WEIERSTRASS ET SONJA KOWALEWSKY[1].

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

La funeste année 1870 qui causa à deux grands peuples tant de deuils et de larmes, mais qui souleva en même temps et surexita les passions patriotiques, avait bouleversé les tranquilles habitudes du grand analyste des bords de la Sprée. Weierstrass était alors en passe d'être considéré, tant en Allemagne qu'à l'étranger même, comme le savant qui avait su pénétrer mieux que chacun de ses contemporains les énigmes les plus cachées de l'analyse. Trois ans plus tard, je vins à Paris suivre le cours d'Hermite; je n'oublierai jamais la stupéfaction que j'éprouvai aux premiers mots qu'il m'adressa: „Vous avez fait erreur, Monsieur, me dit-il: vous auriez dû suivre les cours de Weierstrass à Berlin. C'est notre maître à tous". Hermite était Français et patriote; j'appris du même coup à quel degré aussi il était mathématicien.

Weierstrass avait dû renoncer à son voyage d'été habituel. Il le déplore dans une lettre à Koenigsberger du 25 octobre 1870:

„Hoffentlich wird das kommende Jahr uns friedfertigen Leuten wenigstens den ungestörten Genuß unserer Ferien gewähren, deren wir nach der Aufregung der Gegenwart doppelt benötigt sein werden."

Il n'avait commencé ses conférences sur les fonctions elliptiques que devant 20 auditeurs seulement, alors que, deux ans auparavant, la même conférence en avait réuni 50.

„Umso schwerer trifft es uns, daß der bis jetzt unbeugsame Wille des hohen Senats uns nicht einmal den Ersatz gönnen mag, der uns aus Ihren Händen in der Person Ihres bisherigen weiblichen Zuhörers geboten wird und, mit den richtigen Gewichtskoeffizienten versehen, vielleicht ein recht wertvoller sein möchte."

Sophie Kowalewsky avait été, depuis le printemps de 1869, l'élève de Koenigsberger à Heidelberg, mais elle avait en même temps écouté les leçons de

[1] Un extrait de cet article a été publié dans le Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens à Paris 1900, p. 131—153.

Helmholtz et de Kirchhoff et aussi fait connaissance avec Bunsen. Avant même d'avoir 20 ans révolus, elle s'était vue transportée dans cette vie intellectuelle et élevée qui avait fasciné ses rêves de jeune fille. Les leçons du disciple — Koenigsberger était bien en effet un des premiers disciples de Weierstrass — lui avaient inspiré le désir d'aller s'asseoir aux pieds du maître lui-même, pour recueillir le savoir de ses propres lèvres. Si Weierstrass a eu plus d'un disciple qu'il a su enflammer par son enseignement, par sa personne même, nul n'apporta en l'approchant un si ardent enthousiasme, une attente aussi fortement tendue que Sophie Kowalewsky.

Or, elle avait vingt ans, et bien qu'elle appartint à une famille de grande noblesse ayant un grand train de vie, elle n'avait guère plus d'habitude du monde qu'une simple écolière, car l'éclat de sa sœur ainée, de son Anjuta adorée, l'avait toujours fait placer dans l'ombre. C'est avec modestie et non sans émotion qu'elle approchait l'homme qui était à ses yeux le plus grand savant de notre époque et qu'elle avait résolu d'avoir pour maître dans la science des sciences. Elle apportait à cette résolution une force de volonté qui, aux moments critiques de sa vie, dépassait toute mesure. Elle en avait donné une preuve quelques années auparavant lors de son mariage par la manière même dont elle l'avait conclu. Comment était Sonja à cette époque — c'est le nom que lui donnèrent toujours ses amis depuis ses années d'études — nous pouvons nous en faire une idée par une lettre d'une de ses tantes écrite deux ans auparavant, le 28 septembre 1868, et où l'on trouve une déscription de ses noces:

... „und zuletzt erschien Sonja, frisch, glückstrahlend und hübsch, wie man sich eine Braut nur wünschen kann. In Lisas (Lisa était la mère) Zimmer wurde die Brauttoilette vorgenommen: ein einfacher Anzug, in welchem sie aber reizend aussah. Ihre schönen Haare fielen in langen Locken auf den Nacken herab; ein Kranz von Myrthen und Orangeblüten war auf dem langen Tüllschleier befestigt. Kein einziges Schmuckstück, nichts von Ausputz, aber ein so großer Liebreiz, daß alle Anwesenden erklärten, niemals eine so liebliche Braut gesehen zu haben. Der strahlende Ausdruck verließ sie während der ganzen Handlung auf keinen Augenblick, aber es war nicht der Ausdruck einer oberflächlichen Regung, sondern die tiefe Überzeugung des wahren Glückes."

Si avec tout le reste de la famille à l'exception d'Anjuta qui avait été du complot, la tante lisait à tort dans „l'expression radieuse" de Sonja le bonheur d'un amour naissant, elle ne se trompait pas en interprétant cette expression comme le reflet, non pas d'un sentiment fugitif, mais d'une intime conviction de vrai bonheur.

Tels étaient l'état d'âme et la physionomie de Sonja au moment où elle s'engageait dans ce pseudo-mariage dont le seul objet était à ses yeux, de lui ouvrir toutes grandes les portes de la science des nombres et de l'espace. On se représente aisément, d'après cela, ce que fut sa première entrevue avec Weierstrass. Elle se présenta le visage recouvert par un grand chapeau rabattu afin de cacher la timidité de ses 20 ans et l'émotion que lui causait cette épreuve qui, à ses yeux, devait décider de son avenir. Weierstrass ne vit rien de ces yeux merveilleux à l'éloquence desquels nul, quand elle le voulut, n'a pu résister. Il raconte lui-même deux ou trois ans plus tard, à la suite d'une visite à Heidelberg, comment Bunsen, le vieux célibataire endurci, lui aurait dit, sans savoir qu'elle était son élève, que Sonja était „eine gefährliche Frau“. Bunsen aurait ajouté, à l'appui de son dire, qu'il s'était promis de ne jamais admettre de femme dans son laboratoire, et surtout une femme russe; mais Sonja était venue le trouver „und habe ihn so allerliebst gebeten, daß er nicht habe widerstehen können und seinem Vorsatze untreu geworden sei“. Il avait alors accordé à une des amies et compatriotes de Sonja le privilège demandé. Il circulait à ce moment des bruits de toutes sortes et non des plus avantageux sur le compte des étudiantes russes qui avaient leur principale résidence à Zuerich, et Weierstrass n'était guère prédisposé en faveur d'une élève qui appartenait peut-être à cette catégorie tant décriée. Il ne paraît pas avoir eu le moindre pressentiment que Sonja dût être un jour le plus cher de ses disciples, celui qui se rapprocherait de lui plus qu'aucun autre. Il demande à Koenigsberger son opinion sur les aptitudes de l'étrangère aux études mathématiques approfondies et s'enquiert également si „die Persönlichkeit der Dame die erforderlichen Garantien bietet“. Mais toutefois il se déclare décidé, en cas de réponse favorable, à poser de nouveau devant le consistoire académique, la question de l'accès de Mme Kowalewsky aux conférences de mathématiques.

Le haut consistoire demeura inébranlable, et ce n'est que bien des années plus tard, quand Sonja était déjà professeur à l'université de Stockholm, qu'elle finit par obtenir au cours d'une visite faite à Berlin en temps de vacances, la permission d'assister à quelques leçons de Weierstrass.

Cependant aux demandes qu'il s'était vu adresser, Koenigsberger répondit d'une manière plus que satisfaisante. Mme Kowalewsky réitera ses visites chez Weierstrass, fut moins timide et renonça au chapeau rabattu. Elle avait appris les fonctions elliptiques au cours de Koenigsberger: Weierstrass lui remit un cahier de ses conférences sur les fonctions hyperelliptiques. Il fut si satisfait de la capacité qu'elle déploya à pénétrer dans ce sujet, qu'il s'offrit à lui faire, à titre privé, le même cours qu'il professait à l'Université.

Elle allait régulièrement chez lui tous les dimanches, l'après-midi, et Weierstrass lui rendait sa visite chaque semaine. Dans les intervalles mêmes ils durent se voir souvent, malgré toute la discrétion que mettait Sonja à ne pas abuser des moments de son illustre maître. Il lui écrit encore le 22 novembre 1872 dans un mot adressé chez elle à Berlin:

„Da ich heute noch nicht wieder lese, so wird es mich durchaus nicht angreifen, wenn ich Dir den Weg, der mir jetzt der gangbarste scheint, andeute. Sei also unbesorgt, daß Du mir ungelegen kommen mögest, was bei meiner lieben Freundin überhaupt niemals der Fall sein kann".

Cet enseignement se continua de l'automne 1870 à l'automne 1874. Weierstrass était souvent empêché par suite de refroidissements fréquents, et en outre Sonja et lui s'absentaient pendant les vacances.

C'est à ces circonstances que l'on doit une série de lettres de Weierstrass à Sonja; il n'y en a pas moins de 41, la première datée du 11 mars 1871, la dernière du 18 août 1874. S'il en est dans le nombre qui ont un intérêt scientifique, elles ont cependant avant tout l'importance de documents biographiques. On voit les relations se resserrer de plus en plus entre le maître et l'élève et Sonja finir par jouer un rôle considérable dans la vie de Weierstrass. Quand elle eut quitté Berlin en automne 1874, la correspondance continua à intervalles plus ou moins longs pendant le reste de ses jours. La dernière lettre de Weierstrass est datée du 5 février 1890. Cette partie de leur correspondance comprend 37 lettres, dont un certain nombre ont une grande importance scientifique. De longtemps cependant on ne saurait les publier intégralement, plus d'une opinion et plus d'un jugement y étant formulés sur le compte de personnes encore vivantes. Quant aux lettres de Sophie Kowalewsky à Weierstrass, il les brûla toutes après sa mort ainsi que la plupart des autres lettres qu'il avait reçues, et probablement aussi plus d'un manuscrit mathématique (ce qui est encore plus regrettable).

Après la mort de Sophie Kowalewsky, Weierstrass sût que ses lettres étaient entre mes mains, et ne fit aucune objection. J'avais cependant déclaré ne vouloir lire ces lettres — j'en connaissais déjà une partie de la dernière époque par Sonja elle-même — que dans le cas où je survivrais à Weierstrass. C'est pourquoi cette correspondance n'a pas été mise à la disposition de ma sœur, le romancier et dramaturge Anne-Charlotte Leffler, et par là s'explique le peu de place qu'elle donne dans sa biographie [1] aux relations de Sonja avec Weierstrass.

---

[1] Anna Charlotta Leffler, Duchessa di Cajanello: Sonja Kowalewsky, hvad jag upplefvat tillsammans med henne och hvad hon berättat om sig själf. Stockholm, Albert Bonniers forlag.

Traduit en allemand par H. von Lenk: Sonja Kowalewsky, was ich mit ihr zusammen erlebt habe und was sie mir über sich selbst mitgeteilt hat. Leipzig, Philipp Reclam jun.; en anglais

Elle ne pût en effet ni montrer l'influence capitale de ces relations sur la vie de l'héroine ni donner une idée exacte de la valeur mathématique de Sonja.

Les leçons de Sonja avec Weierstrass commencèrent l'automne 1870. Les conférences subirent leur première interruption au printemps 1871, par suite de l'aventureux voyage que Sonja entreprit à Paris, en plein siège. La biographie d'Anne-Charlotte Leffler raconte cette odyssée. Elle passa encore une fois à Berlin le semestre d'hiver 1871—72 en compagnie de sa fidèle et dévouée amie, Julia Lermontoff. Les lettres montrent que les leçons embrassaient surtout le thème favori de Weierstrass, qui devint également par la suite celui de Sophie Kowalewsky, savoir: les fonctions abéliennes. Sonja passa la seconde partie de l'été 1872 chez ses parents dans leur domaine de Palibino; le séjour à la campagne et aussi la certitude de pouvoir enfin poursuivre ses études de prédilection dans les conditions les plus favorables paraissent avoir eu une influence particulièrement bienfaisante sur sa santé, déjà fortement ébranlée par le surménage et les émotions. Elle revint à Berlin en octobre, embellie et développée; ce n'était plus une timide jeune fille mais bien une dame du grand monde, à l'esprit hautement instruit, charmant invinciblement tous ceux qui l'approchaient par l'intérêt de sa conversation. Weierstrass ne paraît pas avoir connu jusqu' alors les détails curieux de sa vie privée ni les circonstances qui se rattachaient à son mariage; mais il semble qu'un soir, le 25 octobre 1872, — on peut fixer le date grâce à une lettre de Weierstrass du lendemain — sous le poids de la conscience lui reprochant d'apparaître ainsi dans une fausse lumière aux yeux de son paternel ami et maître, elle lui ait ouvert tout son cœur. Il écrit le 26 octobre 1872 au matin:

„Ich habe mich diese Nacht viel mit Ihnen beschäftigt, wie es ja nicht anders sein konnte, — meine Gedanken haben nach den verschiedensten Richtungen hin und her geschweift, sind aber immer wieder zu einem Punkte zurückgekehrt, über den ich noch heute mit Ihnen sprechen muß. Fürchten Sie nicht, daß ich Dinge berühren werde, über die wenigstens jetzt nicht zu reden wir übereingekommen sind. Was ich Ihnen zu sagen habe, hängt vielmehr mit Ihren wissenschaftlichen Bestrebungen eng zusammen, — ich bin aber nicht sicher, ob Sie bei der liebenswürdigen Bescheidenheit, mit der Sie über das, was Sie jetzt schon leisten können, urteilen, auf meinem Plan einzugehen geneigt sein werden. Doch das alles läßt sich mündlich besser besprechen. Gestatten Sie mir also, obwohl erst wenige Stunden seit unserem letzten Zusammensein,

---

par L. von Cassel: Sonja Kowalewsky. Biography and autobiography. I. Memoir. II. Reminiscences of childhood written by herself. London, Walter Scott, Ltd.

das uns einander so nahe gebracht hat, verflossen sind, Sie heute vormittag abermals auf ein Stündchen zu besuchen und mich auszusprechen."

Il voulait sans doute conseiller à Sonja d'acquérir par le grade du Docteur allemand un témoignage officiel de l'achèvement de ses études. Cette pensée semble d'ailleurs avoir été étrangère à Sonja, et si elle y acquiesça finalement, ce fut bien plus par considération pour Weierstrass que pour satisfaire un désir personnel. La franchise de Sonja vis-à-vis de Weierstrass lui fut plus tard d'un grand secours pour l'explication inévitable avec ses parents. Sa mère frappée lors d'une visite à Berlin des singularités de ses relations avec son mari, avait enfin reçu l'aveu du véritable état des choses. Très émue elle chercha à faire valoir qu'aucune personne estimable, en Allemagne du moins, connaissant la vérité, ne voudrait continuer ses relations avec elle. „Que crois-tu p. ex. qu'en dirait Weierstrass, objectaitelle, s'il connaissait la vérité?" „Mais il la connaît depuis longtemps déjà" répondait Sonja. La mère profondément troublée n'insista plus.

Weierstrass avait traité pendant l'automne 1872 entre autres choses le calcul de variation, un des thèmes favoris de ses conférences à l'université. Il est revenu 9 fois sur ce sujet. Il y remporta les plus beaux triomphes grâce à sa sagacité critique et l'art qu'il avait de présenter d'une façon simple et claire les raisonnements les plus subtils. Bien que ces conférences soient connues en partie par le livre de Kneser, le monde des mathématiciens a néanmoins le droit d'espérer que le désir suprême exprimé par Weierstrass sera respecté et qu'on publiera bientôt ces conférences toutes entières. Weierstrass avait confié des manuscripts détaillés sur ce sujet à H. A. Schwarz qui s'était chargé avec la publication. Il faut espérer que ces manuscripts se trouvent parmi les papiers posthumes du fécu Schwarz. Weierstrass a également développé devant Sonja la théorie des équations différentielles linéaires. À ce sujet il dit dans une lettre du 4 novembre:

„Über die linearen Differentialgleichungen besitze ich noch zwei vor langer Zeit gemachte Aufzeichnungen, die ich meiner lieben Freundin ebenfalls überschicke. (In dem Hefte Nr. 2, 4.) Zur Vergleichung mit dem gestern Dir Vorgetragenen werden sie Dir vielleicht nützlich sein, doch bitte ich Dich, bei der Ausarbeitung Dich im wesentlichen so zu fassen, wie ich es Dir angedeutet habe. Nur die Zurückführung der höheren Differentialgleichungen auf die gestern von mir gewählte Form wirst Du hinzufügen müssen."

À la vérité Weierstrass avait écrit à deux reprises quelques pages sur la théorie des équations différentielles linéaires. La première fois en 1861 il avait choisi un exposé, semblable à celui employé plus tard par Casorati. Le second travail écrit en 1863 est semblable à celle que publia plus tard Hamburger. De très bonne heure, probablement après ses premières années d'études, Weierstrass avait approfondi la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants. On a trouvé parmi ses papiers posthumes un exposé particulièrement élégant de cette théorie. Il est bien probable qu'il a dû dès lors entreprendre l'étude des équations différentielles linéaires à coefficients variables. On sait qu'il a employé cette théorie dans ses recherches sur les surfaces minima limitées par des droites. Lorsqu' à un âge avancé il songea à publier ses travaux, il chercha en vain à retrouver les deux exposés de la théorie des équations différentielles linéaires. Sophie Kowalewsky se rappelait bien les avoir eus entre les mains, mais pensait les avoir rendus à Weierstrass. Ils ont peut-être disparu en même temps qu'un grand nombre d'autres manuscrits. Weierstrass avait l'habitude d'emporter dans ses voyages une grande caisse en bois blanc contenant des annotations faites par lui sur divers sujets mathématiques. Sonja ressentit toujours la plus grande inquiétude pour le sort de ces documents. La caisse avait été enrégistrée un certain jour vers 1880 avec d'autres bagages mais à l'arrivée elle manquait à l'appel et ne put jamais être retrouvée. D'ailleurs Weierstrass ne tenait pas ses propres papiers et annotations en fort bon ordre. Il prêtait à droite et à gauche sans s'occuper beaucoup de savoir si on lui rendait ce qu'il avait prêté. On peut espérer qu'il sera possible encore de réunir un grand nombre de manuscrits de Weierstrass, disparus de cette façon. S'ils seront mis à la disposition de la rédaction des Acta mathematica, ils seront publiés sans retard.

Bien que les deux exposés, dont il est question dans la lettre à Sophie Kowalewsky, soient probablement perdus pour toujours, de quelque façon que la catastrophe se soit produite, on peut néanmoins s'en faire une idée assez exacte au moyen d'autres annotations qu'on a réussi à retrouver. C'est une particularité de la façon de travailler de Weierstrass, qu'il recommençait plusieurs fois la rédaction de chaque travail, souvent d'après des principes et des raisonnements différents, jusqu'à ce qu'il est obtenu une parfaite clarté. Pour lui un simple résultat n'avait que peu de valeur. Il voulait pénétrer entièrement et à fonds les raisons de ce résultat et il voulait dans chaque cas particulier donner une démonstration qui pût être considérée comme la seule juste et la seule naturelle. Ce n'est que lorsqu'il en était arrivé là qu'il jugeait son étude mure pour la publication. Mais il lui est arrivé bien de fois de différer encore la publication parce qu'il voulait également épuiser d'autres questions voisines.

Chaque travail devait, avant d'être publié, se présenter comme un tout achevé dans tous les sens. En général les rédactions préliminaires ont été détruites par Weierstrass lui-même. Il semble n'avoir conservé de propos délibéré que les différentes rédactions de la théorie des fonctions abéliennes; parmi ses papiers posthumes il s'en trouve jusqu'à 5 exposés différents.

En examinant avec soin les papiers posthumes de Sophie Kowalewsky, qui se trouvaient d'ailleurs dans le plus grand désordre, j'ai réussi à découvrir une esquisse préliminaire du traité de 1863 écrite de la main propre de Weierstrass et datée par lui. En outre je trouvai une feuille détachée. En examinant les papiers laissés par Weierstrass lui-même j'ai reconnu que cette feuille appartenait à une esquisse du traité de 1861. Parmi les papiers de Sophie Kowalewsky il se trouve encore une troisième esquisse de la main de Weierstrass et qui faisait probablement partie d'un traité encore plus ancien que les précédents. Aucune de ces esquisses n'est achevée et ne possède une forme permettant de la comprendre dans le recueil des œuvres de Weierstrass. Cependant il y aurait un grand intérêt à les publier à titre de documents. Il en ressort, entre autres choses, d'une façon irréfutable, que la célèbre théorie de Weierstrass concernant „die Elementarteiler" dans les formes bilinéaires et quadratiques a son origine dans ses travaux sur les équations différentielles linéaires. On y voit aussi clairement qu'aucune des questions fondamentales relatives aux équations différentielles linéaires qui ont été reprises plus tard n'était étrangère à Weierstrass vers 1861—63 à l'exception toutefois des problèmes importants que Poincaré a résolus.

Au printemps 1873 aussi bien Weierstrass et Sonja tombèrent malades et des lettres furent échangées entre eux. Sonja partit pour la Suisse espérant y reprendre des forces et Weierstrass lui écrivit des conseils paternels lui enjoignant de prendre suffisamment de repos et de laisser là les mathématiques pour temps. Il dit le 18 avril 1873:

„Hast Du wirklich die Absicht, zum 1. Mai wieder hier zu sein, — d. h. ich meine, läßt sich diese Absicht ausführen —, so möchte ich Dir den Rat geben, bis dahin jede ernste Arbeit zu vermeiden, — wenn es Dir bei dem bewegten Leben, in das Du hineingeraten bist, überhaupt möglich sein wird, an eine solche zu denken —, und Deine Kraft für die regelmäßigen Studien aufzusparen, welche wir nach Deiner Rückkehr wieder aufnehmen werden. Hoffentlich werden wir dann wenigstens so weit gelangen, daß Du in den Sommermonaten das Material zu einer lohnenden Arbeit beschaffst, die Du während des Herbstes wirst ausführen können.

— —

Ich habe indessen recht viele Besuche von mathematischen Freunden gehabt, die während der Osterferien sich zahlreich hier eingefunden und fast alle mehrmals mir einige Stunden geschenkt haben. Namentlich mit Heine aus Halle und Baltzer aus Gießen habe ich mich unterhalten, mit dem letztern auch über die „Geometrie des endlichen Raumes", für welche meine übrigen mathematischen Freunde — meinen kleinen Liebling, den Du kennst, ausgenommen — wenig Sympathie besitzen. Ich teile Dir dies mit, damit Du nicht etwa glaubst, ich sei eigentlich krank, oder so verstimmt, daß darunter das Interesse für das, was mir sonst am Herzen liegt, gelitten habe."

