

EINE AN DIE NICHOLSONFORMEL ANSCHLIESSENDE ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG FÜR ZYLINDERFUNKTIONEN¹

VON

WALDEMAR SCHÖBE

in Stuttgart

Einleitung

Es sind drei wesentlich verschiedene asymptotische Entwicklungen für Zylinderfunktionen bekannt. Die Formeln (1), (2), (3) stellen je einen für Gestalt und Geltungsbereich typischen Spezialfall dar; dabei werden der Einfachheit halber z und ν vorläufig als positiv vorausgesetzt, während später alle Variablen grundsätzlich komplex sein dürfen.

Hankelsche Entwicklung:

$$(1) \quad H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2} + m)}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2} - m)} \frac{(2iz)^{-m}}{m!},$$

gültig für $z \rightarrow +\infty$ bei festem ν .

Debyesche Ausnahmereihe:

$$(2) \quad H_{z-\nu}^{(2)}(z) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{l+1}{3}\right) \left(\frac{6}{z} e^{\pi i}\right)^{\frac{l+1}{3}} \Gamma\left(\frac{l+1}{3}\right) B_l(\gamma),$$

gültig für $z \rightarrow +\infty$ bei festem $\gamma = z - \nu$. Dabei bedeutet $\left(\frac{l+1}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi(l+1)}{3}$ eine der Zahlen 0, +1, -1 und $B_l(\gamma)$ ein Polynom l ten Grades in γ mit rationalen Koeffizienten.

Debyesche Hauptreihe:

$$(3) \quad 2J_\nu(\nu \operatorname{Sec} b) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\nu(\operatorname{Im} b - b)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(\operatorname{Ctg}^2 b)}{(2\nu \operatorname{Im} b)^{l+\frac{1}{2}}},$$

¹ Habilitationsschrift in der Fakultät für Mathematik und Physik der Technischen Hochschule Darmstadt. Referent: Prof. Dr. A. WALTHER, Korreferent: Prof. Dr. C. SCHMIEDEN.

gültig für $\nu \rightarrow +\infty$ bei festem positivem b . Hierin bedeutet $P_l(\xi)$ ein Polynom l ten Grades in ξ mit rationalen Koeffizienten.

Der Bereich, in dem $z - \nu$ von der Grössenordnung $z^{\frac{1}{3}}$ oder $\nu^{\frac{1}{3}}$ ist, wird weder durch (2) noch durch (3) erfasst. Hier gelten die Näherungsformeln von Nicholson, Watson und Langer.¹ Für die einfachste unter ihnen, das Nicholsonsche Formelpaar

$$(4) \quad \begin{aligned} e^{-\frac{\pi i}{6}} H_{z-\nu}^{(1)}(z) &\approx \left(\frac{2\gamma}{3z}\right)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}\left(\frac{(2\gamma)^{\frac{2}{3}}}{3z^{\frac{1}{2}}}\right) \\ e^{\frac{\pi i}{6}} H_{z-\nu}^{(2)}(z) &\approx \left(\frac{2\gamma}{3z}\right)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(\frac{(2\gamma)^{\frac{2}{3}}}{3z^{\frac{1}{2}}}\right), \end{aligned}$$

fehlt es jedoch selbst im Reellen an einem angemessenen und wirklich überzeugenden Beweise und an Angaben über die Grössenordnung des Fehlers; die übliche, von Nicholson stammende Herleitung mittels des Prinzips der stationären Phase ist unzureichend und überdies auf ganzzahlige Ordnungen ν beschränkt.

Im folgenden wird der Beweis der Nicholsonformel (4) für komplexe Werte des Argumentes und der Ordnung in Anlehnung an denjenigen der Debyeschen Ausnahmereihe (2) erbracht. Der sofort zu erörternde enge formale Zusammenhang zwischen (4) und (2) scheint noch nicht bemerkt worden zu sein.

Mit dem bisher nicht näher untersuchten Bildungsgesetz der Koeffizienten der in (2) auftretenden Polynome $B_l(\gamma)$ beschäftigt sich § 1 dieser Arbeit. Es ist unschwer zu erkennen, dass die höchste Potenz γ^l in $B_l(\gamma)$ den Koeffizienten $\frac{1}{l!}$ trägt. Ersetzt man versuchsweise $B_l(\gamma)$ einfach durch $\frac{1}{l!}\gamma^l$, so entsteht aus der semikonvergenten Reihe (2) eine beständig konvergente Potenzreihe in der Variablen $\gamma z^{-\frac{1}{3}}$, und diese stellt, von dem Faktor $e^{\frac{\pi i}{6}}$ abgesehen, gerade die rechte Seite der zweiten Formel (4), d. h. den Nicholsonschen Näherungsausdruck dar; dies ist der erwähnte formale Zusammenhang. Auch die zweithöchsten, dritthöchsten, . . . Glieder der $B_l(\gamma)$ je für sich bilden beständig konvergente Potenzreihen, und so lässt sich die Debyesche Ausnahmereihe (2) formal in eine aus ganzen transzendenten Funktionen gebildete Reihe umordnen. Diese bezeichnen wir als die Nicholsonreihe; sie erweist sich als asymptotische Entwicklung im Bereiche $z - \nu = O(z^{\frac{1}{3}})$, und ihre Glieder lassen sich auf Airysche integrale oder auf „Drittfunktionen“ in Verbindung mit Polynomen zurückführen.

¹ Vgl. JAHNKE-EMDE, Tafeln höherer Funktionen, 4. Aufl., Leipzig 1948, 144–146.

Unter Drittfunktionen sollen dabei Zylinderfunktionen verstanden werden, deren Ordnung, ohne ganz zu sein, der dritte Teil einer ganzen Zahl ist. Alle Drittfunktionen lassen sich durch Zylinderfunktionen der Ordnungen $\pm \frac{1}{3}$, $\pm \frac{2}{3}$ oder auch nur $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$ ausdrücken.

Der Beweis dieser Tatsachen wird in § 2 geführt. Weiterhin werden die formelmässigen Ausdrücke aufgestellt, die zur numerischen Berechnung der Glieder der Nicholsonreihe erforderlich sind (§ 4). Die Nicholsonreihe wird so umgestaltet, dass zur Auswertung nur Zylinderfunktionen der Ordnung $\frac{1}{3}$, nicht auch $-\frac{2}{3}$, benötigt werden (§ 5). Ferner wird für komplexe ν von grossem absolutem Betrage die Existenz von Nullstellen der Zylinderfunktionen der Ordnung ν in dem Bereiche $z - \nu = O(z^{\frac{1}{3}})$ bewiesen und für sie eine asymptotische Entwicklung aufgestellt (§ 6). All dies wird durch Zahlenbeispiele verdeutlicht, die zeigen, dass diese Entwicklungen auch zu genauen numerischen Berechnungen geeignet sind (§ 7 und Zahlenblätter).

§ 1.

Es ist notwendig, zuerst die übliche Herleitung von (2) für den Fall, dass Argument und Ordnung der Zylinderfunktion komplex sind, kurz darzustellen. Ziel dieses Paragraphen ist die genauere Untersuchung der Polynomfolge $B_l(\gamma)$.

Es sei $z \neq 0$; wir bezeichnen zur Abkürzung $\text{arc } z$ mit ϕ . Vorerst betrachten wir ausschliesslich die zweite Hankelfunktion und setzen dafür $-2\pi < \phi < \pi$ voraus; das ist derselbe Winkelraum für z , innerhalb dessen die Hankelsche asymptotische Entwicklung der zweiten Hankelfunktion besonders einfach ist. Die Ergebnisse lassen sich dann durch eine Spiegelung auf die erste Hankelfunktion und weiterhin auf alle Zylinderfunktionen übertragen.

Die Sommerfeldsche Integraldarstellung lautet

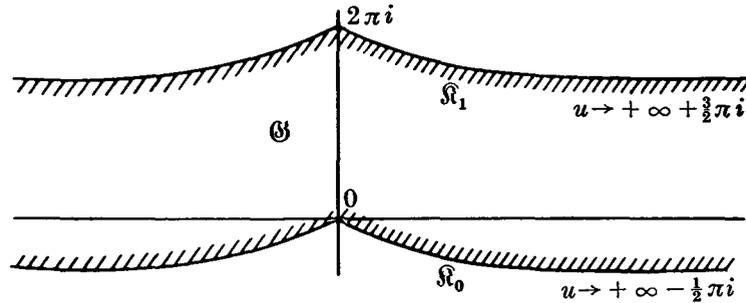
$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\mathfrak{C}} \exp(-z \mathfrak{S} \sin u + \nu u) du.$$

Hierin ist der Weg \mathfrak{C} von $-\infty + i(\pi - \sigma)$ nach $+\infty + i\sigma'$ zu führen, wobei

$$-\frac{\pi}{2} < \sigma + \phi < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \sigma' + \phi < \frac{\pi}{2}$$

sein muss. Wegen der für ϕ vorausgesetzten Ungleichungen darf stets $\sigma = \sigma' = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\phi$ gewählt werden. Für $\nu = z - \gamma$ erhält man

$$(5) \quad H_{z-\gamma}^{(2)}(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\mathfrak{C}} \exp[-z(\mathfrak{S} \sin u - u) - \gamma u] du.$$

Abb. 1. u -Ebene.

Wird $u = p + iq$ gesetzt, wo p und q reell sind, so ist der Realteil von $\text{Sin } u - u$ gleich $\text{Sin } p \cos q - p$. Daher ist $\text{Sin } u - u$ rein imaginär auf den beiden wie folgt definierten Kurven \mathfrak{K}_0 und \mathfrak{K}_1 der u -Ebene (Abb. 1): \mathfrak{K}_0 enthält den Punkt $u = 0$, \mathfrak{K}_1 den Punkt $u = 2\pi i$. Die übrigen Kurvenpunkte sind durch $p \neq 0$, $\cos q = \frac{p}{\text{Sin } p}$ in Verbindung mit den Ungleichungen $-\frac{\pi}{2} < q < 0$ für \mathfrak{K}_0 bzw. $\frac{3\pi}{2} < q < 2\pi$ für \mathfrak{K}_1 gegeben. Da in dem Gebiete \mathfrak{G} zwischen den Kurven \mathfrak{K}_0 und \mathfrak{K}_1 und, vom Nullpunkte abgesehen, auch auf diesen selbst $\text{Sin } u - u$ von 0 verschieden ist und sich in der Nähe des Nullpunktes wie $\frac{1}{6}u^3$ verhält, so ist innerhalb \mathfrak{G} der Arkus von $\text{Sin } u - u$ als stetige Funktion von u durch die Forderungen eindeutig bestimmt, dass $-\frac{\pi}{2} < \text{arc } u < \frac{3\pi}{2}$ und $\lim_{u \rightarrow 0} (\text{arc } (\text{Sin } u - u) - 3 \text{arc } u) = 0$ sein soll. Es folgt dann, dass der Arkus von $\text{Sin } u - u$ für $p = 0$, $0 < q \leq 2\pi$ und weiterhin auf der ganzen Kurve \mathfrak{K}_1 den Wert $\frac{3\pi}{2}$ hat und für $u \rightarrow -\infty + i(\pi - \sigma)$ dem Grenzwerte $2\pi + \sigma$, für $u \rightarrow +\infty + i\sigma'$ dem Grenzwerte σ' zustrebt; hierbei müssen, damit u bei den geforderten Bewegungen das Gebiet \mathfrak{G} nicht zu verlassen braucht, $\pi - \sigma$ und σ' zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ liegen, was bei der oben getroffenen Wahl $\sigma = \sigma' = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\phi$ erfüllt ist.

Für das Integral (5) legen wir den Integrationsweg \mathfrak{C} durch den Nullpunkt so, dass auf seinen beiden im Nullpunkte zusammenstossenden Teilen der Arkus von $\text{Sin } u - u$ jeweils konstant ist, und zwar gleich $2\pi + \sigma$ bzw. σ' . Wird dann noch

$$(6) \quad \text{Sin } u - u = \frac{1}{6}t^3 \quad \text{mit der Normierung } \text{arc } t - \text{arc } u \rightarrow 0 \quad \text{für } u \rightarrow 0$$

gesetzt und t als Integrationsveränderliche eingeführt, so transformiert sich der Weg in zwei im Nullpunkte zusammenstossende Halbgeraden, und es ergibt sich

$$(7) \quad H_{\frac{z}{6}-\gamma}^{(2)}(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\infty \left(\frac{2\pi+\sigma}{3}\right)}^{\infty \left(\frac{1}{3}\sigma\right)} e^{-\frac{z}{6}t^3} \left(\frac{du}{dt} e^{-\gamma u} \right) dt,$$

wobei der Bequemlichkeit halber bei den unendlich fernen Integralgrenzen die Arkus der beiden Halbgeraden, die den Integrationsweg bilden, in Klammern angegeben sind.

Die folgenden Betrachtungen dienen dazu, den Ausdruck $\frac{du}{dt} e^{-\gamma u}$ nach Potenzen von t zu entwickeln und das Bildungsgesetz der dabei auftretenden Koeffizienten zu finden.

Nach (6) existiert eine Potenzreihenentwicklung mit positivem Konvergenzradius $u = t - c_3 t^3 + c_5 t^5 + \dots$. Nun sei a fest und k eine natürliche Zahl. Die Potenzreihe für $(au)^k$ enthält dann neben dem niedrigsten Gliede $a^k t^k$ nur noch Glieder $\text{const} \cdot a^k t^\lambda$ mit $\lambda > k$. Daher enthält die Potenzreihe für $\frac{e^{au} - 1}{a}$ ausser den Gliedern

$$a^l \frac{t^{l+1}}{(l+1)!} \quad (l=0, 1, 2, \dots)$$

nur noch solche der Form $\text{const} \cdot a^k t^{\lambda+1}$ mit $\lambda > k$. Man kann also setzen

$$\frac{e^{au} - 1}{a} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l(a) \frac{t^{l+1}}{l+1},$$

worin $B_l(a)$ ein Polynom in a ist, dessen Grad l und dessen höchstes Glied $\frac{a^l}{l!}$ ist.

Die Ausdrücke für diese Polynome sind für $l=0, 1, \dots, 7$ und $l=9$ in einer Arbeit von Airey¹ gegeben. Eine vollständigere Zusammenstellung, die bis $l=13$ reicht, ist als Zahlentafel 1 beigelegt. Zu allgemeineren Aussagen über das Bildungsgesetz der Koeffizienten kann man auf folgendem Wege gelangen.

Wird die letzte Reihenentwicklung gliedweise partiell nach t und dann nach a differenziert, so entsteht

$$(8) \quad \frac{du}{dt} e^{au} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l(a) t^l, \quad u \frac{du}{dt} e^{au} = \sum_{l=0}^{\infty} B'_l(a) t^l.$$

¹ J. R. AIREY, Bessel and Neumann functions of equal order and argument, *Phil. Mag.* (6) XXXI (1916), 520-528. Die für $l=2, 5, 8, 11, \dots$ entstehenden Polynome werden für die hier behandelten Fragen nicht benötigt.

Weil eine Umkehrung der Vorzeichen von a und t auch für u dasselbe bedeutet und daher die linke Seite der ersten Formel (8) ungeändert lässt, so muss

$$B_l(-a) = (-1)^l B_l(a)$$

sein. Das führt zu dem Ansatz

$$(9) \quad B_l(a) = \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} b_l^\mu \frac{a^{l-2\mu}}{(l-2\mu)!} \quad \text{mit} \quad b_l^0 = 1.$$

In den b_l^μ sind die μ als obere Indizes aufzufassen. Nun ist nach (6)

$$\frac{du}{dt} (\mathfrak{C}0\mathfrak{s} \ u-1) = \frac{1}{2} t^2.$$

Wegen $2 (\mathfrak{C}0\mathfrak{s} \ u-1) = e^u - 2 + e^{-u}$ ist daher

$$t^2 e^{au} = 2 (\mathfrak{C}0\mathfrak{s} \ u-1) \frac{du}{dt} e^{au} = \frac{du}{dt} (e^{(a+1)u} - 2e^{au} + e^{(a-1)u})$$

und analog

$$t^3 \frac{du}{dt} e^{au} = 6 (\mathfrak{C}in \ u-u) \frac{du}{dt} e^{au} = 3 \frac{du}{dt} (e^{(a+1)u} - 2ue^{au} - e^{(a-1)u}).$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von t^l in den beiderseitigen Potenzreihenentwicklungen nach t erhält man hieraus für alle $l \geq 3$

$$\frac{a B_{l-3}(a)}{l-2} = B_l(a+1) - 2B_l(a) + B_l(a-1)$$

(10 a)

$$B_{l-3}(a) = 3B_l(a+1) - 6B_l'(a) - 3B_l(a-1).$$

Die zweite dieser Relationen subtrahieren wir von der nach a differenzierten ersten, wodurch der Grad der Polynome beiderseits auf $l-5$ herabgedrückt wird. Das ergibt für alle $l \geq 3$

$$(10 \text{ b}) \quad \frac{a B_{l-3}'(a) - (l-3) B_{l-3}(a)}{l-2} = [B_l'(a+1) + 4B_l'(a) + B_l'(a-1)] - 3[B_l(a+1) - B_l(a-1)].$$

Setzt man (9) in (10 b) ein, so liefert der Vergleich der Koeffizienten von $a^{l-2\mu-3}$ die Beziehung

$$(11 \text{ a}) \quad \mu b_{l-3}^{\mu} + 2(l-2) \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{\nu}{(2\nu+3)!} b_l^{\mu-\nu} \quad \text{für} \quad 1 \leq \mu \leq \left[\frac{l-3}{2} \right].$$

Aus ihr lassen sich die b_l^{μ} der Reihe nach berechnen; es handelt sich um eine Rekursion nach dem oberen Index. Auf Grund von (11 a) erweist sich b_l^{μ} für jedes feste μ als Polynom μ ten Grades in l , z. B. $b_l^0 = 1$ für $l \geq 0$, $b_l^1 = -\frac{l+1}{60}$ für $l \geq 2$, $b_l^2 = \frac{(l+1)(7l+8)}{50400}$ für $l \geq 4$. Doch ist es für das Folgende zweckmässig, den Faktor

$2(l-2)$ dadurch wegzuschaffen, dass man ihn als $\frac{6^{\frac{l+1}{3}} \Gamma\left(\frac{l+1}{3}\right)}{6^{\frac{l-2}{3}} \Gamma\left(\frac{l-2}{3}\right)}$ auffasst. Wir wollen,

wenn es zur Vereinfachung dient, $\Gamma(s)$ als Potenz Γ^s schreiben und demgemäss z. B. unter $(6\Gamma)^s$ das Produkt $6^s \Gamma(s)$ verstehen. Wird in diesem Sinne $e_l^{\mu} = (6\Gamma)^{\frac{l+1}{3}} b_l^{\mu}$ gesetzt, so entsteht

$$(11 \text{ b}) \quad \mu e_{l-3}^{\mu} + \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{\nu}{(2\nu+3)!} e_l^{\mu-\nu} = 0 \quad \text{mit} \quad e_l^0 = (6\Gamma)^{\frac{l+1}{3}}.$$

Dabei hängt, wie sich herausstellt, e_l^{μ} in folgender Weise von l ab:

$$(12) \quad e_l^{\mu} = \sum_{\alpha=0}^{\mu} (-1)^{\alpha} w_{\alpha}^{\mu} (6\Gamma)^{\frac{l+1}{3} + \alpha} \quad \text{mit} \quad w_0^0 = 1,$$

wobei die w_{α}^{μ} von l unabhängig sind; μ ist ein oberer Index. Setzt man (12) in (11 b) ein und ordnet nach symbolischen Potenzen von Γ , so ergibt sich

$$(13) \quad w_0^{\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \geq 1, \quad w_0^0 = 1 \quad \text{und im übrigen}$$

$$\mu w_{\varrho+1}^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{\mu-\varrho} \frac{\nu}{(2\nu+3)!} w_{\varrho}^{\mu-\nu} \quad \text{für} \quad \varrho = 0, 1, \dots, \mu-1$$

als Rekursionsformel für die w_{α}^{μ} bezüglich des unteren Index.

