ définit par transposition un endomorphisme $T \to e'(T) = T \circ e$ de $\mathcal{D}'(G)$. Nous allons étudier à ce point de vue la multiplication des distributions par une fonction appartenant à $\mathcal{E}(G)$ et leur dérivation.

Pour toute fonction $a \in \mathcal{E}(G)$ $f \to af$ est un endomorphisme continu de $\mathcal{D}(G)$ dont nous désignerons encore le transposé par $T \to aT$, de sorte que l'on a par définition

$$(aT)(f) = T(af)$$

et dans le cas particulier où T est une fonction continue g le produit ag ici défini coincide avec le produit ordinaire de multiplication de la fonction g par la fonction a; c'est pourquoi nous appellerons encore aT le produit de multiplication de la fonction $a\,(\in \mathcal{E}(G))$ par la distribution T. Cette multiplication fait de $\mathcal{D}'(G)$ un module unitaire sur $\mathcal{E}(G)$ l'élément unité n'étant autre que la constante 1.

Soit maintenant D un polynôme de dérivation sur G $f \to Df$ est aussi un endomorphisme continu $\mathcal{D}(G)$, dont nous désignerons momentanément le transposé par $D'T$; il est évident que si

$$D = \sum c_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} d_{r_1}^{\alpha_1} d_{r_2}^{\alpha_2} \cdots d_{r_n}^{\alpha_n} \tag{1}$$

alors

$$D'T = T \circ D = \sum c_{a_1 a_2 \cdots a_n} d'^{a_n}_{r_n} d'^{a_{n-1}}_{r_{n-1}} \cdots d'^{a_1}_{r_1} T$$

le sorte que pour connaître ce qu'est $D'T$ quand T est une fonction élément de $\mathcal{E}(G)$ il suffit de connaitre ce qu'est $d'_r T$ dans les mêmes conditions, mais par définition on a alors:

$$d'_r a(f) = a(d_r f) = \int a\, d_r f \cdot dx = -\int f\, d_r a \cdot dx + \int d_r(af) \cdot dx = (-d_r a)(f)$$

de sorte que

$$d'_r a = -d_r a.$$

Pour tout polynôme de dérivation D sur G désignons alors par $\check{D}$ l'image de D par l'isomorphisme involutif de $D(G)$ canoniquement associé à la symétrie $x \to -x$ de G, si D est représentable sous la forme (1) alors D l'est sous la forme

$$D = \sum (-1)^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} c_{d_1 d_2 \cdots d_n} d^{a_1}_{r_1} d^{a_2}_{r_2} \cdots d^{a_n}_{r_n}$$

et alors pour toute fonction $a \in \mathcal{E}(G)$ on aura

$$D' a = \check{D} a.$$

Ceci nous conduit à poser la définition suivante:

Définition. *Pour tout polynôme de dérivation D sur G on appellera DT la distribution sur G définie par $DT(f) = T(\check{D}f)$.*

Ainsi par ce qui précède si f est élément de $\mathcal{E}(G)$ elle aura mêmes dérivées en tant que distribution qu'en tant que fonction. La dérivation des distributions est comme celle des fonctions une opération linéaire et de plus satisfait à la règle habituelle de dérivation d'un produit (pour les dérivations du premier ordre) car:

$$d_r(aT)(f) = aT(-d_r f) = T(-a\, d_r f) = T(-(d_r(af))) + T(f\, d_r a) = (a\, d_r T + (d_r a)\, T)(f)$$

c'est-à-dire

$$d_r(aT) = (d_r a)\, T + a\, d_r T.$$

3. Dans ce qui suit le produit de composition joue un rôle essentiel; pour étendre cette notion aux distributions nous passerons par l'intermédiaire du produit tensoriel.

Lemme 1. *Soient $\phi(x, x') \in \mathcal{D}(G \times G')$ et T' une distribution sur G'; l'application $\phi(x, x') \to T'(\phi(x, x'))$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(G \times G')$ daas $\mathcal{D}(G)$.*

En effet désignons par $x \to \phi_{(x)}$ l'application de G dans $\mathcal{D}(G')$ qui à tout $x \in G$ associe la fonction $\phi_{(x)}(x') = \phi(x, x')$. Quand x décrit G les fonctions $\phi_{(x)}$ restent dans un sous-espace $d(K', H')$ de $\mathcal{D}(G')$ car $\phi(x, x')$ est à support compact sur $G \times G'$ et de plus il existe $H \in \mathcal{H}(G)$ et $H' \in \mathcal{H}(G')$ tels que $H \times H'$ soit un groupe de périodes de $\phi(x, x')$; pour tout opérateur de dérivation D' sur G' les fonctions $D'\phi$ sont uniformément continues sur $G\times G'$, donc pour tout D' si x converge vers x_0 dans G $D'\phi_{(x)}$ converge uniformément vers $D'\phi_{(x_0)}$, de sorte que $x\to\phi_{(x)}$ est une application continue de G dans $\mathcal{D}(G')$. Mais comme T' est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(G')$ il en résulte que $x\to T'(\phi_{(x)})=T'(\phi(x, x'))$ est une fonction continue; d'autre part si $r\in\mathcal{R}(G)$ dans $\mathcal{D}(G')$ les quotients

$$\frac{1}{t}(\phi(x+r(t), x')-\phi(x, x'))$$

convergent vers $d_r\phi(x, x')$ de sorte que [1]

$$d_r(T'(\phi_{(x)}))=T'(d_r\phi(x, x')).$$

Par itération des raisonnements précédents on en déduit que $T'(\phi(x, x'))$ appartient à $\mathcal{E}(G)$ et comme d'autre part $\phi(x, x')$ est à support compact sur $G\times G'$ il en résulte encore que $T'(\phi(x, x'))$ appartient à $\mathcal{D}(G)$. Reste à montrer que l'application $\phi(x, x')\to T'(\phi(x, x'))$, qui est trivialement linéaire, est continue; il suffit pour cela de montrer si $\phi(x, x')$ reste dans un ensemble borné de $\mathcal{D}(G\times G')$ qu'il en est de même de $T'(\varphi(x, x'))$ dans $\mathcal{D}(G)$. Or:

a) Si les $\phi(x, x')$ sont bornées dans $\mathcal{D}(G\times G')$ elles ont leur support contenu dans un compact fixe A de $G\times G'$, donc les $T'(\phi(x, x'))$ ont leur support contenu dans le compact projection de A sur G.

b) Il existe alors aussi $H\times H'\in\mathcal{H}(G)\times\mathcal{H}(G')$ tel que $H\times H'$ soit un groupe de périodes de toutes les $\phi(x, x')$ et toutes les $T'(\phi(x, x'))$ admettront H comme groupe de périodes.

c) Si les $\phi(x, x')$ restent bornées dans $\mathcal{D}(G\times G')$ il en sera de même des $T'(\phi(x, x'))$ car d'une part T' est continue et d'autre part pour tout polynôme de dérivation D sur G on a vu que $DT'(\phi(x, x'))=T'(D\phi(x, x'))$.

Considérons alors sur G et G' deux distributions T et T'; le lemme prouve que sur $\mathcal{D}(G\times G')$ la forme linéaire $\phi(x, x')\to T'(T(\phi(x, x')))$ est une distribution et qu'il en est de même de $T(T'(\phi(x, x')))$. Mais en vertu de la proposition 5 du § 1 ces deux distributions sont égales car elles coincident sur le sous-espace partout dense de $\mathcal{D}(G\times G')$ engendré par les $\phi(x)\phi'(x')$. Conformément à ce résultat nous poserons la définition suivante.

Définition. *Etant données deux distributions T et T' définies respectivement sur les groupes G et G' on appelle produit tensoriel de T et T' et on note $T\times T'$ la seule*

---

[1] Cf. [17] page 6, corollaire de la proposition 2.

distribution sur $G \times G'$ qui prend sur les fonctions du type $\phi(x)\,\phi'(x')$ la valeur $T(\phi)\,T'(\phi')$ et qui pour toute autre fonction $\phi(x, x') \in \mathcal{D}(G \times G')$ est donnée par l'une ou l'autre des expressions $T(T'(\phi(x, x')))$, $T'(T(\phi(x, x')))$.

Il résulte de la démonstration de l'existence du produit tensoriel de deux distributions qu'il peut être défini généralement pour tout système fini de distributions T_i $i = 1, 1, 2, \ldots n$ respectivement définies sur les grouper G_i, que ce produit est associatif et qu'il peut s'obtenir en effectuant les distributions facteurs T_i dans un ordre quelconque.

Comme première application de cette opération montrons comment elle permet d'étendre aux distributions une propriété déjà vue pour les fonctions continûment indéfiniment dérivables:

Soit r une représentation continue de R dans G, si $\phi \in \mathcal{D}(G)$ la fonction de deux variables $(x, t) \to \phi(x + r(t))$ est un élément de $\mathcal{E}(G \times R)$ et pour toute distribution T sur G et toute distribution S à support compact sur R, le produit tensoriel $T \times S$ peut encore être défini pour les fonctions $\phi(x + r(t))$ comme étant la valeur commune de toutes les expressions $T \times S(a(t)\,\phi(x + r(t)))$ où $a(t) \in \mathcal{D}(R)$ est égale à 1 sur un voisinage du support de S. En particulier si S est la distribution $S(\phi) = \int\limits_0^t \phi(u)\,du$ on aura

$$S \times T(\phi(x + r(t))) = T\left(\int\limits_0^t \phi(x + r(u))\,du\right) = \int\limits_0^t T(\phi(x + r(u)))\,du$$

et de même (ou par définition $T_S(\phi) = T(\phi_{-S})$)

$$S \times T(d_r f(x + r(t))) = T(\phi(x + r(t)) - \phi(x)) = (T_{r(t)} - T)(\phi)$$

si donc $d_r T = 0$ on en déduit que $T_{r(t)} = T$; convenons alors de dire (comme pour une fonction) que s est une période de la distribution T si $T_S = T$; l'application $s \to T(\phi_s)$ étant continue il en résulte que le groupe des périodes de T est fermé; d'autre part les résultats que l'on vient de donner prouvent que si $d_r T = 0$ le représentation $t \to r(t)$ se fait dans le groupe des périodes de T et qu'inversement pour toute telle représentation on a $d_r T = 0$. Il en résulte donc que la composante connexe de 0 dans le groupe des périodes de T n'est autre que l'adhérence de l'ensemble des $r(R)$ pour les r tels que $d_r T = 0$.

4. Pour déduire le produit de composition du produit tensoriel nous associerons à chaque $\phi \in \mathcal{D}(G)$ la fonction $\phi(x + x') \in \mathcal{E}(G \times G)$ et nous poserons formellement $T * T'(\phi) = T \times T'(\phi(x + x'))$. Les calculs indiqués par cette relation ne seront d'ailleurs possibles que sous certaines conditions car en général $T'(\phi(x + x'))$ ne sera pas à support compact; mais si l'une au moins des deux distributions T, T' est à support compact, soit T par exemple, il existe alors $a \in \mathcal{D}(G)$ égale à 1 sur un voisinage du support de T et on a $T(\phi) = T(a\phi)$; de plus dans ces conditions la fonction $a(x)\phi(x+x')$ est à support compact sur $G \times G$ et donne au produit tensoriel une valeur indépendante de a. Enfin l'application $\phi(x) \to a(x)\phi(x+x')$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(G)$ dans $\mathcal{D}(G \times G)$, de sorte qu'alors $\phi \to T \times T'(a(x)\phi(x+x'))$ est une distribution sur G.