La conception qu'avait Weierstrass de la „Geometrie des endlichen Raumes", se retrouve après lui en parties mais non comprise d'une manière satisfaisante dans les travaux de Killing. Il semble que dans ses conversations intimes avec Sonja il s'est beaucoup occupé de cette question et surtout de la mécanique dans cet espace. Sonja garda toujours le plus ardent enthousiasme pour les idées de Weierstrass à ce sujet; elle racontait qu'il avait créé toute une mécanique nouvelle qui surpassait en simplicité, en clarté et en définition élégante des lois naturelles anciennes et nouvelles la mécanique actuellement en vigueur, et qui néanmoins n'avait rien de commun avec les travaux d'autres savants dans le même sens. Il ressort d'une lettre de quelques jours plus tard (25 avril) que la maladie de Weierstrass avait été cette fois assez sérieuse.

„Doch hat sich die Befürchtung, die ich anfangs allerdings hatte, daß ein früheres Leiden, welches so störend in mein Leben eingegriffen hat, sich erneuern könnte, als ganz unbegründet erwiesen . . . Gearbeitet habe ich sehr wenig und mit geringem Erfolg, wenn ich auch bisweilen den ganzen Tag über mich beschäftigt habe, — es wollten weder neue Gedanken kommen noch die alten sich so, wie es mir vorschwebt, in Worte fassen lassen."

Les relations cordiales qui règnaient au printemps 1873 entre le maître et l'élève ressortent de ce qui suit. Sonja, dans un moment de découragement, exprime la crainte que „die Schülerin könnte ihm, Weierstrass, lästig werden." Il répond:

„. . . In allem Ernst gesprochen, liebste, teuerste Sonja, sei versichert, ich werde nie vergessen, daß es die Dankbarkeit meiner Schülerin ist, der ich den Besitz — nicht meiner besten, sondern meiner einzigen wirklichen Freundin verdanke. Also wenn Du die Gesinnung, welche Du mir bisher bewiesen, auch in Zukunft bewahrest, so kannst Du fest darauf rechnen, daß ich Dir auch in Deinen wissenschaftlichen Bestrebungen stets treu zur Seite stehen werde."

Sonja revint à Berlin en mai 1873 et l'enseignement continua comme auparavant. Au mois d'août Weierstrass alla passer quelque temps dans l'île de Ruegen et Sonja partit pour la Suisse. Il y a de cette époque (20 août 1873) une longue lettre de Weierstrass dans laquelle il écrit:

„Gearbeitet habe ich noch gar nichts, ausgenommen daß ich an Richelot einen ziemlich ausführlichen Brief mit einer gedrängten Darstellung der Untersuchungen, mit denen ich mich in den letzten Jahren beschäftigt, geschrieben habe. Leider habe ich darauf eine sehr traurige Antwort erhalten; Richelot, der mir ein so lieber Freund ist, ist schwer erkrankt — chronisch — und meint, daß er wohl den letzten Brief an mich schreibe; er geht zwar auf meine Mitteilungen mit lebhaftem Interesse ein, spricht aber hauptsächlich über seine Wünsche inbetreff der Wiederbesetzung seiner Stelle, die er mir dringend ans Herz legt."

Weierstrass cite ensuite de la lettre de Richelot le jugement suivant sur ses propres travaux au sujet des fonctions abéliennes:

„Gerade daß Sie einen anderen, einen natürlicheren Weg einschlagen in der mathematischen Hauptfrage dieses Jahrhunderts als Riemann, Clebsch und Gordan und daß Sie ihn bis zu einer klar ausgesprochenen Grenze verfolgen, ist es, was für mich von so großer Bedeutung ist. Noch immer bedaure ich, daß Sie den zweiten Teil Ihrer ersten Abhandlung (über die hyperelliptischen Funktionen), die doch schon das Wesentliche Ihrer Methode enthält, nicht haben erscheinen lassen. Weder die Arbeiten Riemanns, noch weniger das Buch von Clebsch und Gordan hätten Sie davon abhalten sollen. Doch müssen Sie wohl vollgewichtige Gründe dazu gehabt haben."

Weierstrass est très enthousiaste de la nature de l'île de Ruegen et de son climat, il a souvent pensé à Sonja et désiré qu'elle fût auprès de lui:

„Wie schön würden wir hier — Du mit Deiner phantasievollen Seele und ich angeregt und erfrischt durch Deinen Enthusiasmus — träumen und schwärmen über so viele Rätsel, die uns zu lösen bleiben, über endliche und unendliche Räume, über die Stabilität des Weltsystems und alle die anderen großen Aufgaben der Mathematik und Physik der Zukunft. Aber ich habe schon lange gelernt, mich zu bescheiden, wenn nicht jeder schöne Traum sich verwirklicht."

Il s'inquiète au sujet de la santé de Sonja:

„Aufgefallen, liebste Freundin, ist es mir, daß Du in Deinem letzten Briefe über Dein Befinden ganz schweigst. Das könnte mich allerdings insofern beruhigen, als man, wenn man sich ganz wohl fühlt, darüber eben nicht spricht; aber Du weißt, daß ich kein Freund von negativen Beweisen bin, die niemals volle Befriedigung gewähren. Ich bitte also um direkte Angabe."

Sonja revint à Berlin vers la fin d'octobre 1873 et l'enseignement de Weierstrass reprit son cours. Cependant il devint recteur de l'université pendant l'année universitaire 1873—74 et les devoirs de sa fonction l'obligeaient à être extrêmement économe de son temps. Néanmoins il paraît avoir trouvé dans la société de Sonja la meilleure récréation après ces travaux, qui avaient peu de charmes pour lui. Le 19 novembre il lui envoie:

„... eine ganze Serie von „Liedern ohne Worte", welche sich sämtlich auf die geradlinig begrenzten Minimalflächen beziehen. Ich habe die einzelnen Blätter gleich gestern abend zusammengesucht; sie repräsentieren verschiedene Stadien der Untersuchung, sodaß das schließlich Bleibende nicht so sehr umfangreich sein wird. Ich bitte aber, sie genau in der Aufeinanderfolge, in der sie liegen, erhalten zu wollen, zumal da sie ohne mündliche Erläuterung Dir doch wohl unentzifferbar sein werden. Ich wollte sie aber sofort Deinen Händen anvertrauen, damit sie bei mir nicht wieder durcheinander kommen.

Damit wir aber die Zeit vorher nützlich anwenden, so würde es mir lieb sein, wenn Du Dich in das gestern Dir Mitgeteilte einigermaßen schon heute einstudiert hättest; wir könnten dann unmittelbar daran anschließen und vielleicht schon am nächsten Sonntag mit der Entwicklung der linearen Differentialgleichung, zu welcher das zu lösende Problem führt, fertig werden. Dann kommt allerdings noch einiges die Theorie solcher Differentialgleichungen überhaupt Betreffende zur Sprache, was notwendig ist, um die Natur der unter den Koeffizienten der Gleichung bestehenden transzendenten Relationen ins Licht zu setzen. Diese Relationen fehlen bei Riemann ganz, und dies ist einer der Hauptmängel seiner Theorien."

Dans une lettre du 6 décembre 1873 qui contient diverses additions à sa dernière leçon, il écrit:

„In Beziehung auf das bei unserem letzten Zusammensein Besprochene habe ich Dir noch etwas Interessantes mitzuteilen. Wir haben bis jetzt angenommen, daß die Funktion $\varphi(s)$ lauter imaginäre und **ungleiche** einfache Faktoren habe. Das Letztere ist aber nicht notwendig. Denn alle Multiplikations- und Divisions-Gesetze bleiben bestehen, wenn man, ohne über die Beschaffenheit von $\varphi(s)$ irgend eine Annahme zu machen, die Multiplikation zweier komplexer Zahlen

$$f(e) = a_0 e_0 + a_1 e_1 \cdots + a_{2r-1} e_{2r-1}$$
$$g(e) = b_0 e_0 + b_1 e_1 \cdots + b_{2r-1} e_{2r-1}$$

so erklärt: es ist

$$f(e)\,g(e) = h(e) = h_0 e_0 + h_1 e_2 \cdots h_{2r-1} e_{2r-1}$$

wenn $f(s)\,g(s) - h(s)$ durch $\varphi(s)$ teilbar ist. Wenn nun jede Gleichung

$$F(x, e) = 0$$

oder

$$f_0(e) x^n + f_1(e) x^{n-1} + \cdots f_n(e) = 0$$

lösbar sein soll, so ist notwendig, daß $\varphi(s)$ (als gewöhnliche Funktion von s betrachtet) für keinen reellen Wert von s verschwinde, — aber es ist auch **nur** diese Bedingung erforderlich. Hat aber $\varphi(s)$ gleiche Faktoren, sodaß

$$\varphi(s) = (s^2 + k_1 s + l_1)^{\nu_1} \dots (s^2 + k_\mu s + l_\mu)^{\nu_\mu}$$

ist, wobei die k, l reell sind und $\nu_1 + \nu_2 + \cdots = r$ ist, so modifiziert sich der Satz über die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung, und es ist dieselbe nicht mehr gleich n^r wie in dem Falle, wo $\nu_1, \nu_2, \dots$ sämtlich gleich 1 sind. Nun, meine liebe Schülerin, denke einmal darüber nach, wie muß $\varphi(s)$ beschaffen sein, — d. h. welches Multiplikationsgesetz muß man annehmen, damit die Gleichung $n$ten Grades nur allgemein n Wurzeln habe?"

La théorie de Weierstrass sur les nombres complexes avec n unités principales ne fut publiée qu'en 1884. Relativement à cette théorie Weierstrass m'écrit le 7 juin 1880:

„Ihre Anfrage, wann ich zuerst über die allgemeinen komplexen-Zahlen etwas vorgetragen habe, beantworte ich dahin, daß dies im Wintersemester 1861—62 geschehen ist; ein Herr Schütz hat aus meinem damaligen Vortrage einiges veröffentlicht, ohne seine Quelle zu nennen. Dann habe ich zweimal im Seminar den Gegenstand ausführlicher behandelt. Dem ersten dieser Vorträge, über den Herr Kossak eine ziemlich schlechte Mitteilung, in der gerade das Wesentlichste fehlt, publiziert hat, wohnte auch Herr Hatzidakis bei, der dann später selbständig über den Gegenstand Untersuchungen gemacht hat. Herr Hettner besitzt, wie ich glaube, eine Ausarbeitung eines späteren Vortrags. Mich hatte die Schlußbemerkung der Gaußischen kurzen Mitteilung über die Bedeutung der komplexen Zahlen (in der Selbstanzeige seiner Untersuchungen über die biquadratischen Reste) zu einem nähern Eingehen auf die Sache angeregt."

Tout cela caractérise la méthode de travail de Weierstrass. Il fait de conférences sur des recherches si importantes en 1861 et ne les publie qu'en 1884. Et encore nous devons probablement cette publication à l'insistance de M. Schwarz. Le 6 mai 1874 Weierstrass écrit:

„Inbetreff des am Sonntag besprochenen Gegenstandes kann ich Dir jetzt folgendes mitteilen.

Es sei λ eine reelle Veränderliche und $f(\lambda)$ eine Funktion derselben, welche nur folgenden Bedingungen unterworfen ist:

1) Sie soll bei endlichen Werten von λ, d. h. wenn man diese Größe zwischen zwei beliebigen endlichen Größen λ_1, λ_2 einschließt, nicht unendlich groß werden;

2) sie kann an beliebig vielen, auch an unendlich vielen Stellen unstetig oder unbestimmt sein, aber in der Art, daß das Integral $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\, d\lambda$ unter Zu-

grundelegung der Riemannschen Erklärung einen Sinn hat. (S. Riemanns Abhandlung über die Fouriersche Reihe).

3) Wenn λ sich den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ nähert, so braucht $f(\lambda)$ nicht endlich zu bleiben, muß aber so beschaffen sein, daß

$$\frac{\log |f(\lambda)|}{\lambda^2}$$

für $\lambda = \pm\infty$ verschwindet. (Das ist z. B. der Fall, wenn $f(\lambda)$ unendlich wird wie eine positive Potenz von λ oder wie $e^{\alpha\lambda^\beta}$, wo α, β positive Größen sind und $\beta < 2$ ist.)

Alsdann gilt folgender Satz. Es seien u, v, w komplexe Veränderliche, von denen die erste der Bedingung unterworfen ist, daß ihr reeller Teil stets positiv sein soll, so hat das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, e^{-(u\lambda^2 + v\lambda + w)}\, d\lambda$$

bei endlichen Werten von u, v, w stets einen bestimmten, ebenfalls endlichen Wert und ist eine reguläre Funktion von u, v, w. Dieselbe kann also, wenn u', v', w' irgend ein System bestimmter Werte von u, v, w ist, nach ganzen positiven Potenzen von $u-u'$, $v-v'$, $w-w'$ in eine Reihe entwickelt werden, welche stets konvergiert, wenn u so nahe bei u' angenommen wird, daß in allen andern Werten dieser Größe, die denselben Abstand von u' haben, der reelle Teil positiv ist.

Diese Reihe wird ferner erhalten, wenn man

$$f(\lambda)\, e^{-(u\lambda^2 + v\lambda + w)}$$

nach Potenzen von $u-u'$, $v-v'$, $w-w'$ entwickelt und darauf jeden Koeffizienten der so entstehenden Reihe von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert.

Dieser Satz, angewandt auf das Integral

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, e^{-\frac{(\lambda - x)^2}{4t}}\, d\lambda,$$

lehrt, daß dasselbe, wenn die Größe t der Bedingung unterworfen wird, daß ihr reeller Teil stets positiv sei $\left(\text{also auch der von } \frac{1}{t}\right)$, während x unbeschränkt veränderlich ist, in eine beständig konvergierende Reihe von der Form

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \left\{ \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\, x + \cdots + \varphi_n(t)\, x^n + \cdots \right\}$$

entwickelt werden kann, worin $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t), \ldots$ reguläre Funktionen von t sind. Es genügt ferner $\varphi(x, t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}$$

in dem ganzen Bereich (x, t), für welchen die Funktion definiert ist.

Der Beweis des aufgestellten Satzes ist sehr einfach; auch läßt sich ein viel allgemeinerer begründen, der zeigt, wie aus ganz willkürlichen Funktionen einer reellen Veränderlichen λ analytische Funktionen komplexer Größen abgeleitet werden können.

Über alles dies und manches daran sich Knüpfende mündlich Weiteres und Näheres.

Du siehst, teuerste Sonja, wie Deine — Dir so einfach scheinende — Bemerkung über die Eigentümlichkeit partieller Differentialgleichungen, daß eine unendliche Reihe einer solchen Differentialgleichung formell genügen kann, ohne doch für irgend welche Wertsysteme ihrer Veränderlichen zu konvergieren, für mich der Ausgang von Untersuchungen, die viel Interessantes haben und manche Aufklärung verschaffen, geworden ist.

Ich wünsche, daß meine Schülerin auf diese Weise fortfahren möge, ihrem Lehrer und Freund ihren Dank zu betätigen."

Je ne m'occuperai pas ici de la partie mathématique de la communication de Weierstrass. Je ferai seulement remarquer que des envieux ont essayé de faire croire, que Sonja, en rédigeant sa thèse de doctorat, n'avait pas été aussi indépendante qu'elle aurait dû l'être, et qu'elle devait à Weierstrass plus qu'elle n'avouait elle-même. Les propres paroles de Weierstrass nous sont aujourd'hui une preuve du contraire.

La démonstration que l'équation différentielle

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}$$

est satisfaite formellement par une série de puissances qui ne converge pour aucun système de valeurs des variables indépendantes, était une des parties les plus originales de la thèse et était à cette époque une découverte de haute importance. Je reviendrai plus loin sur une autre remarque de Weierstrass à ce sujet. Les paroles simples et cordiales de Weierstrass nous montrent mieux que tout commentaire le genre des relations qui existaient entre le maître et son élève dévouée. Il écrit encore le 9 mai:

„Eine kleine Aufgabe. Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

hat ein partikuläres Integral

$$\varphi = (\mu t)^{-\nu} F(u), \quad u = \frac{1}{\sqrt{\mu t}} (x - \lambda)$$

wo λ, μ, ν willkürliche Konstanten bezeichnen und $F(u)$ der Diffentialgleichung

$$F''(u) + \tfrac{1}{2} \mu u F'(u) + \mu \nu F(u) = 0$$

genügen muß. Welches ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung?

Für $\mu = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ kann man setzen

$$F(u) = f(\lambda) e^{-\frac{u^2}{4}}$$

und erhält aus dem partikulären Integral

$$\varphi = \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\lambda)^2}{t}}$$

das allgemeine

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\lambda)^2}{t}} d\lambda.$$

Wenn aber $f(\lambda)$ für unendlich große Werte von λ in stärkerem Maße unendlich wird als die Funktion

$$e^{-c\lambda^2}$$

bei beliebig kleiner Konstante c, so hat der vorstehende Ausdruck keinen Sinn. Bekommt man vielleicht in diesem Falle durch Anwendung einer allgemeinen Funktion $F(u)$, die der aufgestellten Differentialgleichung bei anderen Werten der Konstanten genügt, einen brauchbaren Ausdruck? Oder ist die willkürliche Funktion notwendig an die Beschränkung gebunden, daß

$$\frac{\log |f(\lambda)|}{\lambda^2} = 0$$

werden muß für $\lambda = \pm \infty$?"

Sonja reçut en automne 1874 „in absentia" son diplom de docteur à Goettingen. Dans la biographie qu'elle présenta, à cette occasion, à l'université de Goettingen, elle donne un coup d'œil sur sa vie précédente:

„Vita.

Sophia de Corvin Krukovskoy nata sum ao. h. s. LI Moscoviae, patre Basilio, qui vice fungitus legati in exercitu Russorum, matre Elisabeth e Schubertiana gente, quibus adhuc viventibus ex animo laetor.

Nomen meum hoc gentilicium ao. LXVIII Waldemaro de Kowalewky, philosophiae doctori, nupta eius nomine mutavi.

Fide instituta sum graeco-catholica.

Per teneram aetatem, cum vel Petropoli vel in patris villa quae Palibino vocatur, degerem, publicis magistris non sum tradita, sed domi a paedagogis litterarum elementa accepi. Inde autem a quintodecimo aetatis anno mathematica potissimum amplexa, geometriae atque arithmetices quae vocatur analytica rudimenta, nec non rationum differentialium et integralium initia didici. His quae in deliciis habebam litteris ut totam me traderem, vero anni h. s. LVIII comitante marito Heidelbergam petii, ubi cum Koppii universitatis litterarum tunc temporis Prorectoris illustrissimi benificio ut scholis mathematicorum interessem, mihi esset permissum, per tria semestria vv. cll. Du Bois-Reymondium, Helmholcium, Kirchhoffium, Koenigsbergerum de mathematicis et physicis docentes audivi, atque etiam exercitationes suas physicas atque mathematicas a me frequentari passi sunt Kirchhoffius atque Koenigsbergerus, quos ut praeceptores meos omnes pio gratoque animo semper colam.

Inde mens. octobr. anni LXX Berolinum transmigavi ibique cum scholis publicis per leges academicas mihi non liceret adesse, eximiam experta sum liberalitatem Weierstrassii v. d. qui quattuor per annos consilio suo atque auctoritate me adiuvit, me non solum iis artibus imbuens quos publice solet audientibus tradere, sed etiam multas res quas nondum evulgavit mecum liberalissime communicans. Pro his summis de me meritis atque beneficiis ei nunquam satis magnam me habere posse gratiam sentio.

In patriam reditura auctore carissimo meo praeceptore ordini philosophorum Gottingensi amplissimo studiorum meorum primitias, duas videlicet commentationes quarum altera ad theoriam aequatiorum differentialium partialium pertinet, altera vero problema quoddam physicae mathematicae tractat, offerre audeo; quibus probatis ut summi in philosophia honores in me conferantur rogo.

En septembre 1874, Sonja retourna en Russie. Son système nerveux était fortement attaqué par le travail forcé des dernieres temps et elle avait besoin de calme et de repos. Ce traitement est aussi fortement recommandé par Weierstrass dans une lettre du 21 septembre 1874:

„Aus eigener Erfahrung weiß ich, wie elend es einen Menschen machen kann, den Kopf voll Probleme zu haben und wegen Mangels an physischer Kraft sie nicht bewältigen zu können."

Il pense que, si elle veut suivre ses conseils, la photographie qu'il espère recevoir ressemblera

„. . . dem Bilde, das aus der Zeit, wo Du vor zwei Jahren aus Deiner Heimat wiederkamst, in meiner Erinnerung lebt.“

Weierstrass avait fait un voyage de trois semaines avec ses sœurs:

„Am Rhein habe ich recht in Jugenderinnerungen geschwelgt; wie schön würde es sein, wenn es mir vergönnt würde, dieselbe Strecke noch einmal in Begleitung der teueren Freundin, die ein gütiges Geschick mich noch in späten Jahren finden ließ, zu durchreisen. Seltsam war es mir zu Mute, als ich einen Spazierweg wieder aufsuchte, den ich vor vielen Jahren mit einem Freunde durchwanderte, der mich damals bestimmte, endlich einen schon längst ins Auge gefaßten Entschluß, Mathematiker zu werden, zur Tat werden zu lassen. Denn nur auf diesem Wege werde ich eine Zukunft haben, — er selbst hoffe als wissenschaftlicher Jurist einen Platz in der Gelehrtenrepublik sich zu erringen. Nun, ich habe mein Ziel im Auge behalten und bin mit dem Erreichten zufrieden, wenn auch nicht alle Blütenträume reiften; mein damaliger Freund gab später die mit glänzendem Erfolge betretene wissenschaftliche Laufbahn auf, um im praktischen Staatsdienst rascher vorwärts zu kommen; er bekleidet jetzt eine bedeutende Stelle, ist aber ein so arger Frömmler und politischer Reaktionär geworden, daß zwischen ihm und mir kein Verständnis mehr möglich ist.“

A Heidelberg, Weierstrass avait renoué les liens d'amitié qui le rattachaient à Kirchhoff et qui ne se relachèrent plus.

„Am meisten habe ich mit Kirchhoff verkehrt und hoffe auch von unserem jetzigen Zusammensein dauernden Gewinn zu haben. Ich habe nämlich einen Plan, ihn doch nach Berlin zu bringen, — in einer Stellung an der Akademie, die ihm die nötige Muße geben wird, ein vollständiges System der mathematischen Physik auszuarbeiten. Dadurch würde der Wissenschaft ein wesentlicher Dienst geleistet werden und ihm selbst auch; denn die Heidelberger Verhältnisse sagen ihm nicht mehr zu und ebensowenig die Beschäftigung mit der Experimentalphysik. Über die Bedingungen, unter denen er hierher kommen will, bin ich mit ihm einig geworden, und ich hoffe zuversichtlich, daß sich dieselben werden erfüllen lassen.“

Une longue lettre en date du 15 octobre, qui contenait „eine mathematische Beilage“ à laquelle Weierstrass paraît avoir attaché une certaine importance, ne parvint jamais à son adresse. Il s'en plaint dans une lettre du 12 janvier de l'annèe suivante 1875:

„Daß mein Brief aus der Mitte des Oktober verloren gegangen ist, nebst der Beilage, ist mir sehr unangenehm; ich weiß aber nicht, wie es wieder zu erlangen ist.“

Le 16 decembre 1874 Weierstrass répond à une lettre de Sonja dans laquelle

elle avait raconté la part active qu'elle avait commencée à prendre dans la vie mondaine de St. Pétersbourg.