Die w_{α}^{μ} lassen sich übersichtlich durch eine erzeugende Funktion definieren. Wird nämlich $\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\varrho=0}^{\mu} w_{\varrho}^{\mu} x^{\varrho} y^{2\mu} = G(x, y)$ gesetzt, so ist zunächst $G(x, 0) = w_0^0 = 1$. Eine leichte Rechnung zeigt ferner, dass auf Grund von (13) die Beziehung

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial y} = x G(x, y) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu}{(2\nu+3)!} y^{2\nu-1}$$

gelten muss, die bei festem x als gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung für $G(x, y)$ mit dem bekannten Anfangswerte $G(x, 0) = 1$ sofort integriert werden

kann, weil die darin rechts auftretende Potenzreihe die Ableitung nach y der für $y=0$ verschwindenden Funktion $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y^{2\nu}}{(2\nu+3)!} = \frac{\mathfrak{S}in y - y - \frac{1}{6}y^3}{y^3}$ ist. Man findet so

$$(14) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu} w_{\nu}^{\mu} x^{\nu} y^{2\mu} = \exp \left[\frac{x}{y^3} (\mathfrak{S}in y - y - \frac{1}{6}y^3) \right].$$

Wird (8) in (7) eingesetzt und überdies $\sigma = \sigma' = -\phi$ festgelegt, so entsteht formal

$$H_{z-\gamma}^{(2)}(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\infty(\frac{2\pi-\phi}{3})}^{\infty(-\frac{\phi}{3})} e^{-\frac{z}{6}t^3} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l t^l B_l(\gamma) \right) dt,$$

wobei allerdings zu beachten ist, dass die Potenzreihe (Summe über l) nicht für alle endlichen t konvergiert. Aus dieser Darstellung geht die Ausnahmereihe von Debye hervor, indem die Integration mit der Summation über l und — was trivial ist — mit der Summation über μ vertauscht wird:

$$(15 \text{ a}) \quad H_{z-\gamma}^{(2)}(z) \sim \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l B_l(\gamma) \frac{i}{\pi} \int_{\infty(\frac{2\pi-\phi}{3})}^{\infty(-\frac{\phi}{3})} e^{-\frac{z}{6}t^3} t^l dt.$$

Dass dieser Vertauschungsprozess eine asymptotische Entwicklung für $z \rightarrow \infty$ liefert, ergibt sich, wenn γ fest ist, unmittelbar aus dem Watsonschen Lemma.¹

Durch die Substitutionen $t = z^{-\frac{1}{3}}v$, $\gamma = z^{\frac{1}{3}}\zeta$ verwandelt sich (15 a) auf Grund von (9) in

$$(15 \text{ b}) \quad H_{z-\gamma}^{(2)}(z) \sim \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} b_l^{\mu} \frac{\zeta^{l-2\mu}}{(l-2\mu)!} z^{-\frac{2\mu+1}{3}} \frac{i}{\pi} \int_{\infty(\frac{2\pi}{3})}^{+\infty} e^{-\frac{1}{6}v^3} v^l dv.$$

Darin ist

$$\frac{i}{\pi} \int_{\infty(\frac{2\pi}{3})}^{+\infty} e^{-\frac{1}{6}v^3} v^l dv = -\frac{2}{3\pi} \sin \frac{(l+1)2\pi}{3} (6\Gamma e^{-2\pi i})^{\frac{l+1}{3}} = (6\Gamma)^{\frac{l+1}{3}} \alpha_l,$$

wobei α_l nur von der Restklasse modulo 3 von l abhängt. Es liegt nahe, die drei Restklassen voneinander zu trennen; dadurch gelangt man gleichzeitig zu handlichen reellen Reihen, nämlich

¹ G. N. WATSON, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922, 236.

$$(15 \text{ c}) \quad \begin{aligned} \sqrt{3} J_{z-\gamma}(z) - Y_{z-\gamma}(z) &\sim \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \Gamma(m + \frac{1}{3}) \left(\frac{6}{z}\right)^{m+\frac{1}{3}} B_{3m}(\gamma) \\ \sqrt{3} J_{z-\gamma}(z) + Y_{z-\gamma}(z) &\sim \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \Gamma(m + \frac{2}{3}) \left(\frac{6}{z}\right)^{m+\frac{2}{3}} B_{3m+1}(\gamma), \end{aligned}$$

deren Glieder bei der Vereinigung zu asymptotischen Reihen für $J_\nu(z)$ und $Y_\nu(z)$ natürlich nicht zusammenzufassen, sondern ineinanderzuschieben wären.

§ 2.

Gibt man dem Integral (7) die Form

$$(16) \quad H_{z-\gamma}^{(2)}(z) = \frac{i}{\pi} \int_{\infty(\frac{2\pi+\sigma}{3})}^{\infty(\frac{\sigma'}{3})} e^{-z t^3 - \gamma t} \left(\frac{du}{dt} e^{\gamma(t-u)} \right) dt$$

und überträgt den Beweis des Watsonschen Lemmas auf Integrale dieser allgemeineren Gestalt, so gelangt man zur Nicholsonreihe. Dabei ist allerdings der zweite Faktor des Integranden in besonderer Weise in eine Polynomreihe nach t , nicht einfach in eine Potenzreihe zu entwickeln.

Die Abschätzung des zweiten Faktors auf den entfernteren Teilen des Integrationsweges ist einfach. Für grosse $|t|$ ist auch $|u| = |p + iq|$ gross, und da q beschränkt bleibt, ist $|u| \approx |p|$, also $|u| \leq 2|p|$ für alle hinreichend grossen $|t|$.

Wegen $|\cos u|^2 = \cos^2 p - \sin^2 q$ ist $|\cos u| \approx |\sin u| \approx \cos p \approx \frac{1}{2} e^{1/p}$. Aus

$$\frac{1}{6} |t|^3 = |\sin u - u| \approx |\sin u| \approx \frac{1}{2} e^{1/p}$$

folgt $|p| \leq |t|$ für alle hinreichend grossen $|t|$, ferner $|e^{-\gamma u}| \leq e^{|\gamma||u|} \leq e^{2|\gamma||p|} \leq e^{2|\gamma||t|}$

und $|e^{\gamma(t-u)}| \leq e^{3|\gamma||t|}$, schliesslich $\left| \frac{du}{dt} \right| = \left| \frac{t^2}{2(\cos u - 1)} \right| \approx \frac{3}{|t|} \cdot \frac{1}{6} |t|^3 \approx \frac{3}{|t|} \leq 1$.

Aus allem folgt $\left| \frac{du}{dt} \right| |e^{\gamma(t-u)}| \leq e^{3|\gamma||t|}$ für alle hinreichend grossen $|t|$.

Nun ist, wenn y eine komplexe Variable bedeutet und $u = t - c_3 t^3 + c_5 t^5 \dots$ gesetzt wird,

$$e^{y(1-\frac{u}{t})} = \exp [y t^2 (c_3 - c_5 t^2 \dots)], \quad \frac{du}{dt} = 1 - 3c_3 t^2 + \dots,$$

hieraus

$$(17) \quad \frac{du}{dt} e^{y(1-\frac{u}{t})} = \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{\mu}(y) t^{2\mu},$$

worin $f_\mu(y)$ ein Polynom in y (höchstens) vom Grade μ ist; insbesondere ist $f_0(y) = 1$, $f_1(y) = \frac{y-3}{60}$, $f_2(y) = \frac{7y^2 - 78y + 180}{50400}$. Der Konvergenzradius $(12\pi)^{\frac{1}{3}}$ von (8) ist grösser als 1. Daher gilt $\left|\frac{du}{dt}\right| \leq C_1$, $\left|\frac{u}{t}\right| \leq C_2$ für alle $|t| \leq 1$, wobei C_1, C_2, \dots positive Weltkonstanten bedeuten. Hieraus folgt weiter $\left|\frac{du}{dt} e^{\gamma(1-\frac{u}{t})}\right| \leq C_1 e^{C_3|y|}$ für alle $|t| \leq 1$ und alle y , und daher auf Grund von (17) nach der Cauchyschen Abschätzungsformel $|f_\mu(y)| \leq C_1 e^{C_3|y|}$ für alle y und μ .

Nun wird $y = \gamma t$ eingesetzt. Dann entsteht die Polynomreihe

$$\frac{du}{dt} e^{\gamma(t-u)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu(\gamma t) t^{2\mu} \quad \text{mit} \quad |f_\mu(\gamma t)| \leq C_1 e^{C_3|\gamma||t|}.$$

Ferner sei r eine Konstante mit $0 < r < 1$, z. B. $r = \frac{1}{2}$. Nachdem eine natürliche Zahl m fest gewählt ist, wird zerlegt

$$(18) \quad \frac{du}{dt} e^{\gamma(t-u)} = \sum_{\mu=0}^{m-1} f_\mu(\gamma t) t^{2\mu} + \Delta_m(t).$$

Dann ist für $|t| \leq r$

$$\begin{aligned} |\Delta_m(t)| &= \left| \sum_{\mu=m}^{\infty} f_\mu(\gamma t) t^{2\mu} \right| \leq |t|^{2m} \sum_{\mu=m}^{\infty} |f_\mu(\gamma t)| r^{2(\mu-m)} \\ &\leq C_1 e^{C_3|\gamma||t|} |t|^{2m} \sum_{\lambda=0}^{\infty} r^{2\lambda} = C_4 e^{C_3|\gamma||t|} |t|^{2m}. \end{aligned}$$

Andererseits ist für grosse $|t|$, jetzt aber nur auf dem Integrationswege,

$$|\Delta_m(t)| \leq \left| \frac{du}{dt} e^{\gamma(t-u)} \right| + \sum_{\mu=0}^{m-1} |f_\mu(\gamma t)| |t|^{2\mu} \leq e^{3|\gamma||t|} + C_1 e^{C_3|\gamma||t|} |t|^{2m},$$

weil für alle $|t|^2 \geq 2$ und alle $m \geq 1$ $\sum_{\mu=0}^{m-1} |t|^{2\mu} \leq |t|^{2m}$ gilt. Fasst man noch die Abschätzungen für grosse und kleine $|t|$ zusammen, so ergibt sich auf dem ganzen Integrationswege

$$|\Delta_m(t)| \leq C_5 e^{C_3|\gamma||t|} |t|^{2m}.$$

Nun soll (18) beiderseits mit $\frac{i}{\pi} e^{-\frac{2}{3}t^3 - \gamma t}$ multipliziert und längs des bekannten Weges integriert werden. Gleichzeitig machen wir jedoch die Substitution $t = z^{-\frac{1}{3}}v$. Wird noch $\gamma z^{-\frac{1}{3}} = \zeta$ eingeführt, so dass $\gamma t = \zeta v$ wird, so entsteht

$$(19) \quad H_{z-\gamma}^{(2)}(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} z^{-\frac{2\mu+1}{3}} \frac{i}{\pi} \int e^{-\frac{1}{6}v^3 - \zeta v} f_{\mu}(\zeta v) v^{2\mu} dv + R_m$$

mit

$$R_m = z^{-\frac{1}{3}} \frac{i}{\pi} \int e^{-\frac{1}{6}v^3 - \zeta v} \Delta_m(z^{-\frac{1}{3}}v) dv,$$

und zwar hat v auf den beiden Teilen des Weges den Arkus $\frac{2\pi + \sigma + \phi}{3}$ bzw. $\frac{\sigma' + \phi}{3}$.

Für die Integrale innerhalb der μ -Summe setzen wir einfach $\sigma = \sigma' = -\phi$, so dass die Grenzen $\infty e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und $+\infty$ lauten.

Wir beschränken jetzt $\zeta = \gamma z^{-\frac{1}{3}}$ auf einen Kreis $|\zeta| \leq K$ und z auf den Winkelraum $-2\pi + 3\varepsilon \leq \arg z \leq \pi - 3\varepsilon$, wo $K > 0$ beliebig gross und $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein darf. Die Bedingung $|\zeta| \leq K$ besagt $\gamma = O(z^{\frac{1}{3}})$.

Um R_m abzuschätzen, wird wie früher $\sigma = \sigma' = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\phi$ gewählt; dann gilt $|\sigma + \phi| = |\sigma' + \phi| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Hieraus folgt auf beiden Teilen des Weges eine Abschätzung nach unten für den Realteil von v^3 , nämlich $Rv^3 = |v|^3 \cos(3 \arg v) \geq |v|^3 \sin \varepsilon$.

Das gibt, $|v| = w$ gesetzt, für R_m die Abschätzung

$$|R_m| \leq |z|^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{6}w^3 \sin \varepsilon + K w} \cdot C_{\frac{5}{3}} e^{C_{\frac{5}{3}} K w} |z|^{-\frac{2m}{3}} w^{2m} dw = O(z^{-\frac{2m+1}{3}}).$$

Hiernach besagt (19), dass die asymptotische Entwicklung besteht

$$(20) \quad H_{z-\gamma}^{(2)}(z) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{-\frac{2\mu+1}{3}} \frac{i}{\pi} \int_{\infty(\frac{2\pi}{3})}^{+\infty} e^{-\frac{1}{6}v^3 - \zeta v} f_{\mu}(\zeta v) v^{2\mu} dv,$$

und zwar mit gleichmässiger Restabschätzung, wenn z in einem abgeschlossenen Winkelraume innerhalb des offenen Winkelraumes $-2\pi \dots +\pi$ gegen ∞ strebt und $\zeta = \gamma z^{-\frac{1}{3}}$ beschränkt bleibt. Die nur von ζ abhängigen Integrale sind vom Airyschen Typus. Formel (20) ist die Nicholsonreihe.

Man kann hier, ohne dass das Polynom im Exponenten von e den dritten Grad überschreitet, das Glied mit $\mu=1$ dadurch wegschaffen, dass man in (17) die rechte Seite

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} f_{\mu}(y) t^{2\mu} \quad \text{gleich} \quad e^{f_1(y)t} \sum_{\mu=0}^{\infty} g_{\mu}(y) t^{2\mu}$$

setzt. Dann wird $g_0(y) = 1$, $g_1(y) \equiv 0$, und für $\mu \geq 2$ ist $g_{\mu}(y)$, was allerdings unwesentlich ist, höchstens vom Grade $\mu - 1$. Durch Betrachtungen ähnlicher Art gelangt man zu der asymptotischen Entwicklung

$$(21) \quad H_{z^{-\gamma}}^{(2)}(z) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{-\frac{2\mu+1}{3}} \frac{i}{\pi} \int_{\infty\left(\frac{2}{3}\right)}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{6}v^3 - \zeta v + \frac{\zeta v - 3}{60} z^{-\frac{2}{3}} v^2\right) g_{\mu}(\zeta v) v^{2\mu} dv,$$

die aber nur dadurch von einiger Bedeutung ist, dass wegen $g_1(\zeta v) \equiv 0$ das für $\mu = 0$ entstehende Hauptglied der Reihe die Funktion auf der linken Seite mit der Genauigkeit $O(z^{-\frac{5}{3}})$ approximiert, während das Hauptglied von (20) nur die Genauigkeit $O(z^{-1})$ erreicht. So gelangen wir zu einer verbesserten Nicholsonformel, vgl. Formel (35).