Si l'on convient alors d'étendre à l'espace $\mathcal{E}(G)$ toute distribution à support compact sur G en posant pour toute $f \in \mathcal{E}(G)$ $T(f) = T(af)$ où a est n'importe quelle fonction de $\mathcal{D}(G)$ égale à 1 sur un voisinage du support de T, on peut énoncer la proposition suivante:

Proposition 2. *Etant données deux distributions T et T' sur un groupe G dont l'une au moins est à support compact, il existe une distribution et un seule sur G dite produit de composition de T et T', notée $T * T'$, définie par $T * T'(\phi) = T \times T'(\phi(x+x'))$.*

On établit de suite que si $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont sur G des distributions dont toutes sauf une au plus sont à support compact, que leur produit de composition dans un ordre quelconque existe, qu'il est associatif et commutatif et peut encore être défini par $T_1 * T_2 * \cdots * T_n(\phi) = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n(\phi(x_1 + x_2 + \cdots + x_n))$. Comme exemple de produit de composition montrons que la mesure de Dirac est une unité pour cette opération:

$$\delta * T(\phi) = \delta \times T(\phi(x+x')) = T(\delta(\phi(x+x'))) = T(\phi(x)) = T(\phi).$$

Nous allons maintenant préciser les propriétés du produit de composition d'une distribution T et d'une distribution fonction $a \in \mathcal{D}(G)$. Par définition on a

$$(T * a)(\phi) = T \times a(\phi(x+x')) = T(\check{a} * \phi) \quad \text{où} \quad \check{a}(x) = a(-x)$$

$$(T * a)(\phi) = a \times T(\phi(x+x')) = a(T(\phi_{-x}))$$

si l'on introduit alors la fonctionnelle $\check{T}$ définie par $\check{T}(\phi) = T(\check{\phi})$, qui est encore une distribution car $\phi \to \check{\phi}$ est un endomorphisme de $\mathcal{D}(G)$, on peut écrire la première de ces égalités sous la forme

$$T(\check{a} * \phi) = \check{T}(\overset{\vee}{\widehat{\check{a} * \phi}}) = \check{T}(a * \check{\phi}) = \check{T} * \phi(a).$$

D'autre part $T(\phi_{-x})$ est une fonction d'où

$$a(T(\phi_{-x})) = (T(\phi_{-x}))(a)$$

d'où par comparaison

$$T * \phi = \check{T}(\phi_{-x}).$$

$T * \phi$ est donc bien une fonction et le raisonnement utilisé au cours du lemme 1 prouve que cette fonction appartient à $\mathcal{E}(G)$. D'où:

Proposition 3. *Le produit de composition d'une distribution et d'une distribution fonction appartenant à $\mathcal{D}(G)$ est une distribution fonction appartenent à $\mathcal{E}(G)$.*

Dans le cas particulier où T est une distribution à support compact pour toute $\phi \in \mathcal{D}(G)$ la distribution $T * \phi$ est alors une fonction de $\mathcal{D}(G)$ et de plus $\phi \to T * \phi$ est un endomorphisme de $\mathcal{D}(G)$ et cet endomorphisme permute aux translations car

$$(T * \phi)_S = (T * \phi)_S * \delta = T * \phi * \delta_S = T * (\phi * \delta_S) = T * \phi.$$

Inversement supposons que e soit un endomorphisme de $\mathcal{D}(G)$ permutable aux translations, on aura donc

$$e(\phi) = \delta\,(e(\phi)_{-S}) = \delta \circ e(\phi_{-S}) = T * \phi \quad \text{où} \quad T(\phi) = \delta \circ e(\check{\phi})$$

et ceci montre que l'endomorphisme e n'est autre que le produit de composition avec la distribution $\widecheck{\delta \circ e}$. Mais cette distribution n'est pas obligatoirement à support compact comme le prouve l'exemple suivant: soit r_n une suite infinie d'éléments distincts de $\mathcal{R}(G)$ telle que tout sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{R}(G)$ de codimension finie contienne tous les r_n à l'exception au plus d'un nombre fini d'entre eux, la distribution

$$T(\phi) = \sum_n d_{r_n} \phi(x_n)$$

est pour toute suite discrète infinie x_n une distribution qui n'est pas à support compact mais telle que $\phi \to T * \phi$ soit un endomorphisme de $\mathcal{D}(G)$. Les résultats précédents permettent d'énoncer:

Proposition 4. *Tout endomorphisme de $\mathcal{D}(G)$ permutable aux translations est de la forme $\phi \to T * \phi$, pour certaines distributions T, dont au moins toutes les distributions à support compact.*

Corollaire 1. *Tout polynôme de dérivation D sur G définissant un endomorphisme de $\mathcal{D}(G)$ il existe une distribution T sur G telle que $D\phi = T * \phi$ et cette distribution est donnée par $T = \delta \circ \check{D} = D\delta$, de sorte que $D\phi = D\delta * \phi$. De plus cette relation est valable pour les distributions $DT = D\delta * T$, car $DT(\phi) = T(\check{D}\phi) = T(\check{D}\delta * \phi) =$ $= T * D\delta(\phi)$.*

Corollaire 2. $D(T * T') = (DT) * T' = T * (DT')$.

En effet en vertu du corollaire 1 on a $D(T * T') = T * T' * D\delta = T * (DT')$.

5. Nous allons maintenant définir sur $\mathcal{D}'(G)$ certaines topologies et indiquer quelques-unes de leurs propriétés; nous ne ferons d'ailleurs qu'appliquer des considérations valables en général pour un espace vectoriel et son dual. Les topologies considérées sur $\mathcal{D}'(G)$ seront:

a) La topologie $\mathcal{T}_s$ ou de convergence simple.

b) La topologie $\mathcal{T}_c$ ou de convergence uniforme sur les parties convexes et compactes (ou simplement sur les parties compactes).

c) La topologie forte $\mathcal{T}_\tau$ ou de convergence uniforme sur les parties convexes et faiblement compactes.

d) La topologie $\mathcal{T}_b$ ou de convergence uniforme sur les parties bornées. La définition donnée en b) ne comporte pas d'indétermination car l'espace $\mathcal{D}(G)$ est complet (ou parce que nous avons montré directement à l'aide d'une propriété spéciale de $\mathcal{D}(G)$ que tout compact de $\mathcal{D}(G)$ engendrait un convexe fermé compact). Il est évident que chacune des topologies de la suite ordonnée $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_\tau$, $\mathcal{T}_b$ est moins fine que la suivante et que le dual de $\mathcal{D}'(G)$ muni de l'une ou l'autre des topologies $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_\tau$ est $\mathcal{D}(G)$ et d'autre part que dans l'une ou l'autre des topologies $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_\tau$, $\mathcal{T}_b$ l'espace $\mathcal{D}'(G)$ est complet, car toute limite de distributions qui convergent uniformément sur les parties compactes est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(G)$ bornée sur les parties compactes donc une distribution. Les topologies précédentes seront en général distinctes, toutefois elles possèdent les mêmes ensembles bornés:

Proposition 5. *Soit A une famille de distributions sur G; les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) *A est contenue dans une partie convexe et faiblement compacte.*

b) *A est une famille équicontinue de distributions.*

c) *A est bornée dans l'une quelconque des topologies $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_\tau$, $\mathcal{T}_b$.*

En effet la topologie de $\mathcal{D}(G)$ étant une topologie forte, donc une topologie de convergence uniforme dans toutes les parties convexes et faiblement compactes de $\mathcal{D}'(G)$, pour toute partie A de $\mathcal{D}'(G)$ convexe et faiblement compacte il existe un voisinage V de 0 dans $\mathcal{D}(G)$ tel que

$$\sup_{\varphi \in V;\, T \in A} |T(\varphi)| \leq 1$$

et réciproquement si V est donné l'ensemble A des T satisfaisant à la relation précédente sera convexe et faiblement compact (théorème de Tychonoff appliqué à l'espace de toutes les fonctions sur $\mathcal{D}(G)$ et muni de la topologie de convergence simple); ceci prouve l'équivalence de a) et b). D'autre part si A est une famille équicontinue de distributions elle est bornée sur un voisinage de 0 dans $\mathcal{D}(G)$ donc est a fortiori bornée au sens de l'une quelconque des topologies $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_\tau$, $\mathcal{T}_b$. Enfin si des distributions A forment un ensemble faiblement borné, elles seront ponctuellement bornées dans chaque $d(K; H)$ et comme ces espaces sont des espaces de Baire elles y seront équicontinues et par conséquent équicontinues dans $\mathcal{D}(G)$.

Corollaire. *Les formes linéaires bornées sur $\mathcal{D}'(G)$ sont les mêmes pour les topologies $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_\tau$, $\mathcal{T}_b$ et toute forme linéaire sur $\mathcal{D}'(G)$ faiblement continue dans les ensembles bornés est une forme linéaire bornée.*

En effet toute forme linéaire faiblement continue dans les ensembles bornés sera bornée sur les ensembles faiblement compacts, donc sera bornée.

Remarques. 1) En général les formes linéaires bornées ne seront pas continues; pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les topologies $\mathcal{T}_\tau$ et $\mathcal{T}_b$ coincident.

2) Toute partie faiblement compacte de $\mathcal{D}'(G)$ étant faiblement bornée est contenue dans une partie convexe et faiblement compacte.

3) Dans le cas particulier de G euclidien les trois topologies $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_\tau$, $\mathcal{T}_b$ coincident car alors dans $\mathcal{D}(G)$ les ensembles bornés sont relativement compacts.

Proposition 6. *La transposée d'une transformation linéaire continue de $\mathcal{D}(G)$ est une transformation linéaire continue de $\mathcal{D}'(G)$ pour l'une ou l'autre des topologies $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_\tau$, $\mathcal{T}_b$; réciproquement si une transformation linéaire de $\mathcal{D}'(G)$ est continue pour l'une ou l'autre des topologies $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_\tau$ elle est la transposée d'une transformation linéaire continue de $\mathcal{D}(G)$.*

En effet tout endomorphisme de $\mathcal{D}(G)$ transformant tout ensemble compact (resp. faiblement compact, resp. borné) en un ensemble compact (resp. faiblement compact, resp. borné) la première partie de la proposition en résulte. D'autre part si e' est un endomorphisme de $\mathcal{D}'(G)$ continu dans une topologie pour laquelle le dual de $\mathcal{D}'(G)$ est $\mathcal{D}(G)$, pour toute f appartenant à $\mathcal{D}(G)$ $e'(T)(f)$ sera une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}'(G)$ donc il existera $g = e(f)$ telle que $e'(T)(f) = T(G)$; g dépend linéairement de f et reste bornée dans $\mathcal{D}(G)$, [illegible] f le reste, donc dépend continûment de f.