„Im übrigen habe ich von vornherein darauf gerechnet, daß Du in den ersten Monaten Deines Petersburger Aufenthalts nach so langer Entbehrung alles geselligen Verkehrs nicht zu stetiger und ernster Arbeit kommen würdest, und ich bin, wenn Du mir schreibst, daß dem wirklich so sei, nicht einmal sehr unzufrieden damit, teils in der Überzeugung, daß einige Zerstreuungen nach der vorangegangenen langen Arbeit Deinem körperlichen Befinden nicht zum Nachteil gereichen werden, teils in der zuversichtlichen Erwartung, daß Dein ernster Sinn, Deine Begeisterung für ideale Bestrebungen nicht allzulange die Enthaltung von wissenschaftlicher Arbeit Dich werden ertragen lassen. Überlasse Dich also getrost, solange Du selbst Gefallen daran findest und nicht etwa bloß äußeren Einflüssen nachgibst, den Dir ungewohnten Genüssen des großstädtischen Lebens; ich weiß, Du wirst der Wissenschaft nicht untreu werden, und der Schaffensdrang in Dir, mag er auch zeitweise einer erklärlichen Erschlaffung Platz machen, wird stets umso intensiver wieder aufleben. Freilich, das leugne ich nicht, einer Anregung und Aufmunterung wirst Du nicht selten bedürfen."

Le 15 octobre Weierstrass était enfin délivré de la charge de recteur d'université:

„Ich empfand, nachdem ich vom 15. Oktober wieder ein freier Mann geworden, eine solche Sehnsucht nach mathematischer Beschäftigung, daß mir die letzten beiden Monate wie im Fluge vergangen sind und ich heute mich zu irren glaubte, als ich, einen notwendig zu beantwortenden Brief in die Hand nehmend, denselben vom 19. Oktober datiert fand. Was den Erfolg meiner Arbeit angeht, mit dem ich nicht ganz unzufrieden bin, so will ich Dir einiges davon mitteilen.

Zunächst hatte ich, mit Rücksicht auf meine Vorlesungen, eine Lücke in der Funktionentheorie aufzufüllen. Du weißt, es war bisher folgende Frage unerledigt: Gibt es, wenn eine unendliche Reihe von Größen

$$a_1, a_2, a_3, \dots \infty$$

beliebig angenommen wird, stets eine transzendente ganze Funktion einer Veränderlichen x von der Beschaffenheit, daß dieselbe für $x = a_1, a_2, \dots$ verschwindet — und zwar so, daß die zugehörige Ordnungszahl für jede dieser Größen gleich λ ist, wenn dieselbe λ mal in der Reihe vorkommt —, für jeden andern Wert von x aber nicht?

Notwendig für die Beantwortung dieser Frage in bejahendem Sinne ergibt sich sofort die Bedingung, daß a_n, sobald n eine gewisse Grenze überschreitet, dem absoluten Betrage nach beständig größer sein muß als eine willkürlich gegebene Größe; ich konnte aber bisher nicht beweisen, daß die Erfüllung dieser Bedingung genügend sei. Die Frage erledigt sich jetzt durch folgenden Satz:

Man ordne der gegebenen Reihe

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

von der ich zunächst annehme, daß keines ihrer Glieder Null sei, eine Reihe ganzer positiver Zahlen (die Null als solche gerechnet)

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_n,\ \ldots$$

dergestalt zu, daß die Summe

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^{\nu_1+1}+\left(\frac{x}{A_2}\right)^{\nu_2+1}+\cdots,$$

in der A_n den absoluten Betrag von a_n bedeutet, bei jedem positiven Wert von x einen endlichen Wert habe. Dies ist stets möglich; namentlich kann man

$$\nu_1 = 0,\ \nu_2 = 1,\ \nu_3 = 2, \ldots,\ \nu_n = n-1, \ldots$$

nehmen. Ferner setze man

$$\begin{aligned} E(x)_0 &= 1-x \\ E(x)_1 &= (1-x)\,e^{x} \\ E(x)_2 &= (1-x)\,e^{x+\frac{x^2}{2}} \\ E(x)_n &= (1-x)\,e^{x+\frac{x^2}{2}\cdots+\frac{x^n}{n}}, \end{aligned}$$

so hat des Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}\right)_n$$

für jeden endlichen Wert von x einen von der Aufeinanderfolge seiner Faktoren unabhängigen endlichen Wert und ist der Ausdruck einer analytischen Funktion von x, welche im Endlichen überall den Charakter einer ganzen Funktion besitzt und für $x = a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots$ in der angegebenen Weise verschwindet.

Der Beweis des Satzes läßt sich ganz elementar führen; Du wirst ihn nicht verfehlen, wenn Du aus Deinem elliptischen Heft das Kapitel über die Darstellung ganzer transzendenter Funktionen durch unendliche Produkte zu Hilfe nimmst.

Daran knüpft sich weiter der folgenreiche (in meiner Theorie der Abelschen Funktionen noch als bis jetzt unerwiesen hingestellte) Satz:

Jede eindeutige analytische Funktion von x, die für jeden endlichen Wert dieser Größe den Charakter einer rationalen Funktion besitzt, läßt sich stets darstellen als Quotient zweier gewöhnlicher, beständig konvergierender Potenzreihen, und zwar so, daß Zähler und Nenner für keinen Wert von x gleichzeitig verschwinden.

Weiter schließt sich hieran die Frage nach der allgemeinen analytischen Ausdrucksweise einer eindeutigen Funktion einer Veränderlichen, für die es, als Argument dieser Funktion, eine endliche Anzahl von Grenzstellen gibt, in deren Nähe sie unbestimmt wird, wie dies bei einer transzendenten ganzen Funktion im Unendlichen der Fall ist.

Die Zusammenstellung aller dieser Sätze hat eine ganz hübsche kleine Abhandlung ergeben, die ich vorgestern in der Akademie gelesen habe und die im Dezemberheft der Monatsberichte erscheinen wird. Daß ich Dir dieselbe alsbald zuschicken werde, versteht sich von selbst."

Mais le mémoire ne fut imprimé qu'en 1877 dans les „Abhandlungen" de l'Académie de Berlin.

Weierstrass fut députė par l'université de Berlin aux fêtes du jubilé de l'université d'Upsala en septembre 1877. Il y apporta son mémoire avec une dédicace à l'université.

Il est dit plus loin dans cette même lettre:

„Der Gegenstand, womit ich mich noch weiter beschäftigt, wird Dich noch mehr interessieren; leider kann ich in Beziehung auf denselben nur erst von einer Hoffnung auf Erfolg berichten und muß ausführlichere Mitteilung überhaupt der mündlichen Besprechung vorbehalten.

Du erinnerst Dich, liebes Herz, daß wir zu der Zeit, als unsere Freundschaft eine innigere geworden war, sodaß ich zuweilen das Bedürfnis empfand, auch über Arbeiten, die ich gern machen möchte, mit Dir zu reden und wir uns auch wohl in wissenschaftliche Träume und Phantasien verloren, oftmals von den Bedingungen der Stabilität des Weltsystems gesprochen haben und den vielen Fragen, mit denen dies Problem zusammenhängt. Du weißt auch, daß die eigentliche mathematische Aufgabe, um die es sich handelt, folgendermaßen formuliert werden kann:

Es seien zur Bestimmung von n Funktionen einer reellen Größe t gegeben n Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = G_1(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = G_n(x_1, \ldots, x_n),$$

wobei $G_1, \ldots, G_n$ ganze Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ mit reellen Koeffizienten bezeichnen. Es fragt sich, wie müssen diese Funktionen G beschaffen sein und welche Bedingungen die Werte von $x_1, \ldots, x_n$ für $t = 0$ erfüllen, damit $x_1, \ldots, x_n$ reguläre Funktionen von t (innerhalb der Grenzen $-\infty$ und $+\infty$) werden. Namentlich aber ist zu ermitteln, unter welchen Umständen jede der Größen x beständig zwischen endlichen Grenzen schwankt. Endlich sollen womöglich Entwicklungen von $x_1, \ldots, x_n$, die ihrem funktionalen Charakter entsprechen, aufgefunden werden.

Ich habe mich nun einige Wochen sehr ernsthaft mit dieser Frage beschäftigt, glaube auch einen Weg gefunden zu haben, der dereinst zum Ziele führen wird, — aber es wird noch größerer Anstrengung bedürfen, um ihn überhaupt gangbar zu machen. Ich will Dir nur eine Andeutung geben, die einzige, die ich ohne zu große Weitläufigkeit aussprechen kann. Du weißt, wenn die Anfangswerte von $x_1, \ldots, x_n$ gegeben sind, so kann man immer analytische Ausdrücke von $x_1, \ldots, x_n$ als Funktionen von t aufstellen, die den Differentialgleichungen genügen und für ein beschränktes Zeitintervall gelten. Nun scheint es mir, daß sich, wenn die $x_1, \ldots, x_n$ wirklich solche Funktionen sind, wie sie verlangt werden, stets ganze Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ von $x_1, \ldots, x_n$ ermitteln lassen, für welche ähnliche Differentialgleichungen bestehen, die aber so beschaffen sind, daß sich aus ihnen Ausdrücke in t, die für ein größeres Zeitintervall gelten, ergeben. Mit diesen neuen Differentialgleichungen kann man dann weiter ebenso verfahren, und Du begreifst schon, daß in dem Fall, wo nach Beschaffenheit der ursprünglichen Differentialgleichungen und der angenommenen Anfangswerte die Operation ohne Ende sich fortsetzen läßt, daraus über den Geltungsbereich der zu bestimmenden Funktionen sich Aufschlüsse ergeben müssen.

Bei den hauptsächlich in Betracht kommenden wirklichen Aufgaben der Astronomie und mathematischen Physik zeigt sich ferner, daß sich die sukzessiven Annäherungen durch Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bewirken lassen, wodurch sich die Möglichkeit konvergenter Entwicklungen ergibt. Freilich wird Dir, was ich da sage, nur einen sehr unvollkommenen Begriff von meinen Ideen geben; aber diese sind auch noch keineswegs so reif, daß ich mich mit hinlänglicher Klarheit darüber ausdrücken kann.

Ich habe Dich in dieser Zeit auch deswegen sehr entbehrt, weil ich im Gespräch mit Dir manchen Gedanken leichter zur vollen Entwicklung gebracht hätte, als es mir beim bloßen Nachgrübeln darüber möglich ist. Doch muß ich, so sehr mich der Gegenstand interessiert, vorerst von seiner weitern Verfolgung Abstand nehmen; denn ich muß durchaus erst die anderen Dinge, die der Ausarbeitung harren, fertig machen; ich werde dann, das sehe ich schon, für mein übriges Leben Arbeit genug haben. Gleichwohl bin ich sehr zufrieden damit, ein paar Wochen dem Nachdenken über das mir so wichtige Problem gewidmet zu haben; ich sehe jetzt wenigstens ein bestimmtes Ziel vor mir."

Le problème que Weierstrass avait formulé ici l'avait apparemment préoccupé dès le commencement de sa carrière scientifique. Aussi il y revenait incessamment. Lorsqu' en 1885 il reçut le mandat de membre du jury dans le concours pour lequel le roi Oscar II voulait instituer un prix à l'occasion de son jubilé, il fut chargé de choisir le sujet du concours. Il proposa de faire l'exposé des développements de $x_1, \ldots, x_n$, dont il parle dans sa lettre à Sonja. Le prix fut remporté comme l'on sait par Poincaré. On voit la valeur que Weierstrass reconnaissait à ses conversations avec Sonja, même pour ses propres recherches. Il dit plus loin:

„Noch eins. Von mehreren Herrn, an die ich Deine *Dissertation* gesandt, habe ich beifällige Antworten erhalten, so von Kirchhoff, Heine, Schwarz, Schering und vor allem von P. Dubois, der über Dein beigelegtes Handschreiben sehr entzückt ist; Du wirst jedenfalls von ihm nächstens einen sehr liebenswürdigen, vielleicht sogar bewundernden Brief erhalten. Sehr zufrieden mit Deiner Arbeit spricht sich auch Heine aus, der ihren eigentlichen Zweck, wie es mir scheint, am besten begriffen hat."

Sonja paraît avoir répondu par une lettre qui arriva à Weierstrass vers Noël. Il écrit le jour de l'an 1875:

„Meine liebe Sonja, ich danke Dir recht herzlich für das schöne Weihnachtsgeschenk, das Du mir mit Deinem letzten Briefe gemacht hast. Es spricht sich in demselben ein wissenschaftlicher Enthusiasmus aus, der mich entzückt und mich wie die treue Anhänglichkeit, die Du Deinem Lehrer und Freunde bewahrst, glücklich macht. Aber ich fürchte fast, ich habe zu große Erwartungen in Dir erregt, indem ich, was sonst nicht gerade meine Gewohnheit ist, in der Überzeugung, daß ich Dir eine Freude damit machen würde, mich verleiten ließ, von dem zu sprechen, was ich noch zu arbeiten gedenke. Das Ziel, welches ich erreichen möchte, liegt noch in weiter Ferne, in unbestimmten Umrissen vor mir; bis jetzt habe ich kaum etwas anderes getan als über die Mittel gesonnen, durch welche ich mir den Weg zu ebnen hoffe. Außerdem ist es, wie Du selbst einsiehst, eine dringende Notwendigkeit, daß ich zunächst meine alten Arbeiten zum Abschluß bringe. Ich darf damit auch aus anderen Gründen nicht zögern. Es wird gegenwärtig, — namentlich seitdem die jungen Mathematiker zu der Einsicht gekommen sind, daß dicke Bücher schreiben (N. B. ohne Quellenangabe) das wirksamste Mittel ist, um bei der Menge zu Ansehen und zu guten Stellen zu gelangen —, gerade auf demjenigen Gebiete der Analysis, dessen gründlicher

Durchforschung ich den besten Teil meines Lebens gewidmet habe, gar zu viel Unfug getrieben, und es ist die höchste Zeit, daß dem Unwesen gesteuert werde."

Il écrit encore:

„Ich bin mir bewußt, kein wissenschaftlicher Pedant zu sein, und erkenne auch in der Mathematik keine allein seligmachende Kirche an; was ich aber von einer wissenschaftlichen Arbeit verlange, ist Einheit der Methode, konsequente Verfolgung eines bestimmten Plans, gehörige Durcharbeitung des Details und, daß ihr der Stempel selbständiger Forschung aufgeprägt sei. Es ist schlimm genug, daß bei uns wie anders die Lehrbücher so oft von Unberufenen geschrieben werden, — wobei man den Franzosen wenigstens das Verdienst zuerkennen muß, daß sie durch klare und elegante Darstellung den Mangel an Tiefe einigermaßen gut machen —, die höchsten und schwierigsten Teile der Wissenschaft aber, in denen nur derjenige etwas zu leisten vermag, der seine ganze Kraft daran setzt, sollten der leichtfertigen Buchschreiberei nicht anheimfallen.

Verzeih, liebe Freundin, diese Abschweifung, die Du als Beweis dafür hinnehmen mögest, wie sehr ich mich schon daran gewöhnt hab, Dich zur Vertrauten meiner Gedanken — auch der unerquicklichen — zu machen."

Voilà comment parle Weierstrass courroussé, lorsque des gâcheurs se permettent de se mêler des plus hautes et des plus difficiles parties de la science. Mais personne ne pouvait reconnaître plus chaleureusement que lui ce qui lui semblait mériter des éloges. Il écrit p. ex. 10 ans plus tard à un de ses élèves:

„Ich bewundere den Mut, der dazu gehörte, um ein solches Problem anzugreifen, *und freue mich Ihres Erfolges, als hätte ich ihn selbst errungen.* Denn der schönste Erfolg, den ein redlicher Forscher sich wünschen kann, besteht ja darin, daß er, angelangt an der Grenze, die dem Können des einzelnen Menschen gesetzt ist, das angefangene Werk tüchtigen jungen Kräften überlassen kann, die es weiter fördern, selbständig und doch in s e i n e m Sinne. Sie sehen, mein lieber Freund, ich bin durchaus nicht unempfindlich dafür, daß meine Arbeiten, ich will nicht sagen, anerkannt, sondern vielmehr in richtiger Weise benutzt werden. Die erfreuliche Erfahrung, die ich in dieser Beziehung bei Ihnen und anderen meiner Zuhörer gemacht habe, bestätigt sich indessen nicht bei allen, die Abhandlungen publizieren, welche sich angeblich an Vorlesungen und Mitteilungen von mir anschließen."

Mais je reviens à la lettre de nouvel-an à Sonja:

„Jetzt will ich zunächst Deine Fragen beantworten. Ich bin ganz damit einverstanden, wenn Du diesen Winter hauptsächlich benutzen willst, die Lücken

Deiner Kenntnisse in den mehr elementaren Teilen der Mathematik, namentlich der analytischen Mechanik und mathematischen Physik auszufüllen. Studiere aber neben den Engländern auch Poisson und Cauchy, sowie die (in den Abhandlungen der Berliner Akademie gedruckten) Arbeiten über Elektrodynamik des älteren Neumann; das Buch des jüngeren (Sohns) über diesen Gegenstand ist etwas schwerfällig geschrieben, enthält aber doch viel Gutes und Brauchbares. Wenn Du unterdes Hamiltons dickleibiges Buch über die Quaternionen erhalten hast, so wird Dich, denke ich, schon das Äußere desselben von einer vollständigen Durcharbeitung abgeschreckt haben; die wäre aber auch meiner Meinung nach eine reine Zeitvergeudung, — ich habe immer die armen Studenten bedauert, für die bei Hamiltons Lebzeiten die Quaternions ein obligatorischer Lehrgegenstand waren. Du aber hast einstweilen noch viel Nötigeres und Nützlicheres Dir zu eigen zu machen als eine für gewisse Probleme vielleicht ganz brauchbare, keineswegs aber notwendige spezielle Methode, deren algebraische Grundlage von sehr trivialer Beschaffenheit ist. Daß Dir die Speise nicht munden wird, davon bin ich überzeugt. Wenn es die Zeit Dir erlaubt, so kannst Du auch einmal die Comptes Rendus der französischen Akademie durchfliegen und dabei den Arbeiten von St. Venant in der Elastizitätslehre Beachtung schenken. Du wirst zwar überall (ich meine bei allen den genannten Autoren) in Beziehung auf Strenge der Entwicklungen bedeutenden Anstoß nehmen. Doch laß Dich dadurch nicht aufhalten, es kommt hauptsächlich darauf an, daß Du einen Überblick über das auf dem Gebiete der mathematischen Physik bisher Geleistete sowie über die schwebenden Fragen gewinnst. Dabei kannst du immerhin einige nicht schwierige Aufgaben behandeln, um Dich in der Darstellung zu üben, wobei, wie ich Dir schon oft gesagt habe, die sorgfältige Durcharbeitung des Einzelnen als etwas Wesentliches zu betrachten sein wird.

Z. B. soll in einer $n$fachen Mannigfaltigkeit, in welcher jeder Punkt durch n Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ bestimmt und das Quadrat des Abstandes zweier Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ gleich $(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2$ ist, auf dem (der Oberfläche eines Rotationsellipsoides im Euklidischen Raum entsprechenden) durch die Gleichung

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{a^2} + \frac{x_n^2}{b^2} = 1$$

definierten Flächengebilde die kürzeste Linie bestimmt werden. Oder eine analytische Aufgabe, derwegen mich kürzlich die Editoren der neuen Ausgabe von Abels Werken zu Rate zogen.

Abel behauptet:

Wenn $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ irgendwelche Funktionen bedeuten, deren Ableitungen algebraische Funktionen von x sind, und es besteht zwischen denselben und der Veränderlichen x überhaupt eine algebraische Relation, so läßt sich diese stets auf die Form

$$c_1 \varphi_1(x) + \cdots + c_n \varphi_n(x) + \varphi_0(x) = 0$$

in der Art bringen, daß $\varphi_0(x)$ eine algebraische Funktion und $c_1, c_2, \ldots, c_n$ Konstanten sind.

In Abels nachgelassenen Papieren findet sich bloß der Anfang einer Herleitung des Satzes. Ich habe zwei Beweise gemacht, einen rein algebraischen und einen andern, der auf den ersten Sätzen der Lehre von den Perioden der Integrale beruht. Versuche Dich doch einmal daran. Drückt man die Ableitungen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ durch x und eine algebraische Funktion y dieser Größe rational aus, so ist auch φ_0 eine rationale Funktion von x, y; dies ist ein leicht zu beweisender Zusatz.

N. B. Beim Beweise des Satzes, der in Deiner Arbeit über die Reduktion der Integrale 3. Ranges auf elliptische an der Spitze steht, setzt Abel den angeführten voraus, da er von vornherein eine lineare Relation unter den betreffenden Integralen annimmt."

Sonja avait depuis son séjour à Heidelberg, où elle avait entendu Helmholtz et Kirchhoff, gardé un goût pour la physique mathématique. Cet intérêt augmenta au cours de ses études auprès Weierstrass. Elle avait commencé à se plonger dans les travaux de Maxwell et avait demandé conseil à Weierstrass comment elle devait disposer ses études.

L'illustre géomètre s'intéressait vivement à la physique mathématique; seuls ceux qui l'ont approché peuvent savoir jusqu' à quel point il la possedait. L'intérêt que Weierstrass portait à la physique mathématique est exprimé dans la même lettre:

„Kirchhoff kommt wirklich kommende Ostern hierher, als Mitglied der Akademie und Professor für mathematische Physik. Ich darf seine Herberufung zu einem guten Teil mir als Verdienst anrechnen. Ich fand ihn diesen Herbst in Heidelberg über manche Vorkommnisse verstimmt, der Experimentalphysik ziemlich entfremdet und gar nicht abgeneigt, Koenigsberger nach Dresden an das Polytechnikum zu folgen. Dies bestimmte mich, sofort nach meiner Rückkehr die Akademie für seine Herberufung zu interessieren . . ."

Suivent des détails confidentiels sur la nomination de Kirchhoff. La lettre se termine ainsi:

„Wir feiern heute den ersten Tag des neuen Jahres, wo man allen seinen

Freunden Gruß und Glückwunsch sendet. Ich habe den Tag nicht vorüber gehen lassen können, ohne meiner teuersten Freundin, die meine Schülerin und zugleich die Vertraute meiner Gedanken und Bestrebungen ist, den Beweis zu geben, daß ich in innigster Zuneigung ihrer gedenke und mich stets glücklich schätzen werde, wenn ich trotz der vielen Meilen, die zwischen uns liegen, ihr Führer auf dem Wege, der von dem anderer Menschen so weit abliegt, bleiben kann."