Aus (17), (8) und (9) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-y} f_{\mu}(y) t^{2\mu} &= \frac{du}{dt} e^{-y} t^u = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \left(-\frac{y}{t}\right) t^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^l b_l^{\mu} \frac{y^{l-2\mu}}{(l-2\mu)!} t^{2\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{l=2\mu}^{\infty} (-1)^l b_l^{\mu} \frac{y^{l-2\mu}}{(l-2\mu)!} t^{2\mu} \end{aligned}$$

und hieraus durch Koeffizientenvergleich

$$e^{-y} f_{\mu}(y) = \sum_{l=2\mu}^{\infty} (-1)^l b_l^{\mu} \frac{y^{l-2\mu}}{(l-2\mu)!},$$

so dass (20) die Gestalt annimmt

$$H_{z^{-\gamma}}^{(2)}(z) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{-\frac{2\mu+1}{3}} \frac{i}{\pi} \int_{\infty\left(\frac{2}{3}\right)}^{+\infty} \sum_{l=2\mu}^{\infty} (-1)^l b_l^{\mu} \frac{y^{l-2\mu}}{(l-2\mu)!} e^{-\frac{1}{6}v^3} v^l dv.$$

Hier darf im Sinne der Gleichheit die innere Summe mit dem Integral vertauscht werden. Die Vertauschung ist nämlich zunächst dann erlaubt, wenn das Integral über v nur von $T e^{\frac{2\pi i}{3}}$ bis T erstreckt wird ($T > 0$); denn im Anschluss an (11 a) war festgestellt worden, dass b_l^{μ} als Polynom μ ten Grades gleich $O(l^{\mu})$ ist, so dass die innere Summe für alle $|v| \leq T$ gleichmässig konvergiert. Hiernach ist zunächst bewiesen

$$H_{z-\gamma}^{(2)}(z) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{-\frac{2\mu+1}{3}} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\sum_{l=2\mu}^{\infty} (-1)^l b_l^\mu \frac{\zeta^{l-2\mu}}{(l-2\mu)!} \frac{i}{\pi} \int_{\frac{2\pi i}{3}}^T e^{-\frac{1}{6}v^3} v^l dv \right).$$

Da aber das innere Integral für alle $T > 0$ dem Betrage nach kleiner ist als $\text{const} \cdot (6\Gamma)^{\frac{l+1}{3}}$ und bei dieser Vergrößerung des Integrals die Summe über l immer noch absolut konvergiert, so darf der Grenzübergang $T \rightarrow +\infty$ mit der Summation über l vertauscht werden, und es entsteht

$$(22) \quad H_{z-\gamma}^{(2)}(z) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{-\frac{2\mu+1}{3}} \sum_{l=2\mu}^{\infty} (-1)^l b_l^\mu \frac{\zeta^{l-2\mu}}{(l-2\mu)!} \frac{i}{\pi} \int_{\infty\left(\frac{2\pi}{3}\right)}^{+\infty} e^{-\frac{1}{6}v^3} v^l dv.$$

Durch Vergleich von (22) mit (15 b) ist die Nicholsonreihe als diejenige Entwicklung erkannt, die formal durch die in der Einleitung erörterte Umordnung (Vertauschung der Summationen über l und μ) aus der Debyeschen Ausnahmereihe hervorgeht.

§ 3.

Mit der am Ende von § 1 eingeführten Abkürzung α_l und unter Verwendung der Grössen $e_l^\mu = (6\Gamma)^{\frac{l+1}{3}} b_l^\mu$ lautet die Nicholsonreihe

$$\begin{aligned} H_{z-\gamma}^{(2)}(z) &\sim \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{-\frac{2\mu+1}{3}} \sum_{l=2\mu}^{\infty} (-1)^l \alpha_l e_l^\mu \frac{\zeta^{l-2\mu}}{(l-2\mu)!} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{-\frac{2\mu+1}{3}} \sum_{l=2\mu}^{\infty} (-1)^l \alpha_l \sum_{\kappa=0}^{\mu} (-1)^\kappa w_\kappa^\mu (6\Gamma)^{\frac{l+1}{3}+\kappa} \frac{\zeta^{l-2\mu}}{(l-2\mu)!}. \end{aligned}$$

Indem man hier die beiden innersten Summationen vertauscht und $l = n - 3\kappa$ substituiert, wobei $\alpha_l = \alpha_n$ zu berücksichtigen ist, entsteht

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{-\frac{2\mu+1}{3}} \sum_{\kappa=0}^{\mu} w_\kappa^\mu \sum_{n=2\mu+3\kappa}^{\infty} (-1)^n \alpha_n (6\Gamma)^{\frac{n+1}{3}} \frac{\zeta^{n-3\kappa-2\mu}}{(n-3\kappa-2\mu)!} \\ = \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{-\frac{2\mu+1}{3}} \sum_{\kappa=0}^{\mu} w_\kappa^\mu \frac{\partial^{3\kappa+2\mu}}{\partial \zeta^{3\kappa+2\mu}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n (6\Gamma)^{\frac{n+1}{3}} \frac{\zeta^{-n}}{n!} \right). \end{aligned}$$

Wird hier die innerste Summe mit $F_2(\zeta)$ bezeichnet, so erhält man

$$(23) \quad H_{z-\gamma}^{(2)}(z) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{-\frac{2\mu+1}{3}} \sum_{\kappa=0}^{\mu} w_\kappa^\mu F_2^{(3\kappa+2\mu)}(\zeta), \quad \zeta = \gamma z^{-\frac{1}{3}}.$$

Die rechte Seite kann mit Hilfe der erzeugenden Funktion (14) und unter Verwendung eines Differentialoperators p leicht symbolisch in geschlossener Form geschrieben werden, nämlich als

$$(23 \text{ a}) \quad z^{-\frac{1}{3}} \exp \left[z \left(\zeta \operatorname{in} \frac{p}{z^{\frac{1}{3}}} - \frac{p}{z^{\frac{1}{3}}} \right) - \frac{1}{6} p^3 \right] F_2(\zeta)$$

mit folgender Ausdeutung: der Ausdruck ist nach Potenzen von $z^{-\frac{1}{3}}$ zu entwickeln; in den Koeffizienten sind der Operator $p = \frac{\partial}{\partial \zeta}$ und seine symbolischen Potenzen auf die Funktion $F_2(\zeta)$ an der Stelle $\zeta = \gamma z^{-\frac{1}{3}}$ anzuwenden.

Auf verschiedene Weise, am einfachsten durch Vergleich der Hauptglieder von (20) und (23), findet man für $F_2(\zeta)$ die Darstellung als Airysches Integral

$$(24) \quad F_2(\zeta) = \frac{i}{\pi} \int_{\infty \left(\frac{2\pi}{3}\right)}^{+\infty} e^{-\frac{1}{6} v^3 - \zeta v} dv.$$

Die k te Ableitung von $F_2(\zeta)$ kann durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewonnen werden, wodurch der Integrand einfach den Faktor $(-v)^k$ erhält. Darnach

leitet man aus dem identischen Verschwinden von $\int_{\infty \left(\frac{2\pi}{3}\right)}^{+\infty} e^{-\frac{1}{6} v^3 - \zeta v} (\frac{1}{2} v^2 + \zeta) dv$ leicht

die Differentialgleichung $F_2''(\zeta) = -2\zeta F_2(\zeta)$ und hieraus die Rekursionsformel her

$$(25) \quad F_2^{(m+2)}(\zeta) = -2\zeta F_2^{(m)}(\zeta) - 2m F_2^{(m-1)}(\zeta) \quad \text{für } m \geq 0.$$

Diese Rekursionsformel für die Ableitungen von $F_2(\zeta)$ in Verbindung mit der Rekursionsformel (13) für die w_μ^z ermöglicht nicht nur — worauf wir in § 4 zurückkommen — die explizite Aufstellung der einzelnen Glieder der Nicholsonreihe auf Grund ihrer Darstellung in der Gestalt (23), sondern gestattet auch ohne Kenntnis formelmässiger Ausdrücke für die Reihenglieder deren numerische Auswertung bis zu hohem μ für einen einzelnen Zahlenwert von ζ , sobald $F_2(\zeta)$ und $F_2'(\zeta)$ bekannt sind.

Die Nicholsonentwicklung für $H_{z^{-\gamma}}^{(2)}(z)$ gilt im Winkelraume $-2\pi < \operatorname{arc} z < \pi$, eine abkürzende Ausdrucksweise, die besagen soll, dass $\operatorname{arc} z$ auf ein beliebiges abgeschlossenes Intervall einzuschränken ist, das in dem offenen Intervall $-2\pi \cdots +\pi$ enthalten ist; die asymptotische Entwicklung gilt dann gleichmässig, sofern auch für

$|\gamma z^{-\frac{1}{3}}|$ eine obere Schranke vorgegeben ist. In dem gleichen Sinne sind auch alle weiteren Angaben über Winkelräume zu verstehen.

Wird z als die zu einer komplexen Zahl \bar{z} konjugiert-komplexe Zahl gedeutet — analog ist mit γ zu verfahren —, so ist $-\pi < \arg \bar{z} < 2\pi$. Vertauscht man dann in allen Betrachtungen die Rollen von i und $-i$ und schreibt schliesslich statt \bar{z} wieder z (und entsprechend für γ), so resultiert eine zu (23) völlig analoge Entwicklung für $H_{z-\gamma}^{(1)}(z)$, bei der $F_2(\zeta)$ durch die in gleicher Weise gespiegelte Funktion

$$F_1(\zeta) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{6}v^3 - \zeta v} dv$$

ersetzt ist.

Die symbolische Formel (23 a) ist mit dem Sommerfeldschen Integral (5) eng verwandt. Dieses lässt sich mit der Substitution $u = vz^{-\frac{1}{3}}$ folgendermassen umgestalten:

$$\begin{aligned} H_{z-\gamma}^{(2)}(z) &= \frac{i}{\pi} \int \exp[-z(\mathfrak{S}in u - u) - \gamma u] du \\ &= \frac{i}{\pi} \int e^{-\frac{z}{6}u^3 - \gamma u} \exp[-z(\mathfrak{S}in u - u - \frac{1}{6}u^3)] du \\ &= z^{-\frac{1}{3}} \frac{i}{\pi} \int e^{-\frac{1}{6}v^3 - \zeta v} \exp\left[-z\left(\mathfrak{S}in \frac{v}{z^{\frac{1}{3}}} - \frac{v}{z^{\frac{1}{3}}}\right) + \frac{1}{6}v^3\right] dv. \end{aligned}$$

So geschrieben, ist es wegen

$$p^k F_2(\zeta) = \frac{i}{\pi} \int e^{-\frac{1}{6}v^3 - \zeta v} (-v)^k dv$$

mit der symbolischen Darstellung (23 a) der Nicholsonreihe formal geradezu identisch. Allerdings muss, damit die Integrale konvergieren, bei der Definition von $F_2(\zeta)$ der Integrationsweg in anderer Weise als beim Sommerfeldschen Integral ins Unendliche geführt werden. Diese Schwierigkeit liesse sich überwinden, wurde aber bei unserem Beweisverfahren durch die der Sattelpunktmethode entlehnte Substitution $\mathfrak{S}in u - u = \frac{1}{6}t^3$ umgangen; der Beweis in § 2 stellt methodisch ein Gemisch von Laplacetransformation und Sattelpunktmethode dar.

§ 4.

Zur bequemeren Darstellung und insbesondere zur numerischen Auswertung der Nicholsonreihe bieten sich mehrere Wege, je nachdem ob man sich auf die tabellierten Airyschen Integrale oder auf Zylinderfunktionen der Ordnungen $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$ (Drittelfunktionen) stützen will. Beide Möglichkeiten sollen berücksichtigt werden.¹

Die Airyschen Integrale werden in dem von J. P. C. Miller herausgegebenen Tafelwerke² so normiert, dass sie der Differentialgleichung $y'' = xy$ genügen. Solche Funktionen sollen im folgenden mit $\mathfrak{A}_i(x)$ bezeichnet werden. Dazu gehören die folgenden, nur für den Augenblick mit $\mathfrak{A}_k(x)$ bezeichneten Funktionen der komplexen Variablen x :

$$\mathfrak{A}_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \exp\left(\frac{1}{3}t^3 - xt\right) dt, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

bei denen der Integrationsweg L_k von $\infty e^{\frac{2\pi i}{3}(k-\frac{1}{2})}$ nach $\infty e^{\frac{2\pi i}{3}(k+\frac{1}{2})}$ oder auf äquivalente Weise verläuft. Bei diesen Definitionen darf k ohne Änderung der Funktionen um ein Vielfaches von 3 geändert werden.

Offenbar ist $\mathfrak{A}_0(x) + \mathfrak{A}_1(x) + \mathfrak{A}_2(x) \equiv 0$, und die Substitution $t = u e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ergibt $\mathfrak{A}_k(x) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \mathfrak{A}_{k-1}(x e^{\frac{2\pi i}{3}})$ für jedes k . In dem genannten Tafelwerke sind die Funktionen

$$A_i(x) = \mathfrak{A}_0(x) \quad \text{und} \quad B_i(x) = i(\mathfrak{A}_2(x) - \mathfrak{A}_1(x))$$

und ihre ersten Ableitungen, zum Teil auch höhere Ableitungen, für reelle x tabelliert. Diese Funktionen sind für reelle x offenbar reell. Allgemein für komplexe x ist

$$\begin{aligned} A_i(x) + i B_i(x) &= \mathfrak{A}_0(x) + \mathfrak{A}_1(x) - \mathfrak{A}_2(x) = -2\mathfrak{A}_2(x) = 2e^{\frac{\pi i}{3}} A_i(x e^{-\frac{2\pi i}{3}}) \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\pi i}{6}} \int_{\infty(-\frac{\pi}{3})}^{\infty(\frac{\pi}{3})} \exp\left(\frac{1}{3}t^3 - x e^{-\frac{2\pi i}{3}} t\right) dt, \end{aligned}$$

was durch die Substitution $t = e^{-\frac{\pi i}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} v$ nach Umkehrung des Weges in

$$2^{-\frac{1}{3}} \frac{i}{\pi} \int_{\infty(\frac{2\pi}{3})}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{6}v^3 + 2^{-\frac{1}{3}} x v\right) dv = 2^{-\frac{1}{3}} F_2\left(-2^{-\frac{1}{3}} x\right)$$

¹ Als dritte Möglichkeit kommt die Verwendung der $\mathfrak{J}_\frac{1}{3}$ und ihrer Ableitung $\mathfrak{J}'_\frac{1}{3}$ in Betracht.

² *British Association Mathematical Tables, Part-volume B, The Airy Integral, Cambridge 1946.*

übergeht. Es ist also

$$F_2(\zeta) = 2^{\frac{1}{3}} [Ai(-2^{\frac{1}{3}}\zeta) + iBi(-2^{\frac{1}{3}}\zeta)]$$

und analog

$$F_1(\zeta) = 2^{\frac{1}{3}} [Ai(-2^{\frac{1}{3}}\zeta) - iBi(-2^{\frac{1}{3}}\zeta)].$$

Setzt man dies in der Entwicklung (23) für $H^{(2)}$ und der entsprechenden Entwicklung für $H^{(1)}$ ein, so gelangt man durch Bildung der halben Differenz und Summe zu folgenden asymptotischen Reihen

$$(26) \quad \begin{aligned} J_{z-\gamma}(z) &\sim \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2\mu+1}{3}} \sum_{\kappa=0}^{\mu} (-2)^{\kappa} w_{\kappa}^{\mu} Ai^{(3\kappa+2\mu)}(\xi) \\ -Y_{z-\gamma}(z) &\sim \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2\mu+1}{3}} \sum_{\kappa=0}^{\mu} (-2)^{\kappa} w_{\kappa}^{\mu} Bi^{(3\kappa+2\mu)}(\xi) \end{aligned} \quad \text{mit } \xi = -\gamma \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{3}},$$

gültig für $z \rightarrow \infty$, $|\text{arc } z| \leq \pi - \varepsilon$, $\gamma = O(z^{\frac{1}{3}})$.

Hier können mittels der Differentialgleichungen $Ai''(\xi) = \xi Ai(\xi)$, $Bi''(\xi) = \xi Bi(\xi)$ die zweite und alle höheren Ableitungen eliminiert werden; die Nicholsonreihe erscheint dann in der Form

$$(27) \quad \begin{aligned} J_{\nu}(z) &\sim \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2\mu+1}{3}} [P_{\mu}(\xi) Ai(\xi) + Q_{\mu}(\xi) Ai'(\xi)] \\ -Y_{\nu}(z) &\sim \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2\mu+1}{3}} [P_{\mu}(\xi) Bi(\xi) + Q_{\mu}(\xi) Bi'(\xi)] \end{aligned} \quad \text{mit } \xi = (\nu - z) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{3}},$$

worin $P_{\mu}(\xi)$ und $Q_{\mu}(\xi)$ folgende Polynome bedeuten:

$P_0(\xi) = 1$	$Q_0(\xi) = 0$
$P_1(\xi) = \frac{1}{15} \xi$	$Q_1(\xi) = \frac{1}{60} \xi^2$
$P_2(\xi) = \frac{1}{7200} \xi^5 + \frac{13}{1260} \xi^2$	$Q_2(\xi) = \frac{1}{420} \xi^3 + \frac{1}{140}$
$P_3(\xi) = \frac{283}{9\,072\,000} \xi^6 + \frac{463}{226\,800} \xi^3 + \frac{1}{900}$	$Q_3(\xi) = \frac{1}{1\,296\,000} \xi^7 + \frac{13}{32\,400} \xi^4 + \frac{19}{6\,300} \xi$
$P_4(\xi) = \frac{1}{311\,040\,000} \xi^{10} + \frac{599}{95\,256\,000} \xi^7 +$ $+ \frac{26897}{59\,875\,200} \xi^4 + \frac{7939}{8\,316\,000} \xi$	$Q_4(\xi) = \frac{17}{72\,576\,000} \xi^8 + \frac{2521}{33\,264\,000} \xi^5 +$ $+ \frac{359}{346\,500} \xi^2$

.....