Corollaire. *Si T_0 (resp. a) est une distribution à support compact (resp. une fonction de $\mathcal{E}(G)$) la transformation linéaire $T \to T_0 * T$ (resp. $T \to a\,T$) est continue sur $\mathcal{D}'(G)$ dans chacune des topologies $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_\tau$, $\mathcal{T}_b$; en particulier il en est ainsi des dérivations.*

Proposition 7. *Les distributions fonctions appartenant à $\mathcal{D}(G)$ sont denses dans $D'(G)$ pour la topologie $\mathcal{T}_\tau$.*

En effet pour cette topologie le dual de $\mathcal{D}'(G)$ est $\mathcal{D}(G)$ et seule la fonction $f = 0$ de $\mathcal{D}(G)$ annule toutes les distributions qui sont des fonctions $\in \mathcal{D}(G)$.

On en déduit que toute opération linéaire continue dans $\mathcal{D}'(G)$ est déterminée par sa restriction aux distributions $\in \mathcal{D}(G)$ et que toute opération linéaire continue sur le sous-espace $\mathcal{D}(G)$ de $\mathcal{D}'(G)$ est prolongeable à $\mathcal{D}'(G)$ en une opération linéaire continue. Ce procédé permet en particulier de retrouver la dérivation des distributions qui peut encore être définie comme suit:

Proposition 8. *Pour toute distribution T l'application $t \to \frac{1}{t}(T_{-r(t)} - T)$ admet dans $\mathcal{D}'(G)$, muni de la topologie $\mathcal{T}_\tau$, une limite quand t tend vers 0 et cette limite est $d_r T$.*

En effet dans $\mathcal{D}'(G)$ les quotients

$$\frac{1}{t}[(f(x+r(t)) - f(x)) - t\, d_r f]$$

convergent uniformément vers 0 sur tout ensemble borné, car si M est une borne supérieure des $d_{r^2}^2 f$ quand f décrit un ensemble borné B la formule de Taylor appliquée à la fonction de variable réelle $t \to f(x+r(t))$ prouve que ces quotients sont majorés par $M|t|$ et que l'on a un résultat semblable pour les quotients formés avec les Df quel que soit le polynôme de dérivation D sur G.

§ 3. Propriétés de certaines distributions particulières.

1. Quelle que soit la partition $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de l'unité sur G dont les éléments a_λ appartiennent à $\mathcal{D}(G)$ toute distribution T peut être considérée comme la somme de la famille de distributions $(a_\lambda T)_{\lambda \in \Lambda}$, famille qui est sommable dans $\mathcal{D}'(G)$ muni de la topologie de convergence sur les parties bornées de $\mathcal{D}(G)$, car pour tout compact K de G il n'y a qu'un nombre fini d'indices λ tels que a_λ ne soit pas nul sur K. Or les distributions $a_\lambda T$ sont des distributions à support compact et peuvent être considérées comme les éléments fondamentaux de la théorie des distributions au point de vue local; les résultats qui suivent ont pour but de préciser les propriétés de ces distributions.

Lemme 1. *Soit dans R^p (N) l'ensemble des $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ où les α_i sont des entiers positifs et de somme $|\alpha|$ au plus égale à N; à tout $\alpha \in (N)$ nous associons l'opérateur de dérivation $D^\alpha = d^{|\alpha|}_{r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \ldots r_p^{\alpha_p}}$ où les $r_i \in \mathcal{R}(G)$ ont été choisis une fois pour toutes. Alors pour toute $\phi \in \mathcal{D}(G)$ telle que $D^\alpha \phi = 0$ sur un compact K de G quel que soit $\alpha \in (N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{E}(G)$ égale à 1 sur un voisinage de K telle que pour tout $\alpha \in (N)$ et tout $x \in G$ on ait $|D^\alpha(f_\varepsilon \phi(x))| \leq \varepsilon^{N+1-|\alpha|}$.*

Soit en effet $V(\varepsilon)$ le voisinage de K sur lequel on a

$$v(x) = \sup_{\alpha \in (N)} |D^\alpha \phi(x)|^{(N+1-|\alpha|)^{-1}} \leq \varepsilon$$

et soit C_δ dans R^p l'ensemble des $t = (t_1, t_2, \ldots, t_p)$ tels que $|t_i| \leq \delta$, $r(C_\delta)$ sera dans G l'image continue de C_δ par la représentation $r(t) = r_1(t_1) + r_2(t_2) + \cdots + r_p(t_p)$. Posons alors

$$M = \sup_{(\alpha, x) \in (N+1) \times G} |D^\alpha \phi(x)|$$

et désignons par $\Lambda(a)$ le plus grand des nombres λ définis par les conditions

$$\begin{cases} 0 < \lambda < 1 \\ \dfrac{1}{1-\lambda} + M\lambda \leq a \end{cases} \qquad \text{où } a \text{ est un nombre } > 1.$$

Nous allons montrer qu'en posant

$$U(\varepsilon, \delta) = V(\varepsilon) + r(C_\delta)$$

on a

$$U(\varepsilon, \delta) \subset V(\varepsilon')$$

dès que

$$\delta \leq \Lambda\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) \frac{\varepsilon}{p} \quad (\varepsilon' > \varepsilon).$$

En effet pour tout $x \in U(\varepsilon, \delta)$ il existe $x_0 \in V(\varepsilon)$ et $\theta \in \mathcal{R}(G)$ tels que

$$\theta = t_1 r_1 + t_2 r_2 + \cdots t_p r_p \quad \text{avec} \quad |t_i| \leq \delta$$

$$x = x_0 + \theta(1)$$

si alors $g(x) \in \mathcal{D}(G)$ on aura

$$g(x) = g(x_0) + \int_0^1 d_\theta\, g(x_0 + \theta(\tau))\, d\tau$$

d'où

$$|g(x)| \leq |g(x_0)| + \delta \sum_i \sup_{0 \leq \tau \leq 1} |d_{r_i} g(x_0 + \theta(\tau))|.$$

Appliquons cette inégalité successivement à

1°. L'une des $D^\alpha \phi(x)$ avec $|\alpha| = N$ où nous majorons alors le second membre à l'aide de M, on obtient

$$|D^\alpha \phi(x)| \leq \varepsilon + p\,\delta M = (1 + M\lambda)\,\varepsilon \quad (\lambda\,\varepsilon = p\,\delta).$$

2°. L'une des $D^\alpha \phi(x)$ avec $|\alpha| = N-1$, alors les $D^{\alpha'} = d_{r_i} D^\alpha$ sont tels que $\alpha' \in (N)$ avec $|\alpha'| = N$ et l'on peut majorer le second membre à l'aide du résultat qui précède

$$|D^\alpha \phi(x)| \leq \varepsilon^2 + p\,\delta\,(1 + M\lambda)\,\varepsilon \leq \left(\frac{1}{1-\lambda} + M\lambda^2\right) \varepsilon^2.$$

Supposons alors avoir établi que pour $|\alpha| = N - h$ on a

$$|D^\alpha \phi(x)| \le \left(\frac{1}{1-\lambda} + M\lambda^{h+1}\right) \varepsilon^{h+1}$$

et appliquons alors l'inégalité à

3°. L'une des $D^\alpha \phi(x)$ avec $|\alpha| = N - h - 1$, les $D^{\alpha'} = d_{r_i} D^\alpha$ sont donc tels que $\alpha' \in (N)$ et $|\alpha'| = N - h$ et nous obtenons la majoration

$$|D^\alpha \phi(x)| \le \varepsilon^{h+2} + p\,\delta\left(\frac{1}{1-\lambda} + M\lambda^{h+1}\right)\varepsilon^{h+1} \le \left(\frac{1}{1-\lambda} + M\lambda^{h+2}\right)\varepsilon^{h+2}$$

et comme par définition on a $\lambda < 1$ et $\lambda \le \Lambda\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)$ on en déduit que pour tout $\alpha \in (N)$ on a pour tout $x \in U(\varepsilon, \delta)$

$$|D^\alpha \phi(x)| \le \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\,\varepsilon^{h+2} \le \varepsilon'^{h+2} = \varepsilon'^{N+1-|\alpha|}.$$

Soit alors H le sous-groupe des périodes de f et soient $r_1, r_2, \ldots, r_p, s_1, s_2, \ldots, s_q$ des éléments de $\mathcal{R}(G)$ dont les images canoniques dans $\mathcal{R}(G/H)$ forment un système de générateurs de cet espace; nous désignerons par $s(C_\eta)$ l'image continue dans G par la représentation $s(u) = s_1(u_1) + s_2(u_2) + \cdots + s_q(u_q)$ du cube C_η de l'espace R^q; $v(x)$ étant uniformément continue si $\varepsilon' > \varepsilon$ on pourra trouver η tel que

$$V(\varepsilon) + s(C_\eta) \subset V(\varepsilon').$$

En prenant donc η assez petit, puis $\lambda \le \Lambda\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) \le \Lambda(2)$ on aura

$$V(\varepsilon) \subset U(\varepsilon, \delta) \subset V(2\varepsilon) \subset V(2\varepsilon) + s(C_\eta) \subset V(3\varepsilon) \subset U(4\varepsilon, \delta) \subset V(5\varepsilon) + s(C_\eta) \subset V(6\varepsilon).$$

Prenons alors pour chaque $\varepsilon > 0$ une fonction continue $\omega_\varepsilon(v)$ de la variable réelle v telle que

$$0 \le \omega_\varepsilon(v) \le 1$$

$$\omega_\varepsilon(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \le 3\varepsilon \\ 0 & \text{si } v \ge 4\varepsilon. \end{cases}$$

Dans ces conditions $\omega_\varepsilon(v(x))$ sera sur G une fonction uniformément continue égale à 1 sur $V(3\varepsilon)$, à 0 en dehors de $V(4\varepsilon)$ et constante sur les classes suivant H. Soit finalement $\varrho(t) \in \mathcal{D}^+(R)$ à support dans l'intervalle $[-1, +1]$ et telle que $\int \varrho(t)\,dt = 1$. Posons

$$\psi_\varepsilon(x) = \delta^{-p}\,\eta^{-q} \int_{R^{p+q}} \omega_\varepsilon(v(x - r_1(t_1) - \cdots - s_s(u_q)))\,\varrho\left(\frac{t_1}{\delta}\right) \cdots \varrho\left(\frac{s_q}{\mu}\right) dt_1 \cdots du_q$$

on aura:

$$\psi_\varepsilon(x) = 1 \text{ sur } V(\varepsilon) \text{ car } V(\varepsilon) + r(C_\delta) + s(C_\eta) \subset V(3\varepsilon)$$

$$\psi_\varepsilon(x) = 0 \text{ en dehors de } V(6\varepsilon) \text{ car } V(4\varepsilon) + r(C_\delta) + s(C_\eta) \subset V(6\varepsilon).$$