La lettre suivante est datée du 12 janvier 1875:

„Meine teuere Sonja, Eigentlich bin ich — aus verschiedenen Gründen — nicht wohl disponiert, Dir heute zu schreiben. Aber ich erinnere mich, daß am 15. Dein Geburtstag ist, und da darf ich doch nicht unterlassen, meine Glückwünsche mit denen der Deinigen, in deren Kreise Du heute nach 5 Jahren zum ersten Male wieder den Tag feierst, zu vereinigen. Aber, liebste Freundin, zürne mir nicht, wenn ich Dir zugleich gestehe, daß ich Egoist genug bin zu wünschen, es wäre alles noch so wie im vorigen und dem vorhergehenden Jahre, wo — von Julia abgesehen — außer mir niemand hier von dem Tage etwas wußte, und ich Dir keine größere Freude machen konnte, als wenn ich Dir stundenlang von meinen neuesten Untersuchungen erzählte. Das Heft, dessen Anfang ich Dir vor zwei Jahren als Geburtstagsgeschenk brachte, ist freilich auch heute noch nicht abgeschlossen, — ein zweiter Teil ist längst begonnen —, aber ich werde meine Schuld nicht vergessen, und ich verspreche Dir, niemand soll von den darin behandelten Sachen vor Dir etwas erfahren. Auch mußt Du Dich überzeugen, daß die Schwierigkeit des behandelten Gegenstandes nur ein langsames Fortrücken der Arbeit zuläßt; manche Seite hat mir Tage gekostet."

Que contenait ce cahier, au sujet duquel Sonja en véritable jeune fille avait extorqué de son grand maître la promesse que personne avant elle ne saurait rien des questions qui y étaient traitées? Sonja qui supponnait certainement la manière dont j'anneillerai la chose, ne m'a jamais parlé de ce cahier. Il ne se trouve pas parmi ses papiers posthumes. Weierstrass l'avait peut-être gardé chez lui en vue de l'achever. Mais il ne se trouve pas parmi ses papiers posthumes et ne semble pas non plus avoir servi lors de la rédaction de ses œuvres complètes. L'a-t-il brûlé en même temps que les lettres de Sonja? Ou bien a-t-il été perdu avec la fameuse caisse en bois blanc, comme tant d'autres manuscrits? Il est possible qu'il s'agissait d'une recherche que Weierstrass n'a jamais trouvée assez élaborée pour vouloir la publier lui-même. Je crois pouvoir conclure de certaines allusions de Sonja qu'il s'agissait justement ici de cette mécanique de l'espace limité que Sonja considérait comme une des créations fondamentales de Weierstrass. Celui-ci continue:

„Für die nächste Zeit muß ich mich aber aus den in meinem vorigen Briefe angegebenen Gründen ausschließlich mit den Abelschen Funktionen — im gewöhnlichen Sinne — beschäftigen und das Ganze meiner auf sie sich beziehenden Untersuchungen übersichtlich zusammenstellen. Ich mache jetzt einen Versuch, dies in einer eigentümlichen Form auszuführen — nämlich in einer Reihe von Briefen an meinen Freund Richelot. Ich gewinne durch diese Form die Freiheit, mich an vielen Stellen mit der Darlegung des Gedankengangs begnügen zu können, was sehr wohl angeht, da doch die Theorie nicht für Kinder bestimmt ist und man von jedem, der sich damit beschäftigt, erwarten darf, daß er die mehr mechanischen Rechnungen nach gegebenen Andeutungen ausführen kann. Auch kann ich in Briefen an einen Freund ohne Rückhalt die Eigentümlichkeit meiner Methode hervorheben, sowie auf eine Kritik der von Riemann und Clebsch gebrauchten mich einlassen. Ob sich die Sache wird durchführen lassen, weiß ich allerdings noch nicht, — eine starke Zusammendrängung des Materials ist aber, wenn ich ein lesbares Opus zustande bringen will, jedenfalls notwendig. Eine Nachschrift meiner letzten Vorlesung über die Theorie, — in der doch manches übergangen ist —, hat 600 Quartseiten. Hätte ich jetzt meine treue Schülerin zur Seite, so könnte sie mir eine wesentliche Unterstützung leihen.

Ich habe Dir von einer mathematischen Beilage zu meinem nächsten Briefe gesprochen. Dieselbe ist auch fertig, nur weiß ich nicht, wie ich sie Dir schicken soll. Für einen Brief ist sie vielleicht zu umfangreich geworden — 5 Bogen.

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

Du schriebst mir vor einiger Zeit, daß Tchebychef es liebe, Dir Fragen inbetreff der Integration elliptischer Differentiale mittelst Logarithmen vorzulegen. Dies hat mich veranlaßt, meine alte Arbeit über den Gegenstand wieder aufzunehmen, um Dich inbetreff derselben — unter Anwendung der Dir geläufigen Methoden und Bezeichnungen — en fait zu setzen. Tchebychefs Arbeiten über den fraglichen Gegenstand beziehen sich auf zwei wesentlich voneinander verschiedene Fragen. In seiner ersten Abhandlung — 1857 —, die ich bei Abfassung meiner Notiz allein vor Augen hatte, zeigt er, wie die Untersuchung, ob ein vorgelegtes Integral

$$\int F(x, \sqrt{R(x)})\, dx,$$

wo $R(x)$ eine ganze Funktion 3. oder 4. Grades, F aber eine rationale Funktion von x und $\sqrt{R(x)}$ bedeutet, sich durch einen algebraischen logarithmischen Ausdruck darstellen lasse, zurückgeführt werden könne auf die einfachere Frage nach den Bedingungen, unter denen das Integral

$$\int \frac{(x+\varkappa)\, dx}{\sqrt{R(x)}}$$

(R vom 4. Grade vorausgesetzt und unter $\varkappa$ eine Konstante verstanden) in der Form

$$C \log\left(\frac{P(x)-\sqrt{R(x)}}{P(x)+\sqrt{R(x)}}\right),$$

wo P eine rationale Funktion von x bedeutet, ausgedrückt werden kann. Diese Bedingungen bestehen nach Abel darin, daß die Entwicklung von $\sqrt{R(x)}$ in einen Kettenbruch periodisch sein und, wenn dies eintrifft, $\varkappa$ einen bestimmten, von den in R vorkommenden Konstanten abhängigen Wert haben muß.

Gegen diese Behandlungsweise der Aufgabe hatte ich — und habe ich noch — zweierlei einzuwenden. Jene Reduktion ergibt sich ganz von selbst, wenn man die doch gar nicht zu umgehende Aufgabe, ein Integral von der angegebenen Form

$$\int F(x, \sqrt{R(x)})\, dx$$

auf die kleinste Anzahl von Transzendenten (Logarithmen und elliptische Integrale der 3 Gattungen) zurückzuführen, gelöst hat; es bedarf doch dazu keiner neuen Algorithmen. Ferner glaubte ich, daß die Einsicht in die wahre Natur der von Abel behandelten reduzierten Aufgabe — d. h. die Erkenntnis ihres Zusammenhangs mit der Theorie der elliptischen Funktionen überhaupt — gefördert werde, wenn ich die Abelsche Bedingung durch folgende ersetzte:

Durch die Dir bekannte Substitution

$$s = \tfrac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{R(x)} + \tfrac{1}{2}Ax^2 + Bx + \tfrac{1}{2}C,$$

$$\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = -\frac{\sqrt{A}}{4} R'(x) - (Ax + B)\sqrt{R(x)},$$

geht

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

in

$$\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$$

über (die Berechnungen sind aus dem grünen Buche) und

$$\frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

in

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0} = \left(\varkappa - \frac{B}{A}\right)\right\}\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

wobei

$$s_0 = \frac{B^2}{A} - C, \quad \sqrt{S_0} = \frac{A^2 B - 3ABC + 2B^3}{A\sqrt{A}}.$$

ist. Setzt man also

$$du = -\frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad \begin{matrix} s = \wp u \\ s_0 = \wp u_0 \end{matrix}, \quad u_0 = \int\limits_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

so hat man

$$\frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u + \wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} - \left(\varkappa - \frac{B}{A}\right)\right\} du,$$

$$\int \frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\log \frac{\sigma'(u-u_0)}{\sigma u\, \sigma u_0} + \left(\frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0} - \varkappa + \frac{B}{A}\right) u\right\}.$$

Damit nun das in Rede stehende Integral sich logarithmisch ausdrücken lasse, ist notwendig, daß u_0 ein genauer Teil irgend einer Periode der Funktion $\wp u$ sei. Und wenn diese Bedingung erfüllt ist, so läßt sich stets $\varkappa$ so bestimmen, daß das Integral wirklich durch den Logarithmus einer (mittels des Multiplikationstheorems der Funktion $\wp u$ leicht zu bestimmenden) rationalen Funktion von s und $\sqrt{S}$ ausgedrückt wird.

Hiergegen hat Herr Tchebychef mehrfach, wie ich weiß, eingewandt: Ja, aber wie erfährt man dann, daß unter den transzendenten Größen u_0, ω, ω' eine Gleichung

$$u_0 = \frac{2m\omega + 2m'\omega'}{n},$$

in der m, m', n ganze Zahlen sind, stattfindet? Darauf antworte ich: Mein Zweck war nicht, eine Integrationsmethode für den Fall, daß die Koeffizienten von R numerisch vorliegen, zu geben, sondern alle Integrale von der betrachteten Form und verlangten Eigenschaft algebraisch anzugeben. Dies geschieht aber folgendermaßen. Es ist $\wp(nu)$ für jeden ganzzahligen Wert von n in der Form

$$\frac{M_n(\wp u)}{N_n(\wp u)}$$

ausdrückbar, wo M, N ganze Funktionen von $\wp u$ sind; mein Kriterium lautet also: Alle Werte, die s_0 haben kann, sind gegeben durch die Gleichungen

$$N_2(s) = 0, \quad N_3(s) = 0, \ldots, \quad N_n(s) = 0, \ldots.$$

(Die zugehörigen Werte von $\varkappa$ bestimmen sich dann leicht).

Die Untersuchung, ob ein numerisch gegebener Wert von s_0 bei ebenso gegebenen Werten von g_2, g_3 einer dieser Gleichungen genüge, läßt sich im allgemeinen nicht durchführen; es muß genügen, daß man, wenn g_2, g_3 gegeben sind, alle Werte von s_0 algebraisch bestimmen kann.

Auch Herr Tchebychef verzichtet auf die Durchführung der eben erwähnten Untersuchung. In einer späteren Arbeit (Bull. de l'Académie de St. Pétersbourg 3, 1860) hat er sich mit derselben beschäftigt für den Fall, daß die Koeffizienten von R rationale Zahlen sind. Die Bedeutung und Hervorhebung dieses Falls hat eine gewisse Berechtigung, und ich erkenne gern den Scharfsinn an, mit dem Herr Tchebychef ihn behandelt hat. Nur muß man, wie ich meine, die Sache dadurch etwas allgemeiner machen, daß man nicht die 5 Koeffizienten von R, sondern die aus ihnen zusammengesetzten 3 Größen s_0, g_2, g_3 als rational ansieht; denn zwischen diesen müssen Gleichungen bestehen, welche bloß ganze Zahlen zu Koeffizienten haben, und eben deswegen hat es einen guten Sinn, zu fragen, wie kann man sich überzeugen, ob eine dieser Gleichungen für gegebene rationale Werte von s_0, g_2, g_3 besteht, — wobei die A, B, C, A', B' selbst nicht rational zu sein brauchen.

Tchebychef gibt sein Verfahren ohne Beweis; dieser ist aber, wie ich erst gestern gesehn, von Herrn Zolotareff in Clebschs Annalen Bd. 5 geliefert worden. Die Art und Weise aber, wie ich die Tchebychefsche Aufgabe löse, wird Dir die Überzeugung geben, daß man, den von mir gegebenen Satz, es muß

$$s_0 = \wp\, \frac{2m\omega + 2m'\omega'}{n},\ g_2,\ g_3$$

sein, vorausgesetzt, bloß mit Anwendung der Formel für $\wp(2u)$ durch eine endliche Anzahl von Operationen zum Ziele kommt. Dies Verfahren kann natürlich von dem Tchebychefs nur durch die Form verschieden sein, und ich lege auf dasselbe auch nur insofern Gewicht, als ich zeigen möchte, daß die allgemeine Theorie der elliptischen Funktionen mit Leichtigkeit Fragen zu lösen lehrt, zu deren Beantwortung sonst ein besonderer Scharfsinn erforderlich ist und Mittel angewandt werden müssen, bei denen es unklar bleibt, worin denn eigentlich ihre Wirksamkeit begründet ist.

Le 18 février Weierstrass écrit de nouveau plein de chagrin que Sonja n'ait pas donné signe de vie.

„Hast Du Dich vielleicht so in die Arbeit vertieft, daß Du nicht merkst, wie rasch die Zeit dahin geht? Ich weiß ja, wie leicht das kommt; aber ich bilde mir doch ein, gerade bei der Arbeit müßten doch Deine Gedanken zuweilen auf Deinen Freund sich richten, von dem Du doch weißt, welche Freude es für ihn ist, von Dir und dem, was Dich beschäftigt, zu hören.“

Le 21 avril encore aucune nouvelle de Sonja.

„Warum höre ich denn gar nichts von Dir? Ich bin in der größten Besorgnis, daß Du von neuem erkrankt sein müßtest, — denn sonst kann ich mir gar nicht erklären, weshalb ich seit Anfang Februar ohne jede Nachricht über Dein Ergehen geblieben bin. Ich bitte Dich auf das dringendste, laß mich nicht länger in dieser peinigenden Ungewißheit!"

Viennent ensuite des plaintes au sujet de son propre état de santé qui avait été très mauvais pendant les vacances de Pâques et l'avait empêché de bien travailler.

Dans l'incertitude du sort de ses lettres à Sonja, il omet de lui faire certaines communications et continue alors:

„Doch habe ich eins, worüber ich Dir notwendig eine Mitteilung machen muß. Ich hatte im Anfang d. J. versäumt, das Abonnement auf die Comptes rendus der Pariser Akademie rechtzeitig zu erneuern, weshalb ich die Nummern derselben sehr verspätet erhalten habe. Zu meiner großen Überraschung fand ich — nach Absendung meines letzten Briefes — in Nr. 2 und 5 einen Aufsatz von Darboux „Sur l'existence de l'intégrale dans les équations aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de fonctions et de variables indépendantes", mit welchem er ein ausführliches Mémoire über denselben Gegenstand der Akademie vorgelegt hat, welches einer Kommission zur Beurteilung übergeben worden ist. Unmittelbar darauf, in Nr. 6, hat dann auch noch ein anderer Mathematiker Méray ein Mémoire über dies Thema angekündigt und eine kurze Analyse des Inhalts gegeben. Du siehst also, mein liebes Herz, daß ich recht hatte, wenn ich Dir sagte, daß die von Dir bearbeitete Frage zu denen gehöre, welche gegenwärtig ihrer Erledigung entgegen sehen, und ich freue mich sehr, daß es meiner Schülerin gelungen ist, ihren Konkurrenten sowohl der Zeit nach zuvorzukommen, als auch denselben, was die Sache selbst angeht, wenigstens nicht nachzustehn."

Il est touchant d'entendre Weierstrass, qui pour sa propre part était entièrement indifférent à toutes les questions de priorité, s'intéresser si chaudement aux droits de priorité de Sonja:

„Darboux spricht von gewissen Ausnahmefällen, die ein großes Interesse darbieten; ich möchte fast glauben, daß er auch auf solche Schwierigkeiten gestoßen sei $\left(\text{wie bei der Gleichung } \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)$, die Dir anfangs so viel zu schaffen machten und die Du dann so glücklich beseitigt hast, und ich leugne nicht, daß ich mit einer gewissen Schadenfreude es würde angesehen haben, wenn er mit Ausnahmefällen nicht zurecht gekommen wäre."

Weierstrass avait aussitôt expédié la thèse de Sonja à Darboux et à Hermite.

„Hermite, in der Meinung, die Sendung komme von Dir selbst, hat Borchardt ersucht, Dir freundlichst dafür zu danken, mit dem Bemerken, daß sich Darboux über die Abhandlung mit großem Lobe ihm gegenüber ausgesprochen habe. — Bei der Gelegenheit ist mir ein komisches Versehen passiert. Auch dem an Hermite abgeschickten Exemplar hatte ich ein Diplom beigelegt, dabei aber mich vergriffen, — denn nur so kann ich mir erklären, daß in Hermites Brief auch ein Dank an „Madame de Lermontoff“ für Übersendung ihres Doktor-Diploms enthalten war. Was mag Hermite von der ehrgeizigen Russin gedacht haben, die so beflissen sich zeigte, ihrem auf chemischem Gebiete errungenen Ruhm sogar bei den Mathematikern Anerkennung zu verschaffen?“

Le lettre contient ensuite un compte rendu des difficultés que la fidèle amie de Sonja et sa camarade d'études à Heidelberg et à Berlin, Mlle Julie Lermontoff a eu à vaincre pour gagner son diplôme de docteur à Goettingen, et le triomphe qu'elle a fini par remporter.

Enfin le 7 mai Weierstrass peut écrire:

„Dein lange und sehnlichst erwarteter, vorgestern mir zugegangener Brief (ohne Datum) hat mich von einer großen Sorge befreit. Da ich gar kein Lebenszeichen von Dir erhielt, nicht einmal eine Empfangsanzeige von meinem Schreiben vom 15. Februar mit der mathematischen Beilage, über welche Du auch jetzt noch schweigst, so mußte ich annehmen, Du seiest abermals erkrankt, und zwar so ernstlich, daß Du nicht einmal imstande seiest, Deinem Freunde ein paar beruhigende Worte zu schreiben. Wenn ich mich nicht so sehr darüber freute, daß meine Besorgnis unbegründet gewesen, so hätte ich große Neigung, Dir diesmal zu beweisen, daß ich, wenn es not tut, meine liebe „kleine Freundin“ auch zu schelten imstande bin, — wenn auch nicht, Gleiches mit Gleichem zu vergelten. Außerdem aber hast Du ja, mich völlig zu entwaffnen, das beste Mittel ergriffen; statt aller Entschuldigung gibst Du mir die sichere Aussicht auf baldiges Wiedersehen und längeres Zusammensein. Liebste Sonja, ich gestehe Dir, daß ich zwar keinen Augenblick daran gezweifelt habe, Du werdest das mir gegebene Versprechen halten, wofern es in Deiner Macht stehe, aber sehr im Zweifel darüber gewesen bin, ob die Verhältnisse es Dir erlauben würden. Dies ist auch der Grund gewesen, weswegen ich bis jetzt noch in keinem Briefe davon gesprochen habe, wie sehr ich mich auch darnach sehne, meine teure Freundin und Schülerin, die so fern von mir zu wissen mir noch immer ein fremder Gedanke ist, einige Wochen wieder in meiner Nähe zu haben. Gar zu leicht konnten sich Deiner Herkunft, nachdem Du erst so kurze Zeit wieder in Deiner Heimat Dich befandest, unüberwindliche Hindernisse entgegenstellen; für diesen Fall wollte ich Dich nicht auch noch durch eine Mahnung an Dein Versprechen quälen. Hättest Du mir geschrieben „Lieber Freund, ich kann in diesem Jahre nicht kommen", so würde mir dies sehr schmerzlich gewesen sein, aber an dem Ernst Deines Willens hätte ich nicht gezweifelt."

Et plus loin il écrit:

„Ich habe mich seit Anfang d. J. gar nicht wohl befunden und deshalb auch außer der wenig bedeutenden Arbeit über die Integration von $\int \frac{F(s)\,ds}{\sqrt{s}}$ durch Logarithmen nichts Gescheites machen können, teilweise sogar Widerwillen gegen die Arbeit empfunden".

Vient ici un passage qui montre admirablement jusqu'à quel point Sonja était toujours restée femme et qui la caractérise d'une manière plaisante:

„Du kommst also in Begleitung einer jungen und „niedlichen" Mathematikerin? Willst Du mir etwa selbst wieder eine Schülerin zuführen, nachdem Du mir ausdrücklich untersagt hast, eine solche anzunehmen? Das würde mich sehr in Verlegenheit setzen, indem ich in der Tat in die Lage gekommen bin, einer deutschen Dame, die gern Unterricht in der Geometrie bei mir haben wollte, dies abzuschlagen."

On se rappelle les étrennes de jour de naissance, ce cahier manuscrit de Weierstrass, dont le contenu ne devait être connu tout d'abord que par Sonja seule. Weierstrass prie ensuite Sonja de lui apporter quelques exemplaires de sa photographie

. . . „für die Göttinger Herren, die gar zu gern wissen möchten, wie denn ein Menschenkind generis feminini, das sich mit partiellen Differentialgleichungen, Saturnusringen und Abelschen Transzendenten beschäftigt, eigentlich aussieht"

et ajoute:

„Daß das Bild, welches man sich von Deiner Persönlichkeit gemacht hat, der Wirklichkeit nicht ganz entspricht, habe ich aus der betroffenen Miene gesehen, die Schering machte, als ich ihm auf seine Frage, ob ich etwa eine Photographie von Dir besäße, die in meinen Händen befindliche (größere) zeigte. Kirchhoff hat vor acht Tagen seine hiesigen Vorlesungen begonnen; ich freue mich sehr, ihn hier zu haben. Prof. Richelot in Königsberg ist nach schwerer Krankheit gestorben, für die dortige Universität ein harter Verlust. Ich habe in ihm einen sehr lieben Freund scheiden gesehn.

Augenblicklich bin ich mit der Durchsicht einer umfangreichen Dissertation eines meiner Schüler beschäftigt, welche zu den besten gehört, die mir noch vorgelegen haben. Sie beschäftigt sich mit der Integration von $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ für einen mehrfach zusammenhängenden Teil der Ebene xy unter vorgeschriebenen Grenzbedingungen und enthält eine Reihe neuer und bedeutender Resultate.

Übrigens habe ich augenblicklich mehrere recht gute Zuhörer, darunter auch einen Schweden (Mittag-Leffler), der mir besonders gefällt, einen Österreicher und, was wunderbar ist, zwei Polen, die wenigstens ausdauernd fleißig sind."

Le 17 juin Weierstrass répond à une lettre de Sonja du 13 du même mois. Pendant 5 semaines Sonja avait beaucoup souffert de la rougeole et n'était pas encore remise. Le voyage projeté à Berlin pour y voir Weierstrass avait dû être reporté à une date incertaine. Weierstrass en est profondement affligé:

„Du kannst Dir nicht denken, wie sehr ich Dich entbehrt habe. Im Laufe von vier Jahren war ich gewohnt geworden, in Dir die Vertraute meiner Gedanken und Bestrebungen zu sehen, mit der ich sprechen konnte wie mit einem Freunde, der mir mein ganzes Leben über nahe gestanden. Und niemals habe ich jemanden gefunden, der mir ein solches Verständnis der höchsten Ziele der Wissenschaft und ein so freudiges Eingehen auf meine Ansichten und Grundsätze entgegengebracht hätte wie Du. O, wir hätten uns noch nicht trennen müssen. Du hättest noch ein, zwei Jahre meine mit mir zusammenarbeitende Schülerin bleiben müssen. Doch das war ja nicht möglich.