Über die Struktur dieser Polynome lässt sich aus den für ihre Bildung massgebenden Rekursionsformeln beispielsweise die Tatsache herleiten, dass die höchsten Glieder nach Multiplikation mit $60^\mu \cdot \mu!$ wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} \text{bei } 60^\mu \mu! P_\mu(\xi): & \quad \xi^{\frac{5\mu}{2}} \text{ für gerade } \mu, & \quad \frac{135\mu^2 - 30\mu + 7}{28} \xi^{\frac{5\mu-3}{2}} \text{ für ungerade } \mu, \\ \text{bei } 60^\mu \mu! Q_\mu(\xi): & \quad \xi^{\frac{5\mu-1}{2}} \text{ für ungerade } \mu, & \quad \frac{135\mu^2 - 30\mu}{28} \xi^{\frac{5\mu-4}{2}} \text{ für gerade } \mu. \end{aligned}$$

Im übrigen bilden in jedem einzelnen dieser Polynome die Exponenten der aufeinander folgenden Glieder eine arithmetische Reihe der Differenz -3 .

Der zweite Weg, die Funktionen $F_1(\zeta)$, $F_2(\zeta)$ durch tabellierte Funktionen darzustellen, beruht für $\zeta > 0$ auf der bekannten Umformung von (24) mit der Substitution $v = (8\zeta)^{\frac{1}{2}} \Im \sin \frac{u}{3}$:

$$\begin{aligned} F_2(\zeta) &= \frac{1}{3} (2\zeta)^{\frac{1}{2}} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty+i\pi}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{3} (2\zeta)^{\frac{3}{2}} \Im \sin u\right) (e^{\frac{u}{3}} + e^{-\frac{u}{3}}) du \\ &= \frac{1}{3} (2\zeta)^{\frac{1}{2}} \left(H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{1}{3} (2\zeta)^{\frac{3}{2}} \right) + H_{-\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{1}{3} (2\zeta)^{\frac{3}{2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich vermittels der bekannten Beziehung zwischen $H_{\frac{1}{3}}^{(2)}$ und $H_{-\frac{1}{3}}^{(2)}$ die erste der folgenden Formeln (28), die sich durch analytische Fortsetzung nachträglich als ausnahmslos gültig erweist. Auch durch Vergleich der Potenzreihenentwicklungen kann sie bewiesen werden. Durch Differentiation bzw. durch Spiegelung folgen die drei übrigen Formeln:

$$\begin{aligned} (28) \quad \sqrt{3} e^{\frac{\pi i}{6}} F_2(\zeta) &= (2\zeta)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{1}{3} (2\zeta)^{\frac{3}{2}} \right), & \quad \sqrt{3} e^{\frac{\pi i}{6}} F_2'(\zeta) &= 2\zeta H_{-\frac{2}{3}}^{(2)} \left(\frac{1}{3} (2\zeta)^{\frac{3}{2}} \right), \\ \sqrt{3} e^{-\frac{\pi i}{6}} F_1(\zeta) &= (2\zeta)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left(\frac{1}{3} (2\zeta)^{\frac{3}{2}} \right), & \quad \sqrt{3} e^{-\frac{\pi i}{6}} F_1'(\zeta) &= 2\zeta H_{-\frac{2}{3}}^{(1)} \left(\frac{1}{3} (2\zeta)^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned}$$

All dies lässt sich auch aus den Beziehungen zwischen Airyschen Integralen und Drittelfunktionen ableiten, wie sie in dem oben zitierten Tafelwerke aufgestellt sind. Auf der rechten Seite der Formeln (28) ist die Normierung des Vorzeichens der Bruchpotenz $(2\zeta)^{\frac{1}{2}}$ gleichgültig, da es sich um eindeutige Funktionen handelt; doch ist selbstverständlich $\arccos(2\zeta)^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot \arccos(2\zeta)^{\frac{1}{2}}$ zu nehmen.

Die Nicholsonentwicklung einer beliebigen Zylinderfunktion $Z_\nu(z) = \alpha J_\nu(z) + \beta Y_\nu(z)$ nimmt nun die Form an

$$(29) \quad Z_\nu(z) \sim \left(\frac{2\gamma}{3z}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (2\gamma z)^{-\frac{\mu}{2}} [S_\mu(y) \mathfrak{J}_{\frac{1}{3}}(y) + T_\mu(y) \mathfrak{J}_{-\frac{2}{3}}(y)],$$

wobei $\gamma = z - \nu$, $y = \frac{(2\gamma)^{\frac{3}{2}}}{3z^{\frac{1}{2}}}$ ($\gamma \neq 0$) zu setzen ist. Dabei bedeuten $S_\mu(y)$ und $T_\mu(y)$ folgende Polynome:

$S_0(y) = 1$	$T_0(y) = 0$
$S_1(y) = \frac{1}{5}y$	$T_1(y) = \frac{3}{40}y^2$
$S_2(y) = -\frac{9}{3200}y^4 + \frac{13}{140}y^2$	$T_2(y) = \frac{9}{280}y^3 - \frac{3}{70}y$
$S_3(y) = -\frac{849}{448000}y^5 + \frac{463}{8400}y^3 - \frac{1}{75}y$	$T_3(y) = -\frac{9}{128000}y^6 + \frac{13}{800}y^4 - \frac{19}{350}y^2$
$S_4(y) = \frac{27}{20480000}y^8 - \frac{1797}{1568000}y^6 +$ $+ \frac{26897}{739200}y^4 - \frac{7939}{231000}y^2$	$T_4(y) = -\frac{459}{7168000}y^7 + \frac{22689}{2464000}y^5 -$ $- \frac{1077}{19250}y^3$
.....	

Über die Zuordnung der $Z_\nu(z)$ zu den Drittelfunktionen $\mathfrak{J}_{\frac{1}{3}}(y)$, $\mathfrak{J}_{-\frac{2}{3}}(y)$ gibt folgende Tabelle Auskunft.

Zu $Z_\nu(z) = \downarrow$	gehören $\mathfrak{J}_{\frac{1}{3}}(y) = \downarrow$	und $\mathfrak{J}_{-\frac{2}{3}}(y) = \downarrow$
$H_\nu^{(1)}(z)$	$e^{\frac{\pi i}{6}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(y)$	$e^{\frac{\pi i}{6}} H_{-\frac{2}{3}}^{(1)}(y)$
$H_\nu^{(2)}(z)$	$e^{-\frac{\pi i}{6}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(y)$	$e^{-\frac{\pi i}{6}} H_{-\frac{2}{3}}^{(2)}(y)$
$J_\nu(z)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(J_{\frac{1}{3}}(y) + J_{-\frac{1}{3}}(y))$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(J_{-\frac{2}{3}}(y) - J_{\frac{2}{3}}(y))$
$Y_\nu(z)$	$J_{\frac{1}{3}}(y) - J_{-\frac{1}{3}}(y)$	$J_{-\frac{2}{3}}(y) + J_{\frac{2}{3}}(y)$

In dem wichtigen Falle, dass ν positiv ist und z eine Zahl vom Arkus 0 bedeutet, erscheinen die Formeln (27) stets in reeller Gestalt; bei (29) trifft dies jedoch

nur für $z > \nu$ zu. Ist aber $0 < z < \nu$, also $\gamma < 0$, und wird beispielsweise $\gamma = |\gamma| e^{-\pi t}$ normiert, so ist $y = |\gamma| e^{-\frac{3\pi t}{2}}$, und mittels der Formeln

$$J_{\frac{1}{3}}(y) = -i I_{\frac{1}{3}}(|y|), \quad J_{-\frac{2}{3}} = -I_{-\frac{2}{3}}(|y|)$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}}(J_{\frac{1}{3}}(y) + J_{-\frac{1}{3}}(y)) = i K_{\frac{1}{3}}(|y|), \quad \frac{\pi}{\sqrt{3}}(J_{-\frac{2}{3}}(y) - J_{\frac{2}{3}}(y)) = -K_{\frac{2}{3}}(|y|)$$

lassen sich dann die Nicholsonentwicklungen für $Y_\nu(z) + \sqrt{3} J_\nu(z)$ und für $J_\nu(z)$ in reeller Form durch die üblicherweise nur für positives Argument verwendeten modifizierten Drittelfunktionen $I_{\frac{1}{3}}, I_{-\frac{2}{3}}$ bzw. $K_{\frac{1}{3}}, K_{\frac{2}{3}}$ darstellen. Hierbei ist der Umstand von Bedeutung, dass die Polynome $S_\mu(y)$ und $T_\mu(y)$ entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen von y enthalten, so dass bei rein imaginärem y die Polynome ihrerseits reelle oder rein imaginäre Werte annehmen. Die Endformeln für den Fall

$0 < z < \nu$ lauten mit $\eta = \frac{(2(\nu - z))^{\frac{3}{2}}}{3z^{\frac{1}{2}}}$

$$(29 \text{ a}) \quad \sqrt{3} J_\nu(z) + Y_\nu(z) \sim \left(\frac{8(\nu - z)}{3z}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} (2(\nu - z)z)^{-\frac{\mu}{2}} [s_\mu(\eta) I_{\frac{1}{3}}(\eta) + t_\mu(\eta) I_{-\frac{2}{3}}(\eta)]$$

$$2\pi J_\nu(z) \sim \left(\frac{8(\nu - z)}{3z}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu (2(\nu - z)z)^{-\frac{\mu}{2}} [s_\mu(\eta) K_{\frac{1}{3}}(\eta) - t_\mu(\eta) K_{\frac{2}{3}}(\eta)].$$

Dabei ist $s_\mu(\eta) = i^{-\mu} S_\mu(i\eta)$, $t_\mu(\eta) = i^{-\mu-1} T_\mu(i\eta)$, z. B. $s_2(\eta) = \frac{9}{3200} \eta^4 + \frac{13}{140} \eta^2$. Für $\mu \leq 4$ hat man, um s_μ und t_μ zu erhalten, nur in den S_μ, T_μ alle Koeffizienten positiv zu nehmen. Ob diese Regelmässigkeit in den Vorzeichen der Koeffizienten allgemein zutrifft, muss offen bleiben.

Die eigentliche Nicholsonformel ist das Hauptglied von (29):

$$(31) \quad J_\nu(z) = \frac{1}{3} \left(\frac{2(z-\nu)}{z}\right)^{\frac{1}{2}} (J_{\frac{1}{3}}(y) + J_{-\frac{1}{3}}(y)) + O(z^{-1})$$

$$Y_\nu(z) = \left(\frac{2(z-\nu)}{3z}\right)^{\frac{1}{2}} (J_{\frac{1}{3}}(y) - J_{-\frac{1}{3}}(y)) + O(z^{-1})$$

$$y = \frac{(2(z-\nu))^{\frac{3}{2}}}{3z^{\frac{1}{2}}},$$

gültig im Winkelraume $|\operatorname{arc} z| \leq \pi - \varepsilon$ bei dem Grenzübergange $z \rightarrow \infty$ unter der Bedingung $z - \nu = O(z^{\frac{1}{3}})$. Die Fehlerabschätzung folgt dabei am einfachsten aus der Darstellung (23). Das Hauptglied ist von der Grössenordnung $O(z^{-\frac{1}{3}})$, sofern nicht der Funktionswert der Drittelfunktion verschwindet oder gegen null strebt.

Die in (30) zusammengestellten Zuordnungen einer Zylinderfunktion $Z_\nu(z)$ zu einem Paare $\mathfrak{J}_{\frac{1}{3}}, \mathfrak{J}_{-\frac{2}{3}}$ von Drittelfunktionen¹ gelten für den Winkelraum $-\pi \cdots + \pi$ für $\text{arc } z$, d. h. in jedem abgeschlossenen Winkelraume, der in dem angegebenen offenen enthalten ist. Darüber hinaus ist die erste Zuordnung sogar für $-\pi \cdots + 2\pi$, die zweite für $-2\pi \cdots + \pi$ gültig. Doch gilt in jedem durch reelle Halbgeraden begrenzten Winkelraume der Öffnung 2π , d. h. $(k-1)\pi < \text{arc } z < (k+1)\pi$ mit ganzzahligem k , eine Nicholsonentwicklung (29), allerdings hängt dann die Zuordnung von $Z_\nu(z)$ zu den Drittelfunktionen nicht nur, wie selbstverständlich, von k , sondern im allgemeinen überdies explizit von ν ab. Da eine Abhängigkeit der Drittelfunktionen von ν den Sinn der asymptotischen Entwicklung verwirren würde, werden im folgenden solche $Z_\nu(z)$ angegeben, denen das Drittelfunktionenpaar $e^{\frac{\pi i}{6}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(y), e^{\frac{\pi i}{6}} H_{-\frac{2}{3}}^{(1)}(y)$ oder das Paar $e^{-\frac{\pi i}{6}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(y), e^{-\frac{\pi i}{6}} H_{-\frac{2}{3}}^{(2)}(y)$ zugeordnet ist. (Es genügt nicht, sich auf die besonders übersichtlichen Besselfunktionen $J_\nu(z)$ und $J_{-\nu}(z)$ zu beschränken, weil diese für ganzzahliges ν nicht voneinander unabhängig sind.) Argument der Drittelfunktion ist immer $y = \frac{(2\gamma)^{\frac{3}{2}}}{3z^{\frac{1}{2}}}$. Ein Beispiel für die Anwendung der Tabelle (32) findet sich im nachfolgenden Text.

Der Zylinderfunktion $Z_\nu(z) = \downarrow$	entspricht im z -Winkelraume	das Paar Drittelfunktionen von der Ordnung $\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$	
		$e^{\frac{\pi i}{6}} H^{(1)}(y)$	$e^{-\frac{\pi i}{6}} H^{(2)}(y)$
$\frac{\sin(2m+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi} \cdot 2J_\nu(z) - e^{2m\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(z)$	$(2m-1)\pi \dots (2m+2)\pi$	falls $m = 3n$	falls $m = 3n+1$
$-\frac{\sin(2m-1)\nu\pi}{\sin\nu\pi} \cdot 2J_\nu(z) - e^{2m\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(z)$	$(2m-2)\pi \dots (2m+1)\pi$	$m = 3n+2$	$m = 3n$
$e^{(2m-1)\nu\pi i} \cdot 2J_{-\nu}(z)$	$(2m-2)\pi \dots 2m\pi$	$m = 3n$	$m = 3n+1$
$-e^{-2m\nu\pi i} \cdot 2J_\nu(z)$	$(2m-1)\pi \dots (2m+1)\pi$	$m = 3n+1$	$m = 3n+2$

Die Herleitung von (32) ist einfach: durch Anwendung der Umlaufrelationen der $Z_\nu(z)$ lässt sich alles auf den Fall zurückführen, dass das Argument von Z_ν im Winkel-

¹ $\mathfrak{J}_{\frac{1}{3}}$ und $\mathfrak{J}_{-\frac{2}{3}}$ sind, von dem Unterschiede in der Ordnung abgesehen, in Nielsenschen Sinne dieselbe Zylinderfunktion.

raume $-\pi \cdots +\pi$ gelegen ist. Hierdurch bekommt allerdings das Argument der Drittelfunktionen seinerseits einen Umlauffaktor $e^{k\pi i}$; dieser wird dann durch die Umlaufrelationen der Drittelfunktionen weggeschafft.

In manchen Winkelräumen für z , die ganz innerhalb der oberen oder unteren Halbebene gelegen sind, liefert (32) zwei verschiedene $Z_\nu(z)$, denen dasselbe Paar von Drittelfunktionen entspricht. Dann ist zu bedenken, dass sich in abgeschlossenen Winkelräumen dieser Art der Imaginärteil von z , also wegen $\frac{z}{\nu} \rightarrow 1$ auch der Imaginärteil von ν dem Grenzwerte $+\infty$ oder $-\infty$ nähert und folglich einer der Ausdrücke $e^{\nu\pi i}$ oder $e^{-\nu\pi i}$ schneller als jede Potenz von z^{-1} gegen 0 strebt; damit verschwindet die scheinbare Unstimmigkeit. Beispielsweise ist im Winkelraume $3\pi \dots 4\pi$, der der unteren Halbebene angehört, das Drittelfunktionenpaar $e^{-\frac{\pi i}{6}} H_{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}}^{(2)}(y)$ den beiden Zylinderfunktionen $Z_\nu(z) = \frac{\sin 3\nu\pi}{\sin \nu\pi} \cdot 2J_\nu - e^{2\nu\pi i} H_\nu^{(2)}$ und $Z_\nu(z) = -e^{-4\nu\pi i} \cdot 2J_\nu$ zugeordnet (erste Zeile von (32) für $m=1$ und letzte Zeile für $m=2$). Deren Differenz $\left(\frac{\sin 3\nu\pi}{\sin \nu\pi} + e^{-4\nu\pi i}\right) \cdot 2J_\nu - e^{2\nu\pi i} H_\nu^{(2)}$ lässt sich schreiben $-e^{-2\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(z')$ mit $z' = z \cdot e^{-4\pi i}$, und da z' auf den Winkelraum $-\pi \cdots 0$ beschränkt ist und $|z' - \nu| = |z - \nu| = O(z^{\frac{1}{3}})$ bleibt, ist nach (31) offenbar $H_\nu^{(2)}(z') = O(z'^{-\frac{1}{3}})$, also beschränkt; hiernach strebt die genannte Differenz exponentiell gegen 0, so dass ihre asymptotische Entwicklung nach fallenden Potenzen von z identisch verschwinden muss.