$0 \le \psi_\varepsilon(x) \le 1$ et $\psi_\varepsilon \in \mathcal{E}(G)$ car cette fonction est continûment indéfiniment dérivable suivant $r_1, \ldots, s_q$ et est constante sur les classes suivant H. De plus si $\alpha \in (N)$ on a

$$\|D^\alpha \psi_\varepsilon\|_\infty \le I(\alpha) = \delta^{-|\alpha|} \int_{R^p} \left| \frac{d^{\alpha_1}}{d t_1^{\alpha_1}} \varrho(t_1) \cdots \frac{d^{\alpha_p}}{d t_p^{\alpha_p}} \varrho(t_p) \right| d t_1 \cdots d t_p$$

si donc

$$A_0 = \sup_{\alpha \in (N)} p^{|\alpha|} A \left(\frac{5}{4}\right)^{-|\alpha|} I(\alpha)$$

on aura

$$|D^\alpha \psi_\varepsilon(x)| \le A_0 \varepsilon^{-|\alpha|}$$

et en appliquant la formule de Leibnitz à la dérivation $D^\alpha(\phi\psi_\varepsilon)$ on obtiendra des termes de la forme $D^\beta \phi D^\gamma \psi_\varepsilon$ avec $|\beta| + |\gamma| = |\alpha|$ pour chacun desquels on aura

$$|D^\beta \phi D^\gamma \psi_\varepsilon| \le 6^{N+1} A_0 \varepsilon^{N+1-|\alpha|}$$

car si $x \notin V(6\varepsilon)$ on a $D^\gamma \psi_\varepsilon = 0$ et si $x \in V(6\varepsilon)$ cette majoration résulte de la définition de $v(x)$ et de l'inégalité qui précède. On a donc

$$|D^\alpha \phi \psi_\varepsilon| \le 6^{N+1} A_0 p^{|\alpha|} \varepsilon^{N+1-|\alpha|} \le (A_1 \varepsilon)^{N+1-|\alpha|}$$

où A_1 est une nouvelle constante et il suffit de prendre $f_\varepsilon = \psi_{\frac{\varepsilon}{A_1}}$ pour en déduire le lemme.

Proposition 1. *Soit T une distribution à support compact K; pour tout $H \in \mathcal{H}(G)$ il existe un système fini d'opérateurs de dérivation $(D_i)_{i \in I(H)}$ tel que pour toute $\phi \in \mathcal{D}(G; H)$ on ait $T(\phi) = 0$ dès que $D_i \phi(x) = 0$ pour tout $x \in K$ et tout $i \in I(H)$.*

Soit en effet $a \in d(K'; H')$ égale à 1 sur un voisinage de K; pour toute $\phi \in \mathcal{D}(G; H)$ la fonction $a\phi$ appartient alors à $d(K'; H' \cap H)$ et il existe donc un système fini (r_i) $i = 1, 2, \ldots n$ $r_i \in \mathcal{R}(G)$, un entier N et une constante A tels que si $D^\alpha = d^{|\alpha|}_{r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \cdots r_n^{\alpha_n}}$ où $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ on ait

$$|T(\phi)| = |T(a\phi)| \le A \sup_{|\alpha| \le N} \|D^\alpha(a\phi)\|_\infty$$

de sorte qu'il existe une majoration

$$|T(\phi)| \le B \sup_{|\alpha| \le N} \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi(x)|$$

d'où découle la proposition à l'aide du lemme 1.

Corollaire. *Si de plus le sous-groupe des périodes de T appartient à $\mathcal{H}(G)$ le système des opérateurs (D_i) peut être choisi indépendant de H.*

Soit en effet H_0 le groupe des périodes de T et considérons sur le produit $G \times H$ la distribution $T \times 1$ produit tensoriel de la distribution T sur G et de la constante 1 sur H; pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(G)$ la fonction $(x, h) \to \phi(x+h)$ appartient à $\mathcal{D}(G \times H_0)$ et on a

$$T(\phi) = \int_{H_0} T(\phi)\, dh = \int_{H_0} T(\phi(x+h))\, dh = 1 \times T(\phi(x+h)) = T \times 1(\phi(x+h)) = T\Big(\int_{H_0} \phi(x+h)\, dh\Big).$$

Mais pour toute $\phi \in \mathcal{D}(G)$ la fonction $\int_{H_0} \phi(x+h)\, dh$ appartient alors à $\mathcal{D}(G; H_0)$, d'où le corollaire.

Dans le cas particulier où T est à support ponctuel on peut préciser la proposition 1 à l'aide de la notion suivante:

Définition. *On appellera polynôme généralisé de dérivation sur G tout endomorphisme de $\mathcal{D}(G)$ qui dans chacun des sous-espaces $\mathcal{D}(G; H)$ où $H \in \mathcal{H}(G)$ se réduit à un polynôme de dérivation.*

Par exemple si $\mathcal{R}(G)$ est identifié à un produit R^{Λ} et si pour tout $\lambda \in \Lambda$ r_λ désigne un élément de $\mathcal{R}(G)$ dont toutes les coordonnées d'indice distinct de λ sont nulles, alors

$$\bar{D}(\phi) = \sum_{\lambda} D_\lambda \circ d_{r_\lambda}(\phi)$$

est un polynôme généralisé de dérivation quels que soient les polynômes de dérivation D_λ.

Proposition 2. *Pour toute distribution T à support ponctuel a il existe un polynôme généralisé de dérivation $\bar{D}$ et un seul tel que $T(\phi) = \bar{D}\phi(a)$.*

En effet par hypothèse il existe en vertu de la proposition 1 pour tout $H \in \mathcal{H}(G)$ un système fini d'opérateurs de dérivation $(D_i)_{i \in I(H)}$ tel que si $\phi \in \mathcal{D}(G; H)$ satisfait à $D_i \phi(a) = 0$ pour tout $i \in I(H)$ on ait $T(\phi) = 0$; on peut supposer que les conditions $D_i \phi(a) = 0$ sont indépendantes car si l'une d'elles résultait des autres on pourrait simplement la supprimer et recommencer l'opération jusqu'à obtention d'un système pour lequel pour tout indice $i \in I(H)$ il existe $a_i \in \mathcal{D}(G; H)$ telle que $D_j a_i(a) = 1$ si $j = i$ et 0 si $j \neq i$; à l'aide de ces fonctions construisons alors

$$\Phi(x) = \phi(x) - \sum_i D_i \phi(a)\, a_i(x)$$

qui vérifie

$$D_i \Phi(a) = 0 \text{ quel que soit } i \in I(H)$$

de sorte que

$$T(\phi) = D_H \phi(a)$$

où D_H est l'endomorphisme de $\mathcal{D}(G; H)$ défini par

$$D_H(\phi) = \sum_i T(a_i) D(\phi).$$

On peut ainsi associer à chaque H un polynôme de dérivation D_H tel que dans $\mathcal{D}(G; H)$ on ait $T(\phi) = D_H \phi(a)$ et en vertu de la permutabilité des opérateurs de dérivation avec les translations on en déduit que si D_H et D'_H satisfont tous deux à $T(\phi) = D_H \phi(a) = D'_H \phi(a)$ pour toute $\phi \in \mathcal{D}(G; H)$ on a $D_H = D'_H$ dans $\mathcal{D}(G; H)$, de sorte que si ϕ appartient à différents $\mathcal{D}(G; H)$ on aura toujours $D_H(\phi) = D_{H'}(\phi)$ car ϕ appartient alors aussi à $\mathcal{D}(G; H \cap H')$ et D_H et $D_{H'}$ coincident avec $D_{H \cap H'}$ sur $\mathcal{D}(G; H + H')$. On peut donc définir un endomorphisme $\bar{D}$ de $\mathcal{D}(G)$ tel que $\bar{D} \phi(a) = T(\phi)$ et tel que $\bar{D}$ se réduise dans chaque $\mathcal{D}(G; H)$ à un polynôme de dérivation et cette dernière condition assure l'unicité de $\bar{D}$.

2. Soit T une distribution à support compact et soit $a \in \mathcal{D}(G)$ égale à 1 sur un voisinage du support de T; l'application $f \to T(af)$ est alors une forme linéaire sur $\mathcal{E}(G)$ indépendante de a: nous dirons qu'elle définit l'extension de T à l'espace $\mathcal{E}(G)$.

Convenons alors de dire qu'une famille d'éléments de $\mathcal{E}(G)$ est bornée si ces éléments sont bornés sur chaque compact de G ainsi que chacune de leurs dérivées et introduisons dans $\mathcal{E}(G)$ la plus fine topologie d'espace vectoriel localement convexe admettant comme ensembles bornés ces familles bornées. On montre aisément que cette topologie est la topologie forte définie sur $\mathcal{E}(G)$ par la famille des formes linéaires qui restent bornées sur les ensembles bornés donnés; cette topologie est donc une topologie forte dans laquelle toute forme linéaire bornée est continue et est aussi trivialement plus fine que la topologie de la convergence compacte des fonctions et de chacune de leurs dérivées; on en déduit que $\mathcal{E}(G)$ muni de cette topologie est un espace complet, dans lequel les seuls ensembles bornés sont les ensembles bornés initialement considérés et que toute application linéaire de $\mathcal{E}(G)$ sera continue dès qu'elle transformera tout ensemble borné en un ensemble borné; en particulier toute exsension à $\mathcal{E}(G)$ de distributions à support compact est continue.

Nous allons établir que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{E}(G)$ est une extension de distribution à support compact pourvu que $\mathcal{D}(G)$ soit dense dans $\mathcal{E}(G)$:

Soit $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition de l'unité sur G choisie une fois pour toutes dont les éléments appartiennent à $\mathcal{D}(G)$; pour toute famille de constantes positives $c = (c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

désignons par $\Lambda(c)$ l'ensemble des familles de constantes complexes $\gamma = (\gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ telles que pour tout λ on ait $|\gamma_\lambda| \leq c_\lambda$; dans ces conditions la famille de fonctions

$$\sum_{\lambda \in F} \gamma_\lambda a_\lambda f(x)$$

où f décrit un ensemble borné $B \subset \mathcal{E}(G)$, F la famille des parties finies de Λ et γ la famille $\Lambda(c)$ est un ensemble borné de $\mathcal{E}(G)$, car sur tout compact de G il n'y a qu'un nombre fini de fonctions a_λ non nulles; si donc T' est une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}(G)$ il existera une constante M ne dépendant que de T', B, c telle que

$$\left| \sum_{\lambda \in F} \gamma_\lambda T'(a_\lambda f) \right| \leq M$$

mais les constantes complexes γ_λ étant astreintes aux seules conditions $|\gamma_\lambda| \leq c_\lambda$ il en résulte de suite que

$$\sum_{\lambda \in F} c_\lambda |T'(a_\lambda f)| \leq M$$

ce qui entraîne que dans R la famille des $c_\lambda |T'(a_\lambda f)|$ est sommable quelles que soient les constantes c_λ donc que pour toute f il existe une partie finie $F(f)$ de Λ telle que $T'(a_\lambda f) = 0$ si $\lambda \notin F(f)$. Montrons maintenant que l'on peut choisir $F(f)$ indépendant de f; sinon il existerait une suite infinie $f_n \in \mathcal{E}(G)$ et une suite infinie d'éléments distincts $\lambda_n \in \Lambda$ tels que $T'(a_{\lambda_n} f_n) \neq 0$ et comme seul un nombre fini de fonctions a_{λ_n} n'est pas nul sur tout compact les fonctions $c_n a_{\lambda_n} f_n$ formeront dans $\mathcal{E}(G)$ un ensemble borné quelles que soient les constantes c_n, d'où contradiction.