Ich wünsche gar nicht, daß Du mir viel schreibst, so lange es Deinen Augen schaden kann; aber ich bitte Dich recht herzlich, laß mir wenigstens bis zu der Zeit, wo Du Dich wieder ganz wohl befinden wirst, alle 8 Tage nur drei Zeilen zukommen, in denen Du mir sagen wirst, wie es Dir geht. Ich würde mich sehr ängstigen, wenn ich längere Zeit ohne Nachricht von Dir bleibe. Nicht wahr, Du gewährst mir diese Bitte und schreibst mir auch die wenigen Worte, selbst wenn Du inzwischen von mir nicht gehört haben solltest?

Auch über etwas, das mich betrifft, muß ich Dir eine Mitteilung machen, weil Dir vielleicht in einer Zeitung darüber eine Notiz zukommen könnte. Ich weiß nicht, ob Dir bekannt ist, daß Friedrich Wilhelm IV. einen eigentümlichen Orden Pour le mérite für Wissenschaft und Kunst gestiftet hat, der sich von andern dadurch unterscheidet, daß er nur an 20 deutsche Gelehrte (und 10 Künstler) und an ebensoviel Ausländer vergeben wird und daß jedesmal, wenn ein Ritter stirbt, die übrigen 29 dem Könige einen Nachfolger vorschlagen, der denn auch stets bestätigt wird. Kürzlich ist nun Dein Freund unerwarteterweise Ritter dieses Ordens geworden, als einziger Repräsentant der mathematischen und astronomischen Wissenschaften in dieser Tafelrunde. Da der Orden als ein hoher gilt, der den glücklichen Inhaber z. B. courfähig macht, so veranlaßt eine Verleihung desselben jedesmal eine gewisse Aufregung in der Gelehrten-Republik, und der Empfänger wird beglückwünscht, aber noch mehr beneidet und kritisiert. So ist es auch mir ergangen. Du weißt, daß ich gegen alles dies sehr gleichgültig bin und mich aufrichtig gefreut haben würde, wenn etwa Kummer mir vorgezogen wäre, — gleichwohl sage ich ohne Anstand, daß ich in der Lage, bei gewissen Gelegenheiten einen Orden tragen zu müssen, den Stern, welchen vor mir Gauß, Jacobi und Dirichlet getragen haben, lieber anlegen werde als jeden andern. Außerdem haben sich meine Sitten, seit Du fort bist, überhaupt verschlechtert; ich bin vorigen Winter dreimal auf einem Hofball gewesen, in den vier Jahren vorher nicht ein einziges Mal."

Ce ne fut que trois mois plus tard, le 17 septembre, que Sonja répondit, mais elle ne fit pas savoir si elle avait réellement reçu la lettre du 17 juin. Weierstrass est désolé que cette lettre ne soit perdue. Il craint que Sonja puisse interpréter comme une „Teilnahmslosigkeit" ce fait qu'elle n'ait pas eu de nouvelles de lui depuis qu'il a été avisé de sa maladie.

Le 23 octobre nouvelle lettre de Weierstrass en réponse immédiate à une lettre de Sonja, dans laquelle elle lui annonce la mort de son père.

„Nein, liebes Herz, ich will mich nicht eindrängen in Deinen gerechten Kummer, den Du in Dir und durch eigene Kraft überwinden wirst.

„Nicht in das Grab, nicht übers Grab verschwendet
Ein edler Mensch der Sehnsucht hohen Wert.
Er kehrt in sich zurück und findet staunend
In seinem Busen das Verlorne wieder".

Aber danken will ich Dir aufrichtig dafür, daß Du in Deinem Briefe mir ausführlich über die näheren Umstände, unter denen der unerwartete Tod Deines verehrten Vaters erfolgte, berichtet hast — im Gegensatz zu der Wortkurzheit, mit der Du sonst Persönliches zu berühren liebst."

Enfin Weierstrass lui pose quelques brèves questions:

. . . „ob Du einen vom 1. Oktober datierten Brief erhalten hast, der ausschließlich Mathematisches enthielt, er sollte ursprünglich eine Beilage zu meinem Rüdersdorfer Brief sein, ich war aber nicht rechtzeitig damit fertig geworden."

Cette lettre semble, pour le plus grand dommage des sciences mathématiques, avoir partagé le sort des lettres du 15 octobre 1874 et du 15 février 1875 et être perdue pour toujours. Encore une question:

. . . „ob Du Dich wohl genug fühlst, um weitere mathematische Mitteilungen von mir zu erhalten. Ich habe einen schönen Satz, der ganz allgemein für die Zurückführbarkeit eines Integrals von beliebigem Range auf eins von niedrigerem Range ein mathematisches und hinreichendes Kriterium ausspricht."

Du milieu d'octobre 1875 où Sonja fit part à Weierstrass de la mort de son père, jusqu'au milieu d'août 1878 c'est-à-dire pendant trois ans Sonja ne donna pas un signe de vie. Weierstrass écrit 15 août 1878:

„Meine liebe Freundin, Es ist mir auch nach dem Empfange Deines — kaum mehr erwarteten — Briefes vom — — — ja, das Datum fehlt wieder wie in so manchen früheren — unbegreiflich geblieben, warum Du mich so lange Zeit ohne jede Nachricht von Dir gelassen hast.

Hast Du meine Briefe nicht erhalten? Oder was hat Dich abhalten können, Deinem besten Freunde, wie Du mich so oft genannt hast, volles Vertrauen wie früher zu schenken? Ich stehe da vor einem Rätsel, dessen Lösung nur Du mir geben kannst. Du versprichst mir einen ausführlichen Brief, in welchem Du mir mitteilen willst, was Du in den letzten 3 Jahren erlebt und getrieben hast, wofern Du aus meiner Antwort ersiehst, daß sich meine Gesinnung gegen Dich nicht geändert habe. Hast Du das auch nur einen Augenblick glauben können, liebe Sonja? Aber ich nehme Dich beim Wort und erwarte also alsbald einen recht umständlichen Bericht. Ich möchte Dich aber dringend bitten, mich sofort nach Empfang dieses Briefes auch nur durch wenige Zeilen davon in Kenntnis zu setzen, daß er in Deine Hände gekommen ist; ich würde das Gegenteil annehmen müssen, wenn ich nicht innerhalb der nächsten 8 Tage die erwartete Anzeige erhielte.

— —

Mittelbar habe ich nur zweimal von Dir gehört, durch Herrn Mittag-Leffler, der Dich in Petersburg besucht hat, und dann vor kurzem durch Herrn Tchebychef. Den letztern habe ich nicht selbst gesprochen, — er besucht mich stets zu einer Zeit, wo ich nicht zu Hause bin —, aber gegen Borchardt hat er geäußert, Du habest die Beschäftigung mit der Mathematik aufgegeben. Ich freue mich, von Dir selbst die Versicherung des Gegenteils zu hören. Mittag-Leffler ist mir ein sehr lieber Schüler gewesen; er besitzt neben gründlichen Kenntnissen eine ungewöhnliche Auffassungsgabe und einen auf das Ideale gerichteten Sinn; ich bin überzeugt, der Verkehr mit ihm würde anregend und fördernd auf Dich wirken.

Du möchtest nun gern von mir erfahren, wie es mir seither ergangen, und was ich getrieben habe. Was meine Gesundheit angeht, so bin ich zufrieden. Ernstlich unwohl bin ich in den letzten 3 Jahren nicht gewesen; nur fange ich an zu spüren, daß der zweistündige Vortrag ohne Unterbrechung mich angreift, sodaß ich des Nachmittags längere Zeit mich ausruhn muß. Meine Beschäftigungen sind die alten; meine Vorlesungen nehmen mich ganz besonders in Anspruch, namentlich habe ich für die Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen — im letzten Semester vor 102 Zuhörern gehalten — noch manches gearbeitet, ebenso für die Variationsrechnung. Im letzten Semester habe ich auch zum erstenmal über einige Anwendungen der hyperelliptischen Funktionen gelesen. Meine eigentlichen Untersuchungen angehend, so haben die über die $2n$fach periodischen Funktionen oder besser gesagt die Systeme von n Funktionen ebenso vieler Argumente, für die ein algebraisches Additionstheorem besteht, endlich einen Abschluß gefunden, der mich befriedigt, so daß ich jetzt mit der Veröffentlichung vorgehen werde. Ich muß dabei freilich ziemlich mit dem Ende anfangen, — aus äußeren Gründen, weil man nämlich auch in Frankreich jetzt anfängt, sich mit den periodischen Funktionen mehrerer Veränderlichen zu beschäftigen. Den Beweis dafür, daß alle eindeutigen Funktionen von n Veränderlichen, wenn sie bei endlichen Werten ihrer Argumente wie rationale Funktionen sich verhalten und $2n$ voneinander unabhängige Periodensysteme besitzen, sich durch ϑ Funktionen ausdrücken lassen, hoffe ich noch in diesen Ferien druckfertig machen zu können. Für das Übrige habe ich umfangreiche Ausarbeitungen in meinem Besitze."

Ces volumineuses rédactions sont toutes disparues. En revanche il se trouve dans le 3ème volume, no. 3 des œuvres de Weierstrass une preuve du théorème: Jede eindeutige Funktion von n Argumenten, welche bei endlichen Werten der letztern den Charakter einer rationalen Funktion besitzt und zugleich $2n$fach periodisch ist, entspringt in der beschriebenen Weise (dans une introduction au traité) aus einer Θ-Funktion derselben Veränderlichen."

Plus loin Weierstrass écrit:

„Weniger glücklich bin ich gewesen mit den angefangenen Untersuchungen über die Lösung der dynamischen Probleme durch Reihenentwicklungen, welche der Besonderheit der zu integrierenden Differentialgleichungen entsprechen. Ich komme bis zu einem gewissen Punkt; ich forme z. B. die Differentialgleichungen für das Problem der n Körper so um, daß sie eine beliebig weit fortzusetzende Integration in Reihenform formell gestatten, aber meine Versuche, die Konvergenz der Entwicklung zu erweisen, scheitern an einem Hindernis, das ich nicht zu bewältigen imstande bin. Die Glieder der Reihen haben alle die Gestalt

$$A_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu} \cos[\nu_1 \varkappa_1 (t - \tau_1) + \nu_2 \varkappa_2 (t - \tau_2) + \cdots + \nu_r \varkappa_r (t - \tau_r)],$$

wo die $A, \varkappa, \tau$ Konstanten sind. Die Größen $\tau_1, \ldots, \tau_r$ sind, wenn die Ordnung des zu integrierenden Systems von Differentialgleichungen $2r$ ist, r der Integrationskonstanten. In den Koeffizienten $A_{\nu_1, \ldots, \nu_r}$ kommen dieselben nicht vor, sondern in ν andern, welche mit den $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ durch ν Gleichungen zusammenhängen. Diese Koeffizienten erscheinen aber in Bruchform, und es werden die Nenner unendlich klein, wenn die Summe der absoluten Beträge der ganzen Zahlen

$v_1, \ldots, v_r$ unendlich groß wird. Es muß also gezeigt werden, daß auch die Zähler unendlich klein werden und ebenso die Brüche selbst, was bei der komplizierten Zusammensetzung der Ausdrücke unmöglich erscheint.

Das Faktum selbst ist mir nicht auffallend, es kommt sehr oft vor, daß eine algebraische Funktion mehrerer Argumente sich nur in der Form eines Bruches darstellen läßt, wenn sie auch bei endlichen Werten der Argumente niemals unendlich groß wird. Aber wie gesagt, ich komme über die daraus entspringende Schwierigkeit nicht hinweg. Laß mich nicht zu lange auf den versprochenen ausführlichen Bericht warten, und sei überzeugt, daß meine Gesinnung gegen Dich unverändert die eines treuen und aufrichtigen Freundes ist. Sende Deinen Brief nach Berlin unter der alten Adresse, er wird mir sicher hierher gesandt."

Ce n'est pas huit jours mais bien deux ans après que Weierstrass reçut l'avis que sa lettre du 15 août 1878 était bien arrivée aux mains de Sonja. Le 23 septembre 1880 elle lui écrivit une longue lettre, quelques jours après un billet très court et enfin à la fin d'octobre un nouveau billet. Toutes ces lettres parvinrent en même temps à Weierstrass qui répond le 28 octobre 1880:

„Ich beeile mich nun, Dir zu antworten. Ich hatte allerdings kaum noch gehofft, ein Lebenszeichen von Dir zu vernehmen. Vor zwei oder drei Jahren schriebst Du mir nach einer sehr langen Pause, ich solle in nächster Zeit ausführliche Nachrichten von Dir erhalten, — aber ich habe dann weiter nichts von Dir auf direktem Weg gehört.

Nur Herr Mittag-Leffler hat mir dann und wann eine Nachricht von Dir gebracht, aus der ich wenigstens die Tatsache entnehmen konnte, daß Dein körperliches Befinden ein befriedigendes sei, — das war aber auch alles."

Quels furent les motifs qui firent observer à Sonja ce long silence, si cruel à l'égard de l'homme qui avait été pour elle plus qu'un père? C'est sur ce point que se fait particulièrement sentir la perte qu'a été pour l'histoire privée de Sonja et de Weierstrass la destruction des lettres de celle-ci. Comme on aurait aimé l'entendre elle-même plaider sa cause, entendre ces belles paroles, soulevées par la clarté de la pensée et la profondeur du sentiment, dont sa nature eminemment artiste avait le secret!

Weierstrass avait déjà brûlé les lettres de Sonja quand la biographie d'Anne-Charlotte Leffler vit le jour. Il ne me cacha pas qu'il aurait préféré que ce livre n'eût pas été publié. A quoi bon présenter au grand public la personnalité si riche de sa Sonja? „Die Menschen sterben, die Gedanken bleiben": il eût suffi que la haute figure de Sonja passât à la postérité par la seule vertu de ses travaux mathématiques et littéraires.

Or personnellement, comme on le sait, Sonja elle-même avait été d'un tout autre avis[1].

Cette conversation que j'eus avec lui et la constatation que, malgré tout, la biographie d'Anne-Charlotte Leffler était un fait irrévocable, déterminèrent sans doute Weierstrass à remettre à ma discrétion l'utilisation et l'emploi de ses lettres à Sonja.

On connait par la biographie d'Anne-Charlotte Leffler les côtés extérieurs de la vie de Sonja durant ces trois années. Waldemar Kowalewsky, tout ayant accepté les conditions, sous lesquelles son mariage avec Sonja s'était conclu, souhaitait et espérait tout autre chose. Pour lui elle était et demeurait toujours, en dépit de tous les tiraillements et de tous les conflits, la bien aimée de sa jeunesse, et il ne renonça jamais à l'espoir qu'un jour elle fût réellement sa femme. „C'est à ce moment à Palibino, affaissée comme elle l'était par le chagrin de la mort de son père, que chez Sonja la soif de tendresse l'emporta sur toutes les idées préconçues, et que d'elle même dans le grand silence de la maison mortuaire elle devint réellement la femme de son mari“[2].

Les deux époux passèrent l'hiver 1875—76 à St. Pétersbourg. Sonja, désormais dégagée des conditions antinaturelles où elle avait jusqu'alors veçu, était dans la pleine floraison de sa jeune beauté. Elle vivait maintenant parmi les circonstances et les éléments les plus libres qui soient au point de vue intellectuel, et pouvait, dans un cercle capable de la comprendre et de l'admirer, donner carrière à un génie fécondé dès le principe par la culture la plus étendue et la plus profonde que jamais peut-être femme ait encore reçue. Elle savourait donc à longs traits la joie de vivre et goûtait le bonheur d'être jeune.

Cependant son entourage se composait moins d'hommes de science que de littérateurs, d'artistes et de journalistes. Comment aurait elle pu maintenant écrire à Weierstrass pour lui expliquer tout ce changement, lui avouer — car il n'y allait de rien de moins cette fois — qu'elle avait oublié la science pour la vie? Il ne s'agissait plus comme auparavant d'un trouble accidentel causé par la vie mondaine: il s'agissait cette fois de trahir la science pour mener par les chemins battus et connus, — encore qu'avec plus de plenitude et de richesse que les autres —, la vie purement feminine.

C'est pendant la periode 1875—78 que je fis la connaissance de Sonja. Au commencement de févrièr 1876 en me rendant à Helsingfors je passai par St. Pétersbourg et, pour satisfaire ma propre curiosité autant que pour exaucer un vœu formel à Weierstrass, j'y allai rendre visite à la femme qui faisait alors tant

[1] Anna Charlotta Leffler, l. c.

[2] Anna Charlotta Leffler, l. c., p. 48.

parler d'elle dans le monde savant. Sans chercher à reconstituer de mémoire les impressions que j'éprouvai, je reproduis quelques mots retrouvés dans une lettre que j'adressai à Malmsten: „Ce qui m'a le plus vivement interessé à St. Pétersbourg, a été de faire la connaissance de Madame Kowalewsky. Aujourd'hui (10 février 1876) j'ai passé plusieurs heures chez elle. Comme femme elle est délicieuse. Elle est belle et, quand elle parle, son visage s'éclaire d'une expression de bonté feminine et d'intelligence supérieure qu'on ne soutient pas sans éblouissement. Ses manières sont simples et naturelles, sans aucune trace de pedantisme ou de savoir affecté. Du reste en tous points „dame du grand monde". Comme savante elle se distingue par une clarté et par une précision d'expression peu commune, ainsi que par une conception singulièrement prompte. On s'aperçoit aisément aussi du degré de profondeur où elle a poussé ses études, et je comprends parfaitement que Weierstrass la regarde comme le mieux doué de ses disciples."

Les impressions que je ressentis de cette visite à Sonja devaient influer, à leur manière, sur la direction de sa vie. Elle ne m'avait reçu, paraît-il, qu'à contre cœur. Elle savait que je venais de la part de Weierstrass et elle avait déjà rompu en pensée avec les mathématiques. Mais elle était née mathématicienne, elle avait d'une façon très nette la conformation de la région de l'œil gauche que Gall et Moebius ont reconnu comme caractéristique de l'instinct mathématique; ce trait a d'ailleurs été enlevé par retouche sur la plupart de ses portraits. Cependant elle ne remplit pas la promesse qu'elle m'avait faite d'écrire immédiatement à Weierstrass, non plus qu'elle ne se remit de longtemps aux mathématiques. La vie lui imposa bientôt d'autres devoirs, austères et doux, auxquels elle ne pouvait plus se dérober et longtemps il lui fut matériellement impossible de renouer avec le passé. Une seule conversation avec un mathématicien, disciple de Weierstrass, n'en avait pas moins eu pour effet d'ébeauler chez elle la conviction qu'elle en avait fini avec les mathématiques.

Cependant son mari qui s'était lancé dans de vastes entreprises économiques, où elle n'était pas sans avoir sa part de responsabilité, se trouvait aux prises avec de gros embarras. Elle fut pour lui une épouse devouée, un soutien et un auxiliaire tendre et energique, et réussit à eviter une catastrophe. Le 5/17 Octobre 1878 naquit sa fille, „Foufie" en Russie, „la petite Sonja" en Suède. La cousine de Sonja, Sophie von Adelung, parle de son amour passionné pour la petite qu'elle dût néanmoins confier aux soins d'une nourrice.

Pendant la période de tranquillité relative avant la naissance de sa fille se réveilla en Sonja un irresistible désir de retourner aux mathématiques. Elle ne pouvait manquer d'écrire alors à Weierstrass. Dans sa lettre datée d'août

1878 elle demande conseil à son vieux maître au sujet d'une question de mathématiques qu'elle voulait maintenant traiter. Il lui écrit:

„Über das von Dir in Angriff genommene Problem kann ich mich für diesmal nicht mit Dir unterhalten, da ich erst die betreffende Literatur nachsehen muß."

Sonja étant restée deux années entières au lieu des huit jours demandés, sans répondre à la lettre de Weierstrass (celle d'août 1878), ce fut sa propre faute si elle ne reçut jamais de celui-ci, qui autrement la lui eût sûrement envoyée, l'explication du problème auquel elle s'était attaquée. Le calme qu'elle avait espéré pour être à même de reprendre ses travaux mathématiques n'avait pas voulu revenir. Sa petite fille était née et demandait ses soins. Les intérêts de son mari absorbaient tout le reste de son temps: elle redevenait son auxiliare incomparable. Weierstrass avait du cependant être d'autant plus blessé de n'avoir point reçu de réponse à sa lettre qu'il y donnait sur lui-même des nouvelles du plus grand intérêt. Il écrit le 28 octobre 1880:

„So hatte ich mich bereits daran gewöhnt, die Zeit, in der Du mit mir als Schülerin und Freundin verkehrtest, als eine abgeschlossene zu betrachten, die nur noch der Erinnerung angehörte. Der lange Brief, den ich jetzt von Dir in Händen habe, gibt mir nun allerdings einen Schlüssel zum Verständnis Deines langen Schweigens; gleichwohl bedaure ich aufs tiefste, daß Du Deinem alten Freunde gegenüber nicht schon früher mit rückhaltlosem Vertrauen Dich ausgesprochen hast. Ich bedaure dies ganz besonders auch aus dem Grunde, weil auf diese Weise Jahre verloren gegangen sind, in denen ich vielfach hätte Gelegenheit finden können, durch schriftliche Mitteilungen Dich in Deinen Studien zu unterstützen und Deinen Eifer und Deinen Mut zu beleben. — Aber ich liebe es nicht, über Vergangenes viel zu reflektieren, — fassen wir darum die Zukunft ins Auge."