Neben die asymptotische Entwicklung für $Z_\nu(z)$ tritt eine solche für die Ableitung nach dem Argument, also für $Z'_\nu(z) = \frac{d}{dz} Z_\nu(z)$; aus beiden zusammen erschliesst man nach den Fundamentalformeln das Verhalten von $Z_{\nu+k}(z)$ für $k = \pm 1$ und weiterhin mittels Lommelscher und ähnlicher Polynome für jedes ganzzahlige k . Ein solches Gegenstück für die Ableitung $Z'_\nu(z)$ ist bei der Debyeschen Hauptreihe (3) bekannt¹; bei der Debyeschen Ausnahmereihe ist das entsprechende Gegenstück wegen der Formel $Z'_\nu(z) = \frac{1}{2} Z_{\nu-1}(z) - \frac{1}{2} Z_{\nu+1}(z)$ trivial: man hat in (2) nur die linke Seite durch $H'_{z-\nu}^{(2)}(z)$ und auf der rechten Seite jedes Polynom $B_l(\gamma)$ durch $\frac{1}{2} B_l(\gamma+1) - \frac{1}{2} B_l(\gamma-1) = -B'_l(\gamma) + \frac{1}{6} B_{l-3}(\gamma)$ zu ersetzen; vgl. (10 a).

Um auch die Existenz eines derartigen Gegenstückes der Nicholsonreihe zu er-

¹ Vgl. C. S. MEIJER, Asymptotische Entwicklungen von Besselschen und Hankelschen Funktionen für grosse Werte des Arguments und der Ordnung, *Math. Ann.* 108 (1933), 321—359.

kennen, kann man von der Nicholsonreihe selbst, etwa von der Gestalt (27) ausgehen. Wird darin γ durch $\gamma' = \gamma \pm 1$ ersetzt, so kann man die zugehörigen modifizierten Argumentstellen ξ' sofort angeben und, da $z \rightarrow \infty$ und folglich $\xi' \rightarrow \xi$ strebt, die Funktionswerte $Ai(\xi')$ usw. mit der Taylorsche Reihe an der Stelle ξ nach absteigenden Potenzen von z entwickeln. Drückt man dann noch die höheren Ableitungen durch die niederen aus und ordnet endgültig wieder nach z (alles bei asymptotischen Reihen erlaubte Operationen), so erhält man die gesuchte Entwicklung. Sie lautet, durch Airysche Funktionen ausgedrückt, folgendermassen:

$$(33) \quad \begin{aligned} J'_\nu(z) &\sim \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2\mu+2}{3}} [\bar{P}_\mu(\xi) Ai(\xi) + Q_\mu(\xi) Ai'(\xi)] \\ -Y'_\nu(z) &\sim \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2\mu+2}{3}} [\bar{P}_\mu(\xi) Bi(\xi) + Q_\mu(\xi) Bi'(\xi)] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{P}_0(\xi) &= 0 & Q_0(\xi) &= 1 \\ \bar{P}_1(\xi) &= \frac{1}{60}\xi^3 - \frac{1}{10} & Q_1(\xi) &= -\frac{1}{15}\xi \\ \bar{P}_2(\xi) &= \frac{1}{3360}\xi^4 - \frac{1}{60}\xi & Q_2(\xi) &= \frac{1}{7200}\xi^5 - \frac{19}{2520}\xi^2 \\ \bar{P}_3(\xi) &= \frac{1}{1\,296\,000}\xi^8 - \frac{181}{4\,536\,000}\xi^5 - & Q_3(\xi) &= \frac{61}{4\,536\,000}\xi^6 - \frac{283}{226\,800}\xi^3 - \\ & - \frac{103}{25\,200}\xi^2 & & - \frac{23}{12\,600} \\ \bar{P}_4(\xi) &= \frac{1}{7\,257\,600}\xi^9 - \frac{13}{887\,040}\xi^6 - & Q_4(\xi) &= \frac{1}{311\,040\,000}\xi^{10} + \frac{443}{381\,024\,000}\xi^7 - \\ & - \frac{3821}{1\,782\,000}\xi^3 - \frac{947}{2\,772\,000} & & - \frac{1483}{5\,987\,520}\xi^4 - \frac{9809}{8\,316\,000}\xi \end{aligned}$$

oder bei Darstellung durch Drittfunktionen

$$(34) \quad Z'_\nu(z) \sim \frac{2\gamma}{z\sqrt{3}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (2\gamma z)^{-\frac{\mu}{2}} [\bar{S}_\mu(y) \mathfrak{B}_{\frac{1}{3}}(y) + \bar{T}_\mu(y) \mathfrak{B}_{-\frac{2}{3}}(y)]$$

mit

$$\begin{array}{ll}
 \bar{S}_0(y) = 0 & \bar{T}_0(y) = 1 \\
 \bar{S}_1(y) = -\frac{3}{40}y^2 - \frac{1}{5} & \bar{T}_1(y) = -\frac{1}{5}y \\
 \bar{S}_2(y) = -\frac{9}{2240}y^3 - \frac{1}{10}y & \bar{T}_2(y) = -\frac{9}{3200}y^4 - \frac{19}{280}y^2 \\
 \bar{S}_3(y) = \frac{9}{128000}y^6 + \frac{181}{112000}y^4 - & \bar{T}_3(y) = -\frac{183}{224000}y^5 - \frac{283}{8400}y^3 + \\
 \quad -\frac{103}{1400}y^2 & \quad + \frac{23}{1050}y \\
 \bar{S}_4(y) = \frac{27}{716800}y^7 + \frac{351}{197120}y^5 - & \bar{T}_4(y) = \frac{27}{20480000}y^8 - \frac{1329}{6272000}y^6 - \\
 \quad -\frac{3821}{33000}y^3 + \frac{947}{115500}y & \quad -\frac{1483}{73920}y^4 + \frac{9809}{231000}y^2 \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

Die Bedingungen und Bezeichnungen entsprechen durchaus denen für die Entwicklungen (27) und (29).

§ 5.

Es bleibt noch übrig, das Hauptglied der abgeänderten asymptotischen Entwicklung (21) in eine für die Auswertung geeignete Form zu bringen. Zunächst muss man aus dem kubischen Polynom im Exponenten von e das quadratische Glied entfernen. Man kehrt dabei zweckmässig von den Variablen v, ζ zu t, γ zurück, substituiert $z - \frac{1}{10}\gamma = z', \gamma - \frac{1}{200}z'^{-1} = \delta, t + \frac{1}{10}z'^{-1} = T$ und erhält als Hauptglied der rechten Seite von (21) nach leichter Rechnung $z'^{-\frac{1}{3}} \exp\left(\frac{\delta}{10}z'^{-1} + \frac{1}{6000}z'^{-2}\right) \cdot F_2(\delta z'^{-\frac{1}{3}})$; das Restglied ist $O(z^{-\frac{5}{3}})$. Ohne die Grössenordnung des Restes zu erhöhen, lässt sich der gefundene Ausdruck vereinfachen zu

$$\begin{array}{ll}
 J_{z-\gamma}(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{z'}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} Ai(\Xi) + O(z^{-\frac{5}{3}}) & z' = z - \frac{1}{10}\gamma \\
 - Y_{z-\gamma}(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{z'}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} Bi(\Xi) + O(z^{-\frac{5}{3}}) & \text{mit } \Xi = -\gamma \left(\frac{z'}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \\
 Z_{z-\gamma}(z) = \frac{z}{z^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{2\gamma}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{S}_{\frac{1}{3}}(Y) + O(z^{-\frac{5}{3}}) & Y = \frac{(2\gamma)^{\frac{3}{2}}}{3z^{\frac{1}{2}}}
 \end{array}
 \tag{35}$$

Diese Formeln seien als verbesserte Nicholsonformel zusammengefasst. Es gelten sämtliche Bemerkungen über den Geltungsbereich der Nicholsonformel und -reihe, insbesondere die Zuordnungstabellen (30) und (32). Da die linke Seite von der Grössenordnung $O(z^{-\frac{1}{3}})$ und bei der eigentlichen Nicholsonformel (31) der Fehler $= O(z^{-1})$ ist, wird durch Übergang zu (35) die relative Genauigkeit — Nichtverschwinden des Hauptgliedes vorausgesetzt — grössenordnungsmässig quadriert, ohne dass sich dadurch der Rechenaufwand für die zahlenmässige Auswertung wesentlich erhöht. Der entscheidende Vorteil vor der etwa ebenso genauen auf zwei Glieder $\mu = 0$ und 1 beschränkten Nicholsonreihe liegt darin, dass in (35) die Ableitung der Airyfunktion bzw. die Drittfunktion der Ordnung $-\frac{2}{3}$ nicht auftritt, weil die Korrektur im Argument der im Hauptgliede auftretenden Funktion vorgenommen ist.

In dieser Richtung weitergehend, kann man die ganze Nicholsonreihe in das Argument der Airyfunktion oder der Drittfunktion $\mathfrak{J}_1^{\frac{2}{3}}$ hineinschlüpfen lassen; man hat dann dieses Argument und daneben natürlich auch den vor der Funktion stehenden Faktor asymptotisch zu entwickeln.

Um das durchzuführen, bedienen wir uns der handlicheren Darstellung (27) durch Airyfunktionen und sprechen der Einfachheit halber nur von $J_\nu(z)$; für $Y_\nu(z)$ geht alles ganz analog. Die Abhängigkeit der Grössen von ξ wird im folgenden in der Bezeichnung nicht zum Ausdruck gebracht. Für $\left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$ führen wir die Abkürzung η ein. Das Ziel ist dann eine Darstellung der Funktion $\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}} J_\nu(z)$ in der Form $\phi(\eta) \cdot Ai(\xi')$ mit $\xi' = \xi + a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + \dots$. Wird hier der Funktionswert $Ai(\xi')$ durch die Taylorreihe um ξ dargestellt, so lassen sich wie bei der Herleitung von (33) die höheren Ableitungen durch $Ai(\xi)$ und $Ai'(\xi)$ ausdrücken. Man erhält

$$\phi(\eta) \left\{ \left[1 + \frac{a^2}{2} \xi \eta^2 + \left(ab\xi + \frac{a^3}{6} \right) \eta^3 + \dots \right] Ai(\xi) + \left[a\eta + b\eta^2 + \left(c + \frac{a^3}{6} \xi \right) \eta^3 + \dots \right] Ai'(\xi) \right\}$$

und hieraus durch Vergleich mit (27) die beiden Relationen

$$\begin{aligned} \phi(\eta) \left[1 + \frac{a^2}{2} \xi \eta^2 + \dots \right] &= \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu P_\mu \eta^\mu, \\ \phi(\eta) [a\eta + b\eta^2 + \dots] &= \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu Q_\mu \eta^\mu. \end{aligned}$$

In der Determinantenbeziehung

$$\left[1 + \frac{a^2}{2} \xi \eta^2 + \dots \right] \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\mu Q_\mu \eta^\mu \right) - [a\eta + b\eta^2 + \dots] \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu P_\mu \eta^\mu \right) = 0$$

ordnet man nunmehr die linke Seite nach Potenzen von η und setzt die Koeffizienten einzeln gleich 0; das gibt eine Folge von Relationen, aus denen sich a, b, c, \dots der Reihe nach auf ganz-rationalem Wege ergeben, und schliesslich findet man auch für $\phi(\eta)$ eine formale Potenzreihe in η . So entsteht

$$(36) \quad \begin{aligned} J_\nu(z) &\sim \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa p_\kappa(\xi) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2\kappa+1}{3}} \right) Ai \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda q_\lambda(\xi) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2\lambda}{3}} \right) \\ -Y_\nu(z) &\sim \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa p_\kappa(\xi) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2\kappa+1}{3}} \right) Bi \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda q_\lambda(\xi) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2\lambda}{3}} \right). \end{aligned}$$

Dabei bedeuten $p_\kappa(\xi), q_\lambda(\xi)$ die Polynome

$$\begin{array}{ll} p_0(\xi) = 1 & q_0(\xi) = \xi \\ p_1(\xi) = \frac{1}{15} \xi & q_1(\xi) = \frac{1}{60} \xi^2 \\ p_2(\xi) = \frac{13}{1260} \xi^2 & q_2(\xi) = \frac{2}{1575} \xi^3 + \frac{1}{140} \\ p_3(\xi) = \frac{109}{56700} \xi^3 + \frac{1}{900} & q_3(\xi) = \frac{41}{283500} \xi^4 + \frac{4}{1575} \xi \\ p_4(\xi) = \frac{203743}{523\,908\,000} \xi^4 + \frac{6761}{7\,276\,500} \xi & q_4(\xi) = \frac{6553}{327\,442\,500} \xi^5 + \frac{1409}{1\,819\,125} \xi^2 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Die Entwicklungen (36) besagen die Gültigkeit folgender Näherung und Restabschätzung für jedes ganze $m \geq 0$

$$(37) \quad \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}} Z_\nu(z) = \left(\sum_{\kappa=0}^m (-1)^\kappa p_\kappa(\xi) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2\kappa}{3}} \right) \cdot \mathfrak{Ai} \left(\sum_{\lambda=0}^m (-1)^\lambda q_\lambda(\xi) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2\lambda}{3}} \right) + O \left(z^{-\frac{2m+2}{3}} \right),$$

wobei für $Z_\nu(z) = \alpha J_\nu(z) + \beta Y_\nu(z)$ rechts die Airyfunktion $\mathfrak{Ai}(\xi) = \alpha Ai(\xi) - \beta Bi(\xi)$ zu nehmen ist. Dass dies unter den für (27) aufgestellten Voraussetzungen zutrifft, ist leicht zu erkennen: alle oben bei der formalen Herleitung von (36) getanen Schritte sind bei abbrechenden Potenzreihen in η ohne weiteres zulässig, wobei die Grössenordnung des Fehlers jeweils durch die erste nicht mehr berücksichtigte Potenz von $\eta = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$ gegeben wird.

In den in (27) auftretenden Polynomfolgen $P_\mu(\xi), Q_\mu(\xi)$ wächst der Grad jeweils abwechselnd um 1 und um 4, also im Durchschnitt um $\frac{5}{2}$, wenn μ um 1 zunimmt,

dagegen zeigt die obige Zusammenstellung der zu (36) gehörigen Polynome, dass für $\kappa, \lambda \leq 4$ die $p_\kappa(\xi)$ und $q_\lambda(\xi)$ nur den Grad κ bzw. $\lambda+1$ haben. Ob dies allgemein richtig ist, ist allerdings aus unserer Herleitung nicht zu entnehmen; diese ergibt vielmehr den Grad $\frac{5\kappa}{2}$ oder $\frac{5\kappa-3}{2}$ bei geradem bzw. ungeradem κ sowie den Grad $\frac{5\lambda-4}{2}$ oder $\frac{5\lambda-1}{2}$ bei geradem (von 0 verschiedenem) bzw. ungeradem λ , und lediglich die zahlenmässige Berechnung der Koeffizienten zeigt, dass der Grad sich erniedrigt.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich an das Formelpaar (33), (34) für die Ableitung $\frac{d}{dz}Z_\nu(z)$ anschliessen und führen zu einer entsprechenden Darstellung dieser Ableitung in der Gestalt $\bar{\phi} \cdot \mathfrak{A}'(\bar{\xi})$ allein durch die Ableitung der Airyfunktion; das Argument $\bar{\xi}$ ist dabei von dem in (36) auftretenden Argument ξ' von \mathfrak{A} verschieden. Die an die Stelle der $p_\kappa(\xi), q_\lambda(\xi)$ tretenden Ausdrücke sind dann allerdings nicht mehr Polynome in ξ , sondern enthalten negative Potenzen von ξ in endlicher, steigender Anzahl, so dass man genötigt ist, für den Betrag von $\gamma = z - \nu$ eine positive untere Schranke vorzuschreiben. Zumeist wird man eine Entwicklung der Ableitung $Z'_\nu(z)$ nicht ohne eine Entwicklung der Funktion $Z_\nu(z)$ selbst an derselben Argumentstelle z anzuwenden haben; da dann ohnehin die Funktionen \mathfrak{A} und \mathfrak{A}' (oder statt dessen $\mathfrak{J}_{\frac{1}{3}}$ und $\mathfrak{J}_{-\frac{2}{3}}$) beide heranzuziehen sind, bieten Darstellungen nach der Art von (36) keinen besonderen Vorteil mehr vor den früheren Formeln, die \mathfrak{A} und \mathfrak{A}' gleichzeitig und zwar an derselben Argumentstelle ξ enthalten. Von der Aufstellung expliziter Formeln für die Ableitung, die nur \mathfrak{A}' oder nur $\mathfrak{J}_{-\frac{2}{3}}$ enthalten, wurde darum abgesehen.

§ 6.

Die in der Nicholsonformel $Z_\nu(z) \approx \left(\frac{2}{3} \frac{\gamma}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{J}_{\frac{1}{3}}(y)$ auftretende Drittelfunktion hat unendlich viele Nullstellen. Hieraus ergibt sich die Frage, ob jeder Nullstelle der Drittelfunktion Nullstellen der Zylinderfunktion $Z_\nu(z)$ im Bereiche $z - \nu = O(z^{\frac{1}{3}})$ entsprechen. Diese Frage werden wir — bei Beschränkung auf geeignete Winkelräume — bejahen. Eine Behauptung in umgekehrter Richtung ist leicht zu beweisen. Es sei nämlich z_ν eine Nullstelle von $Z_\nu(z) = \alpha J_\nu(z) + \beta Y_\nu(z)$, und es sei möglich, z_ν längs einer im Winkelraume $|\arccos \nu| \leq \pi - \varepsilon$ der ν -Ebene ins Unendliche verlaufenden Kurve als stetige Funktion von ν zu definieren. Wenn dann $z_\nu - \nu = O(\nu^{\frac{1}{3}})$ bleibt, so folgt

aus der Nicholsonschen Näherungsformel (31) unmittelbar, dass sich $y_\nu = \frac{(2(\beta_\nu - \nu))^{\frac{2}{3}}}{3\beta_\nu^{\frac{1}{2}}}$ einer Nullstelle der zugehörigen Drittelfunktion nähert; denn y_ν bleibt beschränkt, während $\beta_\nu \rightarrow 0$ strebt.