Ainsi pour toute forme linéaire continue T' sur $\mathcal{E}(G)$ il existe $a \in \mathcal{D}(G)$ telle que $T'(af) = T'(f)$ pour toute $f \in \mathcal{D}(G)$ et si $\mathcal{D}(G)$ est dense dans $\mathcal{E}(G)$ cette relation est encore valable pour toute $f \in \mathcal{E}(G)$. Considérons alors sur $\mathcal{D}(G)$ la form linéaire $T(\phi) = T'(a\phi)$ c'est une distribution car elle est composée de l'application continue $\phi \to a\phi$ de $\mathcal{D}(G)$ dans $\mathcal{E}(G)$ et de la forme linéaire continue T' sur $\mathcal{E}(G)$; de plus $T(\phi)$ est à support compact (comme a) et son extension à $\mathcal{E}(G)$ est définie par

$$T''(f) = T(bf) = T'(abf)$$

où b est égale à 1 sur un voisinage du support de a, donc $T'' = T'$.

3. Indiquons simplement pour terminer ce paragraphe que l'on peut dans $\mathcal{D}'(G)$ introduire comme dans $\mathcal{D}'(R)$ une relation d'ordre compatible avec la structure de $\mathcal{D}'(G)$ en définissant une distribution positive comme étant une distribution prenant des valeurs positives sur $\mathcal{D}^+(G)$. On montre que toute distribution positive est une mesure positive et que si une distribution T est majorée par une mesure positive μ, c'est-à-dire si l'on a

$$|T(\phi)| \leq \mu(|\phi|)$$

que T est encore une mesure.

§ 4. Transformation de Fourier des distributions.

1. Rappelons que si f est une fonction continue sommable sur le groupe G ainsi que sa transformée de Fourier $\mathfrak{F} f$ [1] on a la formule de réciprocité $f = \overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F} f$ et que f et $\mathfrak{F} f$ convergent vers 0 à l'infini, ce qui entraîne que leurs sous-groupes de périodes sont compacts (exception faite de $f=0$); pour une telle fonction $f \not\equiv 0$ nous désignerons par $P(f)$ son sous-groupe de périodes et par $S(f)$ le sous-groupe ouvert engendré par son support. On a alors les relations

$$P(f)^* = S(\mathfrak{F} f) \qquad\qquad S(f)^* = P(\mathfrak{F} f)$$

en effet si $\hat{a}$ est un caractère égal à 1 sur $S(f)$ on a

$$\mathfrak{F} f(\hat{x}+\hat{a}) = \int f(x)\langle x, \hat{x}+\hat{a}\rangle\, dx = \int f(x)\langle x, \hat{x}\rangle\, dx = \mathfrak{F}(\hat{x})$$

donc

$$S(f)^* \subset P(\mathfrak{F} f)$$

et d'autre part si $f(a)$ n'est pas nul la formule d'inversion donne

$$f(a) = \int \mathfrak{F} f(\hat{x})\,\overline{\langle a, \hat{x}\rangle}\, d\hat{x} = \int_{\hat{G}/P(\mathfrak{F} f)} \mathfrak{F} f \int_{P(\mathfrak{F} f)} \overline{\langle a, \hat{x}\rangle}\, d\hat{x}$$

il est donc nécessaire que a détermine sur G un caractère égal à 1 sur le groupe des périodes de $\mathfrak{F} f$, donc

$$S(f) \subset P(\mathfrak{F} f)^*.$$

Les deux relations d'inclusion obtenues sont équivalentes à $S(f) = P(\mathfrak{F} f)^*$ d'où les relations à démontrer.

On peut donc considérer la fonction f comme définie sur $S(f)/P(f)$ et la fonction $\mathfrak{F} f$ comme définie sur $S(\mathfrak{F} f)/P(\mathfrak{F} f)$ sur lequel elle est encore transformée de Fourier de f.

Supposons maintenant de plus que f et $\mathfrak{F} f$ soient respectivement des éléments de $\mathcal{E}(G)$ et $\mathcal{E}(\hat{G})$ sommables après toute dérivation et toute multiplication par polynôme; en remarquant que si $r \in \mathcal{R}(G)$ et $l \in \mathcal{L}(G)$ on a $d_r(lf) - l d_r f = l \circ r(1) f$ on en déduit par itération que les fonctions PDf et DPf [2]), pour f fixée, sont respectivement combinaisons linéaires à coefficients constants les unes des autres et en vertu des hypothèses faites sur f les fonctions PDf sont sommables ainsi que leurs transformées de Fourier; toutes les dérivées de f sont donc bornées (elles sont continues et convergent vers 0 à l'infini) et en conséquence le groupe de périodes $P(f)$ de la

---

[1] Comme par exemple tout produit de composition de deux fonctions à supports compacts.

[2] Dans ce qui suit P, D (resp. $\hat{P}$, $\hat{D}$) désignent respectivement un polynôme ou un polynôme de dérivation sur G (resp. $\hat{G}$).

fonction f appartient à $\mathfrak{H}(G)$ et de même celui de $\mathfrak{F}f$ appartient à $\mathfrak{H}(\hat{G})$: les espaces $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{C}$ construits sur le groupe $S(f)/P(f)$ et son dual sont donc de dimensions finies.

2. Pour définir la transformation de Fourier des distributions nous introduirons l'espace $\Lambda(G)$ des fonctions $f \in \mathcal{E}(G)$ sommables après toute dérivation et toute multiplication par polynôme et dont les transformées de Fourier satisfont aux mêmes conditions. Ce qui a été dit ci-dessus prouve que si $f \in \Lambda(G)$ alors PDf appartient aussi à $\Lambda(G)$ et qui si $\Lambda(K;H)$ est le sous-espace de $\Lambda(G)$ dont les éléments ont leur support dans le sous-groupe ouvert $K\,(K^* \in \mathfrak{H}(\hat{G}))$ et sont constants sur les classes suivant le sous-groupe $H \in \mathfrak{H}(G)$, alors la réunion de ces sous-espaces est $\Lambda(G)$; d'autre part les résultats obtenus au chapitre 1 montrent que $\Lambda(K;H)$ est isomorphe à $\Lambda(K/H)$. Enfin $\mathfrak{F}$ définit un isomorphisme de $\Lambda(G)$ sur $\Lambda(\hat{G})$ qui applique $\Lambda(K;H)$ sur $\Lambda(H^*;K^*)$.

Les sous-espaces $\Lambda(K;H)$ de $\Lambda(G)$ vont ici jouer le rôle des sous-espaces $d(K;H)$ de $\mathfrak{D}(G)$; nous munirons chacun d'eux de la topologie définie par la famille dénombrable de semi-normes:

$$\|P^\alpha D^\beta f\|_1 + \|D^\alpha P^\beta f\|_1 + \|\mathfrak{F} D^\alpha \mathfrak{F} P^\beta \mathfrak{F} f\|_1 + \|\mathfrak{F} P^\alpha \mathfrak{F} D^\beta \mathfrak{F} f\|_1 \tag{1}$$

avec

$$P^\alpha = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \cdots l_m^{\alpha_m} \qquad D^\beta = d^{\beta_1+\beta_2+\cdots\beta_n}_{r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \cdots r_n^{\beta_n}}$$

où $l_1, l_2, \ldots, l_m$ et $r_1, r_2, \ldots, r_n$ désignent respectivement des représentants dans $\mathfrak{C}(G)$ et $\mathfrak{R}(G)$ d'une base de $\mathfrak{C}(K/H)$ et $\mathfrak{R}(K/H)$; il suffirait d'ailleurs pour obtenir la topologie de $\Lambda(K;H)$ de considérer les semi-normes déduites des précédentes en ne conservant que l'une on l'autre des intégrales prises sur G et $\hat{G}$. On montre facilement que ces espaces sont complets (leur topologie est plus fine que celle de convergence uniforme des PDf et que celle de convergence dans $L^1(G)$ des PDf) et sont donc des espaces $(\mathfrak{F})$.

Remarque: On notera qu'en général (contrairement au cas de G euclidien) l'espace $\Lambda(G)$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{D}(G)$ et que la topologie induite par $\mathfrak{D}(G)$ sur $\mathfrak{D}(G) \cap \Lambda(G)$ n'est pas plus fine que celle qui y est induite par $\Lambda(G)$. A ce point de vue la différence avec le cas euclidien est nettement marquée dans le cas d'un groupe G compact totalement discontinu, cas où $\Lambda(G)$ est un vrai sous-espace de $\mathfrak{D}(G)$ avec une topologie strictement plus fine que celle induite par $\mathfrak{D}(G)$ (exception faite du cas où G est fini). Ceci explique que dans ce qui suit nous sommes obligé de démontrer à nouveau certaines propositions déjà vues pour $\mathfrak{D}(G)$. En plus pour pouvoir définir la transformée de Fourier des distributions nous sommes obligés de considérer des formes linéaires definies sur $\Lambda(G)$ dont la restriction à $\mathfrak{D}(G) \cap \Lambda(G)$ peut ne pas être continue pour la topologie induite par $\mathfrak{D}(G)$, c'est-à-dire de modifier la définition des distributions pour lesquelles nous nous proposons de définir une transformation de Fourier:

Définition. *On appellera S-distribution sur G toute forme linéaire sur $\Lambda(G)$ continue dans chaque sous-espace $\Lambda(K; H)$.*

Comme pour l'espace $\mathfrak{D}(G)$ (chapitre 2, § 1, proposition 1) on peut alors définir sur $\Lambda(G)$ une topologie forte dans laquelle toute forme linéaire bornée est continue, qui n'est autre que la topologie forte définie sur $\Lambda(G)$ par les S-distributions, et qui admet des caractérisations analogues à celles de $\mathfrak{D}(G)$. Ici encore la topologie de $\Lambda(G)$ induit sur chaque $\Lambda(K; H)$ sa topologie, car les formules (1) définissent des semi-normes continues sur $\Lambda(G)$; il est donc nécessaire et suffisant pour qu'une application linéaire de $\Lambda(G)$ dans un autre espace vectoriel topologique soit continue qu'elle transforme tout ensemble borné en un ensemble borné; on montre d'ailleurs aussi que les seuls ensembles bornés de $\Lambda(G)$ sont contenus dans les $\Lambda(K; H)$ et y sont bornés. Enfin à l'aide de topologies de comparaison on prouve que $\Lambda(G)$ est complet.