À la fin de l'année 1879 et au commencement de 1880 eut lieu un congrès de naturalistes russes à St. Pétersbourg auquel je pris part. J'étais alors professeur à l'université d'Helsingfors. Je recontrai là pour la seconde fois Sonja et fis la connaissance de son mari et de „Foufie". Sonja, bien que faisant partie du congrès, ne prit point part à ses travaux. Il était visible que d'une part elle avait déjà perdu le contact avec sa carrière mathématique, et que d'autre part son esprit brûlait du désir d'y rentrer. Je ne connus rien de sa situation privée et matérielle. Cependant celle-ci était devenue en octobre 1880 tellement difficile qu'elle la vit inextricable. Elle montra alors qu'elle était née mathématicienne car elle retrouva dans la reprise de ses études son équilibre moral. Elle osa se présenter de nouveau devant Weierstrass. Elle lui écrivit pour lui demander si elle pouvait venir à Berlin. Mais avant que sa réponse (du 28 octobre ne fut parvenue à Moscou, elle était déjà partie. Elle arri Berlin le 31 au matin et à 3 h. de l'après-midi Weierstrass était déjà chez Sa lettre n'avait pas été très encourageante. J'en ai déjà cité le commencer La suite sonne tout autrement que dans les temps jadis:

„Zunächst kannst Du versichert sein, liebe Freundin, daß ich mich her freuen werde, wenn ich Dich nach so langer Trennung eines Tages wiedeı kann. Ich bin es Dir aber schuldig, bevor Du Dich zu der langen Reise hi entschließest, Dich von einigen mich betreffenden Umständen in Kenntn setzen, um zu verhüten, daß Du nicht mit Erwartungen hierher kommst, w zu erfüllen in der nächsten Zeit leider nicht in meiner Macht steht. Du Dich ohne Zweifel wundern, von mir zu hören, daß meine äußeren Verp tungen in den letzten Jahren, statt sich, wie es sein mußte, zu verringern, i mehr gewachsen sind. Für diesen Winter zumal habe ich eine solche Masse beit vor mir, daß ich kaum weiß, wie ich durchkommen werde. Du wirst Zweifel wissen, daß mein Freund Borchardt im vergangenen Sommer schwerem Leiden gestorben ist. Schon seit dem 1. April hatte ich für ih Redaktion des Journals übernommen, und, wie die Verhältnisse einmal li muß ich dieselbe — im Verein mit Kronecker — fortführen. Dann hatten w der Akademie die Veranstaltung einer Gesamtausgabe der Werke von J Dirichlet und Steiner beschlossen. Borchardt hatte Jacobi, ich Steiner nommen. Nach Borchardts Erkrankung mußte ich die Herausgabe von J fortführen, da sich eine dazu geeignete Person nicht fand, — und ich habe früher nicht geglaubt, daß ein solches Unternehmen so viel zeitraubende A erfordert. Außerdem bin ich von Borchardt zum Vormund seiner 6 Kind nannt; bei den innigen Beziehungen, in denen ich seit 25 Jahren zu Borc und seiner Familie gestanden habe, kann ich mich der Pflicht nicht entzi Frau Borchardt bei der Verwaltung ihres bedeutenden Vermögens mit Ra Tat beizustehn, da sie selbst in Geschäften ganz unerfahren ist. Übrigens n ich auch keinen Anstand, Dir zu sagen, daß ich zum Teil auch gezwunger Arbeiten wie die vorhin genannten zu übernehmen, um meine Einkünfte zu mehren. Denn die Besoldung, die ich als Professor beziehe, reicht nicht aus, um die jährlich sich steigernden Ausgaben zu decken. — Ich führe alles nur an, teuerste Freundin, um Dir klar zu machen, daß ich diesen W über nur wenig Zeit für Dich übrig haben würde und daß ich es aus d Grunde lieber sehen würde, wenn Deine Verhältnisse es Dir erlaubten, später — im Frühjahr — hierher zu kommen. Geht das nicht, so wirst Du ich wiederhole dies zu jeder Zeit willkommen sein. und was ich für Dicl kann, soll geschehn. Kommst Du aber später, so laß uns doch eine ordentliche mathematische Korrespondenz führen. Das würde ganz gut gehn, denn ich habe gelernt, z. B. während der Fakultätsverhandlungen, bei den Doktorprüfungen usw. Briefe zu schreiben. So z. B. habe ich vor zwei Jahren mit Borchardt über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen eine Reihe Briefe gewechselt, von denen die meinigen fast alle im Senats-Saal geschrieben waren."

Les raisons citées sont pleinement valables, et on peut ajouter l'état de santé de Weierstrass. Il avait été fort malade d'une pneumonie au printemps de cette même année, et à cette maladie s'était jointe une affection aiguë du foie. Mais des raisons semblables n'existaient-elles pas pendant l'année où Weierstrass avait été recteur d'université? Et les conversations scientifiques entre Weierstrass et Sonja n'avaient-elles pas néanmoins continué sans empêchement?

Cette lettre que Sonja n'avait pas reçue lui fut retournée à Berlin. Il est d'ailleurs peu probable qu'elle aurait pu arrêter Sonja. Celle-ci connaissait son ami et savait que s'il lui était seulement possible de plaider sa cause de vive voix, elle la gagnerait à coup sûr. Nous verrons par la suite comment elle y réussit complètement.

À la fin de janvier 1881, Sonja se trouve de nouveau à Moscou, après avoir néanmoins passé quelque temps à St. Pétersbourg et s'y être tellement adonnée aux mathématiques, que ses amis dans cette ville ne la reconnaissaient plus. Elle s'occupait surtout, et sur le conseil de Weierstrass, de la question du mouvement de la lumière dans un milieu cristallin. Il écrit 1 février 1881:

„Da ich bis zum 24. v. M. von Dir die Papiere über lineare partielle Differentialgleichungen nicht zurückerhalten, so muß ich schließen, daß Du in Deiner Arbeit bis dahin noch keinen vollständigen Erfolg gehabt hast, was ich, aufrichtig gestanden, auch gar nicht erwartet habe. Ich bin überzeugt, es werden sich noch manche Schwierigkeiten ergeben, die überwunden werden müssen, — aber ich halte ebenso fest daran, daß der Gegenstand der gründlichsten Durchforschung wert ist. Laß Dich also nicht entmutigen, wenn das schwierige Problem den ersten Angriffen hartnäckigen Widerstand entgegensetzt."

Weierstrass s'entretient aussi le 1 février 1881 avec Sonja sur l'intégration des équations différentielles des orbites planétaires, problème qu'il ne perd jamais de vue. Il écrit:

„Ich habe, seit Du fort bist, mich noch angestrengt mit den linearen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten reellperiodische Funktionen einer Veränderlichen sind, beschäftigt und glaube jetzt zur Behandlung derselben den richtigen Weg gefunden zu haben. Doch muß ich mich dabei auf eine besondere

Gattung solcher Gleichungen beschränken, welche aber gerade diejenige ist, die bei Problemen der analytischen Mechanik allein vorkommt.

Das Haupttheorem, welches sich mir dargeboten hat, will ich Dir mitteilen. Es sei

$$F(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\lambda, \mu} F_{\lambda, \mu}(t) x_\lambda x_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, \ldots, 2n)$$

eine homogene ganze Funktion zweiten Grades der $2n$ Veränderlichen $x_1, \ldots, x_{2n}$; ihre Koeffizienten sollen reelle Funktionen der Veränderlichen t und aus Gliedern von der Form

$$A \cos(\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \cdots)t + B \sin(\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \cdots)t$$

zusammengesetzt sein, wo $a_1, a_2, \ldots$ beliebige reelle Größen und $\nu_1, \nu_2, \ldots$ ganze (positive oder negative) Zahlen bedeuten. Ferner nehme ich an, es seien die Funktionen $F_{\lambda, \mu}(t)$ so beschaffen, daß bei reellen Werten von $t, x_1, \ldots, x_{2n}$ die Funktion $F(x_1, \ldots, x_{2n})$ ihr Zeichen nicht ändern kann. Dies vorausgesetzt nehme ich nun zwischen $x_1, \ldots, x_{2n}$ und t die folgenden Differentialgleichungen an:

$$\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} &= \frac{\partial F(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}}, \\ \frac{dx_{n+\alpha}}{dt} &= -\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_\alpha}, \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

so haben die allgemeinsten, diesen Differentialgleichungen genügenden Ausdrücke von $x_1, \ldots, x_{2n}$ die Form:

$$x_\lambda = \sum_\varrho \{f_{\lambda, \varrho}(t) \cos(m_\varrho t) + f'_{\lambda, \varrho}(t) \sin(m_\varrho t)\} \quad (\lambda = 1, \ldots, 2n),$$

wo die m_ϱ, deren Anzahl nicht größer als n ist, reelle, im allgemeinen aus den $a_1, a_2, \ldots$ nicht zusammensetzbare Konstanten, die $f_{\lambda, \varrho}(t)$ und $f'_{\lambda, \varrho}(t)$ aber Funktionen von derselben Beschaffenheit und Zusammensetzungsweise wie die $F_{\lambda, \mu}(t)$ sind.

Streng beweisen kann ich dies Theorem bis jetzt nur für den Fall, daß die Zahl der Größen $a_1, a_2, \ldots$ sich auf Eins reduziert. Der Weg aber, den ich zur wirklichen Entwicklung der Ausdrücke von $x_1, \ldots, x_{2n}$ verfolge, ist unabhängig von dieser Voraussetzung, und wenn derselbe sich in dem speziellen Fall bewährt, so wird auch der allgemeine keine Schwierigkeit machen. Könnte ich jetzt einige Wochen ausschließlich diesen Untersuchungen widmen, so würde ich bald zur Gewißheit darüber kommen, ob die Gedanken, von denen ich mich jetzt leiten lasse, richtig sind oder nicht.

Komme ich mit den linearen Differentialgleichungen von der angegebenen

Form zurecht, so glaube ich, daß auch diejenigen Differentialgleichungen, die z. B. zur Bestimmung der Planetenbahnen dienen sollen, einer rationalen Behandlungsweise sich werden unterwerfen lassen. Daß alle bis jetzt versuchten Wege zur Integration derselben nicht zum Ziele führen können, davon bin ich jetzt mehr als je überzeugt."

Une lettre du 8 janvier 1881 que Sonja m'écrivit de St. Pétersbourg est d'un haut intérêt aussi bien pour la biographie de Sonja que pour celle de Weierstrass.

„Je commencerai ma lettre aujourd'hui par vous parler de M. Weierstrass. — J'ai eu le plaisir de le trouver en bonne santé, mais accablé d'ouvrage, et malheureusement d'ouvrage qui, à mes yeux du moins, aurait tout aussi bien pu être rempli par quelque mathématicien plus jeune, dont le temps n'est pas encore aussi précieux. Son cours, qu'il lit maintenant tous les jours, et devant un auditoire de 250 personnes, la révision de l'édition des œuvres de Jacobi et de Steiner, les différents académie-senats-facultaetssitzungen et autres, remplissent sa journée au point de lui rendre la terminaison de ses propres recherches presque impossible, surtout en vue de son âge déjà assez avancé et de sa santé, qui ne lui permet pas de se fatiguer impunément. Je ne comprends vraiment pas comment les autres mathématiciens de Berlin ne parviennent pas à faire comprendre au ministre, combien il serait nécessaire de délivrer M. Weierstrass pour un temps du moins de toute occupation extérieure et de lui assurer les moyens de se livrer pendant une année exclusivement à la publication de ses œuvres. Sous ce rapport aussi la mort de M. Borchardt est un bien grand malheur, car c'était je crois, le seul des amis influents de Weierstrass qui prenait vraiment à cœur ses intérêts, qui sont aussi ceux de la science. C'est vraiment par trop regrettable que nous ne verrons peut-être jamais un exposé complet de sa théorie des fonctions abéliennes, car je trouve qu'un des plus grands mérites de Weierstrass consiste justement dans l'unité de sa méthode et dans la manière, aussi naturelle que logique, dont il déduit toute la théorie d'un seul théorème fondamentale et la présente vraiment comme un tout organique; et c'est justement ce côté-là de son génie qui se perd complètement de vue à la publication de ses recherches par fragments, comme il l'a fait jusqu'à présent et qui n'est justement apprécié que par un petit nombre de ses élèves. N'est-ce pas étonnant vraiment comme à l'heure qu'il est la théorie des fonctions abéliennes avec toutes les particularités de la méthode qui lui sont propres et qui en font justement une des plus belles branches de l'analyse, est encore peu étudiée et peu comprise partout ailleurs qu'en Allemagne? J'ai été vraiment indignée en lisant par exemple le traité des fonctions abéliennes par Briot, qui jusqu'à présent ne m'était pas tombé sous les yeux. Peut-on exposer une aussi belle matière d'une manière aussi aride et aussi peu profitable pour l'étudiant? Je ne m'étonne presque plus que nos mathématiciens russes, qui ne connaissent toute cette théorie que par le livre de Neumann et celui de Briot, professent une indifférence aussi profonde pour l'étude de ces fonctions. Me croirez-vous, par exemple, quand je vous dirais que j'ai eu à soutenir, il y a peu de temps, une discussion très vive contre plusieurs professeurs de mathématiques de l'université de Moscou, qui prétendaient que les fonctions abéliennes ne s'étaient pas encore montrées capables d'aucune application sérieuse, et que toute cette théorie était encore embrouillée et aride au point d'être tout à fait impropre de servir de sujet à un cours universitaire?"

Le 6 mars 1881 Weierstrass n'avait encore reçu aucune autre nouvelle de Sonja, qu'un bref avis annonçant qu'elle était revenue à Moscou. Il écrit cependant le même jour:

„Von mir habe ich wenig zu sagen. Ich bin in diesem Jahre recht fleißig gewesen, aber doch nicht mit dem entsprechenden Erfolg. Deine Anwesenheit hat mich veranlaßt, meine alten Untersuchungen über die Integration der dynamischen Differentialgleichungen wieder aufzunehmen; ich habe auch, wie ich Dir bereits schrieb, einige Fortschritte gemacht, aber immer noch sehe ich Schwierigkeiten vor mir, die mir zuweilen unüberwindlich vorkommen. Ich habe diesen Winter im Seminar mich ausführlich über die bisherigen Methoden zur Bestimmung der Planetenbewegungen unter den in unserem Planetensystem stattfindenden Umständen ausgesprochen und bin mehr und mehr zu der Überzeugung gekommen, daß zur wahren Lösung der Probleme, um die es sich dabei handelt, ganz andere Wege als die bisher betretenen eingeschlagen werden müssen, — aber ich sehe diese neuen Wege immer noch nur in nebelhafter Form vor mir. Hätte ich jemanden hier, mit dem ich mich täglich über alles das, was ich versuche, aussprechen könnte, so würde mir vielleicht vieles klarer werden."

Il écrit encore:

„Meine Untersuchungen über die eindeutigen Funktionen sind mir auch aus dem Grunde wert geworden, weil sie jüngeren Mathematikern zu Arbeiten auf demselben Felde den Weg gewiesen haben, was ja der schönste Erfolg ist, den ein Lehrer und Schriftsteller sich wünschen kann. Außer Mittag-Leffler hat der Schwiegersohn Hermites, E. Picard, und der Mitherausgeber des Darbouxschen Bulletins, J. Tannery, im Anschluß an meine Arbeiten ganz interessante Untersuchungen gemacht. Der letztere teilt mir z. B. mit, daß sich die von mir in meiner letzten Abhandlung mit $\psi(x)$ bezeichnete Reihe durch andere ersetzen lasse, welche dieselben Eigenschaften haben, aber von viel elementarerer

Natur als die meinige sind. Setzt man z. B.

$$\psi(x) = \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \frac{2x^8}{x^{16}-1} + \cdots,$$

so ist die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe

$$\frac{1+x^{2^n}}{1-x^{2^n}},$$

woraus sich, wenn man $n = \infty$ setzt, ergibt, daß

$$\psi(x) = 1, \quad \text{wenn } |x| < 1,$$
$$\psi(x) = -1, \quad \text{wenn } |x| > 1.$$

Daraus läßt sich alles ableiten, was ich mit Hilfe meiner Funktion $\psi(x)$ bewiesen habe.

Daß ich sehr begierig bin, zu erfahren, wie weit Du mit Deiner Arbeit — ich meine die λ Arbeit — vorgeschritten bist, brauche ich nicht ausdrücklich zu sagen.“

Sonja ne donnait pas de ses nouvelles, parce qu' après son retour à Moscou elle avait pris la résolution de quitter la Russie (pourquoi et dans quelles conditions, nous le savons par la biographie d'Anne-Charlotte Leffler). Elle pensait être bientôt à Berlin. Elle y arriva au printemps 1881 et y resta jusqu'au commencement de l'année 1882. Puis elle alla s'établir à Paris. Weierstrass écrit à Paris le 11 avril 1882:

„Meine teure Freundin, Es ist jetzt mehr als ein Vierteljahr verflossen, seit Du Berlin verlassen, und ich habe nicht ein einzigesmal an Dich geschrieben, Du würdest also vollkommen berechtigt sein, Dich über mich zu beschweren. wenn Du nicht selbst oft genug die Erfahrung gemacht hättest, daß man einer Pflicht sich klar bewußt sein und gleichwohl die Erfüllung derselben von Tag zu Tag verschieben kann, ohne daß doch Nachlässigkeit oder Trägheit der eigentliche Grund davon ist. Auch Dein erster Brief aus Paris hat lange auf sich warten lassen, und ich gestehe Dir offen, es wäre mir sehr schwer geworden, ihn sofort zu beantworten. Aus jeder Zeile desselben und mehr noch aus dem, was zwischen den Zeilen zu lesen war, ging klar genug hervor, daß aus Umständen, über die Du Dich nicht näher aussprechen konntest und wolltest, Dir Beunruhigungen und Sorgen erwachsen seien, welche Deinen sehnlichen Wunsch, Dich ungestört Deinen Arbeiten widmen zu können, auf längere Zeit zu vereiteln drohten. Du bist nicht gewohnt, in solchen Fällen Dich auch Deinen Freunden gegenüber rückhaltlos auszusprechen, und meinst, jeder Mensch muß mit dem, was er zu tragen hat, selbst fertig zu werden suchen, — ich sympathisiere darin mit Dir vollständig und konnte mich darum nicht entschließen, Dich um Aufklärungen und weitere Mitteilungen zu bitten, — und doch hätte ich, als Dein aufrichtiger Freund und „Beichtvater" kaum schweigend über manches, was Du andeutungsweise berichtetest oder ich mir kombinierte, hinweggehn können. Das ist der wahre Grund, warum ich mich so schwer habe entschließen können, an Dich zu schreiben.

— —

Ich habe meine Vorlesung über hyperelliptische Funktionen nach einem neuen Plane zu einem befriedigenden Abschluß gebracht, auch die Freude gehabt, daß mehrere meiner Zuhörer recht darauf eingegangen sind, die große Mehrzahl auch bis zum Schluß wenigstens getreulich ausgehalten hat. Die Herausgabe von Steiner hat mir noch recht viel zu tun gegeben; am schwierigsten war es, die Fülle von Notizen, die mir von den Revisoren der einzelnen Abhandlungen übergeben waren, auf ihre Richtigkeit zu prüfen und auf ein paar Bogen zusammenzudrängen. Ich bin aber seit einigen Wochen fertig damit; der zweite (und letzte) 47 Bogen starke Band ist Anfang d. M. ausgegeben worden. Ich freue mich sehr, der eingegangenen Verpflichtung mich entledigt zu haben, und zwar, wie ich glaube, zur Zufriedenheit des betreffenden Publikums. Die Herausgabe von Jacobi macht mir weniger Mühe, ist mir auch interessanter.

Augenblicklich bin ich damit beschäftigt, in einer nicht gerade umfangreichen Abhandlung einen Überblick darüber zu geben, wie sich die Theorie der allgemeinen Abelschen Transzendenten gestaltet, wenn man sie auf derselben Grundlage aufbaut wie in der genannten Vorlesung. Ich assoziiere, wenn y eine beliebige n deutige Funktion von x ist, derselben alle Funktionen, die aus y und beliebig vielen eindeutigen Funktionen von x rational zusammengesetzt sind, also in der Form

$$f_0(x) + f_1(x)y + \cdots f_{n-1}(x)y^{n-1}$$

dargestellt werden können, in der Art, daß $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ eindeutige Funktionen sind, von denen ich jedoch annehme, daß jede von ihnen nur eine endliche Anzahl wesentlich singulärer Stellen besitze. Unter dieser Beschränkung läßt sich die Theorie dieser mehrdeutigen Transzendenten so weit entwickeln, wie ich es für die eindeutigen Funktionen ausgeführt habe; es läßt sich der Begriff der Primfunktionen und namentlich derer, welche dieselbe Rolle spielen wie die algebraischen Einheiten in der Zahlentheorie, ganz allgemein feststellen und der Nachweis führen, daß jede Funktion der in Rede stehenden Gattung sich aus Primfunktionen — im allgemeinen aus einer unendlichen Anzahl solcher — zusammensetzen läßt usw. Wenn ferner ein Differential

$$F(x, y)\,dx,$$

wobei F eine der betrachteten Funktionen bedeutet, zu integrieren ist, so kann dies stets geschehen in der Form

$$\int F(x, y)\,dx = F_0(x, y) + \sum_{\nu} C_\nu \log F_\nu(x, y),$$

wobei die F_ν wieder Funktionen der Gattung bedeuten und der Ausdruck auf der Rechten aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern besteht, je nachdem die Zahl der Unendlichkeitsstellen der Funktion $F(x, y)$ eine endliche ist oder nicht. Für den Fall, daß man für $F(x, y)$ eine rationale Funktion von x, y nimmt, kommt man auf die Abelschen Integrale, deren wesentliche Eigenschaften sich nunmehr aus der vorangegangenen allgemeinen Theorie in einfachster Weise ergeben. Ebenso gewinnt man einen leichten Zugang zu den Θ Funktionen. Wie gesagt, werde ich in meiner Abhandlung nur die Grundlage der Theorie geben, ohne in das Detail der Rechnungen einzugehen, das geht ganz gut, und ich denke mir, es wird gerade diese Form der Darstellung manchem Leser willkommen sein.

Die Abhandlung wird schon in einigen Wochen erscheinen.“

Le mémoire ne fut jamais publié et les notes qui existaient probablement, ont disparues. Mais on peut se faire une idée du travail que Weierstrass y avait consacré et de la perte que fit la science par suite de sa disparition, par le passage suivant dans une lettre de sa sœur Clara Weierstrass à Sonja le 22 mars 1882:

„Ich sage Dir, so etwas von Arbeiten ist noch nicht dagewesen. Beim Essen sitzt er, mit dem Zeigefinger der rechten Hand Formeln schreibend in die Fläche der andern Hand. — Sowie er den letzten Bissen gegessen hat, sitzt er wieder an seinem Pult, zu arbeiten. Wir haben ein phänomenal schönes Frühlingswetter, aber er geht nicht vor die Tür. — Er arbeitet von früh bis in die Nacht hinein ohne Unterlaß, ohne Erholung. — Wahrscheinlich will er zu einem Abschluß gelangen und sich durch nichts in der Welt stören lassen, bis er zu diesem Abschluß gelangt ist. Die Mathematiker sind nun einmal Selbstquäler. Dies forzierte Arbeiten geht nun so lange gut, bis mit einmal die Nerven so angegriffen sind, daß es nicht mehr geht.“

Weierstrass écrit de nouveau le 11 avril 1882:

„Von Kronecker ist kürzlich eine große Arbeit: „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen“ erschienen. Sie enthält die Resultate langjähriger Forschungen in konzisester Form, wird aber für Leser, die

Kroneckers Vorlesungen nicht gehört haben, recht schwer zu verstehen sein, sodaß ich fürchte, sie wird vorderhand mehr bewundert als studiert werden."

Enfin un passage qui montre à quel point Weiertrass suivait et appréciait ce qui se faisait à cette époque en France:

„Hast Du Notiz genommen von den neuesten Arbeiten Poincarés? Der ist jedenfalls ein bedeutendes mathematisches Talent, so wie überhaupt jetzt in Frankreich wieder eine junge Generation von Mathematikern mit dem besten Erfolg bemüht ist, auch auf dem Gebiete der Analysis, deren einziger Vertreter, nachdem Liouville sich von ihr abgewandt hatte, lange Zeit nur Hermite war, Eroberungen zu machen. Die von Poincaré in Anschluß an Arbeiten von Fuchs, Schwarz und Klein begonnenen Untersuchungen werden jedenfalls zu neuen analytischen Transzendenten führen, wenn er auch vielleicht jetzt noch nicht ganz auf dem richtigen Wege ist, — es ist nur zu beklagen, daß den jungen französischen Forschern die Akademie ein zu verlockendes Ziel ist, — jede Woche einen Artikel in den Comptes rendus zu bringen, der wirklich Wert hat, das ist doch unmöglich."