Man kann die Relation $Z_\nu(z) = 0$ als Bedingung für ν bei festem (grossem) z oder umgekehrt als Bedingung für z bei festem (grossem) ν ansehen. Die erstere Auffassung, bei der übereinstimmend mit dem in dieser Arbeit eingenommenen Standpunkte z als die unabhängige Veränderliche erscheint, kommt in der Theorie der Beugung einer elektromagnetischen Welle an einer Kugel vor, wobei die Grösse des Arguments der in Betracht kommenden Funktion durch das Hineinspielen des Erdradius im Falle der drahtlosen Telegraphie oder durch die Kleinheit der Wellenlänge im Falle des Regenbogens bedingt ist. Da die andere Auffassung — Bestimmung von Nullstellen einer Zylinderfunktion hoher Ordnung — jedoch näher liegt, soll im folgenden ν als die unabhängige Veränderliche betrachtet werden, nach der asymptotisch entwickelt wird.

Für $\left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$ schreiben wir wieder η und setzen $\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \vartheta$. Dabei wird für die Normierung des Arkus von ϑ der Arkus von ν eindeutig dadurch festgelegt, dass die aus $z - \nu = O(z^{\frac{1}{3}})$ folgende Limesrelation $\frac{z}{\nu} \rightarrow 1$ bezüglich des Arkus zu $\arccos z - \arccos \nu \rightarrow 0$ verschärft wird. Bei dieser Normierung strebt $\frac{\eta}{\vartheta} \rightarrow 1$. Der Definition $\xi = -\gamma \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$ stellen wir die Definition $\tau = -\gamma \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$ gegenüber, so dass $\frac{\xi}{\tau} = \left(\frac{\eta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}}$ wird. ξ und τ werden im folgenden bei dem Grenzübergange $\vartheta \rightarrow 0$ stets beschränkt bleiben.

Zunächst rechnen wir rein formal. Die Beziehung $z = \nu + \gamma$ nimmt die Form an $2\eta^{-\frac{2}{3}} = 2\vartheta^{-\frac{2}{3}} - \tau\vartheta^{-\frac{1}{2}} = 2\vartheta^{-\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{\tau}{2}\vartheta\right)$. Hieraus folgt $\eta = \vartheta \left(1 - \frac{\tau}{2}\vartheta\right)^{-\frac{2}{3}}$, $\xi = \tau \left(1 - \frac{\tau}{2}\vartheta\right)^{-\frac{1}{3}}$. Entwickelt man η und ξ nach Potenzen von ϑ und setzt alles in das Argument $\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda q_\lambda(\xi) \eta^\lambda$ der Airyfunktion in (36) ein, so erscheint dieses in der Form $\varkappa = \sum_{x=0}^{\infty} r_x(\tau) \vartheta^x$, wobei die $r_x(\tau)$ Polynome in τ sind. Wegen $q_0(\xi) = \xi$ ist $r_0(\tau) = \tau$; für $x \geq 1$ ist der Grad des Polynoms $r_x(\tau)$ kleiner als $\frac{5}{2}x$. Durch Umordnen entsteht $\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda(\vartheta) \tau^\lambda$, was sich für $\vartheta = 0$ auf $\varkappa = \tau$ reduziert, so dass die Potenzreihe $c_\lambda(\vartheta)$ das konstante Glied 1, $c_0(\vartheta)$ das konstante Glied 0 hat; für $\lambda \geq 2$ kommen in $c_\lambda(\vartheta)$ nur Potenzen vor, deren Exponent grösser ist als $\frac{2}{3}\lambda$. Durch Reihenumkehrung ent-

wickelt man τ nach Potenzen von $\varkappa - c_0(\vartheta)$; auch hier enthält der Koeffizient des quadratischen, kubischen, ... Gliedes nur ϑ -Potenzen mit ganzzahligen Exponenten, die grösser als $\frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \dots$ sind. Da aber $c_0(\vartheta)$ eine Potenzreihe ohne konstantes Glied ist, kann nachträglich noch nach Potenzen von \varkappa und ϑ umgeordnet werden. So entsteht schliesslich $\tau = \sum_{\lambda=0}^{\infty} s_{\lambda}(\varkappa) \vartheta^{\lambda}$, worin die $s_{\lambda}(\varkappa)$ Polynome in \varkappa sind. Zu ihrer wirklichen Berechnung wird man einfacher die Methode der unbestimmten Koeffizienten anwenden.

Um diesen Rechnungen Sinn zu geben, ersetzen wir \varkappa durch eine Konstante α , nämlich eine Nullstelle der nicht identisch verschwindenden Airyfunktion $\mathfrak{Ai}(\xi)$. Weiterhin wählen wir eine natürliche Zahl m und betrachten anstelle der zuletzt gefundenen formal-unendlichen Entwicklung für τ die lineare Funktion $\bar{\tau}(w) = \sum_{\lambda=0}^m s_{\lambda}(\alpha) \vartheta^{\lambda} + w \vartheta^m$ einer komplexen Hilfsvariablen w ; diese wird von vornherein auf den Kreis $|w| \leq 2$ beschränkt. Ferner werden die Funktionen $\bar{\eta}(w) = \vartheta \left(1 - \frac{\bar{\tau}}{2} \vartheta\right)^{-\frac{2}{3}}$, $\bar{\xi}(w) = \bar{\tau} \left(1 - \frac{\bar{\tau}}{2} \vartheta\right)^{-\frac{1}{3}}$ und schliesslich $\bar{\zeta}(w) = \sum_{\lambda=0}^m (-1)^{\lambda} q_{\lambda}(\bar{\xi}(w)) (\bar{\eta}(w))^{\lambda}$ eingeführt. Dieses $\bar{\zeta}(w)$ ist diejenige Grösse, die in (37) rechts als Argument der Airyfunktion auftritt, falls links $\nu = 2 \vartheta^{-\frac{3}{2}}$ und $z = \nu + \gamma = \nu - \bar{\tau}(w) \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, d. h.

$$(38) \quad z = \nu - \sum_{\lambda=0}^m s_{\lambda}(\alpha) \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-\frac{2\lambda-1}{3}} - w \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-\frac{2m-1}{3}}$$

eingesetzt werden. Da $\bar{\tau}(w)$ bei dem Grenzübergange $\vartheta \rightarrow 0$ beschränkt bleibt, konvergieren für hinreichend kleines ϑ die Binomialreihen für die Bruchpotenzen von $\left(1 - \frac{\bar{\tau}}{2} \vartheta\right)$. Bei festem w ist dann

$$\bar{\tau}(w) - \bar{\tau}(0) = w \vartheta^m, \quad \bar{\eta}(w) - \bar{\eta}(0) = O(\vartheta^{m+1}), \quad \bar{\xi}(w) - \bar{\xi}(0) = w \vartheta^m + O(\vartheta^{m+1})$$

und schliesslich wegen $q_0(\bar{\xi}) = \bar{\xi}$ auch $\bar{\zeta}(w) - \bar{\zeta}(0) = w \vartheta^m + O(\vartheta^{m+1})$. All diese Restabschätzungen gelten gleichmässig für $|w| \leq 2$.

Da nun $\bar{\tau}(0) = \sum_{\lambda=0}^m s_{\lambda}(\alpha) \vartheta^{\lambda}$ bis auf Glieder der Grössenordnung ϑ^{m+1} mit der früheren formalen Reihe $\tau = \sum_{\lambda=0}^{\infty} s_{\lambda}(\varkappa) \vartheta^{\lambda}$ übereinstimmt, sofern darin $\varkappa = \alpha$ gesetzt wird, so findet man, indem die früheren Rechnungen nun mit abgebrochenen Potenzreihen umgekehrt durchlaufen werden,

$$\alpha = \sum_{\kappa=0}^m r_{\kappa}(\bar{\tau}(0)) \vartheta^{\kappa} + O(\vartheta^{m+1}) = \sum_{\lambda=0}^m (-1)^{\lambda} q_{\lambda}(\bar{\xi}(0)) \bar{r}_{\lambda}(0)^{\lambda} + O(\vartheta^{m+1}),$$

d. h. $\alpha = \bar{\gamma}(0) + O(\vartheta^{m+1})$ und schliesslich in Verbindung mit der früheren Abschätzung von $\bar{\gamma}(w) - \bar{\gamma}(0)$ noch $\bar{\gamma}(w) = \alpha + w \vartheta^m + O(\vartheta^{m+1})$, gleichmässig für alle $|w| \leq 2$. Der Funktionswert der Airyfunktion auf der rechten Seite von (37) wird daher

$$\mathfrak{Ai}(\alpha + w \vartheta^m + O(\vartheta^{m+1})) = \mathfrak{Ai}(\alpha) + w \vartheta^m \mathfrak{Ai}'(\alpha) + O(\vartheta^{m+1}).$$

Nun ist $\mathfrak{Ai}(\alpha) = 0$ vorausgesetzt; daher kann $\mathfrak{Ai}'(\alpha)$ nicht verschwinden, weil andernfalls aus der Differentialgleichung $\mathfrak{Ai}''(\xi) = \xi \mathfrak{Ai}(\xi)$ das Verschwinden aller Ableitungen an der Stelle α folgte. Aus (36 a) ergibt sich dann, wenn $Z_{\nu}(z)$ und $\mathfrak{Ai}(\xi)$ einander zugeordnet sind,

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}} Z_{\nu}(z) = \left(\sum_{\kappa=0}^m (-1)^{\kappa} p_{\kappa}(\xi) \eta^{\kappa}\right) (w \vartheta^m \mathfrak{Ai}'(\alpha) + O(\vartheta^{m+1})) + O(\vartheta^{m+1}).$$

Hierin ist der erste Faktor rechts gleich $1 + O(\vartheta)$ und der erste Faktor links gleich $\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{1}{3}} (1 + O(\vartheta))$. Es folgt

$$(39) \quad \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{2m+1}{3}} Z_{\nu}(z)}{\mathfrak{Ai}'(\alpha)} = w + O(\vartheta),$$

wobei w mit z durch (38) zusammenhängt. Den für $|w|=1$ entstehenden Kreis der z -Ebene nennen wir \mathfrak{K}_m und nehmen $|\nu|$ von vornherein so gross an, dass der Punkt $z=0$ ausserhalb \mathfrak{K}_m liegt und überdies das Restglied $O(\vartheta)$ in (39) für alle $|w| \leq 1$ dem Betrage nach kleiner als 1 ist. Dann folgt nach dem Satze von Rouché, angewandt auf den Kreis $|w|=1$, dass die linke Seite von (39) als Funktion von w , weil für $|w| \leq 1$ regulär, im Inneren $|w| < 1$ ebensoviele Nullstellen wie die Funktion w selbst hat, also genau eine. Also hat $Z_{\nu}(z)$ genau eine Nullstelle in \mathfrak{K}_m ; diese bezeichnen wir für $m=1$ mit $\mathfrak{z}_{\nu n}$, für $m \geq 2$ für den Augenblick mit $\mathfrak{z}_{\nu n}^{(m)}$; der zweite untere Index n soll andeuten, dass für α die n te der irgendwie geordneten Nullstellen von $\mathfrak{Ai}(\xi)$ gewählt wurde.

Ist nun M eine natürliche Zahl ≥ 2 , so kann $|\nu|$ so gross gewählt werden, dass nicht nur alle bisherigen Aussagen für $1 \leq m \leq M$ gelten, sondern auch die Kreise $\mathfrak{K}_2, \dots, \mathfrak{K}_M$ sämtlich in \mathfrak{K}_1 enthalten sind. Es ist dann klar, dass $\mathfrak{z}_{\nu n}^{(m)}$ für $m=2, \dots, M$ mit $\mathfrak{z}_{\nu n}$ zusammenfällt, da ja in \mathfrak{K}_1 nur diese eine Nullstelle vorhanden ist. Es gilt daher, wenn $m=p+1$ gesetzt und dann statt p wieder m geschrieben wird,

$$\mathfrak{z}_{\nu n} = \nu - \sum_{\lambda=0}^{m+1} s_{\lambda}(\alpha_n) \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-\frac{2\lambda-1}{3}} + O\left(\nu^{-\frac{2m+1}{3}}\right) = \nu - \sum_{\lambda=0}^m s_{\lambda}(\alpha_n) \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-\frac{2\lambda-1}{3}} + O\left(\nu^{-\frac{2m+1}{3}}\right)$$

für $m=0, 1, \dots, M-1$, also, da M beliebig war, für alle $m \geq 0$.

Ist also α_n die n te Nullstelle von $\mathfrak{A}i(\xi) = \alpha Ai(\xi) - \beta Bi(\xi)$, so ist ihr für alle ν von hinreichend grossem Betrage, die in dem Winkelraume $|\arccos \nu| \leq \pi - \varepsilon$ gelegen sind, eindeutig eine Nullstelle $\mathfrak{z}_{\nu n}$ von $Z_{\nu}(z) = \alpha J_{\nu}(z) + \beta Y_{\nu}(z)$ zugeordnet, und diese besitzt die asymptotische Entwicklung

$$(40 a) \quad \mathfrak{z}_{\nu n} \sim \nu - \sum_{\lambda=0}^{\infty} s_{\lambda}(\alpha_n) \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-\frac{2\lambda-1}{3}}$$

mit

$$s_0(\alpha) = \alpha, \quad s_1(\alpha) = -\frac{3\alpha^2}{20}, \quad s_2(\alpha) = -\frac{\alpha^3 + 10}{1400},$$

$$s_3(\alpha) = \frac{479\alpha^4 - 40\alpha}{504000}, \quad s_4(\alpha) = \frac{20231\alpha^5 + 55100\alpha^2}{129360000}, \dots$$

Selbstverständlich kann man statt einer Nullstelle $\alpha = \alpha_n$ der Airyfunktion $\mathfrak{A}i(\xi)$ auch die entsprechende Nullstelle \mathfrak{b}_n derjenigen Drittfunktion $\mathfrak{Z}_{\frac{1}{3}}$ verwenden, die laut Tabelle (30) der Zylinderfunktion $Z_{\nu}(z)$ zugeordnet ist. Es gilt $-\alpha_n = \left(\frac{3}{2}\mathfrak{b}_n\right)^{\frac{2}{3}}$ oder umgekehrt $\mathfrak{b}_n^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}(-\alpha_n)^{\frac{1}{2}}$, wobei $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ den positiven Wert bedeutet. Dadurch gewinnt, falls $\mathfrak{b}_n \neq 0$ ist — sonst wäre (40 a) mit $\alpha_n = 0$ zu verwenden —, die asymptotische Entwicklung die Gestalt

$$(40 b) \quad \mathfrak{z}_{\nu n} \sim \nu + \sum_{\lambda=0}^{\infty} t_{\lambda}(\mathfrak{b}_n) \left(\frac{\nu}{3\mathfrak{b}_n}\right)^{-\frac{2\lambda-1}{3}}$$

mit

$$t_0(\mathfrak{b}) = \frac{3\mathfrak{b}}{2}, \quad t_1(\mathfrak{b}) = \frac{9\mathfrak{b}}{40}, \quad t_2(\mathfrak{b}) = -\frac{9\mathfrak{b} - 40\mathfrak{b}^{-1}}{8400},$$

$$t_3(\mathfrak{b}) = -\frac{4311\mathfrak{b} + 160\mathfrak{b}^{-1}}{3024000}, \quad t_4(\mathfrak{b}) = \frac{182079\mathfrak{b} - 220400\mathfrak{b}^{-1}}{776160000}, \dots$$

Zwei entgegengesetzt gleiche, im Arkus um 3π verschiedene Nullstellen der Drittfunktion $\mathfrak{Z}_{\frac{1}{3}}$ führen, wie leicht zu sehen, zu derselben asymptotischen Entwicklung für $\mathfrak{z}_{\nu n}$.

Handelt es sich insbesondere um die Besselfunktion $J_{\nu}(z)$, so ist $\mathfrak{A}i(\xi)$ mit $Ai(\xi)$ identisch. Die erste Nullstelle dieser Airyfunktion ist $\alpha_1 = -2,3381074$ (was übrigens von $-\frac{1}{2}\sqrt[5]{2236} = -2,3381069$ kaum verschieden ist). Als erste Nullstelle der zugehörigen

Drittelfunktion $\frac{1}{\sqrt{3}}(J_{\frac{1}{3}}(y) + J_{-\frac{1}{3}}(y))$ kann $\delta_1 = 2,3834466$ (vom Arkus 0) genommen werden. Beides führt zu der Entwicklung

$j_{v_1} \sim v + 1,855757 v^{\frac{1}{3}} + 1,033150 v^{-\frac{1}{3}} - 0,00397405 v^{-1} - 0,0907627 v^{-\frac{5}{3}} + 0,0433385 v^{-\frac{7}{3}} \dots$,
gültig für komplexe $|v| \rightarrow \infty$ mit $|\operatorname{arc} v| \leq \pi - \varepsilon$.