Dans ce qui suit nous indiquons quelques propriétés de l'espace $\Lambda_1(G)$, qui n'est autre par définition que $\Lambda(G)$ mais muni de la topologie définie par les semi-normes

$$\|PDf\|_1 + \|\hat{P}\hat{D}\mathfrak{F}f\|_1$$

ensuite nous appliquerons ces propriétés aux sous-espaces $\Lambda(K; H)$ pour en déduire des résultats semblables pour $\Lambda(G)$.

Nous introduirons la notation $\Lambda_1 \cdot (G)$ (resp. $\Lambda_1 * (G)$) pour désigner l'algèbre topologique obtenue par adjonction à l'espace vectoriel $\Lambda_1(G)$ de la multiplication (continue) $f, g \to fg$ (resp. $f * g$). Ce qui a été dit antérieurement prouve la proposition suivante:

Proposition 1. *$\Lambda_1 \cdot (G)$ (resp. $\Lambda_1 * (G)$) est une algèbre topologique complète où les opérations $f \to PDf$ sont continues et $f \to \mathfrak{F}f$ est un isomorphisme de $\Lambda_1 \cdot (G)$ sur $\Lambda_1 * (G)$.*

Proposition 2. *L'application $(s, f) \to f_s$ (resp. $(\hat{s}, f) \to \langle x, \hat{s}\rangle f$) de $G \times \Lambda_1(G)$ (resp. $\hat{G} \times \Lambda_1(G)$) dans $\Lambda_1(G)$ est continue.*

Quand on a fait les remarques suivantes:

a) $\|f_s - f\|_1$ est une fonction continue de s.

b) Pour tout polynôme P et tout compact A il existe un polynôme P' tel que $\sup_{x \in A} |P(x+s)| \leq P'(x)$.

c) Pour tout polynôme P il existe des polynômes P_i' et P_i'' tels que $P(x) = \sum P_i'(x-y) P_i''(y)$, ce qui donne la formule $P(f * g) = \sum (P_i' * f)(P_i'' * g)$ la démonstration ne présente plus que des difficultés d'écriture, et c'est pourquoi nous ne la donnerons pas ici.

Proposition 3. *Quel que soit le compact A de G et le voisinage compact B de A il existe $f \in \Lambda(G)$, positive, majorée par 1, égale à 1 sur A et à 0 en dehors de B.*

Soit en effet U un voisinage de 0 dans G tel que $A + 3U \subset B$ et soit $a \in \mathcal{D}^+(G)$ majorée par 1, égale à 1 sur A et à 0 en dehors de B; pour toute U-régularisante b la fonction $a * b$ satisfait aux conditions voulues.

Corollaire. *Quel que soit le voisinage compact U de 0 dans G il existe une fonction U-régularisante et appartenant à $\Lambda(G)$.*

Les propositions précédentes vont nous permettre d'établir un théorème d'approximation dans $\Lambda_1(G)$ fondamental pour la suite:

Lemme 1. *Quelle que soit $f \in \Lambda(G)$ f appartient à l'adhérence de $f \cdot \Lambda_1(G)$.*

Soit en effet $\hat{U}$ un voisinage compact de 0 dans $\hat{G}$ et $\hat{\theta}$ une fonction $\hat{U}$-régularisante appartenant à $\Lambda(\hat{G})$, on a pour tout polynôme $\hat{P}$ et tout polynôme de dérivation $\hat{D}$ l'inégalité:

$$\|\hat{P}\hat{D}(\mathfrak{F}f * \hat{\theta}) - \hat{P}\hat{D}\mathfrak{F}f\|_1 \leq \sup_{\hat{y} \in \hat{U}} \|\hat{P}((\mathfrak{F}f)_{\hat{y}} - \mathfrak{F}f)\|_1$$

or d'après les propositions 1 et 2 la fonction $\hat{y} \to \int |\hat{P}(\hat{x})((\mathfrak{F}f)_{\hat{y}} - \mathfrak{F}f)| \, d\hat{x}$ est continue et comme elle est nulle à l'origine on voit que le premier membre de l'inégalité sera aussi faible que l'on veut pourvu que $\hat{U}$ ait été choisi assez petit.

De plus on a aussi une relation du type

$$DP(f\bar{\mathfrak{F}}\hat{\theta}) - DPf = (DPf)(\bar{\mathfrak{F}}\hat{\theta} - 1) + \sum D'(Pf)\, D''(\bar{\mathfrak{F}}\hat{\theta})$$

et d'une part l'inégalité

$$\|D''(\bar{\mathfrak{F}}\hat{\theta})\|_\infty \leq \int_{\hat{U}} |\mathfrak{F}D''| \, d\hat{x}$$

et d'autre part le fait que $\bar{\mathfrak{F}}\hat{\theta}$ converge uniformément vers 1 sur tout compact quand $\hat{U}$ converge vers 0 achèvent de démontrer le lemme.

Lemme 2. *Le sous-espace $\lambda(G)$ des fonctions à support compact est dense dans $\Lambda(G)$.*

En effet la démonstration du lemme 1 prouve aussi que f appartient à l'adhérence de $f*\lambda(G)$ dans $\Lambda_1(G)$. De sorte qu'il suffit de prouver le lemme 2 dans chaque sous-espace $\theta*\Lambda(G)$ où θ est choisie une fois pour toute à support compact; mais pour que dans ces sous-espaces des $f*\theta$ convergent vers 0 il suffit que $\|Pf\|_1$ converge vers 0 quel que soit le polynôme P; d'où le lemme.

Proposition 4. *Quelle que soit $f\in\Lambda(G)$ f appartient à l'adhérence de $f\cdot\lambda(G)$ dans $\Lambda_1(G)$.*

Cette proposition est en effet une conséquence triviale des lemmes 1 et 2.

La topologie de $\Lambda_1(G)$ induisant sur chaque $\Lambda(K;H)$ sa topologie qui est une topologie $\Lambda_1(K/H)$ on déduit des résultats précédents les propositions suivantes:

Proposition 5. *Quelle que soit $f\in\Lambda(G)$ f appartient à l'adhérence de $f\cdot\lambda(G)$ dans $\Lambda(G)$.*

L'importance de ce résultat provient du fait qu'il permet d'approcher dans $\Lambda(G)$ toute fonction f par une fonction à support compact et *contenu* dans celui de f. Il donne de suite:

Proposition 6. *Pour toute S-distribution S sur G il existe un plus petit ensemble fermé de G (dit le support de S) tel que toute fonction de $\Lambda(G)$ ayant son support contenu dans le complémentaire de celui de S annule S.*

Considérons en effet la famille des ensembles ouverts $(\Omega_r)_{r\in I}$ de G tels que si $f\in\Lambda(G)$ a son support contenu dans l'un d'eux on ait $S(f)=0$; d'après la proposition 5 pour démontrer que la réunion des Ω_r est encore un tel ensemble il suffit de démontrer que pour toute $f\in\lambda(G)$ dont le support est contenu dans cette réunion on a encore $S(f)=0$, mais alors le support de f est recouvert par un nombre fini d'ensembles Ω_r et la proposition découle de la proposition 3 (qui entraîne l'existence de partitions de l'unité sur G en fonctions appartenant à $\lambda(G)$ et subordonnées à un recouvrement ouvert donné).

Remarque: Soit U une forme linéaire définie sur un espace de fonctions (définies sur G) contenant $\mathcal{D}(G)$ et $\Lambda(G)$ et dont les restrictions à ces sous-espaces sont continues; la proposition 5 prouve de suite que le support de U en tant que S-distribution existe et est égal à celui de U en tant que distribution, et ceci sans avoir besoin de la proposition 6.

Dans le dual $\Lambda'(G)$ de $\Lambda(G)$ on peut définir et étudier des opérations de même nature que celles qui ont été définies dans $\mathcal{D}'(G)$. Les procédés à utiliser étant semblables nous n'en parlerons pas ici. D'autre part $\Lambda'(G)$ peut être muni de différentes topologies pour lesquelles il est complet et admet $\Lambda(G)$ pour dual: il en est ainsi en particulier quand on munit $\Lambda'(G)$ de la topologie de convergence uniforme sur les ensembles convexes et compacts de $\Lambda(G)$. Parmi les éléments de $\Lambda'(G)$ figurent en particulier les fonctions $f \in \Lambda(G)$ qui définissent la S-distribution $f(g) = \int f g \, dx$ et seule la fonction $g = 0$ de $\Lambda(G)$ annulant toutes les S-distributions $f \in \Lambda(G)$ on en déduit que dans toute topologie sur $\Lambda'(G)$ admettant $\Lambda(G)$ comme dual le sous-espace des S-distributions f est dense (cf. proposition 7 du § 2).

3. Pour les S-distributions $f \in \Lambda(G)$ la formule de Plancherel-Weil peut s'écrire

$$(\mathfrak{F} f)(\hat{g}) = f(\mathfrak{F} \hat{g})$$

où dans le second membre il faut prendre soin de ne pas confondre $\mathfrak{F}$ symbole de la transformation de Fourier de $\hat{G}$ à G avec $\overline{\mathfrak{F}}$, inverse de la transformation de Fourier de G à $\hat{G}$ (on a $\overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F} f = f$ mais $\mathfrak{F}\mathfrak{F} f = \check{f}$).

Cette formule montre que pour f, considérée comme élément de $\Lambda'(G)$, $\mathfrak{F} f$ n'est autre que la transposée de l'application $\hat{g} \to \mathfrak{F} \hat{g}$ de $\Lambda(\hat{G})$ sur $\Lambda(G)$. Nous sommes ainsi conduit à poser la définition suivante:

Définition. *On appelle transformation de Fourier de $\Lambda'(G)$ à $\Lambda'(\hat{G})$ l'isomorphisme $S \to \mathfrak{F} S$ transposé de l'isomorphisme $\hat{f} \to \mathfrak{F} \hat{f}$ de $\Lambda(\hat{G})$ à $\Lambda(G)$.*

On désignera encore par $\overline{\mathfrak{F}}$ le symbole de l'application inverse de $S \to \mathfrak{F} S$ et on a comme ci-dessus $\overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F} S = S$ et $\mathfrak{F}\mathfrak{F} S = \check{S}$ (où $\check{S}(f) = S(\check{f})$).

Remarque: Si $f \in \Lambda(G)$ la formule de Plancherel-Weil prouve que sa transformée de Fourier en tant que S-distribution est égale à sa transformée de Fourier usuelle. Plus généralement ceci est encore vraie pour toute $f \in L^p(G)$ $p \geq 1$.

Définition. *On appellera spectre d'une S-distribution le support de sa transformée de Fourier.*

4. La fin de ce chapitre est consacrée à l'étude des S-distributions à support ponctuel. Cette étude est basée sur les lemmes qui suivent et dont le premier permet de montrer que pour toute $f \in \Lambda(G)$ il existe une suite de polynômes trigonométriques ϖ_n et une suite de fonctions $\theta_n \in \lambda(G)$ égales à 1 au voisinage de 0 telles que dans $\Lambda(G)$ la suite $(f - \varpi_n)\,\theta_n$ tende vers 0 quand $n \to \infty$.