Sonja aurait pu défendre les articles des „Comptes rendus" en rappelant l'influence suggestive qu'un échange fréquent d'idées entre des savants occupés avec le même problème a toujours eu.

D'une lettre du 14 juin 1882 il ressort combien malgré tout Sonja avait été réservée vis-à-vis de Weierstrass relativement à ses affaires privées:

„Meine teure Freundin, Was Du mir in dem ersten Teile Deines lange erwarteten Briefes mitteilst, hat mich sehr betrübt, obgleich nicht gerade überrascht. In der Tat habe ich längst geahnt, was der eigentliche Grund Deines langen Verbleibens in Paris und Deiner absoluten Schweigsamkeit mir gegenüber sei. Die wenigen Stunden, in denen ich Gelegenheit hatte, Herrn Kowalewsky kennen zu lernen, haben hingereicht, um mir die Überzeugung zu geben, daß Euer Verhältnis einen innern Riß habe, der es ganz zu zerstören drohe. Er hat weder Interesse noch Verständnis für Deine Ideen und Bestrebungen, und Du vermagst Dich nicht in die Unruhe seines Lebens hinein zu finden. Eure Charaktere sind zu verschieden, als daß Du, was zu einer glücklichen Ehe erforderlich wäre, in ihm einen Halt, eine Stütze für Dich zu gewinnen hoffen dürftest und er in Dir die notwendige Ergänzung seines Wesens finden könnte. Wäre dies anders, so würden, glaube ich, selbst Verirrungen seinerseits eine ehrliche Versöhnung nicht hindern. — Wenn ich Deinem Plane, in Stockholm als Privatdozentin aufzutreten, während er in Moskau seines Amtes walten sollte, widersprechen zu zu müssen geglaubt habe, so geschah dies in der Überzeugung, daß ein solches Verhältnis zwischen Eheleuten ein unnatürliches sei, und ich lasse es mir auch nicht ausreden, daß Du gar nicht auf den Gedanken gekommen wärest, wenn Du Dich Deinem Manne innerlich verbunden gefühlt und ihn so geliebt hättest, wie nun einmal ein Mann geliebt sein will. Daß er diesem Plane abgeneigt war, habe ich ihm nicht verdenken können, und vielleicht ist er gerade dadurch gegen Deine mathematischen Bestrebungen noch mehr eingenommen worden. Wie die Sachen jetzt liegen, scheint das bisherige Verhältnis zwischen Euch beiden in der Tat unhaltbar geworden zu sein; möchte es sich doch nur so gestalten, daß Du die für Deine Existenz notwendige Freiheit von Unruhe und Sorgen gewinnst. Aus Deiner jetzigen Einsamkeit mußt Du so bald als möglich heraus, auch die kleine Sonja bei Dir haben, — die Sorge um diese und die Beobachtung ihrer Entwicklung wird Dich in wohltätiger Weise beschäftigen und erfreuen. Ich habe im Vorstehenden meine Ansicht unumwunden, ohne Redensarten ausgesprochen. Ich danke Dir für das Vertrauen, das Du mir bewiesen, kenne Dich aber zu gut, als daß ich versuchen sollte, Dir irgend einen Rat aufzudrängen, und weiß, daß Du stark genug bist, mit Deinem Schicksal allein fertig zu werden. Wenn Du aber glaubst, daß in irgend einer Weise mein Rat, mein Beistand Dir nützlich werden könne, nun so weißt Du ja, daß Du Dich ohne Scheu an mich wenden kannst."

Weierstrass se réjouit que Sonja ait fait la connaissance de Charles Hermite. J'avais visité Paris au printemps 1882 et avais trouvé que Sonja ne s'était mise en rapport avec aucun des mathématiciens français et l'avais enfin persuadée avec beaucoup de peine à aller faire une visite chez Hermite. Weierstrass écrit:

„Mit den andern Mathematikern wirst Du nun wohl auch in Verkehr treten müssen, die jüngern, Appell, Picard, Poincaré werden Dich am meisten interessieren. Poincaré ist nach meiner Ansicht von allen der zur mathematischen Spekulation Berufenste, möge er nur sein ungewöhnliches Talent nicht zu sehr zersplittern und seine Untersuchungen reifen lassen. Die Theoreme über algebraische Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen und über die linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten, welche er in den Comptes rendus gegeben hat, sind wahrhaft imponierend; sie eröffnen der Analysis neue Wege, welche zu unerwarteten Resultaten führen werden. Gleichwohl bin ich der Überzeugung, daß die neue Behandlungsweise der in Rede stehenden Gleichungen, in ihren Grundgedanken richtig, doch noch von verallgemeinerten, höhern Gesichtspunkten aus wird unternommen werden müssen. Gestatte mir, dies etwas genauer auszuführen. Wenn eine algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben ist, so sagt Poincaré, daß alle diese Gleichung befriedigenden Wertsysteme x, y sich darstellen lassen in der Form

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

wobei $\varphi(t)$, $\psi(t)$ eindeutige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t bezeichnen, deren Bereich ein beschränkter oder unbeschränkter sein kann. Diese Funktionen haben nun die Eigenschaft, daß sie unverändert bleiben, wenn für t gewisse lineare Funktionen derselben Größe gesetzt werden. Die Koeffizienten der letztern aus den gegebenen Werten der Koeffizienten der Gleichung $f(x, y) = 0$ zu bestimmen, ist jedenfalls eine äußerst schwierige Aufgabe, die im allgemeinen auf transzendente Gleichungen kompliziertester Natur führen wird. Wenn die Koeffizienten von $f(x, y)$ rationale oder algebraische Funktionen von unbestimmten Größen $a, b, \ldots$ sind, so wird offenbar die vollständige Bestimmung von $\varphi(t)$, $\psi(t)$ anders und anders sich gestalten, je nachdem jene willkürlichen Konstanten so oder so in der Gleichung vorkommen. Verfolgt man diesen Gedanken, so wird man notwendig zu folgender Aufgabe gelangen:

Es sei gegeben eine algebraische Gleichung zwischen $n+1$ Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ mit rationalen Zahlkoeffizienten, man soll versuchen, alle diese Gleichung befriedigenden Wertsysteme $(x, x_1, \ldots, x_n)$ in der Form

$$x = \varphi(t_1, \ldots, t_n), \; x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_n)$$

dergestalt darzustellen, daß $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eindeutige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sind. (Das kann z. B. ausgeführt werden, wenn die Gleichung $y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$ gegeben ist, indem man dann x, y, k durch die Funktion $\vartheta_\lambda(v, \tau)$ auszudrücken imstande ist.) Bei dieser Untersuchung wird man bestrebt sein müssen, unter den algebraischen Gleichungen diejenigen aufzufinden, welche man Muttergleichungen nennen kann, von denen jede einen besondern Affekt besitzt und auf die alle übrigen zurückgeführt werden können. Zunächst aber wird es die Aufgabe sein, Funktionen mehrerer Veränderlichen zu bestimmen, welche ähnliche Eigenschaften haben, wie die von Poincaré „fonctions fuchsiennes“ genannten, von denen die Quotienten der Funktionen $\vartheta_\lambda(v_1, \ldots, v_n \,|\, \tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{nn})$, betrachtet als Funktionen der v und τ, ein Beispiel geben. Das sind sehr weitgehende Perspektiven, aber man muß sich klar machen, welches die Endziele der von Poincaré so glänzend begonnenen Untersuchungen notwendig sein müssen.

Inbetreff der Poincaréschen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen gilt das Vorstehende selbstverständlich in erhöhtem Maße. Was Poincaré darüber bis jetzt veröffentlicht hat, das hat, wie ich wahrgenommen, auf einige Herrn, die sich viel mit linearen Differentialgleichungen beschäftigt haben, einigermaßen verblüffend gewirkt. Für viele wird es so schwer, sich von dem Gedanken zu trennen, daß man, um eine lineare Differentialgleichung zu integrieren, notwendig die eine Variable durch die andere ausdrücken müsse.“

Ma collection de lettres de cette époque donne la preuve de la mauvaise humeur avec laquelle les mémoires détaillés de Poincaré publiés quelques mois plus tard dans les Acta mathematica furent reçus par plus d'un des mathématiciens qui entouraient Weierstrass. Les déclarations si franches de Weierstrass montrent entre tant d'autres choses, combien le maître était supérieur à son entourage, et combien on avait tort d'identifier, comme cela a eu lieu quelquefois, le maître avec tel ou tel de ses disciples. Pour moi personnellement le blâme n'avait aucune importance auprès de l'approbation du maître. Je lis dans une lettre de Weierstrass à moi d'une date plus récente (5 avril 1885) lorsque la plupart des mémoires en question étaient déjà publiés:

„Die Geschichte der Mathematik des 19. Jahrhunderts wird aber jedenfalls die merkwürdige Tatsache verzeichnen, daß in einer zu Stockholm erscheinenden Zeitschrift bahnbrechende Arbeiten der genialsten unter den jüngeren französischen Mathematikern zuerst in ausführlicher Darstellung veröffentlicht worden sind, Arbeiten, welche zunächst an die Resultate von Untersuchungen deutscher Forscher sich anknüpfen, durch diese aber auch mit den Entdeckungen Abels in Zusammenhang stehen."

Mais je reviens à la lettre à Sonja du 14 juin 1882:

„Die Abhandlung Poincarés über die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{z}$$

kenne ich nicht. Wo steht dieselbe? Was endlich die von Poincaré angekündigte Integration der Differentialgleichungen der Mechanik angeht, so kann ich darüber folgendes sagen. Ich habe vor zwei Wintern im Seminar etwas über den Gegenstand vorgetragen und unter anderm folgenden Satz bewiesen:

Wenn beliebig viele materielle Punkte nach dem Newtonschen Gesetze — oder irgend einem andern, bei dem an die Stelle von $\frac{1}{r^2}$ eine analytische Funktion von r tritt, die bei reellen und positiven Werten der letztern Größe nur für $r = 0$ unendlich groß wird — aufeinander wirken und es sind die Anfangsbedingungen der Bewegung so beschaffen, daß niemals zwei Punkte zusammentreffen und auch keine zwei ins Unendliche sich von einander entfernen, so sind die Koordinaten der sich bewegenden Punkte analytische Funktionen der Zeit t, eindeutig definiert nicht nur für alle reellen Werte dieser Größe, sondern auch für alle komplexen, deren zweite Koordinate ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer bestimmten Grenze bleibt.

Der Satz, von dem nach Appells Mitteilung Poincaré ausgeht, ist also nur richtig, wenn die Bedingungen der Stabilität des Weltsystems erfüllt sind. Die

Feststellung dieser Bedingungen ist aber vielleicht der schwierigste Teil der ganzen Untersuchung. Wenn z. B. nur zwei Punkte vorhanden sind und zu irgend einer Zeit die Bewegung eines jeden gegen den andern gerichtet ist, so sind die Koordinaten nicht Funktionen der Zeit von der angegebenen Beschaffenheit. Wenn Poincaré imstande ist, die Koeffizienten der Reihe, in welche sich die Koordinaten unter Voraussetzung der Stabilität des Systems entwickeln lassen, wirklich zu bestimmen, so wäre es immerhin möglich, daß dann die Bedingungen, unter denen die Reihe konvergiert, sich feststellen ließen, diese wären dann aber die Stabilitätsbedingungen. Aber auch dann glaube ich nicht, daß jene Reihenform den wahren analytischen Charakter der darzustellenden Funktionen ausdrücken werde; dem widerspricht schon der einfache Fall, in welchem zwei Punkte vorhanden sind und die Bewegung eines jeden um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt in einer Ellipse erfolgt. Aber wir wollen abwarten."

Il m'a paru intéressant de citer également ce passage, bien que Sonja n'eût évidemment pas rapporté à Weierstrass d'une façon entièrement correcte la communication d'Appell au sujet du travail de Poincaré. Weierstrass a encore une communication mathématique:

„Inbetreff der von Hermite und Picard an Dich gerichteten Frage will ich Dir für heute Folgendes mitteilen.

Es sei $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ eine $2r$ fach periodische Funktion der r Veränderlichen u von derjenigen Beschaffenheit, die ich im 89. Bande des Journals in dem an Borchardt gerichteten Briefe ausführlich angegeben habe. Ferner seien

$$\begin{array}{llll} P_{1,1} & P_{2,1} & \ldots & P_{r,1} \\ P_{1,2} & P_{2,2} & \ldots & P_{r,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1,2r} & P_{2,2r} & \ldots & P_{r,2r} \end{array}$$

$2r$ primitive Systeme zusammengehöriger Perioden dieser Funktion, sodaß man, wenn

$$P_1, P_2, \ldots, P_r$$

ein beliebiges Periodensystem der Funktion ist,

$$P_1 = \sum_{\nu=1}^{2r} n_\nu P_{1,\nu}, \ldots, P_r = \sum_{\nu=1}^{2r} n_\nu P_{r,\nu}$$

hat. Man kann dann für $u_1, \ldots, u_r$ andere Veränderliche $v_1, \ldots, v_r$, welche lineare Funktionen jener sind, dergestalt einführen, daß für die aus $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ hervorgehende Funktion von $v_1, \ldots, v_r$ als den vorstehenden entsprechende Perioden-Systeme die nachstehenden sich ergeben:

$$\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 1 \\
\tau_{1,1} & \tau_{1,2} & \ldots & \tau_{1,r} \\
\tau_{2,1} & \tau_{2,2} & \ldots & \tau_{2,r} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\tau_{r,1} & \tau_{r,2} & \ldots & \tau_{r,r}.
\end{array}$$

Wenn nun die Funktion φ eine derjenigen ist, zu denen das Jacobische Umkehrungsproblem führt, so besteht zwischen den Größen τ die Gleichung

$$\tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\beta,\alpha} \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, r \\ \beta = 1, \ldots, r \end{pmatrix},$$

und zugleich ist die quadratische Form

$$i \sum_{\alpha,\beta} \tau_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta$$

so beschaffen, daß bei reellen Werten von $n_1, \ldots, n_\varrho$, wenn diese nicht sämtlich gleich Null sind, der reelle Bestandteil der Form stets einen negativen Wert hat.

Nach einer Bemerkung von Hermite (Note sur le calcul différentiel et le calcul intégral, p. 26) soll Riemann bewiesen haben, daß für jede $2r$ fach periodische Funktion $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ unter den Größen $\tau_{\alpha,\beta}$ die angegebenen Relationen stattfinden. In Riemanns Werken findet sich darüber nichts, denn was darüber in der Theorie der Abelschen Funktionen steht, bezieht sich nur auf die oben angegebenen periodischen Funktionen, bei denen die $\tau_{\alpha,\beta}$ nur von willkürlich anzunehmenden Größen abhängen. In der Tat aber gilt der Satz auch nicht für die allgemeinen $2r$ fach periodischen Funktionen in der vorstehenden Fassung; es bestehen unter den $\tau_{\alpha,\beta}$ allerdings auch in dem allgemeinen Falle $\frac{1}{2}r(r-1)$ Relationen, diese aber sind durch homogene lineare Gleichungen unter den $\tau_{\alpha,\beta}$ mit ganzzahligen Koeffizienten ausgedrückt. Indessen kann man stets $2r$ voneinander unabhängige, wenn auch nicht primitive, Systeme zusammengehöriger Perioden aufstellen, für welche unter den $\tau_{\alpha,\beta}$ die angegebenen einfachen Relationen $\tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\beta,\alpha}$ gelten und die aufgestellte quadratische Form die angeführte Eigenschaft besitzt. Mit Hilfe eines Satzes, den ich in dem genannten Briefe ausgesprochen, kann man schließlich folgendes beweisen:

Jede $2r$ fach periodische Funktion von r Variabeln läßt sich rational ausdrücken durch andere $2r$ fach periodische Funktionen derselben Veränderlichen, die so beschaffen sind, daß sie $2r$ primitive Periodensysteme besitzen, für welche die daraus gebildeten Größen $\tau_{\alpha,\beta}$ die oben angegebenen Eigenschaften haben.

Oder auch: Ist $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ eine beliebige $2r$fach periodische Funktion der Veränderlichen $u_1, \ldots, u_r$ von der vorausgesetzten Beschaffenheit, so läßt sich stets ein Konstantensystem

$$\begin{matrix} \tau_{1,1} & \ldots & \tau_{1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_{r,1} & \ldots & \tau_{r,r} \end{matrix}$$

so bestimmen, daß die Gleichungen $\tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\beta,\alpha}$ bestehen, ferner die obige quadratische Form die angegebene Eigenschaft besitzt und $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ sich rational durch eine gewisse Anzahl von Funktionen

$$\vartheta_\lambda(v_1, \ldots, v_r \mid \tau_{1,1}, \tau_{1,2}, \ldots, \tau_{r,r})$$

ausdrücken läßt, wenn man in diesen für $v_1, \ldots, v_r$ bestimmte lineare Funktionen der Größen u setzt.

Über diesen Gegenstand habe ich eine kleine Abhandlung fertig, die einer meiner Zuhörer, Herr Molk, ein Franzose, ins Französische übersetzen wird."

Ce mémoire est également disparu. Enfin une communication relative à la thèse de Lindemann sur le nombre π:

„Schließlich muß ich Dir doch noch eine sehr interessante und wichtige mathematische Neuigkeit mitteilen. Prof. Lindemann in Freiburg hat soeben bewiesen, daß π eine transzendente Zahl ist, und zwar, was Hermite sehr interessieren wird, durch eine sehr ingeniöse Verallgemeinerung des Hauptsatzes, wodurch dieser gezeigt hat, daß e eine transzendente Zahl ist."

Weierstrass demande dans une nouvelle lettre du 15 juin 1882:

„Möchtest Du wohl die Güte haben, mir anzugeben, wo die beiden von Dir erwähnten Arbeiten Poincarés stehen, ich meine die über die Differentialgleichungen der Mechanik und die über die Gleichungen $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$? Mir sind sie nicht zu Gesicht gekommen.

Die Arbeit von Lindemann über die Zahl π ist sehr merkwürdig aus verschiedenen Gründen; die Resultate sind richtig, waren aber anfangs auf einen falsch verstandenen Satz gegründet und sind auch noch jetzt von Lindemann nicht strenge bewiesen.

Ich bin vermittelst einiger Sätze, die in den Kreis der von Hermite in seiner schönen Abhandlung über die Exponentialfunktion entwickelten gehören, aber lange nicht so viel Formelapparat erfordern, zu einem ganz strengen und nicht schwierigen Beweis des allgemeinen Lindemannschen Theorems gekommen, nämlich folgendermaßen:

Sind $z_0, z_1, \ldots, z_n$ voneinander verschiedene, $N_0, N_1, \ldots, N_n$ beliebige algebraische Zahlen, so kann die Gleichung

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n} = 0$$

nur dann bestehen, wenn die N sämtlich gleich Null sind."

Le 5 août Weierstrass écrit:

„Ich werde mich in diesen Tagen mit einer kleinen Arbeit für das neue schwedische Journal beschäftigen, die ich Mittag-Leffler versprochen habe."

Weierstrass m'écrit à ce sujet le 5 août 1883:

„Die für Sie bestimmte Abhandlung: „Bestimmung der allgemeinsten Funktionen einer Veränderlichen, für die ein Additionstheorem besteht", ist dem Inhalte nach fertig, wird aber auch zusammengedrängt nicht ganz kurz ausfallen, indem ich es für zweckmäßig gehalten habe, auch die Bestimmung der eindeutigen Funktionen der in Rede stehenden Art mit aufzunehmen. Was darüber in der Schwarzschen Formelsammlung steht, genügt doch nicht für solche, die mit meinen Vorlesungen nicht bekannt sind."

Ce mémoire ne fut jamais écrit ou ne sortit jamais des mains de Weierstrass; en tout cas il doit être perdu. On en connait cependant une partie par le cours de Weierstrass.

Une interruption assez longue se produit ici dans la correspondance. Sonja avait reçu en mars 1883 à Paris, sans aucune préparation, la nouvelle de la mort tragique de son mari. La forte émotion qu'elle en éprouva la fit tomber dangereusement malade. Marie Mendelsohn[1] raconte comment, fidèle à sa maxime que „jeder Mensch muß mit dem, was er zu tragen hat, selbst fertig zu werden suchen"[2], elle passa 4 jours enfermée seule sans prendre aucune nourriture, perdit connaissance le 5ème jour, revint à elle le 6ème, demanda du papier et un crayon et couvrit le papier de formules mathématiques.

Elle resta cependant longtemps sérieusement malade. Weierstrass m'écrit de Grande-Rive près Evian les Bains (Savoie) dans sa lettre du 5 août:

„Das Wesentliche aber, worüber ich Ihnen diesmal zu schreiben habe, betrifft Frau v. Kowalewsky. Ohne Zweifel wissen Sie — en réalité je n'en avais aucune connaissance — daß sie ihren Mann auf traurige Weise verloren hat, vielleicht aber nicht, daß sie infolge dieses sie völlig unvorbereitet treffenden Ereignisses monatelang schwer erkrankt gewesen ist. Ich wenigstens hatte keine Ahnung davon, als sie vor etwa 5 Wochen ungemein angegriffen in Berlin erschien, von

---

[1] Neue Deutsche Rundschau, 8. Jahrg., p. 592.

[2] La lettre de Weierstrass du 11 avril 1882, citée ci-dessus.

wo sie in diesen Tagen nach Rußland abreisen wird. Dieser Aufenthalt in Berlin hat ihr aber sehr wohl getan, sie hat wieder arbeiten können, und zwar mit Erfolg, wodurch sie sich sehr gehoben fühlt und zur Wiederaufnahme alter Pläne geführt worden ist."

Et plus loin:

„Jetzt nach dem Tode ihres Mannes ist ein in meinen Augen sehr gewichtiges Hindernis für ihr Vorhaben — l'acceptation d'une place de maître de conférence à Stockholm — nicht mehr vorhanden."

Sonja partit de Berlin pour Odessa où elle prit part à un congrès de naturalistes russes en automne 1883. Elle avait repris courage et retrouvé la force de vivre, et elle adressa pendant son voyage une lettre fort gaie à Weierstrass, dans laquelle elle se plaint plaisamment d'un jeune mathématicien de Berlin qui lui avait donné des conseils pour son voyage, conseils qui n'étaient pas des plus pratiques. Weierstrass écrit à ce sujet le 27 août 1883:

„Jetzt zu Deinem, in gutem Humor geschriebenen Briefe vom 15. von der mir unbekannten und durch den Zusatz „auf dem Wege nach Odessa" doch nur unvollkommen charakterisierten Station. Zunächst muß ich doch die Mathematik und die Mathematiker gegen Deine ungerechten Anschuldigungen sehr ernstlich in Schutz nehmen. Es ist gewiß gut, wenn man in wichtigen Dingen die Gelehrten um Rat fragt, aber es müssen die richtigen sein. Wenn ich z. B. wissen will, wie ich vom Brandenburger Tor zum Schlesischen fahre, so ist mein Gelehrter der Droschkenkutscher, und wenn Du künftig einmal wieder von Berlin nach Odessa fahren willst, so bemühe Dich in das Internationale Reisebureau (Unter den Linden 68), dort wirst Du den Gelehrten finden, der Dir nicht nur Auskunft, sondern auch ein direktes Billet gibt und die Sorge ums Gepäck von Dir nimmt."