Der Fall $v \rightarrow -\infty$ wird hiernach nicht erfasst. Bei diesem Grenzübergang zeigt die erste oder die zweite, dritte, ... Nullstelle von $J_\nu(z)$ kein so einfaches Verhalten, wenn man kontinuierlich veränderliches ν zulässt. Das erkennt man bei reellem ν schon daraus, dass eine positive Nullstelle j von $J_\nu(z)$, die bei negativem, kontinuierlich abnehmendem ν als stetige Funktion von ν erklärt ist, ihrerseits monoton abnimmt¹ und daher für $\nu \rightarrow -\infty$ gewiss nicht gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt. Eine asymptotische Entwicklung von dem Typ der Formel (40 a) ist demnach unmöglich. Man muss sich darauf beschränken, ν nur eine Folge von Werten der konstanten Differenz -1 durchlaufen zu lassen, so dass bei festem ν_0 , das nicht reell zu sein braucht, $\nu = \nu_0 - k$ gesetzt werden darf, wo k die natürlichen Zahlen durchläuft. Da die Nullstellen der Besselfunktionen paarweise spiegelbildlich zum Nullpunkte liegen, handelt es sich darum, für $p = k - \nu_0$ die im Bereiche $z - p = O(p^{\frac{1}{3}})$ gelegenen Nullstellen von $J_{-p}(z)$ zu untersuchen, wobei p gegen $+\infty$ strebt. Nun ist die Funktion $J_{-p}(z)$, als Zylinderfunktion der Ordnung p betrachtet, in der Form $e^{p\pi i} H_p^{(1)}(z) + e^{-p\pi i} H_p^{(2)}(z) = (-1)^k Z_p(z)$ darstellbar, wo $Z_p = e^{-\nu_0 \pi i} H_p^{(1)}(z) + e^{\nu_0 \pi i} H_p^{(2)}(z)$. Es gibt dann Entwicklungen gemäss (40 a) für die Nullstellen von Z_p bei dem Grenzübergang $p \rightarrow +\infty$ für kontinuierlich veränderliches p , d. h. für die Nullstellen von $J_{\nu_0 - k}$ bei ganzzahlig gegen $+\infty$ strebendem k . Die zugehörige Drittelfunktion ist $\mathfrak{J}_{\frac{1}{3}}(y) = e^{-(\nu_0 - \frac{1}{6})\pi i} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(y) + e^{(\nu_0 - \frac{1}{6})\pi i} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(y)$,

d. h. δ ist durch die Bedingung $\frac{H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(\delta)}{H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(\delta)} = e^{2\pi i (\nu_0 - \frac{1}{6})}$ bestimmt.

Ist insbesondere ν_0 reell, so hat diese Bestimmungsgleichung für δ positive Lösungen, die zu reellen asymptotischen Entwicklungen nach (40 a) führen. Die Bedingung für δ lässt sich dann in der Form schreiben $\operatorname{arc} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(\delta) = (l + \nu_0 + \frac{1}{6})\pi$ mit ganzzahligem l . Diese Gleichung ist, wenn der Arkus auf der linken Seite so wie in den Watsonschen Tafeln normiert wird, dann und nur dann lösbar, wenn $l + \nu_0 \geq -\frac{5}{6}$ ist. Man kann nun zwar ν_0 innerhalb gewisser Grenzen kontinuierlich verändern, aber dann ändert sich auch δ , und eine asymptotische Entwicklung im bisherigen Sinne kommt nicht zustande.

¹ Vgl. G. N. WATSON, a. a. O. S. 508.

Überdies verhindert es die zuletzt angegebene Ungleichung, ν_0 gegen $-\infty$ streben zu lassen. Es muss also bei der Betrachtung diskontinuierlicher ν -Folgen verbleiben.

Zur Zylinderfunktion $H_\nu^{(2)}(z)$ gehört $\Re i(\xi) = Ai(\xi) + i Bi(\xi) = 2 e^{\frac{\pi i}{3}} Ai(\xi e^{-\frac{2\pi i}{3}})$ oder $\mathfrak{J}_\frac{1}{3}(y) = e^{-\frac{\pi i}{6}} H_\frac{1}{3}^{(2)}(y)$. Die jetzt massgebenden Nullstellen α_n bzw. δ_n unterscheiden sich also von den für die Besselfunktion $J_\nu(z)$ zu verwendenden nur im Arkus. Die ersten Nullstellen sind $\alpha_1 = 2,3381074 e^{-\frac{\pi i}{3}}$ bzw. $\delta_1 = 2,3834466 e^{-2\pi i}$. Bei dieser Normierung von δ mit Arkus $-2\pi i$ sind die $t_\lambda(\delta)$ von den zu $J_\nu(z)$ gehörenden nicht verschieden, und nur bei den Drittelpotenzen macht sich der geänderte Arkus bemerkbar. Für $H_\nu^{(2)}(z)$ gilt (40) sogar im Winkelraume $-2\pi + \varepsilon \leq \text{arc } \nu \leq \pi - \varepsilon$, der bei kleinem ε einen Teil der ν -Ebene doppelt überdeckt. Obwohl nun die Zylinderfunktionen eindeutige Funktionen ihrer Ordnung ν sind, ist die doppelte Überdeckung, die übrigens zu zwei verschiedenen asymptotischen Entwicklungen (40) für dasselbe ν Anlass gibt, nicht sinnlos; denn die ausdrücklich verwendete Grenzbeziehung $\text{arc } z - \text{arc } \nu \rightarrow 0$ zeigt, dass die Entwicklungen (40) mit verschiedenen Arkus von ν (z. B. $\text{arc } \nu = \frac{\pi}{2}$ und $-\frac{3\pi}{2}$ bei positiv-imaginärem ν) die Nullstellen von $H_\nu^{(2)}(z)$ in zwei verschiedenen Blättern der z -Fläche betreffen.

§ 7

Sämtliche Ergebnisse dieser Arbeit sind Aussagen über das Verhalten der Zylinderfunktionen für den Fall, dass das Argument z und die Ordnung ν innerhalb gewisser Winkelräume gegen ∞ streben und dabei die Differenz $z - \nu = O(z^{\frac{1}{3}})$ bleibt. Setzt man in eine der aufgestellten asymptotischen Entwicklungen für z und ν spezielle Werte ein und bricht die Reihe nach einer geeignet gewählten Anzahl von Gliedern ab, so ist zu erwarten, dass die Summe eine Näherung für den Funktionswert ist, dessen Verhalten für $z \rightarrow \infty$ die Reihe darstellt. Wenn nun auch Abschätzungen über den Rest für endliche z und ν nirgends gegeben sind, so sind doch diese Entwicklungen anhand von Zahlenbeispielen geprüft worden; Ergebnisse solcher Berechnungen sind in den Zahlentafeln 3 bis 6 enthalten.

Zahlentafel 1 enthält, wie bereits erwähnt, die Ausdrücke für die in § 1 definierten Polynome $B_l(x)$ für $l \leq 13$; hierbei sind die Koeffizienten als rationale Zahlen geschrieben. Für praktische Rechnungen sind in Zahlentafel 2 noch die Polynome $\frac{1}{\pi} (-1)^m \Gamma(m + \frac{1}{3}) 6^{m+\frac{1}{3}} B_{3m}(\gamma)$ und $\frac{1}{\pi} (-1)^m \Gamma(m + \frac{2}{3}) 6^{m+\frac{2}{3}} B_{3m+1}(\gamma)$, die in den Formeln (15 c) vorkommen, für $m = 0, 1, 2, 3, 4$ mit dezimaler Schreibweise der Koeffizienten gegeben.

Den weiteren Zahlentafeln sind einige allgemeine Bemerkungen vorzuschicken. Die Beispiele beziehen sich zumeist auf die Ordnung $\nu = 30$. Da in der Nicholsonentwicklung wie auch in der Debyeschen Ausnahmereihe das Argument z als die gross werdende Variable auftritt, wäre es eigentlich angemessener gewesen, einen festen Wert von z zugrunde zu legen, doch würde man sich damit von den Bedürfnissen der Praxis entfernen. Dass durchweg ganzzahlige z und oft ganzzahlige ν zugrundegelegt wurden, ist unwesentlich.

Neben den einzelnen Gliedern der asymptotischen Reihe enthalten die Tafeln noch die Summe der hingeschriebenen Glieder, d. h. den „Näherungswert“, sowie den „wahren Wert“ (WW) des dargestellten Funktionswertes. Diese wahren Werte sind im Rahmen umfangreicher Tabellararbeiten an Besselfunktionen im Institut für Praktische Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt¹ unter Leitung des Verfassers berechnet worden, und zwar durch aufsteigende, auf den Besselfunktionen der Ordnung 0 und 1 gegründete Rekursion. In einigen Fällen, insbesondere bei den Neumannschen Funktionen, stützte sich die Rekursion auf die dem Watsonschen Werke beigegebene Tafel VI der $Z_n(n)$ und $Z'_n(n)$.

Unbedingte Richtigkeit auch der letzten mitgeteilten Ziffer in den Reihengliedern, deren Summen und den wahren Werten wurde nicht angestrebt. Die in den Zahlentafeln etwa ersichtliche Abweichung zwischen Näherungswert und wahren Wert kann, wenn sie nur einige Einheiten der letzten Dezimalen beträgt, ganz oder teilweise in dieser Unsicherheit der Endziffern begründet sein, so dass das vielleicht sehr kleine theoretische Restglied überdeckt würde.

Zahlentafeln 3 und 4 geben Beispiele für die Debyesche Ausnahmereihe (DA) in der besonders zweckmässigen Gestalt (15 c). Verfolgt man den Verlauf des zweiten, dritten, ... Gliedes je für sich, so fällt auf, dass sich die Glieder beiderseits $z = \nu = 30$ lange klein halten, um dann dem Grade des Polynomes entsprechend schnell anzusteigen. So ist bei der verwendeten Gliederzahl, die allerdings erheblichen Rechenaufwand erfordert, für $|z - \nu| \leq 5$ vorzügliche, für $|z - \nu| = 7$ nur noch leidliche Übereinstimmung zwischen Näherungswert und wahren Wert festzustellen. Für $|z - \nu| = 7$ ist bei $\nu = 30$ die Debyesche Hauptreihe (3) mit nur vier Gliedern schon merklich besser als die Ausnahmereihe mit fünf Gliedern.

Zahlentafel 5 zeigt den Grad der Annäherung, der mit der Nicholsonreihe (NR) zu erreichen ist; das erste Glied dieser Reihe ist die Nicholsonformel (NF). Der

¹ Vgl. die Berichte „Tabellierung Besselscher Funktionen“ des Instituts für Praktische Mathematik, Prof. Dr. A. WALTHER, Technische Hochschule Darmstadt, die sich, soweit ganzzahlige Ordnung in Betracht kommt, auf reelle z und ν mit $0 \leq \nu \leq 30$, $0 \leq z \leq 65$ erstrecken.

Fehler der fünfgliedrigen Nicholsonreihe nimmt mit wachsendem $|z - \nu|$ bedeutend langsamer zu als bei der Ausnahmereihe. Die Berechnungen beruhen auf (29), wobei die Funktionswerte der $\mathfrak{J}_{\frac{1}{3}}$ wenigstens für $z > \nu$ dem Watsonschen Werke entnommen, im übrigen aber — ebenso wie die $\mathfrak{J}_{-\frac{2}{3}}$ — eigens errechnet wurden. Die auf S. 280 zitierte Tafel der Airyfunktionen war noch nicht vorhanden, als diese Rechnungen im Jahre 1945 ausgeführt wurden.

Für $z = 65$, $\nu = 30$ sind neun Glieder der Nicholsonreihe gegeben. Die formelmässigen Ausdrücke für die letzten vier sind nicht aufgestellt; diese Glieder wurden vielmehr nach Formel (23) errechnet, wozu die Ableitungen der Funktion $F_2(\zeta)$ an der betreffenden Stelle bis zur vierzigsten benötigt und durch Rekursion gemäss (25) bestimmt wurden. Obwohl die eigentliche Nicholsonformel hier völlig versagt, gelingt es doch, mit der Nicholsonreihe — allerdings mit einem die Möglichkeiten der Praxis weit übersteigenden Arbeitsaufwande — noch Übereinstimmung bis zur siebenten Dezimalstelle zu erzwingen, ohne dass der semikonvergente Charakter der Entwicklung in den berechneten Gliedern in Erscheinung träte.

Dieselbe Zahlentafel enthält auch die durch die verbesserte Nicholsonformel (35) gelieferten Näherungswerte (VN). Diese Formel ist nach der theoretischen Restabschätzung $O(z^{-\frac{5}{3}})$ ebenso gut wie die Summe der beiden ersten Glieder der Nicholsonreihe, tatsächlich aber meist noch etwas besser, was sich wohl aus dem niedrigeren Grade der Polynome $g_\mu(y)$ in § 2 im Vergleich zu den $f_\mu(y)$ erklärt. Selbst für $z = 65$ kann man noch von einer leidlichen Annäherung sprechen.

Ergänzend zu Zahlentafel 5 wurden noch einzelne Vergleichsrechnungen bei komplexem z sowie — für positives z und ν — mit einem bedeutend kleineren ν angestellt. So ergab sich für

$$\nu = \frac{57}{2} = 28,5, \quad z = \frac{247}{16} \sqrt{3} + i \frac{57}{16} = 26,738534 + i 3,562500$$

$H_\nu^{(1)}(z)$		$H_\nu^{(2)}(z)$	
- 0,14726	- i 0,06846	NF + 0,13455	+ i 0,32989
+ 0,00064	- i 0,00318	- 0,00453	- i 0,00138
+ 0,00008	+ i 0,00011	+ 0,00014	- i 0,00028
- 0,00001	- i 0,00000	+ 0,00002	+ i 0,00001
- 0,14655	- i 0,07153	NR + 0,13018	+ i 0,32824
- 0,14656	- i 0,07163	VN + 0,13007	+ i 0,32850
- 0,14655	- i 0,07155	WW + 0,13015	+ i 0,32827

Für die weit voneinander gelegenen reellen Zahlenwerte $\nu = \frac{7}{2} = 3,5$, $z = \frac{7\pi}{2} = 10,995574$ ist, wie die nachstehende Berechnung zeigt, die Nicholsonformel nur zufällig für den Imaginärteil fast völlig genau. Die verbesserte Nicholsonformel gibt ein leidliches, die Nicholsonreihe ein recht gutes Resultat.

$H_\nu^{(2)}(z) :$	NF	+ 0,07108	+ <i>i</i> 0,21080
		+ 0,04807	+ <i>i</i> 0,00381
		+ 0,00774	- <i>i</i> 0,00300
		+ 0,00134	- <i>i</i> 0,00071
		+ 0,00027	- <i>i</i> 0,00012
	NR	+ 0,12850	+ <i>i</i> 0,21078
	VN	+ 0,12394	+ <i>i</i> 0,20901
	WW	+ 0,12858	+ <i>i</i> 0,21077

Die abgewandelte Nicholsonreihe (36) eignet sich weniger zur Darstellung in einer ähnlichen Zahlentafel, weil es kaum sinnvoll wäre, die für die einzelnen Werte von m aus (37) entstehenden Näherungswerte der Reihe nach zu berechnen. Setzt man $m=4$ und verwendet demnach alle bei (36) explizit angegebenen Polynome, so ist die Annäherung im allgemeinen besser als bei der ebenso weit geführten Nicholsonreihe. Als Beispiel in dem Bereiche, wo man keine grössere Genauigkeit mehr erwarten sollte, seien angegeben:

$$\begin{aligned}
 J_{30}(65) &\approx 1,0866827 \cdot Ai(-11,182658) = 0,0575805 \\
 &\quad \text{statt} \quad WW = 0,0576053 \\
 -Y_{30}(65) &\approx 1,0866827 \cdot Bi(-11,182658) = 0,0878664 \\
 &\quad \text{statt} \quad WW = 0,0878680 \\
 J_4(2) &\approx 0,034037 & J_2(4) &\approx 0,364136 \\
 WW &= 0,033996 & WW &= 0,364128 \\
 -Y_4(2) &\approx 2,779241 & Y_2(4) &\approx 0,215953 \\
 WW &= 2,765943 & WW &= 0,215904
 \end{aligned}$$

In Zahlentafel 6 werden für die asymptotische Entwicklung (40) der Nullstellen von Zylinderfunktionen hoher Ordnung Beispiele gegeben, bei denen allerdings die Ordnung ν zumeist keineswegs hoch ist. Trotzdem können die Ergebnisse wohl befriedigen. Unter A sehen wir die mit wachsendem $|\nu|$ zunehmende Genauigkeit der Approximation von $j_{\nu,1}$; die Nummer $n=1$ der Nullstelle ist also festgehalten. Unter B ist umgekehrt $\nu=\frac{7}{2}$ festgehalten und n verändert; die Genauigkeit nimmt dann ab. Dasselbe wird unter C für die Nullstellen der zweiten Hankelfunktion gezeigt. Bei der getroffenen Wahl $\nu=\frac{7}{2}$ ist aus der expliziten Gestalt der Hankelfunktion offenkundig, dass sie überhaupt nur 3 Nullstellen (übereinstimmend in beiden Blättern der Riemannschen Fläche) besitzt. Die wahren Werte der Nullstellen, die durch Auflösung einer kubischen Gleichung in geschlossener Form gewonnen werden können, werden durch (40) mit abnehmender Genauigkeit angenähert; die für $n=4$ angegebene Entwicklung greift ins Leere, da ihr keine Nullstelle mehr entspricht.