Lemme 1. *Pour toute partie compacte $\hat{C}$ de $\hat{G}$, tout polynôme $\hat{P}$ sur $\hat{G}$ et tout entier positif l il existe:*

a) *Une famille de polynômes $\hat{Q}_i$ sur $\hat{G}$ $i = 1, 2, \ldots m$.*

b) *Une famille finie de caractères $\hat{a}_{i,j}$ sur G $j = 1, 2, \ldots m_i$.*

c) *Une suite de fonctions $\theta_n \in \lambda(G)$ égales à 1 au voisinage de 0 et à supports contenus dans un compact fixe.*

d) *Un entier positif d, indépendant de l, tels que si on pose*

$$\hat{\Theta}_{i,n} = \begin{cases} \mathfrak{F}\,(\langle x, \hat{a}_{i,1}\rangle - 1) \cdots (\langle x, \hat{a}_{i,m_i}\rangle - 1)\,\theta_n & \text{si } m_i \neq 0 \\ \mathfrak{F}\,\theta_n = \hat{\theta}_n & \phantom{\text{si }} m_i = 0 \end{cases}$$

on a

1° $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\hat{y}\in\hat{C}} n^l \int |P(\hat{x})\,(\hat{\theta}_n(\hat{x}-\hat{y}) - \sum_i \hat{Q}_i(\hat{y})\,\hat{\Theta}_{i,n}(\hat{x}))|\,d\hat{x} = 0$

2° *la famille des fonctions $n^{-d}|\hat{P}| * |\check{\theta}_n|$ est bornée sur tout compact.*

Nous démontrerons successivement:

A) Si le lemme est valable pour les groupes G' et G'' il l'est encore pour $G'\times G''$. En effet toute partie compacte de $\hat{G}'\times\hat{G}''$ est contenue dans un produit de compacts $\hat{C}'\times\hat{C}''$ et tout polynôme sur $\hat{G}'\times\hat{G}''$ est majoré par un produit $\hat{P}'\,\hat{P}''$ de polynômes respectivement définis sur $\hat{G}'$ et $\hat{G}''$. Prenons alors des éléments

$\hat{Q}'_i$ $i=1,2,\dots m'$, $\hat{a}'_{i,j}$ $j=1,2,\dots m'_i$, $\theta'_n(x)$, d' satisfaisant au lemme pour le groupe G' et relativement à $\hat{C}'$, à $\hat{P}'$ et à $l'=l+d''$.

$\hat{Q}''_i$ $i=1,2,\dots m''$, $\hat{a}''_{i,j}$ $j=1,2,\dots m''_i$, $\theta''_n(x'')$, d'' satisfaisant au lemme pour le groupe G'' et relativement à $\hat{C}''$, à $\hat{P}''$ et à $l''=l+d'$ et posons:

$$\hat{Q}_{i,j}(\hat{x}) = \hat{Q}'_i(\hat{x}')\,\hat{Q}''_j(\hat{x}'')$$

$$\hat{a}_{(i,j)k} = \text{l'un des } \hat{a}'_{i,k} \text{ ou } \hat{a}''_{j,k}$$

$$\theta_n(x) = \theta'_n(x')\,\theta''_n(x'')$$

$$d = d' + d''$$

dans ces conditions on a

$$\hat{\Theta}_{(i,j),n} = \hat{\Theta}'_{i,n}\,\hat{\Theta}''_{j,n}$$

puis

$$\int |\hat{P}'(\hat{x}')\,\hat{P}''(\hat{x}'')\,(\hat{\theta}_n(\hat{x}-\hat{y}) - \sum_{i,j}\hat{Q}_{i,j}\,\hat{\Theta}_{(i,j),n}(\hat{x}))|\,d\hat{x}$$

$$\leq \int |\hat{P}'(\hat{x}')\,\hat{P}''(\hat{x}'')\,(\hat{\theta}'_n(\hat{x}'-\hat{y}')\,\hat{\theta}''_n(\hat{x}''-\hat{y}'') - \sum_i \hat{Q}'_i(\hat{y}')\,\hat{\Theta}'_{i,n}(\hat{x}')\sum_j \hat{Q}''_j(\hat{y}'')\,\hat{\Theta}''_{j,n}(\hat{x}''))|\,d\check{x}'\,d\hat{x}''$$

$$\leq \int |\hat{P}''(\hat{x}'')\,\hat{\theta}''_n(\hat{x}''-\hat{y}'')|\,d\hat{x}'' \int |\hat{P}'(\hat{x}')\,(\hat{\theta}'_n(\hat{x}'-\hat{y}') - \sum_i \hat{Q}'_i(\hat{y}')\,\hat{\Theta}'_{i,n}(\hat{x}'))|\,d\hat{x}'$$

$$+ (\sum_i \int |\hat{P}'(\hat{x}')\,\hat{Q}'_i(\hat{y}')\,\hat{\Theta}'_{i,n}(\hat{x}')|\,d\hat{x}') \int |\hat{P}''(\hat{x}'')\,(\hat{\theta}''_n(\hat{x}''-\hat{y}'') - \sum_j \hat{Q}''_j(\hat{y}'')\,\hat{\Theta}''_{j,n}(\hat{x}''))|\,d\hat{x}''$$

$$\leq |\hat{P}''| * |\check{\hat{\theta}}''_n|(\hat{y}'') \int |\hat{P}'(\hat{x}')\,(\hat{\theta}'_n(\hat{x}'-\hat{y}') - \sum_i \hat{Q}'_i(\hat{y}')\,\hat{\Theta}'_{i,n}(\hat{x}'))|\,d\hat{x}'$$

$$+ (\sum_i |\hat{Q}'_i(\hat{y})| \int |\hat{P}'(\hat{x}')\,\hat{\Theta}_{i,n}(\hat{x}')|\,d\hat{x}') \int |\hat{P}''(\hat{x}'')\,(\hat{\theta}''_n(\hat{x}''-\hat{y}'') - \sum_j \hat{Q}''_j(\hat{y}'')\,\hat{\Theta}''_{j,n}(\hat{x}''))|\,d\hat{x}''$$

mais

$$\hat{\Theta}'_{i,n}(\hat{x}') = \sum_{j \in I(i)} \pm \hat{\theta}'_n(\hat{x}' - \hat{b}_{i,j})$$

où les $\hat{b}'_{i,j}$ appartiennent au sous-groupe engendré par les $\hat{a}'_{i,j}$ et ne dépendent pas de n pas plus que de l'ensemble fini $I(i)$: donc

$$\int |\hat{P}'(\hat{x}')\, \hat{\Theta}'_{i,n}(\hat{x}')|\, d\hat{x}' \leq \sum_{j \in I(i)} |\hat{P}'| * |\check{\hat{\theta}}'_n|\, (\hat{b}'_{i,j}).$$

On en déduit que les éléments ainsi construits satisfont à la première partie du lemme sur le groupe $G' \times G''$ et relativement à $C' \times C''$, à $P'P''$ et à l d'autre part en vertu de

$$n^{-d} |\hat{P}' \hat{P}''| * |\hat{\theta}'_n \hat{\theta}''_n| = (n^{-d'} |\hat{P}'| * |\hat{\theta}'_n|) \cdot (n^{-d''} |\hat{P}''| * |\hat{\theta}''_n|)$$

ces éléments satisfont aussi à la seconde partie du lemme.

B) Si G possède un sous-groupe ouvert compact H et si le lemme est valable pour H il l'est aussi pour G; ceci est en effet une conséquence triviale des propriétés suivantes:

a) Le dual de H est $\hat{G}/H^*$ où H^* est comme H ouvert et compact.

b) La mesure de Haar sur G (resp. $\hat{G}$) induit sur le sous-groupe ouvert H (resp. H^*) la mesure de Haar de ce sous-groupe.

c) Toute fonction continue sur G à support contenu dans H admet une transformée de Fourier constante sur les classes suivant H^* et réciproquement.

d) Tout caractère sur H est prolongeable en un caractère sur G.

e) Toute partie compacte de $\hat{G}$ est contenue dans une partie compacte image réciproque d'une partie compacte de $\hat{G}/H^*$ par l'homomorphisme canonique de $\hat{G}$ sur $\hat{G}/H^*$.

f) Tout polynôme sur $\hat{G}$ est constant sur les classes suivant H^*.

de sorte que si on a construit des éléments satisfaisant au lemme sur le sous-groupe H et relativement à l'image canonique de la partie compacte $\hat{C}$ de $\hat{G}$ dans $\hat{G}/H^*$ et au polynôme $\hat{P}$ considéré comme défini sur $\hat{G}/H^*$ on en déduit de suite des éléments satisfaisant au lemme sur $\hat{G}$ et relativement à $\hat{C}$ et à $\hat{P}$.

C) Si H est un sous-groupe compact de G et si le lemme est valable pour G/H on l'en déduira pour G à l'aide d'arguments analogues à ceux utilisés en B) auxquels on joindra les propriétés de la mesure de Haar sur G/H.

D) Utilisons alors le théorème de structure qui permet d'écrire pour tout groupe G $G = R^n \times G'$ où G' possède un sous-groupe ouvert compact Γ. Dans le dual de Γ toute partie compacte est finie et engendre un sous-groupe à un nombre fini de générateurs H^* et si H est dans Γ l'orthogonal de H^* le groupe G/H est isomorphe à un groupe $T^p \times \Phi$ ou Φ est un groupe fini. Les différentes parties A) B) C) réduisent donc la démonstration du lemme au cas de l'un des deux groupes R ou T (le cas d'un groupe fini est trivial). Mais à l'aide d'un isomorphisme local de T sur R la démonstration du lemme dans le cas du tore T se calque pas à pas sur celle qui va en être donnée dans le cas de R. Le lemme sera donc prouvé quand nous l'aurons prouvé pour R.

E) Démonstration du lemme dans le cas de R: pour tout couple d'entiers h et k positifs posons

$$[h, k] = \frac{d^k}{d x^k} \; (\exp. (2 i \pi x) - 1)^h (0)$$

on a

$$[h, k] \begin{cases} = 0 & \text{si } k < h \\ \neq 0 & \text{si } k = h \end{cases}$$

et déterminons par récurrence sur k les polynômes de dérivation D^h tels que

$$\frac{d^k}{d x^k} - \sum_{h=0}^{k} [h, k] \, D^h = 0$$

les polynômes qui sont les transformées de Fourier des polynômes de dérivation D^h satisfont alors aux relations

$$(-2 i \pi y)^k - \sum_{h=0}^{k} [h, k] \, P_h(y) = 0$$

de sorte que quel que soit y la fonction de z

$$\exp(-2 i \pi y z) - \sum_{h=0}^{k} (\exp (2 i \pi z) - 1)^h \, P_h(y)$$

a toutes ses dérivées d'ordre au plus égal à k nulles pour $z = 0$.