On trouve dans cette même lettre à l'occasion d'une expression de Sonja une classification intéressante des diverses sortes de mathématiciens:

„Unter den ältern Mathematikern gibt es verschiedene Sorten von Menschen, ein trivialer Satz, der aber doch vieles erklärt. Mein lieber Freund Kummer z. B. hat sich in der Zeit, wo er seine ganze Kraft an die Auffindung der Beweise für die höheren Reziprozitätsgesetze setzte, und nachher, nachdem er sie daran erschöpft, erst recht nicht mehr um das, was auf mathematischem Gebiete geschehen ist, gekümmert; er verhält sich, wenn nicht ablehnend, doch gleichgültig dagegen. Wenn Du ihm sagst, die Euklidische Geometrie fuße auf einem unbewiesenen Grundsatze, so gibt er Dir das zu; von dieser Einsicht ausgehend aber nunmehr die Frage so zu stellen: wie gestaltet sich denn die Geometrie ohne diesen Grundsatz?, das ist seiner Natur zuwider; die darauf gerichteten Bemühungen und die daran sich reihenden allgemeinen, von dem empirisch Gegebenen oder Angenommenen sich los machenden Untersuchungen sind ihm müßige Spekulationen oder gar ein Greuel. Kronecker ist anders, er macht sich mit allem Neuen rasch bekannt, sein leichtes Auffassungsvermögen befähigt ihn dazu, aber es geschieht nicht in eindringender Weise, — er besitzt nicht die Gabe, sich mit einer guten fremden Arbeit mit dem gleichen wissenschaftlichen Interesse wie mit einer eigenen Untersuchung zu beschäftigen. Dazu kommt ein Mangel, der sich bei vielen höchst verständigen Menschen, namentlich bei denen semitischen Stammes findet, er besitzt nicht ausreichend Phantasie (Intuition möchte ich lieber sagen), und es ist wahr, ein Mathematiker, der nicht etwas Poet ist, wird nimmer ein vollkommener Mathematiker sein. Vergleiche sind lehrreich: Der allumfassende, auf das Höchste, das Ideale gerichtete Blick zeichnet Abel vor Jacobi, Riemann vor allen seinen Zeitgenossen (Eisenstein, Rosenhain), Helmholtz vor Kirchhoff (obwohl bei dem letztern kein Tröpfchen semitischen Blutes vorhanden) in ganz eklatanter Weise aus."

Ceux qui ont personnellement fréquenté Weierstrass reconnaîtront ici sa profonde admiration et sympathie pour son grand émule Riemann, une admiration qui ne s'adressait pas seulement au savant mais encore à l'homme. „Riemann était une „anima candida" comme je n'en ai jamais connu", me disait-il souvent. Abel au contraire était le mathématicien duquel Weierstrass avait reçu les plus durables impressions pour ses propres travaux et Weierstrass pourrait plus qu'aucun autre mathématicien être caractérisé comme un successeur d'Abel.

Au sujet de lui-même Weierstrass s'exprime ainsi:

„Übrigens habe ich, was meine wissenschaftlichen Bestrebungen angeht, — von denen ich reden darf in dem Bewußtsein, daß sie, so wenig sie in dem Entwicklungsgang der Wissenschaft bedeuten mögen, stets nur dem Dienste derselben gewidmet gewesen sind —, längst darauf verzichtet, bei älteren Kollegen denselben Eingang zu verschaffen; es ist die Jugend, an die ich mich gewandt und bei der ich auch vielfach Verständnis und begeistertes Eingehn gefunden habe."

Sonja arriva à Stockholm à la fin de l'automne 1883 et elle fit pour la première fois un cours à l'*université* de *Stockholm pendant* le *sémestre* d'automne 1884. Il existe toute une série de lettres de Weierstrass à Sonja et à moi, parlant de sa situation à Stockholm. Je passerai ces questions sous silence car elles ont encore un caractère de trop grand actualité. Ce sera toujours un honneur pour la Suède, la jeune université de Stockholm et les hommes et femmes éclairés qui y avaient une part, que l'université de Stockholm se soit adjoint une force telle que celle de Sophie Kowalewsky. Une chose semblable eût-elle été possible à cette époque dans toute autre université Européenne? Mais d'autre part ce serait une vantardise malplacée que de vouloir prétendre que l'engagement de Sonja soit la preuve d'une culture sociale plus avancée au point de vue feministe en Suède que dans d'autres pays. Son engagement réussit surtout grâce à une sorte de surprise qui ne donna pas le temps à l'opposition de s'organiser suffisamment. Les véritables difficultés vinrent après. Les manifestations de cette hostilité sont encore trop récentes pour que je puisse soumettre à tout le monde la correspondance afférente qui un jour dévoilera un grand nombre d'intérieurs curieux des républiques savantes non seulement de Stockholm et d'Upsala mais encore de Berlin, de St. Pétersbourg et d'autres centres de culture intellectuelle.

Dans une lettre du 27 decembre 1883 Weierstrass donne à Sonja certains conseils relativement à un cours projeté par elle sur les équations différentielles partielles.

„Dagegen würde ich Dir sehr anraten, einige partielle Differentialgleichungen aus dem Gebiete der mathematischen Physik ausführlicher zu behandeln, obwohl deren Integration mit dem ersten Teil Deiner Vorlesung kaum etwas gemein hat. In Riemanns und Dirichlets Vorlesungen findest Du Beispiele. Namentlich ist von großem Interesse die Gleichung $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$. Wenn man annimmt, daß für $t = 0$, $\varphi = f(x)$ gegeben sei, so kann $f(x)$ eine ganz willkürliche, nur integrable Funktion sein, und dann wird $\varphi(t, x)$ für jeden positiven Wert von t eine analytische Funktion von x, läßt sich aber nicht für negative Werte von t definieren — il faut collationner ici la lettre de 6 mai 1874 que j'ai déjà citée —, wobei an die Eigentümlichkeit dieser Differentialgleichungen, welche Du in Deiner Dissertation bemerkt hast, erinnert werden kann. Der enorme Unterschied in dem Charakter der beiden äußerlich so verwandten Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

ist sehr frappant und belehrend.

Willst Du gleichzeitig von dem, was Du meine Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten nennst, einiges beibringen, so wird das ganz gut gehen, wenn Du Dich auf die einfachen Fälle beschränkst, in denen meine Formeln, wie sie in der Dir bekannten Ausarbeitung stehen, unmittelbar anwendbar sind. Auch hat ja die strenge Integration z. B. derjenigen Differentialgleichungen, welche sich auf die Schwingungen des Äthers in einem isotropen Medium beziehen, unstreitig ein großes Interesse."

Une lettre de Weierstrass datée de Wilhelmshoehe le 13 septembre 1884 donne une explication satisfaisante d'un fait qui a causé quelque effervescence. M. Vito Volterra a démontré que les fonctions, que Sophie Kowalewsky dans son traité „Über die Brechung des Lichtes in kristallinischen Mitteln" a données comme des intégrales générales aux équations différentielles de Lamé, ne les satisfont point. Mais le mémoire de Sonja se présente comme une sorte de collaboration avec Weierstrass attendu que le travail, qui sous le titre de: „Zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten" fait partie du premier volume des œuvres de Weierstrass, est reproduit en entier dans l'ouvrage de Sophie Kowalewsky. On s'est demandé comment il est possible que Weierstrass n'ait pas remarqué le fait signalé par M. Volterra. Weierstrass écrit:

„Meine teure Freundin, ich bin ganz zerknirscht unter der Last der Vorwürfe, die Dein gestern mir zugegangener Brief (ohne Ort und Datum) unter der Form von Bitten enthält. Gleichwohl hoffe ich, Du wirst zu einer milderen Beurteilung meines Verhaltens gelangen, wenn Du hörst, daß ich mich schon seit 6 Wochen gar nicht gut befinde und überhaupt mich mit gar nichts, nicht einmal mit Korrekturen habe beschäftigen können. Ich leide an keinem ausgesprochenen Übel, esse, trinke und schlafe, wie es sein muß, aber es hat sich meiner eine furchtbare Müdigkeit bemächtigt, körperlich und geistig, die mich ganz apathisch macht und mit Widerwillen gegen alles Denken und Schreiben erfüllt. Kurz, ich bin, was die Ärzte gehirnmüde nennen. So lange ich Vorlesungen halten mußte, merkte ich weniger davon und schob die Unlust zum Arbeiten, die ich schon längere Zeit verspürte, auf die körperliche Anstrengung, die mir das Lesen verursachte, und erst auf der Reise verspürte ich recht, wie angegriffen und ruhebedürftig ich war und noch bin."

Le 24 mars 1885 Weierstrass écrit à Sonja:

„Zu der großen Anzahl von Zuhörern gratuliere ich Dir von Herzen; freilich wirst auch Du wohl die Erfahrung machen, daß bei vielen der Wille gut, aber das Vermögen schwach ist, sodaß man selbst bei den Ausdauernden nicht sicher sein kann, ob das Interesse an der Sache oder Pflichttreue sie hält. Könnte man immer einen Kreis von höchstens zwölf talentvollen, wohl vorbereiteten und für ihre Wissenschaft begeisterten Zuhörern um sich versammelt haben!"

Weierstrass avait lui-même pendant l'hiver 1884—85 eu 250 auditeurs à ses conférences sur la théorie des fonctions mais il avait pu se convaincre que la qualité des élèves diminuait avec la quantité. Il n'existe, paraît-il, pas une seule rédaction utilisable de ce dernier exposé détaillé de la théorie des fonctions présentée par Weierstrass —

„so wäre das akademische Lehramt die lohnendste und interessanteste Beschäftigung in der Welt. — Dazu muß freilich noch eins kommen, dessen ich immer mehr und mehr entbehren muß, — ein einträchtiges, auf Übereinstimmung in den Prinzipien und gegenseitiger aufrichtiger Anerkennung beruhendes Zusammenwirken mit den Fachgenossen."

Il dit ensuite:

„Während ich sage, daß eine sogenannte irrationale Zahl eine so reelle Existenz habe wie irgend etwas anderes in der Gedankenwelt, ist es bei Kronecker jetzt ein Axiom, daß es nur Gleichungen zwischen ganzen Zahlen gibt. Während ich klar zu machen suche, warum Jacobis Ansicht, daß es absurd sei, x als Funktion von u zu betrachten, wenn zwischen beiden Größen die Gleichung

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}}$$

angenommen wird, eine irrige sei, — die zu einem und demselben Werte von u gehörigen Werte von x bilden eine abzählbare Menge, von der Cantor, wie ich überzeugt bin, in unanfechtbarer Weise bewiesen hat, daß es nicht nur unendlich viele Werte gibt, die nicht nur nicht darin enthalten sind, sondern eine Menge von höherer Mächtigkeit bilden — und damit motiviere, daß bei einem analytischen Gebilde zu unterscheiden sei zwischen den Stellen, die dem Gebilde angehören, und denen, die als Grenzstellen sich ihm zugesellen, — ich sage, während ich dergleichen Sachen den Anfängern klar zu weisen mich bemühe, läßt Fuchs in den Sitzungsberichten der Akademie eine Abhandlung erscheinen, die dartun soll, daß es auch lineare Differentialgleichungen gebe, durch welche keine „analytischen" Funktionen definiert werden, nicht achtend, daß er auf diese Weise der überwiegenden Mehrzahl derjenigen Funktionen, deren Eigenschaften zu erforschen er selbst mit so gutem Erfolge bemüht gewesen ist, den Stempel der Absurdität aufdrücken würde, wenn er recht behielte. Du wirst mir recht geben, liebe Freundin, daß es für mich nicht sehr ermunternd ist, zu sehen, daß selbst bei so tüchtigen Leuten, wie Fuchs, der Liebe Mühe umsonst gewesen ist. Schlimmer ist es aber, wenn Kronecker seine Autorität dafür einsetzt, daß alle, die bis jetzt an der Begründung der Funktionentheorie gearbeitet haben, Sünder vor dem Herrn sind. Wenn ein wunderlicher Kauz wie Christoffel sagt, in 20 bis 30 Jahren wird die jetzige Funktionentheorie zu Grabe getragen und die ganze Analysis in die Theorie der Formen aufgegangen sein, so beantwortet man das mit einem Achselzucken. Wenn aber Kronecker den Ausspruch tut, den ich wörtlich wiederhole: „Wenn mir noch Jahre und Kräfte genug bleiben, werde ich selber der mathematischen Welt noch zeigen, daß nicht nur die Geometrie, sondern auch die Arithmetik der Analysis die Wege weisen kann, und sicher die strengeren. Kann ich es nicht mehr tun, so werdens die tun, die nach mir kommen, und sie werden auch die Unrichtigkeit aller jener Schlüsse erkennen, mit denen jetzt die sogenannte Analysis arbeitet", so ist ein solcher Ausspruch von einem Manne, dessen hohe Begabung für mathematische Forschung und eminente Leistungen von mir sicher ebenso aufrichtig und freudig bewundert worden, wie von allen seinen Fachgenossen, nicht nur beschämend für diejenigen, denen zugemutet wird, daß sie als Irrtum anerkennen und abschwören sollen, was den Inhalt ihres unablässigen Denkens und Strebens ausgemacht hat, sondern es ist auch ein direkter Appell an die jüngere Generation, ihre bisherigen Führer zu verlassen und um ihn als Jünger einer neuen Lehre, die freilich erst begründet werden soll, sich zu scharen. Wirklich, es ist traurig und erfüllt mich mit bitterm Schmerz, daß das wohlberechtigte Selbstgefühl eines Mannes, dessen Ruhm unbestritten ist, ihn zu Äußerungen zu treiben vermag, bei denen er nicht einmal zu empfinden scheint, wie verletzend sie für andere sind.

Aber genug von diesen Dingen, die ich nur berührt habe, um Dir zu erklären, aus welchen Gründen ich an meiner Lehrtätigkeit, selbst wenn meine Gesundheit es gestatten sollte, sie noch einige Jahre fortzusetzen, künftighin nicht mehr dieselbe Freude haben kann wie bisher. Du wirst aber darüber nicht reden, ich möchte nicht, daß andere, die mich nicht so genau kennen wie Du, in dem Gesagten den Ausdruck einer Empfindlichkeit sähen, die mir in der Tat fremd ist. Niemand weiß besser als ich selbst, wie weit ich von dem Ziele entfernt geblieben bin, das ich in der Begeisterung der Jugend mir gesteckt hatte, niemand soll mir aber auch das Bewußtsein rauben, daß mein Streben und Wirken nicht ganz umsonst gewesen ist und der Weg, auf dem ich der Wahrheit nachgegangen bin, nicht als ein Irrweg sich erweisen wird.

Weierstrass avait craint, il est vrai, que l'on ne vît dans les expressions que j'ai citées maintenant, l'expression d'une „Empfindlichkeit" qui lui était étrangère, mais je ne crois pas que ce puisse maintenant être le cas avec personne. L'ami et l'antagoniste de Weierstrass, Kronecker, n'est plus, et il m'a semblé pour cette raison que rien ne devait plus empêcher de montrer par les propres paroles de Weierstrass les soucis qui assombrirent le déclin de ses jours.

Une lettre du 16 mai 1885 contient ce qui suit:

„Denke Dir, ich bin seit Deiner Abreise in die Theorie der Funktionen mit reellen Argumenten geraten. Es haben sich mir dabei einige interessante Resultate ergeben, worüber ich im folgenden Monat etwas veröffentlichen werde, z. B.:

1. Die Riemannsche Definition von

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

welche man als die allgemeinste denkbare angesehen hat, ist unzulänglich. Es ergibt sich vielmehr folgendes:

Es sei $f(x)$ eine in dem Intervall

$$a \leqq x \leqq b$$

eindeutig definierte Funktion der reellen Veränderlichen x. Dabei wird zugelassen, daß es zwischen a, b unendlich viele Werte geben kann, für die $f(x)$ gar nicht definiert ist, ebenso, daß Unstetigkeitsstellen in abzählbarer oder unabzählbarer Menge vorhanden sein dürfen. Angenommen wird nur, daß in jedem noch so kleinen Teile des Intervalls $a \dots b$ Stellen vorhanden sind, an denen die Funktion definiert ist, sowie auch, daß der Wert der Funktion eine angebbare Grenze nirgends übersteige. Dann läßt sich stets eine Definition von $\int_a^b f(x)\,dx$ angeben, bei der alle Eigenschaften des Integrals, die aus der Cauchyschen und Riemannschen Definition sich ergeben, bestehen bleiben. Man kann dies sehr einfach aus dem von Cantor im 4. Bande der Acta festgestellten Begriff des Inhalts einer beliebigen Punktmenge folgern. Ich bin aber ursprünglich durch andere, weitläufigere Betrachtungen darauf geführt worden.

2. Ist $f(x)$ in dem Intervalle $a \dots b$ durchweg stetig und setzt man

$$\varkappa = \frac{2\pi}{b-a}$$

und versteht unter $f_\nu(x)$ eine Fouriersche Reihe von endlicher Gliederzahl:

$$f_\nu(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} (A_\lambda \cos \lambda\varkappa x + B_\lambda \sin \lambda\varkappa x),$$

wo n eine ganze Zahl ist, die mit ν wächst, so läßt sich $f(x)$ stets darstellen in der Form

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x).$$

Dabei konvergiert diese Reihe in dem ganzen Intervalle $a \dots b$ absolut und gleichmäßig. Entwickelt man die abgesonderte lineare Funktion von x in eine Fouriersche Reihe und zieht dann alle Glieder der vorstehenden Reihe, welche dasselbe Vielfache von $\varkappa x$ enthalten, in eines zusammen, so erhält man die gewöhnliche Fouriersche Reihe, die aber nicht immer konvergiert.

3. Ist $f(x)$ an beliebigen (auch unzählig vielen) Stellen unbestimmt oder unstetig, so stellt die vorstehende Reihe die Funktion in allen Stetigkeitspunkten dar, und konvergiert, falls Strecken von Stetigkeitspunkten vorhanden sind, in jeder Strecke absolut und gleichmäßig. In einem Unstetigkeitspunkte schwankt die Summe der n ersten Glieder, wenn n ohne Ende wächst, zwischen endlichen Grenzen.

4. Jede Funktion $f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit entspringt aus einer Funktion $f(x, \varkappa)$, die inbezug auf x eine analytische (ganze transzendente) Funktion ist und überdies einen variabelen (positiven) Parameter enthält, in der Art, daß

$$f(x) = \lim_{\varkappa = 0} f(x, \varkappa)$$

ist in jedem Stetigkeitspunkt der Funktion $f(x)$, während, wenn x eine Unstetigkeits- oder Unbestimmtheitsstelle ist, $f(x, \varkappa)$ beim Unendlichkleinwerden von $\varkappa$ zwischen denselben Grenzen schwankt wie

$$\tfrac{1}{2}(f(x+\varkappa) + f(x-\varkappa)).$$

Diese Sätze sehen vielleicht nach etwas aus; sie sind aber sehr trivialer Natur.“[1]

Que l'on compare à ceci la communication de Weierstrass dans les lettres du 6 mai 1874 et du 27 décembre 1883. Les preuves de ces propositions bien qu' exprimées dans une forme moins générale, se retrouvent dans le dernier ouvrage de Weierstrass: „Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen“, Berliner Sitzungsberichte 9, 30 juillet 1885, p. 633—640, 789—806.

Le 22 septembre 1885 Weierstrass écrit:

„Zwei kleine Abhandlungen über Funktionen reeller Argumente bringt Dir Mittag-Leffler mit. Zwei andere werden sich noch anschließen.“

Comme l'on sait ils n'ont jamais paru. Il ne subsiste point non plus des notes sur ce sujet.

„Eine Kollektion älterer funktionentheoretischer Abhandlungen von mir wird Ende Oktober erscheinen, ich wage es, damit vor dem Publikum zu erscheinen, obwohl wir jetzt wissen, daß neun Zehntel der heutigen Funktionenlehre Unsinn ist.“

La partie mathématique des lettres plus récentes de Weierstrass se rapporte uniquement au travail de Sonja sur le problème de rotation. Sonja avait remis

[1] cf. p. 214—219 de ce volume.

à temps son mémoire pour le prix Bordin,[1] mais avait reçu l'autorisation de le revoir en vue de l'impression. Ce travail fut fait pour la plus grande partie à Wernigerode, dans le Harz, pendant l'été 1888 où Sonja séjourna pendant plusieurs semaines avec Weierstrass. Le 13 juillet il écrit à Sonja:

„Indessen — malgré le mauvais temps — hat der hiesige Aufenthalt doch wohltätig auf mich gewirkt (wir sind seit dem 3. hier), und fühle ich mich merklich frischer als in der letzten Zeit in Berlin. Ich werde darum auch schon vor dem 1. August nicht jedes mathematische Gespräch zu vermeiden haben; wenigstens werde ich meine alte, liebe Schülerin in strenge Aufsicht nehmen können, damit sie fleißig (d. h. einige Stunden des Tages) arbeite. Denn daß die Arbeit, die Du jetzt unter Händen hast, nicht nur rechtzeitig fertig werde, sondern auch der Form nach allen Ansprüchen völlig genüge, daran ist sehr viel gelegen."

J'ai passé moi-même plusieurs semaines chez Weierstrass à Wernigerode pour étudier avec lui les mémoires de concours pour le prix du roi Oscar. Weierstrass reçut pendant ce temps un grand nombre de visites d'une foule de mathématiciens allemands et étrangers, et tous pourront témoigner de la vigueur d'esprit qui le distinguait malgré ses 73 ans accomplis. Même s'il était obligé de chercher la solitude pendant une grande partie de la journée, il semblait néanmoins, lorsqu'on pouvait le rencontrer, être encore en possession de tout son génie mathématique, voyant plus profondément et plus clairement qu'aucun autre et prodiguant comme lui seul pouvait le faire les conseils et les renseignements dans tout le domaine des mathématiques.

En février de l'année suivante Sonja était encore à Paris, où elle s'était rendue pour recevoir la veille de Noël 1888 le prix Bordin. Weierstrass écrit:

„Daß wir, ich und meine Schwestern vor allem, dann auch die Freunde, die Du hier hast, Fuchs, Hettner, Knoblauch, Hensel, P. Dubois und der kürzlich heimgekehrte Hansemann, uns herzlich über Deinen Erfolg gefreut haben, brauche ich nicht zu versichern. Ich ganz besonders empfinde darüber eine wahre Genugtuung, — haben doch jetzt kompetente Richter das Verdikt abgegeben, daß es mit meiner „treuen Schülerin", — meiner „Schwäche" —, doch nicht „eitel Humbug" ist."

[1] Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta math. 12 (1889), p. 177—232. Le mémoire fut couronné dans la séance solenelle de l'Académie des Sciences à Paris le 24 décembre 1888 avec le prix Bordin, élevé de 3000 à 5000 francs.