ZAHLENTAFEL I

Die Polynome $B_l(x)$, definiert durch $\frac{du}{dt} e^{ux} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l(x) t^l$, falls $\text{Ein } u - u = \frac{1}{6} t^3$.

$$B_0(x) = 1$$

$$B_1(x) = x$$

$$B_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20}$$

$$B_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{15}x$$

$$B_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{280}$$

$$B_5(x) = \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{60}x^3 + \frac{43}{8400}x$$

$$B_6(x) = \frac{1}{720}x^6 - \frac{7}{1440}x^4 + \frac{1}{288}x^2 - \frac{1}{3600}$$

$$B_7(x) = \frac{1}{5040}x^7 - \frac{1}{900}x^5 + \frac{19}{12600}x^3 - \frac{13}{31500}x$$

$$B_8(x) = \frac{1}{40320}x^8 - \frac{1}{4800}x^6 + \frac{1}{2100}x^4 - \frac{59}{201600}x^2 + \frac{387}{17248000}$$

$$B_9(x) = \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{30240}x^7 + \frac{71}{604800}x^5 - \frac{121}{907200}x^3 + \frac{7939}{232848000}x$$

$$B_{10}(x) = \frac{1}{3628800}x^{10} - \frac{11}{2419200}x^8 + \frac{143}{6048000}x^6 - \frac{803}{18144000}x^4 + \frac{43}{1728000}x^2 - \frac{1213}{655200000}$$

$$B_{11}(x) = \frac{1}{39916800}x^{11} - \frac{1}{1814400}x^9 + \frac{17}{4233600}x^7 - \frac{13}{1134000}x^5 + \frac{32731}{2794176000}x^3 - \frac{327}{114400000}x$$

$$B_{12}(x) = \frac{1}{479001600}x^{12} - \frac{13}{217728000}x^{10} + \frac{299}{508032000}x^8 - \frac{377}{155520000}x^6 + \frac{337207}{83825280000}x^4 -$$

$$- \frac{59503}{27941760000}x^2 + \frac{151439}{977961600000}$$

$$B_{13}(x) = \frac{1}{6227020800}x^{13} - \frac{1}{171072000}x^{11} + \frac{11}{145152000}x^9 - \frac{47}{108864000}x^7 + \frac{25853}{23950080000}x^5 -$$

$$- \frac{266303}{259459200000}x^3 + \frac{169039}{698544000000}x$$

.....

ZAHLENTAFEL 2

Die in der Debyeschen Ausnahmereihe (15 c) für $\sqrt{3} J_\nu(z) \mp Y_\nu(z)$ auftretenden Polynome.

$$\frac{(-1)^m}{\pi} \Gamma\left(m + \frac{1}{3}\right) 6^{m + \frac{1}{3}} B_{3m}(\gamma)$$

0	1,5495180
1	- 0,5165060 $\gamma^3 + 0,2066024 \gamma$
2	0,03443373 $\gamma^6 - 0,1205181 \gamma^4 + 0,08608433 \gamma^2 - 0,0^26886747$
3	- 0,0^39564926 $\gamma^9 + 0,01147791 \gamma^7 - 0,04074658 \gamma^5 + 0,04629424 \gamma^3 - 0,01183417 \gamma$
4	0,0^41449231 $\gamma^{12} - 0,0^34144801 \gamma^{10} + 0,0^24085590 \gamma^8 - 0,01682789 \gamma^6 + 0,02792519 \gamma^4 -$ - 0,01478290 $\gamma^2 + 0,0^21074956$
.....	

$$\frac{(-1)^m}{\pi} \Gamma\left(m + \frac{2}{3}\right) 6^{m + \frac{2}{3}} B_{3m+1}(\gamma)$$

0	1,4232268 γ
1	- 0,2372045 $\gamma^4 + 0,2372045 \gamma^2 - 0,02033181$
2	0,01129545 $\gamma^7 - 0,06325452 \gamma^5 + 0,08584543 \gamma^3 - 0,02349454 \gamma$
3	- 0,0^32510100 $\gamma^{10} + 0,0^24141665 \gamma^8 - 0,02153666 \gamma^6 + 0,04031221 \gamma^4 - 0,02266620 \gamma^2 +$ + 0,0^21686324
4	0,0^53218077 $\gamma^{13} - 0,0^31171380 \gamma^{11} + 0,0^21518611 \gamma^9 - 0,0^28651478 \gamma^7 + 0,02163121 \gamma^5 -$ - 0,02056761 $\gamma^3 + 0,0^24849198 \gamma$
.....	

ZAHLENTAFEL 3

Beispiele für die Berechnung von $\sqrt{3} J_\nu(z) - Y_\nu(z)$ für $\nu=30$, $20 \leq z \leq 40$ mit der Debyeschen Ausnahmereihe (DA), Formel (15 c).

$z=20$	$z=23$	$z=26$	$z=29$
0,570 8	0,544 8631	0,523 0448	0,504 3483
+ 9,476 1	+ 2,686 4118	+ 0,418 4360	+ 0,003 4783
+ 30,611 6	+ 2,503 2753	+ 0,055 7055	- 0,000 0027
+ 38,946 7	+ 0,861 6550	+ 0,001 9492	- 0,000 0001
+ 24,727 9	+ 0,132 1274	+ 0,000 0105	+ 0,000 0000
104,333 1	6,728 3326	DA 0,999 1460	0,507 8238
114,978 3	6,737 782	WW 0,999 1461	0,507 8239
$z=30$	$z=31$	$z=32$	$z=33$
0,498 6811	0,493 2601	0,488 0676	0,483 0870
0	- 0,003 1823	- 0,036 6051	- 0,125 8955
- 0,000 0025	- 0,000 0023	+ 0,000 1885	+ 0,004 6115
0	+ 0,000 0000	+ 0,000 0002	- 0,000 0209
+ 0,000 0000	+ 0,000 0000	+ 0,000 0000	+ 0,000 0000
0,498 6786	0,490 0755	DA 0,451 6512	0,361 7821
0,498 6787	0,490 0755	WW 0,451 6511	0,361 7820
$z=34$	$z=35$	$z=37$	$z=40$
0,478 3035	0,473 7042	0,465 0105	0,453 0819
- 0,292 6091	- 0,554 9107	- 1,425 1950	- 3,760 5812
+ 0,029 7887	+ 0,116 0075	+ 0,825 5370	+ 6,074 1298
- 0,000 7971	- 0,007 7937	- 0,176 6393	- 3,864 0097
+ 0,000 0033	+ 0,000 1712	+ 0,016 8373	+ 1,226 6636
0,214 6893	0,027 1785	DA - 0,294 4495	0,129 2844
0,214 6896	0,027 1785	WW - 0,295 1651	- 0,065 5678

ZAHLENTAFEL 4

Beispiele für die Berechnung von $\sqrt{3} J_\nu(z) + Y_\nu(z)$ für $\nu=30$, $20 \leq z \leq 40$ mit der Debyeschen Ausnahmereihe (DA), Formel (15 c).

$z=20$	$z=23$	$z=26$	$z=29$
- 1,931 6	- 1,231 8380	- 0,648 6624	- 0,150 7794
- 15,936 0	- 2,999 3669	- 0,249 5746	- 0,000 0743
- 36,208 5	- 1,932 6356	- 0,021 1859	- 0,000 0013
- 35,916 3	- 0,502 6986	- 0,000 4540	+ 0,000 0000
- 18,577 8	- 0,059 5118	- 0,000 0005	+ 0,000 0000
- 108,570 2	- 6,726 0509	DA - 0,919 8774	- 0,150 8550
- 114,977 9	- 6,729 226	WW - 0,919 8773	- 0,150 8551
$z=30$	$z=31$	$z=32$	$z=33$
0	0,144 2224	0,282 4040	0,415 0046
- 0,000 0702	- 0,000 0665	- 0,008 8882	- 0,050 3635
0	+ 0,000 0011	+ 0,000 0060	+ 0,001 0335
+ 0,000 0000	+ 0,000 0000	- 0,000 0001	- 0,000 0008
0	+ 0,000 0000	+ 0,000 0000	+ 0,000 0000
- 0,000 0702	0,144 1570	DA 0,273 5217	0,365 6738
- 0,000 0701	0,144 1569	WW 0,273 5215	0,365 6738
$z=34$	$z=35$	$z=37$	$z=40$
0,542 4353	0,665 0670	0,897 2313	1,216 8420
- 0,159 5967	- 0,380 0926	- 1,358 0218	- 5,019 5183
+ 0,010 3601	+ 0,053 0542	+ 0,543 9428	+ 5,702 4883
- 0,000 1698	- 0,002 4966	- 0,087 9502	- 2,828 2354
+ 0,000 0001	+ 0,000 0351	+ 0,006 4723	+ 0,731 4570
0,393 0290	0,335 5671	DA 0,001 6744	- 0,196 9664
0,393 0292	0,335 5673	WW 0,001 4667	- 0,294 9968

ZAHLENTAFEL 5

Beispiele für die Berechnung von $H_\nu^{(2)}(z)$ für $\nu = 30$, $15 \leq z \leq 65$ mit der

Nicholsonischen Näherungsformel (NF), Formel (4)
 Nicholsonreihe (NR), Formel (29)
 Verbesserten Nicholsonformel (VN), Formel (35)
 Wahrer Wert (WW).

$z = 15$					$z = 20$				
0,0°062	1858	+i	241 381,9	NF	0,0°112	4272	+i	141,7929	
+0,0°036	1845	-i	200 791,3		+0,0°011	6855	-i	32,4499	
+0,0°005	3207	+i	118 802,0		-0,0°000	1009	+i	6,8162	
+0,0°000	0603	-i	61 612,7		+0,0°000	0037	-i	1,4351	
-0,0°000	0050	+i	30 037,0		-0,0°000	0002	+i	0,3099	
0,0°103	7463	+i	127 816,9	NR	0,0°124	0153	+i	115,0340	
0,0°106	5810	+i	110 981,3	VN	0,0°124	1831	+i	113,6384	
0,0°103	7471	+i	118 134,2	WW	0,0°124	0154	+i	114,9781	
$z = 23$					$z = 26$				
0,0°242	8586	+i	7,349 118	NF	0,0230	6564	+i	0,987 6853	
+0,0°004	1596	-i	0,683 487		-0,0001	8646	-i	0,029 7599	
-0,0°000	0402	+i	0,076 245		+0,0000	0375	+i	0,001 7007	
-0,0°000	0011	-i	0,009 488		+0,0000	0004	-i	0,000 1245	
+0,0°000	0001	+i	0,001 291		-0,0000	0001	+i	0,000 0108	
0,0°246	9768	+i	6,733 679	NR	0,0228	8296	+i	0,959 5124	
0,0°246	8901	+i	6,708 500	VN	0,0228	8029	+i	0,958 6294	
0,0°246	9771	+i	6,733 504	WW	0,0228	8293	+i	0,959 5117	
$z = 29$					$z = 30$				
0,103	4933	+i	0,330 9030	NF	0,143	9568	+i	0,249 3406	
-0,000	4305	-i	0,001 6201		0			0	
-0,000	0148	+i	0,000 0596		-0,000	0203	+i	0,000 0351	
-0,000	0001	-i	0,000 0030		-0,000	0007	-i	0,000 0013	
+0,000	0000	+i	0,000 0000		0			0	
0,103	0479	+i	0,329 3395	NR	0,143	9358	+i	0,249 3744	
0,103	0645	+i	0,329 2897	VN	0,143	9568	+i	0,249 3406	
0,103	0480	+i	0,329 3395	WW	0,143	9359	+i	0,249 3744	
$z = 31$					$z = 32$				
0,182	2739	+i	0,172 2596	NF	0,207	5126	+i	0,088 6461	
+0,000	8229	+i	0,000 6567		+0,001	8004	+i	0,000 3697	
-0,000	0086	+i	0,000 0427		+0,000	0269	+i	0,000 0472	
-0,000	0012	+i	0,000 0005		-0,000	0004	+i	0,000 0019	
+0,000	0000	+i	0,000 0000		+0,000	0000	+i	0,000 0000	
0,183	0870	+i	0,172 9595	NR	0,209	3395	+i	0,039 0649	
0,183	1001	+i	0,172 9183	VN	0,209	3264	+i	0,089 0162	
0,183	0871	+i	0,172 9593	WW	0,209	3393	+i	0,089 0648	

(Fortsetzung von Zahlentafel 5.)

$z = 33$				$z = 34$			
0,207 5399	-i	0,001 1085	NF	0,173 4445	-i	0,086 4759	
+0,002 3844	-i	0,000 8578		+0,001 8953	-i	0,002 6384	
+0,000 0720	+i	0,000 0179		+0,000 0884	-i	0,000 0557	
+0,000 0020	+i	0,000 0024		+0,000 0047	-i	0,000 0002	
+0,000 0000	+i	0,000 0002		+0,000 0002	+i	0,000 0002	
0,209 9983	-i	0,001 9458	NR	0,175 4331	-i	0,089 1700	
0,209 9472	-i	0,001 9819	VN	0,175 3527	-i	0,089 1614	
0,209 9984	-i	0,001 9459	WW	0,175 4333	-i	0,089 1698	
$z = 35$				$z = 37$			
0,104 7400	-i	0,149 9982	NF	-0,078 6226	-i	0,146 9201	
-0,000 0604	-i	0,004 0482		-0,005 8830	-i	0,001 3329	
+0,000 0310	-i	0,000 1424		-0,000 2639	-i	0,000 0553	
+0,000 0043	-i	0,000 0057		-0,000 0135	-i	0,000 0066	
+0,000 0004	-i	0,000 0001		-0,000 0007	-i	0,000 0007	
0,104 7153	-i	0,154 1946	NR	-0,084 7837	-i	0,148 3156	
0,104 6448	-i	0,154 1169	VN	-0,084 6710	-i	0,148 1876	
0,104 7157	-i	0,154 1944	WW	-0,084 7834	-i	0,148 3159	
$z = 40$				$z = 45$			
-0,107 2730	+i	0,104 5672	NF	0,061 0864	-i	0,116 5221	
+0,002 8238	+i	0,009 6111		-0,013 3265	-i	0,013 1783	
+0,000 3392	+i	0,000 4995		-0,001 7829	-i	0,000 2020	
+0,000 0229	+i	0,000 0338		-0,000 1614	+i	0,000 0347	
+0,000 0013	+i	0,000 0028		-0,000 0148	+i	0,000 0051	
-0,104 0858	+i	0,114 7144	NR	0,045 8008	-i	0,129 8626	
-0,104 0287	+i	0,114 4022	VN	0,046 1799	-i	0,129 2593	
-0,104 0860	+i	0,114 7145	WW	0,045 7995	-i	0,129 8622	
$z = 55$				$z = 65$			
-0,090 5062	-i	0,062 8106	NF	-0,013 1774	+i	0,096 2451	
-0,027 8339	+i	0,029 1270		+0,061 8645	+i	0,015 0700	
+0,002 2438	+i	0,007 8153		+0,012 2838	-i	0,018 0478	
+0,001 1136	+i	0,000 6708		-0,002 0616	-i	0,005 0531	
+0,000 1886	+i	0,000 0018		-0,001 0616	-i	0,000 4346	
				-0,000 2114	+i	0,000 0540	
				-0,000 0284	+i	0,000 0270	
				-0,000 0027	+i	0,000 0062	
				-0,000 0001	+i	0,000 0012	
-0,114 7941	-i	0,025 1957	NR	0,057 6051	+i	0,087 8680	
-0,113 6178	-i	0,026 9173	VN	0,053 8349	+i	0,089 4272	
-0,114 7660	-i	0,025 2073	WW	0,057 6053	+i	0,087 8680	

ZAHLENTAFEL 6

Beispiele für die Berechnung von Nullstellen $j_{\nu,n}$ der Zylinderfunktionen nach Formel (40 a) oder (40 b).

A. Die erste Nullstelle $j_{\nu,1}$ von Besselfunktionen $J_{\nu}(z)$ positiver Ordnung

$\nu=2$	$\nu=\frac{7}{2}$	$\nu=30$
2,0000	3,500 000	30,000 000
+ 2,3381	+ 2,817 586	+ 5,766 268
+ 0,8200	+ 0,680 467	+ 0,332 498
- 0,0020	- 0,001 135	- 0,000 132
- 0,0286	- 0,011 249	- 0,000 313
+ 0,0086	+ 0,002 330	+ 0,000 015
NW: 5,1361	6,987 999	36,098 336
WW: 5,1356	6,987 932	36,098 34

B. Die ersten vier Nullstellen $j_{\frac{7}{2},n}$ von $J_{\frac{7}{2}}(z)$

$j_{\frac{7}{2},1}$	$j_{\frac{7}{2},2}$	$j_{\frac{7}{2},3}$	$j_{\frac{7}{2},4}$
3,500 000	3,50000	3,5000	3,500
+ 2,817 586	+ 4,92627	+ 6,6527	+ 8,178
+ 0,680 467	+ 2,08013	+ 3,7936	+ 5,733
- 0,001 135	- 0,02380	- 0,0646	- 0,124
- 0,011 249	- 0,10457	- 0,3475	- 0,793
+ 0,002 330	+ 0,04645	+ 0,2138	+ 0,604
NW: 6,987 999	10,42448	13,7480	17,098
WW: 6,987 932	10,41712	13,69802	16,92362

C. Die ersten Nullstellen $h_{\frac{7}{2},n}^{(2)}$ von $H_{\frac{7}{2}}^{(2)}(z)$

$h_{\frac{7}{2},1}^{(2)}$		$h_{\frac{7}{2},2}^{(2)}$	
3,500 000		3,50000	
- 1,408 793	+ i 2,440 101	- 2,46314	+ i 4,26627
- 0,340 234	- i 0,589 302	- 1,04006	- i 1,80145
- 0,001 135		- 0,02380	
+ 0,005 625	- i 0,009 742	+ 0,05228	- i 0,09056
- 0,001 165	- i 0,002 018	- 0,02322	- i 0,04023
NW: 1,754 298	+ i 1,839 039	0,00206	+ i 2,33403
WW: 1,754 381	+ i 1,838 907	0	+ i 2,32219
$h_{\frac{7}{2},3}^{(2)}$		$h_{\frac{7}{2},4}^{(2)}$	
3,5000		3,500	
- 3,3263	+ i 5,7614	- 4,089	+ i 7,082
- 1,8968	- i 3,2853	- 2,867	- i 4,965
- 0,0646		- 0,124	
+ 0,1738	- i 0,3010	+ 0,397	- i 0,687
- 0,1069	- i 0,1851	- 0,302	- i 0,523
NW: - 1,7208	+ i 1,9900	(- 3,49	+ i 0,91)
WW: - 1,7544	+ i 1,8389	entfällt	