Soit alors $\theta(x) \in \lambda(R)$ et

$$\hat{\theta}(\hat{x}) = \int \theta(x) \exp. (2 i \pi \hat{x} x) \, d x$$

d'où quel que soit l'entier positif q si l'on pose $\theta^{(q)} = \dfrac{d^q \theta}{d x^q}$ on a

$$|\hat{\theta}(\hat{x})| \leq \| \theta^{(q)} \|_1 \, |4 \pi \hat{x}|^{-q}.$$

Posons alors

$$\theta_n(x) = \theta(n x) \quad \text{d'où} \quad \hat{\theta}_n(x) = \frac{1}{n} \hat{\theta}\left(\frac{\hat{x}}{n}\right)$$

on aura donc

$$|\hat{\theta}_n(\hat{x})| \leq \frac{1}{n} \frac{\|\theta^{(q)}\|_1}{(4\pi)^q} \left|\frac{n}{\hat{x}}\right|^q$$

donc pour $\hat{x}$ assez grand indépendamment de n

$$\Omega_n = |\hat{\theta}_n(\hat{x}-\hat{y}) - \sum_{h=0}^{N} P_h(\hat{y}) \mathfrak{F}(\exp(2i\pi x)-1)^h \theta_n|$$

sera majoré par

$$\frac{1}{n} \frac{\|\theta^{(q)}\|_1}{(4\pi)^q} \left(\left|\frac{n}{\hat{x}-\hat{y}}\right|^q + \sum_{h=0}^{N} |P_h(\hat{y})| 2^h \left|\frac{n}{\hat{x}-h}\right|^q\right)$$

ce qui donne l'inégalité

$$\Omega_n \leq \frac{1}{n} F(\hat{y}) \left|\frac{n}{\hat{x}}\right|^q$$

où $F(\hat{y})$ est borné sur tout compact en $\hat{y}$. Considérons alors l'intégrale

$$I_n = \int |\hat{x}|^a \Omega_n \, d\hat{x} = \int_{-\infty}^{-L} + \int_{-L}^{+L} + \int_{+L}^{+\infty} = I_n^1 + I_n^2 + I_n^3$$

on aura pour L assez grand indépendamment de n

$$I_n^1 + I_n^3 \leq \frac{2}{q-a-1} \frac{1}{n} F(\hat{y}) \frac{n^q}{L^{q-a-1}}$$

d'autre part on a toujours

$$\Omega_n \leq \int |\theta(nx)| \cdot |\exp(-2i\pi\hat{y}) - \sum_{h=0}^{N} P_h(\hat{y}) (\exp(2i\pi x)-1)^h| \, dx$$

$$\leq \frac{1}{n} \int |\theta(x)| \left|\exp(-2i\pi\hat{y}) - \sum_{h=0}^{N} P_h(\hat{y}) \left(\exp\left(2i\pi\frac{x}{n}\right)-1\right)^h\right| dx$$

où le second facteur de l'intégrale est une fonction de x qui a toutes ses dérivées nulles jusqu'à l'ordre N pour $x=0$ et dont la dérivée d'ordre $N+1$ est uniformément bornée quand $\hat{y}$ décrit un compact; donc θ étant à support compact on a une inégalité

$$\Omega_n \leq \frac{1}{n} B(\hat{y}) \frac{1}{n^{N+1}}$$

où $B(\hat{y})$ est bornée sur tout compact uniformément en n; on obtient donc la majoration

$$I_n \leq \frac{2}{n} \cdot \frac{F(\hat{y})}{q-a-1} \cdot \frac{n^q}{L^{q-a-1}} + \frac{2}{n} \cdot \frac{B(\hat{y})}{a+1} \cdot \frac{L^{a+1}}{n^{N+1}}$$

valable pour tout L assez grand indépendamment de n; en choisissant alors pour des entiers l et N_0 donnés les quantités q, N et L comme suit

$$q = N_0 + 2 \qquad N = (N_0+2)^2(1+l)$$
$$L = n^{3+N_0+l}$$

on en déduit que la suite $n^l I_n$ converge vers 0 uniformément sur tout compact en $\hat{y}$ et quel que soit l'entier positif a au plus égal à N_0. D'autre part on a

$$|\hat{x}|^a * |\check{\theta}_n|(\hat{y}) = \int |n\hat{x} + \hat{y}|^a |\hat{\theta}(\hat{x})| d\hat{x}$$

de sorte que les fonctions $n^{-a}|\hat{x}|^a * |\check{\theta}_n|$ sont uniformément majorées sur tout compact.

Ainsi quelle que soit la partie compacte $\hat{C}$ de $\hat{R} = R$, pour tout polynôme $\hat{P}$ de degré N_0 sur R et pour tout entier l, on satisfera aux conditions du lemme en prenant:

$$\hat{Q}_i = P_i(\hat{y}) \quad i = 0, 1, \ldots, (N_0 + 2)^2 (1 + l)$$

$$\langle x, \hat{a}_{i,j} \rangle = \exp.(2 i \pi x) \quad j = 1, 2, \ldots i$$

$$d = N_0$$

et en prenant pour fonctions θ_n les fonctions $\theta_n(x) = \frac{1}{n} \theta(nx)$ où $\theta(x)$ est une quelconque fonction de $\lambda(R)$ égale à 1 au voisinage de l'origine.

Lemme 2. *θ appartenant à $\lambda(G)$ pour que des θf convergent vers 0 dans $\Lambda_1(G)$ la fonction θ étant fixe, il suffit que pour chaque polynôme $\hat{P}$ sur $\hat{G}$ les $\|\hat{P}\mathfrak{F}f\|_1$ convergent vers 0.*

En effet la formule de Leibnitz et la formule duale (indiquée en c de la proposition 2) montrent que toute semi-norme sur les θf est alors majorée par une semi-norme $\|\hat{P}\mathfrak{F}f\|_1$.

Théorème 1. *Pour toute S-distribution à support ponctuel 0 il existe un polynôme de dérivation généralisé D tel que $S(f) = Df(0)$.*

En effet il est nécessaire et suffisant de montrer que dans chaque $\Lambda(K; H)$ il existe un polynôme de dérivation D tel que $S(f) = Df(0)$. Or si $\theta \in \lambda(K/H)$ est égale à 1 au voisinage de 0 il existe d'après le lemme 2 un polynôme P tel que

$$|S(f)| = |S(\theta f)| \leq \|\hat{P}\mathfrak{F}f\|_1.$$

Supposons d'abord $\mathfrak{F}f$ à support compact $\hat{C}$ et déterminons relativement à $\hat{C}$, $\hat{P}$ et $l = 0$ les éléments satisfaisant aux conditions du lemme 1, puis posons

$$\varpi_i = \begin{cases} \prod_{j=1}^{m_i} (\langle x, \hat{a}_{i,j} \rangle - 1) & \text{si} \quad m_i \neq 0 \\ 1 & \quad m_i = 0 \end{cases}$$

$$D_i f(0) = \int \mathfrak{F}f(\hat{y})\, \hat{Q}_i(\hat{y})\, d\hat{y}$$

dans ces conditions si

$$\Omega_n = \hat{P}\mathfrak{F}\,((f - \sum_i D_i f(0)\,\varpi_i)\,\theta_n)$$

on a

$$\Omega_n = \hat{P}\int \mathfrak{F} f(\hat{y})\,(\hat{\theta}_n(\hat{x}-\hat{y}) - \sum_i \hat{Q}_i(\hat{y})\,\hat{\Theta}_{i,n}(\hat{x}))\,d\hat{x}$$

donc

$$|\Omega_n| \leq \text{mes.}\,(C)\,\|f\|_1 \sup_{\hat{y}\in\hat{C}}.\int |P(\hat{x})\,(\hat{\theta}_n(\hat{x}-\hat{y}) - \sum_i \hat{Q}_i(\hat{y})\,\hat{\Theta}_{i,n}(\hat{x}))|\,d\hat{x}$$

d'où en vertu du lemme 1 et de $S(\theta f) = S(f)$ quelle que soit $\theta = 1$ au voisinage de 0

$$S(f) = \sum_i S(\theta_n\,\varpi_i)\,D_i f(0) = Df(0).$$

Mais D est indépendant de C car si $Df(0) = 0$ pour toutes les f dont le spectre est contenu dans un compact il en est de même pour toute f. Le théorème en résulte finalement à l'aide de la proposition 5 exprimée sur $\hat{G}$.

Toute S-distribution à spectre ponctuel étant transformée de Fourier d'une S-distribution à support ponctuel on aura un énoncé équivalent au précédent à l'aide de la notion suivante:

Définition. *On appellera polynôme généralisé sur G toute fonction qui sur chaque sous-espace $\Lambda(K;H)$ se réduit à un polynôme.*

Théorème 2. *Toute S-distribution à spectre ponctuel* 0 *est un polynôme généralisé.*

Remarque: Si l'on considère sur G l'algèbre topologique $\Lambda^\circ(G)$ dont les éléments sont les fonctions continues sur G sommables ainsi que leurs transformées de Fourier, munie de la norme $\|f\|_1 + \|\mathfrak{F}f\|_1$ on peut établir une suite de propositions analogues à celles qui ont été données ici; en particulier pour toute $f \in \Lambda^\circ(G)$ il existe une suite de fonctions à support compact $\theta_n \in \Lambda^\circ(G)$ égales à 1 au voisinage de l'origine telles que $(f(x) - f(0))\,\theta_n \to 0$ quand $n \to \infty$ et on en déduit de suite que tout idéal primaire (de composition ou de multiplication) de $\Lambda^\circ(G)$ est maximal; comme l'algèbre $\Lambda^\circ(G)$ est dense dans l'algèbre (de composition) $L^1(G)$ on en déduit le même résultat pour $L^1(G)$, résultat qui a été publié par Mr. I. Kaplansky.[1]

Bibliographie.

1. L. Schwartz: *Théorie des distributions.* Paris, Hermann, Actualités Scientifiques et Industrielles n^{os} 1091 et 1122.
2. G. W. Mackey: Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 34, 4, p. 157.

[1] I. Kaplansky: Proceedings of the National Academy of Sciences, 1949.

3. J. Dieudonné et L. Schwartz: *La dualité dans les espaces* ($\mathfrak{F}$) *et* ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$). (A paraître aux Annales de Grenoble.)

4. G. W. Mackey: *On infinite dimensional linear spaces.* Transaction of the American Mathematical Society, 57, p. 155.

5. ——: *On convex topological, linear spaces.* Transaction of the American Mathematical Society, 60, p. 519.

6. A. Weil: *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Paris, Hermann, Act. Sc. et Ind. n° 869.

7. H. Cartan et R. Godement: *Théorie de la dualité et Analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts.* Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, (3), LXIV, Fasc. 1.

8. R. Godement: *Théorèmes Taubériens et Théorie spectrale.* Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, (3), LXIV, Fasc. 2.

9. J. Dieudonné: *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques.* Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, (3), LIX, Fasc. 2.

10. Banach: *Théorie des opérations linéaires,* Warszawa 1932.

11. N. Bourbaki, Paris, Hermann, Act. Sc. et Ind. n° 916.

12. ——: » » 1045.

13. ——: » » 858.

14. ——: » » 1084.

15. ——: » » 1044.

16. ——: » » 1032.

17. ——: » » 1074.

18. J. Dieudonné: *Une généralisation des espaces compacts.* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1944, T. 23, p. 65.